UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

FORMULACION DEL MODELO MATEMATICO UTILIZANDO ECUACIONES DIFERENCIALES VECTORIALES DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICENTES MATRICIALES EN LA VIBRACION DE EDIFICIOS

TESIS

PRESENTADO POR:

PERCY IVAN CHAMBI CALLA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PUNO – PERÚ

2018

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"FORMULACION DEL MODELO MATEMATICO UTILIZANDO ECUACIONES DIFERENCIALES VECTORIALES DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES MATRICIALES EN LA VIBRACION DE EDIFICIOS"

TESIS PRESENTADO POR:

PERCY IVAN CHAMBI CALLA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO Facultad de Ingeniería Civil y Arquitectura DIRECCIÓN DE UNIDAD DE INVESTIGACIÓN UNA - PUNO

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

FECHA DE SUSTENTACION: 13 DE JULIO DEL 2018.

APROBADO POR EL JURADO REVISOR CONFORMADO POR:

PRESIDENTE : ....

M. Sc. MARTIN CONDORI CONCHA

PRIMER MIEMBRO : ....

Lic. FAUSTINO MURILLO MAMANI

SEGUNDO MIEMBRO : ....

Lic. EULALIA RAMOS CHURA

DIRECTOR DE TESIS : ....

Lic. NOEMI GIOVANNA ALARCON CARDENAS

TEMA: ECUACIONES DIFERENCIALES VECTORIALES
ÁREA: MATEMÁTICAS
LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: MATEMÁTICA APLICADA

DEDICATORIA

A mi querido papá Pedro Chambi Apaza quien con todas sus enseñanzas y consejos, me llevo alcanzar mis metas, por darme apoyo en cada momento de mi avance, y a mi mamita Roberta Calla de Chambi quien con todo su amor me impulso a seguir adelante y superar los obstáculos que se presentan en la vida.

A todos mis hermanos Fredy Javier, Diana Ruth y Fiorela Yeiseth Chambi Calla quienes siempre estuvieron pendientes y que me apoyaron en forma incondicional en mis avances en el ámbito personal y profesional, a mi esposa Nieves Margot Luque Parrilla, a mis hijos Ivan Frederick Chambi Calli y Amydaila Damaris Chambi Luque por ser mi motor y motivo para seguir adelante en mi vida.

PERCY IVAN CHAMBI CALLA

AGRADECIMIENTO

A Dios, por su bendición, gran amor, quien guía mi camino en el día a día del transcurrir de mi vida y por permitirme alcanzar esta meta.

A la Universidad Nacional del Altiplano, Facultad de Ingeniería Civil y Arquitectura, Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas, por compartir sus conocimientos y experiencias.

A los Miembros de Jurado de Tesis, por sus valiosos aportes y sugerencias en la realización y conclusión del presente trabajo de investigación.

Al Asesor de Tesis, por las orientaciones realizadas, aportación y haberme brindado su apoyo durante la ejecución del presente trabajo de investigación.

Agradecimiento especial a mis compañeros y amigos(as) de aula por haber compartido conocimientos y experiencias durante los años de estudio.

ÍNDICE GENERAL

pag

INDICE DE GRAFICOS

RESUMEN

En este trabajo estudiaremos la formulación de algunos modelos matemáticos obtenidos en la vibración de edificios, los cuales permiten obtener una ecuación diferencial vectorial de segundo orden con coeficientes matriciales de orden “n”.

$$M\,\ddot{u}+C\,\dot{u}+K\,u=f(t)$$

Su solución se apoya en la solución dinámica matricial, el contenido del trabajo está estructurado como sigue: En la sección 2.1, describimos brevemente algunos conceptos utilizados en el estudio de vibraciones, y estará centrado en la obtención de la ecuación vibratoria básica (1.3), la cual es obtenida a partir de un sistema vibratorio lineal, usando las ecuaciones de Lagrange. En la sección 2.2, presentamos la teoría sobre las funciones matriciales, la cual basa su formulación haciendo una analogía al caso escalar. El resultado principal de la sección es el teorema de reducción polinomial, el cual expresa el valor de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ como un polinomio matricial de grado “$n-1$”, donde “n” es el orden de la matriz A. En la sección 2.3, utilizamos las funciones matriciales para presentar la solución al problemas de valor inicial con coeficientes matriciales de primer y segundo orden, y veremos el caso de las ecuaciones conservativas, es decir cuando la fuerza de amortiguamiento es nula, o sea $C=0$. En la sección 2.4, presentamos diversos métodos para determinar la solución $u(t)$ de la ecuación $M\,\ddot{u}+C\,\dot{u}+K\,u=f(t)$ discutiendo el caso no conservativo, su desarrollo estará centrado en obtener la solución dinámica matricial. La metodología usada en este trabajo será el método deductivo, basada en la investigación bibliográfica y documental. En el Capítulo III, presentaremos la formulación de algunos modelos matemáticos en el análisis de la vibración de algunos edificios de “n” pisos, determinando su ecuación de movimiento.

Palabras Clave: Modelo Matemático, Ecuaciones Diferenciales Matriciales, Vibración de Edificios.

ABSTRACT

In this work we study the formulation of some mathematical models obtained in the vibration of buildings, which allow us to obtain a vector differential equation of second order with matrix coefficients of order “n”,

$$M\,\ddot{u}+C\,\dot{u}+K\,u=f\left(t\right)$$

Its solution is based on the dynamic matrix solution, the content of the work is structured as follows: In section 2.1, we briefly describe some concepts used in the study of vibrations, and will be focused on obtaining the basic vibrational equation (1.3), which is obtained from a linear vibratory system, using the Lagrange equations. In section 2.2, we present the theory about matrix functions, which bases its formulation by making an analogy to the scalar case. The main result of the section is the polynomial reduction theorem, which expresses the value of the series $\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k$ as a matrix polynomial of degree “n-1”, where “n” is the order of matrix A. In section 2.3, we use the matrix functions to present the solution of initial value problems with matrix coefficients of first order and second order, and we will see the case of conservative equations, that is when the damping force is zero, that is. In section 2.4, we present several methods to determine the solution $u\left(t\right)$ of the equation $M\,\ddot{u}+C\,\dot{u}+K\,u=f\left(t\right)$ discussing the non-conservative case, its development will be focused on obtaining the matrix dynamic solution. The methodology used in this work will be the deductive method, based on bibliographic and documentary research. In Chapter III, we present the formulation of some mathematical models in the analysis of the vibration of some buildings of “n” floors, determining their equation of motion.

Keywords: Mathematical Model, Differential Equations Matrix, Vibrations Buildings.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

Desde sus orígenes, las matemáticas se han distinguido por ser una herramienta importante en la solución de problemas que se presentan en diferentes áreas. Basta revisar un poco de la literatura sobre matemáticas en la rama de ecuaciones diferenciales para darse cuenta que hoy en día las ecuaciones diferenciales juega un papel importante en la modelación y/o solución de problemas específicos.

En este trabajo de investigación en primer lugar se estudiará y analizará la teoría de ecuaciones diferenciales en el tema de ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes constantes matriciales, conceptos de vibraciones mecánicos y algunos modelos matemáticos obtenidos en la vibración de edificios, los cuales permitirán obtener el modelo matemático utilizando ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes constantes matriciales en la vibración de edificios.

¿Cómo será la formulación del modelo matemático en la vibración de edificios, utilizando ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes constantes matriciales?

Cuya solución se apoyará en la solución dinámica matricial.

Para esta investigación abordaremos los siguiente tópicos: Conceptos básicos de vibraciones; sistema de una ecuación vibratorio básica; las ecuaciones de Lagrange; la teoría de funciones matriciales, Teorema de reducción polinomial expresado por $\sum_{k=0}^{\infty} C_k A^k$ como un polinomio matricial de grado "$n-1$"; funciones matriciales y la solución al problemas de valor inicial con coeficientes constantes matriciales de primer y segundo orden.

El objetivo de este trabajo es aplicar la teoría de ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes constantes matriciales en la formulación del modelo matemático en la vibración de edificios.

Por tanto, en este trabajo, se analizará las definiciones, propiedades y teoremas de la teoría tales como: conceptos básicos de vibración, del cual obtendremos la ecuación vibratorio básica, el cual es obtenida a partir de un sistema vibratorio lineal, utilizando las ecuaciones de Lagrange; la teoría sobre las funciones matriciales, Teorema de reducción polinomial expresado por $\sum_{k=0}^{\infty} C_k A^k$, como un polinomio matricial de grado "$n-1$". Luego se utilizará las funciones matriciales para presentar la solución al problema de valor inicial con coeficientes constantes matriciales de primer y segundo orden y finalmente se presentará la formulación del modelo matemático utilizando ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes constantes matriciales en la vibración de edificios.

La metodología usada en este trabajo será el método deductivo, basada en la investigación bibliográfica y documental.

Y el resultado se obtendrá en la aplicación de la formulación del modelo matemático utilizando ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes constantes matriciales en la vibración de edificios.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA, OBJETIVOS Y JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN

1.1.1. Descripción del Problema

Desde sus orígenes, las matemáticas se han distinguido por ser una herramienta importante en la solución de problemas que se presentan en diferentes áreas. Basta revisar un poco de la literatura sobre matemáticas en la rama de ecuaciones diferenciales para darse cuenta que hoy en día las ecuaciones diferenciales juega un papel importante en la modelación y/o solución de problemas específicos.

En este trabajo de investigación en primer lugar se estudiará y analizará la teoría de ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes constantes matriciales, conceptos de vibraciones mecánicos y algunos modelos matemáticos obtenidos en la vibración de edificios, los cuales permitirá obtener el modelo matemático utilizando ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes constantes matriciales en la vibración de edificios

¿Cómo será la formulación del modelo matemático en la vibración de edificios, utilizando ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes constantes matriciales?

Cuya solución se apoyará en la solución dinámica matricial.

Para esta investigación abordaremos los siguiente tópicos: Conceptos básicos de vibraciones; sistema de una ecuación vibratorio básica; las ecuaciones de Lagrange; la teoría de funciones matriciales, Teorema de reducción polinomial expresado por $\sum_{k=0}^{\infty} C_k A^k$ como un polinomio matricial de grado "$n-1$" de libertad; funciones matriciales y la solución al problemas de valor inicial con coeficientes constantes matriciales de primer y segundo orden.

Además se relacionaran las diferentes componentes que actúan en el sistema, como son la masa, la amortiguación, la rigidez y las fuerzas externas; de esta forma obtendremos el modelo, cuya solución de resolverá mediante el método operacional, utilizando la solución dinámica matricial. y finalmente esto será la formulación del modelo matemático utilizando ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes constantes matriciales en la vibración de edificios.

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

1.2.1. Problema General

En la presente investigación se plantea, responder la siguiente interrogante:

¿Es posible aplicar la teoría de ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes contantes matriciales a la formulación del modelo matemático en la vibración de edificios?

1.2.2. Problemas Específicos

- ¿Es posible Aplicar la teoría de ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes contantes matriciales, para formular un modelo matemático en vibración de edificios?

- ¿Es posible relacionar la masa, la amortiguación, la rigidez y la fuerza externas, para obtener el modelo de solución mediante el método operacional matricial, utilizando la solución dinámica matricial?

1.3 HIPÓTESIS

1.3.1. Hipótesis General

Es posible aplicar la teoría de ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes contantes matriciales en la formulación del modelo matemático en la vibración de edificios.

1.3.2. Hipótesis Específicos

- Es posible aplicar la teoría de ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes contantes matriciales, para formular un modelo matemático en vibración de edificios.

- Es posible relacionar la masa, la amortiguación, la rigidez y la fuerza externas, para obtener un modelo matemático mediante el método operacional matricial, utilizando la solución dinámica matricial.

1.4. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

El presente trabajo de investigación servirá para mostrar la aplicación de ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes contantes matriciales en la formulación del modelo matemático en la vibración de edificios.

Además, toda persona interesada en comprender y profundizar sobre el tema, será beneficiada. Ya que será útil para consultas de estudiantes o profesionales de ingeniería civil y ramas afines, que se planteen problemas con objeto de aplicar el modelo matemático en la vibración de edificios.

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.5.1. Objetivo General

- Aplicar la teoría de ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes contantes matriciales a la formulación del modelo matemático en la vibración de edificios.

1.5.2. Objetivos Específicos

- Aplicar la teoría de ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes contantes matriciales, para formular un modelo matemático en vibración de edificios.

- Relacionar la masa, la amortiguación, la rigidez y la fuerza externas, para formular el modelo matemático mediante el método operacional matricial, utilizando la solución dinámica matricial.

1.6. LIMITACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Las limitaciones que se presentaron en la investigación son falta de bibliografía relacionada al tema de investigación, la identificación de las definiciones, teoremas de la teoría de ecuaciones diferenciales vectoriales y las diferentes componentes que actúan en el sistema, como son la masa, la amortiguación, la rigidez y las fuerzas externas para determinar el modelo matemático.

1.7. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA.

La presente investigación se desarrolla en la Escuela profesional de Ciencias Físico Matemáticas en un periodo de seis a ocho de meses, en el área de matemática aplicada, teniendo en cuenta la teoría de ecuaciones diferenciales, vibraciones y las diferentes componentes que actúan en el sistema, como son la masa, la amortiguación, la rigidez y las fuerzas externas; con la finalidad de determinar el modelo matemático, mediante el método operacional matricial, teniendo en cuenta la solución dinámica matricial.

La presente investigación se realizara considerando edificaciones convencionales en la región de Puno, razón por la cual se hará un análisis para edificios de cuatro pisos como máximo.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Los antecedentes relacionados al trabajo de investigación son:

- **MARTINEZ DIBENE, GUILLERMO ELÍAS (2013).** En su trabajo de investigación "Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas" en el cual aplica una introducción a la teoría de procesos estocásticos con el desarrollo de la integral estocástica de Ito y un ejemplo de genética poblacional. En particular, se hizo un esfuerzo importante en la definición de esperanza condicional; se presenta la conexión principal entre la noción clásica y la definición moderna, algo que usualmente escapa de los textos clásicos. Luego, se hace la construcción de manera detallada de la integral estocástica.

- **QUIROZ MARTÍNEZ, TELMO LEONARDO (2011).** En su trabajo de investigación titulada "Aplicaciones no convencionales de cadena de Markov" realizada en Lima-Perú. En esta investigación utiliza la Cadena de Markov y su aplicación será orientada a disciplinas artísticas con la finalidad de demostrar el vínculo existente entre las Matemáticas y las Artes. Y finalmente aplica la Cadena de Markov para la generación de imágenes. Llegando a las **CONCLUSIONES**: Con la utilización de herramientas matemáticas como las Cadenas de Markov, es posible establecer una metodología de composición musical, con el objetivo de que el resultado del análisis sea la obtención de una pieza musical con el estilo de una referencial. y esta aplicación de Cadenas de Markov puede servir para que estudiantes de Ingeniería Electrónica o Ingeniería Informática puedan diseñar sistemas computarizados, en los cuales los algoritmos cuenten con esta lógica y se pueda lograr de manera automática una composición basada en una existente.

- **SALAS MARTÍNEZ, JOSÉ (2013).** En su trabajo de investigación titulada "Cadenas de Markov desde un punto de vista de Aplicaciones" realizada en México. Este trabajo tiene tres propósitos importantes: primero es el estudio de las Cadenas de Markov mediante el estudio de la teoría y de ejemplos bastante claros, el segundo es mostrar que las cadenas de Markov tienen diferentes aplicaciones y por último es modelar de una manera muy sencilla cómo se comporta un proceso de este tipo sin que una persona sea experta en la materia. Finalmente analiza dos aplicaciones; primero el conocido juego de mesa Monopoly. El cual lo modela mediante una cadena de Markov y estudia el comportamiento a largo plazo con la Matriz de transición. En la segunda aplicación usa Excel para resolver el problema de cómo cambia el tiempo (clima) de un día a otro.

- **ACEVEDO BELTRÁN, CARLOS ANDRÉS (2011).** En su trabajo de investigación titulada "Aplicación de Cadenas de Markov para el análisis y pronóstico de series de tiempo" realizada en Bucaramanga-Columbia. Este trabajo tiene finalidad de buscar el análisis de factibilidad del uso de cadenas Markov de primer orden y de orden superior para realizar pronósticos de series de y tiempo específicamente tomando en cuenta un series de precios, con lo que se desea analizar la viabilidad de poder utilizar otro método alternativo conocidos hoy en día. Con el fin de contar con herramientas al momento de realizar un pronóstico veraz y reducir el riesgo en la toma de decisiones ya sea de tipo empresarial o inversionistas.

- **JUAN CARLOS BEDOYA Y MAURICIO BARRERA (2006).** En este artículo de investigación titulada "CONVERGENCIA DE LAS CADENAS DE MARKOV", contiene la teoría para demostrar la convergencia de las Cadenas de Markov, basado en conceptos básicos y especializados del Álgebra Lineal. También se introduce el concepto de la transformación Z como herramienta para resolver las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, y finalmente se muestra una pequeña aplicación de esta teoría. Dado que gran parte de la literatura sólo se enfoca en las aplicaciones de esta teoría, este artículo se hace importante pues permite inferir cuando estos procesos estocásticos alcanzan o no convergencia la cual no es fácilmente entendible con las técnicas suaves usadas en la mayoría de la literatura.

- **MARCELO ANDRES SAAVEDRA QUEZADA (2005).** En este trabajo de tesis titulado "ANALISIS DE EDIFICIOS CON AISLADORES SISMICOS MEDIANTE PRODESOS SIMPLIFICADOS", en este trabajo se valida un procedimiento simplificado para el análisis de edificios con aisladores sísmicos, en el cual se considera la respuesta sísmica de edificios de varios pisos con aisladores sísmicos, con un grado de libertad por planta. Se analiza la respuesta del sistema asumiendo que el edificio tiene un comportamiento elástico lineal y que el aislador puede ser simulado por un modelo lineal y no lineal. Una vez establecidos las ecuaciones de equilibrio dinámico al modelo estructural (ediuficio+aislador), donde se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, el cual representa el comportamiento dinámico del modelo en estudio.

2.2. MARCO TEÓRICO.

A continuación se enuncian conceptos básicos de una edificación, así también como conceptos relacionados al estudio de vibraciones, los cuales nos ayudará a interpretar los conceptos que se presentan en los siguientes capítulos de la presente tesis.

2.2.1. Edificio

Obra ejecutada por el hombre para albergar sus actividades.

2.2.2. Columna

Elemento estructural que se coloca en posición vertical, destinadas a transmitir cargas.

2.2.3. Viga

Elemento estructural que se coloca en posición horizontal, destinadas a soportar cargas.

2.2.4. Muro

Se denomina muro de carga o muro portante a las paredes de una edificación que poseen función estructural.

2.2.5. Vibración

Es un movimiento oscilatorio que aparece, por lo general, en los sistemas mecánicos sometidos a la acción de fuerzas variables en el tiempo.

Distinguiremos entre vibración y oscilación.

La diferencia radica en que la vibración implica la existencia de energía potencial elástica, mientras que la oscilación no. La grafica N° 01 muestra un bloque con un movimiento vibratorio, mientras que el péndulo de la gráfica N° 02 tiene un movimiento oscilatorio. Puesto que los movimientos vibratorios y oscilatorios se rigen por ecuaciones similares, es costumbre estudiarlos juntos y prescindir de la diferencia conceptual entre ambos [Avello A. 2006, pág. 187].

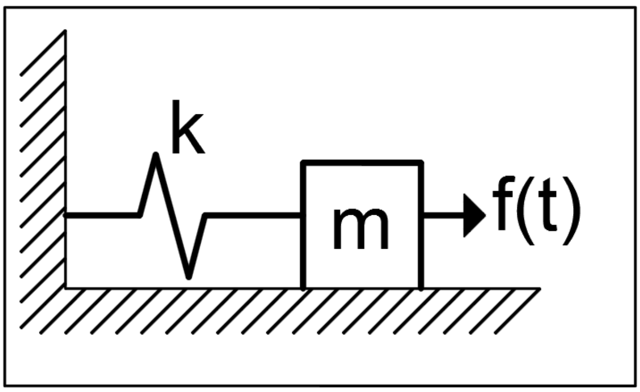

Grafico N° 01: Sistema vibratorio.

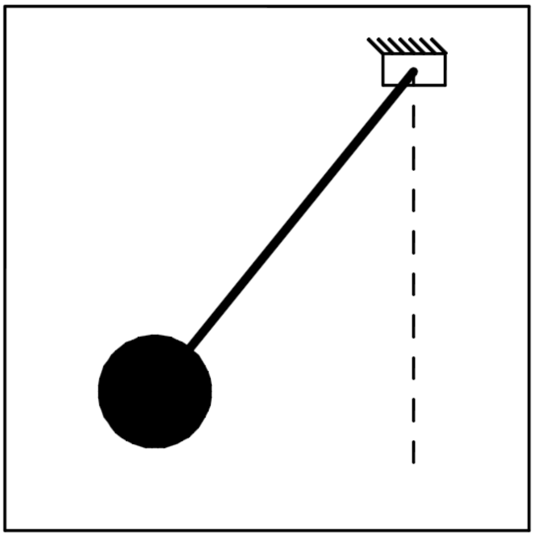

Grafico N° 02: Sistema oscilatorio.

2.2.6. Grados de libertad

Son los parámetros necesarios para definir de forma unívoca la configuración del sistema vibratorio. Por ejemplo, el sistema de la Grafica N° 03 tiene dos grados de libertad, que son las coordenadas x_1 y x_2 que definen la posición de cada uno de los bloques con respecto a sus posiciones de referencia [Avello A.2006, pág. 187].

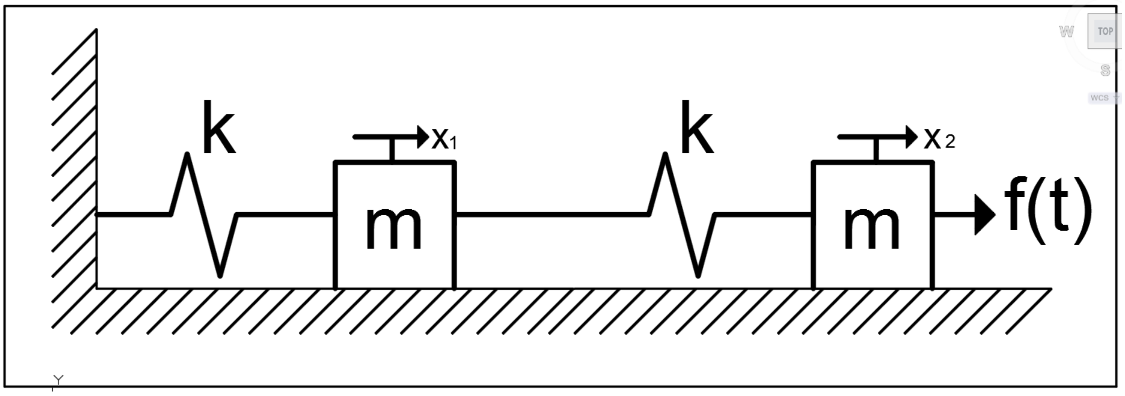

Grafico N° 03: Sistema discreto de 2 grados de libertad.

Muchas estructuras físicas no pueden ser modeladas con éxito utilizando un único grado de libertad. Esto es, para describir el movimiento de una estructura, varias coordenadas deben ser requeridas. Tales sistemas son referidos como sistemas de múltiples grados de libertad.

Un sistema es llamado de "n" grados de libertad, cuando son requeridas "n" coordenadas independientes para especificar las posiciones de las partículas de estos sistemas.

2.2.7. Coordenadas generalizadas

Un sistema de coordenadas que describe el movimiento general y reconoce las restricciones, se denomina **coordenadas generalizadas**. Por ejemplo en la gráfica N° 04 la coordenada angular θ es la coordenada generalizada que reconoce la longitud fija del péndulo como una restricción del sistema. Las coordenadas lineales "z" e "y" no lo hacen así.

El número de coordenadas generalizadas de un sistema es siempre igual al número de grados de libertad del mismo.

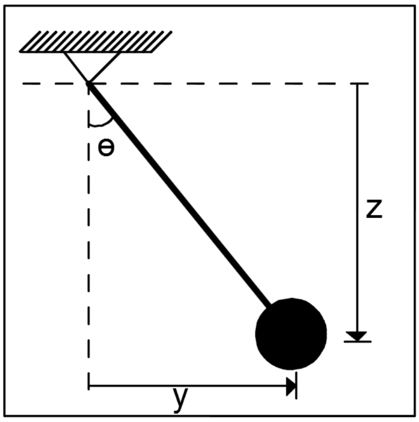

Grafico N° 04: Coordenada generalizada.

2.2.8. Funciones continuas a trozos

Se denominan sistemas discretos a aquellos que pueden ser definidos mediante un número finito de grados de libertad y sistemas continuos aquellos que necesitan infinitos grados de libertad para ser exactamente definidos. Por ejemplo, el sistema de dos grados de libertad de la gráfica N° 03 es un sistema discreto. En cambio, la viga de la gráfica N° 05 es un sistema continuo pues para conocer su deformada es necesario especificar el desplazamiento vertical de cada uno de sus puntos: que viene dado por una función de la forma $y(x)$.

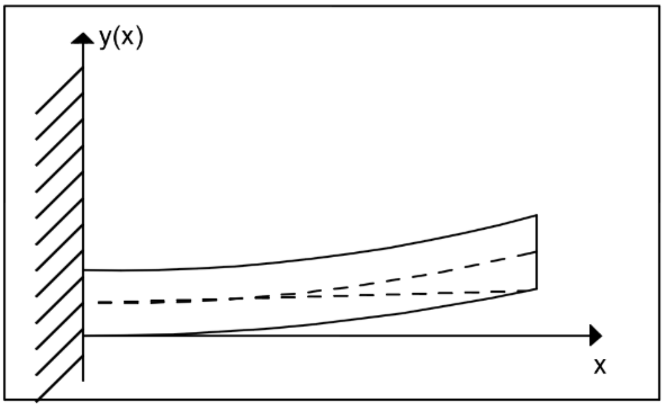

Grafico N° 05: Sistema continuo.

Matemáticamente, los sistemas discretos conducen a **ecuaciones diferenciales ordinarias**, mientras que los sistemas continuos conducen a ecuaciones diferenciales en **derivadas parciales** [Avello A. 2006, pág. 188]. El movimiento vibratorio de los sistemas continuos, a excepción de unos pocos sistemas con geometrías sencillas, suele ser irresoluble con métodos analíticos. Para resolverlos, se suelen transformar en discretos por técnicas de discretización como el Método de los Elementos Finitos.

2.2.9. Sistemas lineales y no lineales.

Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son los movimientos de un sistema mecánico donde actúan las fuerzas $f_1(t)$ y $f_2(t)$, respectivamente. Dicho sistema se denomina lineal [Avello A. 2006: pág. 188] si a una fuerza $f_3(t)=a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)$ responde con un movimiento $x_3(t)=a_1 x_1(t)+a_2 x_2(t)$.

Una de las características de los sistemas lineales es que en ellos se puede aplicar el principio de superposición, que establece que la respuesta a una excitación combinada se puede obtener combinando las respuestas a cada una de las excitaciones simples. Si el sistema no es lineal, entonces será no lineal.

2.2.10. La ecuación de Lagrange.

Una vibración se define en su forma más simple, como un movimiento oscilatorio. Físicamente una vibración aparece como consecuencia de una fuerza fluctuante, esto es, una fuerza que varía en magnitud y /o dirección; mas no de fuerzas constantes.

Así un sistema vibratorio es un sistema físico que posee un movimiento denominado vibración. Por lo general siempre se evita una vibración por las dificultades que causa, así por ejemplo, en los sistemas de ingeniería, una vibración aumenta las tensiones en las piezas de una máquina, interfiere en su funcionamiento y en los próximos a ella, causa ruido y origina pérdida de energía mecánica debido a las fuerzas de amortiguamiento. Para enfrentar tales problemas, se requieren realizar estudios de las ecuaciones que gobiernan el movimiento de tales sistemas.

Para analizar un sistema vibratorio, primeramente consideramos su simplificación en términos de **masa, rigidez y amortiguación**, los cuales representan al cuerpo, la elasticidad y la fricción del sistema, respectivamente. Enseguida procuramos determinar la solución y hacemos un análisis de las ecuaciones del movimiento, para llegar por último, a las conclusiones apropiadas.

El movimiento de un sistema vibratorio de “n” grados de libertad es representado mediante "n" ecuaciones diferenciales, los cuales son obtenidos a través de diversas técnicas, tales como: leyes de Newton, ecuaciones de Lagrange, métodos gráficos lineales, el método de elementos finitos [Inman D. 2001, pág. 29].

Consideremos un sistema vibratorio de “k” partículas. Sean x_i, $i=1:k$, las posiciones del sistema y q_j, $j=1:n$, un conjunto de coordenadas generalizadas, entonces: $x_i = x_i\left(q_1, q_2, ..., q_n\right)$, $i=1:k$, y las siguientes “n” ecuaciones llamadas ecuaciones de Lagrange para el sistema vibratorio, pueden ser obtenidas [Meirovitch L. 1986, pág. 256]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}_j}\right) - \frac{dL}{dq_j} + \frac{dC}{d\dot{q}_j} = Q_i, \quad j=1:n, \qquad (1.1)$$

Dónde: $L = T - U$, es la función Lagrangiana del sistema,

T: es la energía cinética,

U: es la energía potencial,

C: es la energía de disipación y

$Q_j,\ j=1:n$ son fuerzas externas.

Generalmente en un sistema vibratorio lineal las diversas formas de energía están dadas por:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \quad (energia\, cinetica) \\ U &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}q_i q_j \quad (energia\ potencial) \\ C &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \quad (energia\ de\ disipacion) \end{aligned} \tag{1.2}$$

2.2.11. La ecuación vibratoria básica

Si sustituimos (1.2) en (1.1) obtenemos [Meirovitch L. 1986, pág. 262]:

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} k_{ij}q_i + \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\dot{q}_i = Q_j, \quad j=1:n$$

Que de forma matricial se representa mediante:

$$\left[m_{ij}\right]_{n\times n} \ddot{q}_{i_{n\times 1}} + \left[c_{ij}\right]_{n\times n} \dot{q}_{i_{n\times 1}} + \left[k_{ij}\right]_{n\times n} q_{i_{n\times 1}} = \left[Q_j\right]_{n\times 1}$$

Obteniendo así la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes matriciales, siendo esta la ecuación **vibratoria básica**, que abreviadamente se escribe:

$$M\ \ddot{q} + C\ \dot{q} + K\ q = f(t) \tag{1.3}$$

Donde M, C y K son matrices cuadradas de orden "n" que representan la masa, el amortiguamiento y la rigidez respectivamente, "q" es un vector columna de orden "n" de incógnitas que dependen de "t", $\dot{q}$ y $\ddot{q}$ son la primera y la segunda derivada de q respectivamente, $f(t)$ es un vector columna de orden "n" de funciones que dependen de "t" que representa la excitación externa del sistema y "n" es un número entero mayor que l. Cuando $C = 0$, el sistema es del tipo conservativo, pues:

$$E = T + U$$

Es constante a través de una solución $q(t)$.

Ejemplo 1.1.

Obtener las ecuaciones del movimiento e identificar las matrices de masas, rigidez y amortiguamiento para el sistema de dos grados de libertad de la gráfica N° 06 [Meirovitch L. 1986, pág. 108].

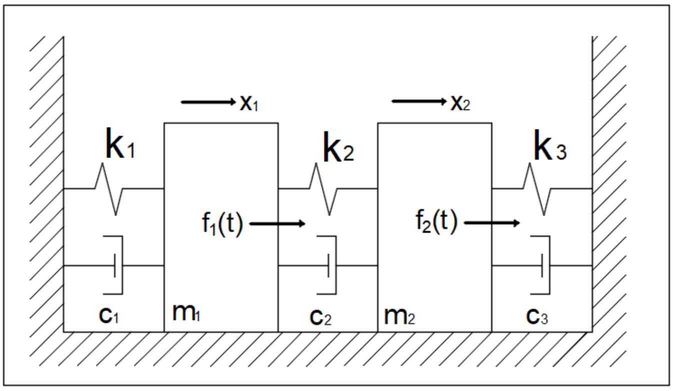

Grafico N° 06: Grafico del ejemplo 1.1.

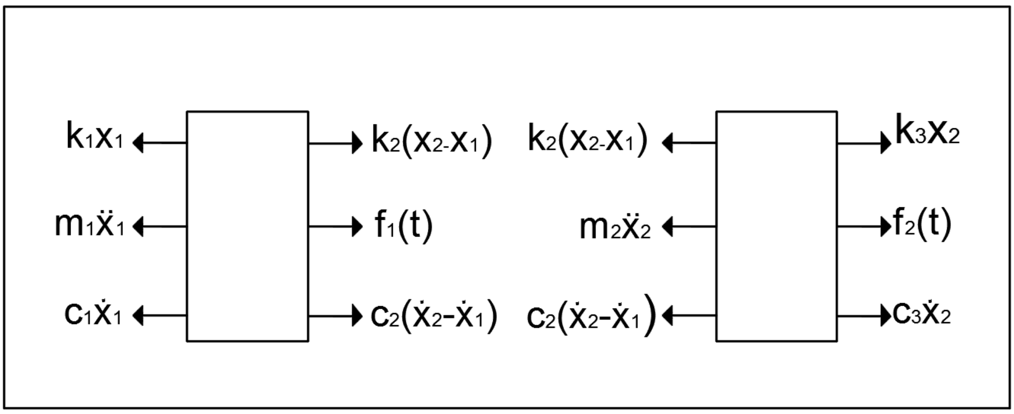

Grafico N° 07: Diagrama del solido libre.

Para hallar las ecuaciones de este sistema, basta con aplicar las ecuaciones de equilibrio cada una de las dos masas. La grafica N° 07 muestra los diagramas de sólido libre, con todas las fuerzas actuantes. Sumando las fuerzas e igualando a cero se llega a:

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 - c_2\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) + k_1 x_1 - k_2\left(x_2 - x_1\right) = f_1(t)$$
$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) + c_3\dot{x}_2 + k_2\left(x_2 - x_1\right) + k_3 x_2 = f_2(t)$$

Reordenando términos, estas dos ecuaciones se pueden poner de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

Identificando con la Ecuación (1.3) las matrices M, C y K resultan ser:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

2.2.12. Clasificación de sistemas.

Enseguida presentaremos una clasificación de sistemas modelados por la Ecuación (1.3), de acuerdo a algunas características de las matrices que corresponden a sus coeficientes comúnmente encontrada en la literatura [Inman D. 2001, pág. 31].

Para diversas situaciones prácticas, la Ecuación (1.3) adopta la siguiente forma:

$$M\ddot{q} + \left(D + G\right)\dot{q} + \left(K + H\right)q = f\ (\mathrm{t}),$$

Donde q y f ya fueron definidas y

$$M = M^T = \text{Matriz de inercia o masa}$$

$D = D^T$ = Matriz de masa viscosa

$G = -G^T$ = Matriz giroscópica

$K = K^T$ = Matriz de rigidez

$H = -H^T$ = Matriz circulatoria

En muchos casos M, D, K son definidas positivas, las cuales son importante en el establecimiento de condiciones para la estabilidad del sistema.

Es bueno observar que, cada aplicación particular en la ingeniería puede tener una nomenclatura un poco diferente.

Se denomina **sistema conservativo** generalmente a los sistemas de la forma:

$$M\ddot{q} + Kq = f(\mathrm{t})$$

Donde M y K son ambas simétricas y definidas positivas. Sin embargo el sistema:

$$M\ddot{q} + G\dot{q} + Kq = f(\mathrm{t}) \tag{1.4}$$

Donde G es anti simétrica $\left(G^T = -G\right)$ es también conservativo en el sentido de la conservación de la energía pero es referido como un **sistema conservativo giroscópico, o un sistema giroscópico.**

Tales sistemas surgen de forma natural cuando están presentes movimientos rotatorios, tales como, en un giroscopio o un satélite artificial.

Los sistemas de la forma:

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = f(t) \tag{1.5}$$

Donde M , K y D son todos definidas positivas, son referidos como **sistemas no giroscópicos amortiguados.**

Sistemas con coeficientes matriciales simétricos y definidos positivos son, a su vez, referidos como **sistemas pasivos**.

Los sistemas de la forma:

$$M\ddot{q}+\left(K+H\right)q=f\left(t\right) \tag{1.6}$$

Son referidos como **sistemas circulatorios.**

Combinando las Ecuaciones (1.4), (1.5) y (1.6) obtenemos el sistema más general

$$M\ddot{q}+\left(D+G\right)\dot{q}+\left(K+H\right)q=f\left(t\right) \tag{1.7}$$

Físicamente esta expresión representa fuerzas generadas que son consideradas en la literatura, como exceso de fuerzas externas. Matemáticamente, la ecuación (1.7) puede ser eventualmente clasificada en términos de las propiedades de los coeficientes matriciales, el cual no es de interés en este trabajo.

2.3. Funciones matriciales.

En esta sección presentamos la teoría sobre la funciones matriciales, la cual basa su formulación haciendo una analogía al caso escalar, así las funciones escalares $f\left(z\right)$ que están definidas mediante serie de potencias $\sum c_k z^k$, originan una definición de funciones matriciales $f\left(A\right)$, mediante la sustitución de la variable "z" , por una matriz cuadrada

A , esto es $\sum c_k A^k$. Este procedimiento será válido garantizando la convergencia de la serie matricial de potencias y disponer de propiedades que nos permita el cálculo efectivo de la matriz suma de la serie matricial.

Así diremos que una serie matricial $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ converge si cada serie escalar $\sum_{k=0}^{\infty} c_k a_{ij}^k$ converge, siendo $A^k = \left[a_{ij}^{(k)} \right]$. El resultado principal de la sección es el teorema de reducción polinomial, el cual expresa el valor de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ como un polinomio matricial de grado "n-1" donde "n" es el orden de la matriz A, cuyos coeficientes son calculados por el proceso de **interpolación de Hermite.**

Para establecer la definición de función matricial, es necesario presentar la definición de la norma de una matriz cuadrada la cual nos garantizará la convergencia de la serie matricial de potencias.

2.3.1. Norma de una matriz cuadrada.

En el siguiente trabajo usaremos la siguiente norma.

Definición 2.3.1. Sea la matriz cuadrada $A = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$ se llama norma de la matriz A al número real no negativo:

$$\|A\| = \max_{j=1:n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Así la norma de la matriz nos permitirá tener una medida uniforme de comparación de los elementos de la matriz para fines de convergencia.

Proposición 2.3.1. Sean las matrices cuadradas $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ y $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ con α un escalar, k entero no negativo se tiene:

i) $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$

ii) $\|\alpha A\|=|\alpha|\|A\|$

iii) $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$

iv) $\|A^k\|\leq\|A\|^k$

Prueba.

i) $\|A+B\|=\underset{j=1:n}{\text{máx}}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}+b_{ij}\leq\underset{j=1:n}{\text{máx}}\sum_{i=1}^{n}\left(|a_{ij}|+|b_{ij}|\right)$

Luego:

$$\|A+B\|\leq\underset{j=1:n}{\text{máx}}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|+\underset{j=1:n}{\text{máx}}\sum_{i=1}^{n}|b_{ij}|$$

Entonces:

$$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$$

ii) $\|\alpha A\|=\max_{j=1:n}\sum_{i=1}^{n}|\alpha a_{ij}|=\max_{j=1:n}\sum_{i=1}^{n}\left(|\alpha||a_{ij}|\right)=|\alpha|\max_{j=1:n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$

Entonces:

$$\|\alpha A\|=|\alpha|\|A\|$$

iii) Sea $C=AB$, con $C=\left[c_{ij}\right]_{n\times n}$, donde $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$

$$
\begin{aligned}
\|AB\| &= \max_{j=1:n} \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| = \max_{j=1:n} \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right| \\
&\leq \max_{j=1:n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik} b_{kj}| \right) = \max_{j=1:n} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| |b_{kj}| \right) \\
&= \max_{j=1:n} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| |b_{kj}| \right) = \max_{j=1:n} \sum_{k=1}^{n} \left(|b_{kj}| \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \right) \\
&\leq \max_{j=1:n} \sum_{k=1}^{n} \left(|b_{kj}| \left(\max_{k=1:n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \right) \right) \\
&= \max_{j=1:n} \sum_{k=1}^{n} \left(|b_{kj}| \|A\| \right) = \|A\| \left(\max_{j=1:n} \sum_{k=1}^{n} |b_{kj}| \right) \\
&= \|A\| = \|B\|
\end{aligned}
$$

Con lo cual concluye la prueba de:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

iv) Mediante el uso repetido de la propiedad anterior y por inducción matemática se tiene:

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k$$

Cuando en las funciones escalares $f(z)$ que están definidas mediante series de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ tales como $sen(z), \cos(z), \exp(z)$, etc., se sustituye a la variable “z” por una matriz cuadrada A, es decir $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ originan una definición de funciones matriciales $f(A)$, de igual modo obtenemos las funciones matriciales $sen(A), \cos(A), \exp(A)$, etc.

El siguiente criterio de convergencia permite que la definición de función matricial sea simplemente una sustitución de variable de una función escalar, la cual está definida analíticamente por una serie de potencias.

2.3.2. Convergencia de una serie matricial.

Lema 2.3.1. Sea la serie escalar $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, con radio de convergencia " R ", entonces la serie matricial $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ converge, para cualquier matriz cuadrada A , la cual satisface $\|A\| < R$.

Prueba.

Sea $A^k = \left[a_{ij}^{(k)} \right]_{n \times n}$ para $k \geq 1$, con $A^0 = I = \left[\delta_{ij} \right]_{n \times n} = \left[a_{ij}^{(0)} \right]_{n \times n}$.

Entonces

$$\left| a_{ij}^{(k)} \right| \leq \left\| A^k \right\| \leq \|A\|^k \text{ ,} k \geq 0$$

Por el criterio de comparación, tenemos que:

$$\left| \sum_{k=0}^{n} c_k a_{ij}^{(k)} \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |c_k| \|A\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_k \|A\|^k < \infty, \|A\| < R, \forall n \leq 0,$$

Pues la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ converge absolutamente.

Luego la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k a_{ij}^{(k)}$ converge, con $\|A\| < R$, para i, j arbitrarios y, por tanto, $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ converge.

Veamos ahora la definición de función matricial.

2.3.3. Función matricial.

Sea $f(z)$ una función escalar que admite un desarrollo en serie de Taylor

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k,$$

Para $|z|<R$. Definimos la función matricial

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}A^k$$

Para toda matriz cuadrada A de orden “nxn” con $\|A\|<R$.

2.3.4. Funciones matriciales básicas.

Para toda matriz cuadrada A de orden “nxn” con $\|A\|<R$, tenemos por ejemplo las siguientes funciones matriciales básicas, las cuales son utilizadas frecuentemente:

1) $p(A)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kA^k$, función polinomial,

2) $e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$, función exponencial,

3) $senA=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}$, función seno,

4) $\cos A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k A^{2k}}{(2k)!}$, función coseno.

2.3.5. Derivada de una función matricial.

Una función escalar analítica, definida por una serie de potencias, posee derivadas de cualquier orden y sus derivadas son obtenidas derivando la serie término a término.

Asimismo, si $f(A)$ está bien definida, entonces también están las funciones "derivadas" $f^{(j)}(A)$, Por ejemplo:

$$f^{'}(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!}A^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k+1)}(0)}{k!}A^{k}$$

Está bien definida. Por otro lado, la función,

$$F(t)=f(tz)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{\mathrm{k}!}z^{k}t^{k}$$

Donde $f(z)$ es entera $(R=\infty)$, puede ser derivada con respecto a "t", esto es,

$$\frac{d}{dt}f(tz)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!}z^{k}t^{k-1}=zf'(tz),$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dt}f(tA)=Af'(tA)$$

2.3.6. Propiedades de una función matricial.

A continuación se enuncian y se demuestran algunas propiedades de las funciones matriciales, cuyo uso se dan en diversas situaciones.

Proposición 2.3.2. Sean $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{k}z^{k}$, $g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}d_{k}z^{k}$ funciones escalares definidas para $|z|<R$ y sea A una matriz cuadrada de orden "n", tal que $\|A\|<R$, con estas condiciones se cumple que:

1) Si $h(z)=f(z)+g(z)$, entonces $h(A)=f(A)+g(A)$.

2) Si $q(z)=f(z)g(z)$, entonces $q(A)=f(A)g(A)=g(A)f(A)$.

3) Si P es una matriz no singular de orden "nxn", entonces $f\left(P^{-1}AP\right)=P^{-1}f(A)P$.

4) Si "λ "es un auto valor de A y "v" es el auto vector asociado a "λ", entonces $f(\lambda)$ es auto valor de $f(A)$ y "v" es un auto vector asociado a $f(\lambda)$, esto es,

$$Av=\lambda v \Rightarrow f(A)v=f(\lambda)v$$

5) Si "w" es un auto vector generalizado de A correspondiente al auto valor "λ", entonces:

$$f(A)w=\sum_{j=0}^{s-1}\frac{f^{(j)}(\lambda)}{j!}(A-\lambda I)^{j}\,w\,,$$

Donde $(A-\lambda I)^{k}\,w=0$, para $k\geq s$.

6) Sean $f_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k,\ldots,f_m(z)=\sum_{k=0}^{\infty}d_k z^k$ funciones escalares que convergen, para $|z|<R$, y sea $\varphi(x_1,x_2,\ldots,z_m)$ un polinomio en "m" variables tal que:

$$\varphi\left(f_1(z),f_2(z),\ldots,f_m(z)\right)=0$$

Entonces:

$$\varphi\left(f_1(A),f_2(A),\ldots,f_m(A)\right)=0,$$

Para cualquier matriz A de orden "nxn", tal que $\|A\|<R$.

Prueba.

1) Se tiene $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, $g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ con $|z|<R$ si A es una matriz de orden "nxn" con $|A|<R$, entonces por la definición de función matricial tenemos $f(A)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ y $g(A)=\sum_{k=0}^{\infty} d_k a^k$, si:

$$h(z)=f(z)+g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k+\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k=\sum_{k=0}^{\infty}(c_k+d_k)z^k \quad ,$$

Entonces:

$$\begin{aligned} h(A)&=\sum_{k=0}^{\infty}(c_k+d_k)A^k=\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k+\sum_{k=0}^{\infty} d_k A^k \\ &=f(A)+g(A) \end{aligned}$$

2) Si:

$$q(z)=f(z)g(z)=\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k\right)=\sum_{k=0}^{\infty} e_k z^k ,$$

Donde: $e_k=\sum_{r=0}^{k} c_r d_{k-r}$. Este producto es conocido como producto de Cauchy [Apostol T. 2006, pág. 289]. Luego:

$$q(A)=\sum_{k=0}^{\infty} e_k A^k=\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k A^k\right)=f(A)g(A) \;.$$

Como:

$$f(z)g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} e_k z^k=\left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\right)=g(z)f(z) ,$$

Ya que: $=\sum_{k=0}^{\infty} c_r d_{k-r}=\sum_{k=0}^{\infty} d_r c_{k-r}=e_k$,

Entonces:

$$f(A)g(A)=\sum_{k=0}^{\infty} e_k A^k=\left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k A^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k\right)=g(A)f(A).$$

3) Si P es una matriz no singular de orden "nxn", entonces

$$
\begin{aligned}
f\left(P^{-1}AP\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(P^{-1}AP\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(P^{-1}AP\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P^{-1}\left(c_k A^k\right)^k P = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k\right) P \\
&= P^{-1} f\left(A\right) P
\end{aligned}
$$

4) Caso particular de **5)**

5) Tenemos las siguientes igualdades

$$
\begin{aligned}
f\left(A\right)w &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left[\left(A-\lambda I\right)+\lambda I\right]^k w \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} \left(A-\lambda I\right)^j w = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty} c_k \binom{k}{j} \lambda^{k-j} \left(A-\lambda I\right)^j w \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=j}^{\infty} c_k\, j! \binom{k}{j} \lambda^{k-j}}{j!} \left(A-\lambda I\right)^j w = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{f^{(j)}\left(\lambda\right)}{j!} \left(A-\lambda I\right) w
\end{aligned}
$$

Pues: $\left(A-\lambda I\right)^j w = 0$, para $j \geq s$, y $f^{(j)}\left(\lambda\right) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k\, j! \binom{k}{j} \lambda^{k-j}$. Cuando

$s = 1$ en
$$
f\left(A\right)w = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{f^{(j)}\left(\lambda\right)}{j!} \left(A-\lambda I\right)^j w,
$$

Se obtiene que $f\left(A\right)w = f\left(\lambda\right)w$ viene a ser la prueba de 4).

6) Sea $r\left(z\right) = \varphi\left(f_1\left(z\right), f_2\left(z\right), \ldots, f_m\left(z\right)\right)$. Siendo φ un polinomio, la función $r\left(z\right)$ es una combinación de sumas y productos de series de potencias, por tanto también es una serie de potencias. Asimismo podemos escribir $\Gamma\left(z\right)$ en la forma $\Gamma\left(z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$, para algunas constantes $\alpha_k, k \geq 0$. Más como $r\left(z\right) = 0$, para $\left|z\right| < R$, entonces $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k = 0$, para $\left|z\right| < R$.

De ahí concluimos que $\alpha_k = 0, \forall k \geq 0$. Luego $r(A) = \sum_{k=0}^{\infty} 0.A^k = 0$, por lo tanto $\varphi\left(f_1(A), f_2(A), \ldots, f_m(A)\right) = 0$.

La existencia de divisores de cero en un álgebra de matrices, cuya consecuencia es el Teorema de Cayley-Hamilton, permite obtener el siguiente resultado central.

2.3.7. Reducción polinomial

Teorema 2.3.1. Sea $f(z)$ una función escalar definida por la serie convergente $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ para $|z| < R$, entonces para cualquier matriz A cuadrada de orden “n”, con $|A| < R$, existen constantes $b_k, k = 0 : n-1$, tales que:

$$f(A) = r(A) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k A^k \text{ ,}$$

Donde $r(z) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k A^k$. Además de esto, los coeficientes $b_k, k = 0 : n-1$, son obtenidos a partir del siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$f^{j}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_j), \ j = 0 : m_i - 1, i = 1 : s$$

Dónde: los $\lambda_i, i = 1 : s$, son los auto valores de A con multiplicidad “m_i”.

<u>Prueba</u>.

Sea $p(\lambda)$ el polinomio característico de la matriz. A, entonces

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)^{m_i} \text{ .}$$

Observamos que para cada $i = 1 : s$ es válido:

$$P^{(j)}(\lambda_i)=\frac{d^j p(z)}{dz^j}\Big|_{z=\lambda_i}=0,\,0:m_i-1 \qquad (2.1)$$

Además de esto [Canagualpa G. 1995, pag. 10]

$$f(z)=q(z)\,p(z)+r(z) \qquad (2.2)$$

Donde $r(z)$ es un polinomio de grado "$n-1$" dado por $r(z)=\sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k$, pues $p(z)$ es de grado "n". De (2.2), tenemos que $f(A)=r(A)$, ya que por el Teorema de Cayley-Hamilton, $p(A)=0$ .Usando la fórmula de Leibniz para el cálculo de la j- ésima derivada de (2.2), se tiene:

$$f^{(j)}(z)=\sum_{k=0}^{j}\binom{k}{j} q^{(j-k)}(z)\,p^{(k)}(z)+r^{(j)}(z)$$

Y por (2.1), obtenemos que:

$$r^{(j)}(\lambda_i)=f^{(j)}(\lambda_i),\ j=0:m_i-1, i=1:s. \qquad \textbf{Lqqd.}$$

Podemos observar que para calcular $f(A)$, con el auxilio del teorema de reducción polinomial, es necesario conocer solamente los valores de $f(z)$ y de sus derivadas, para $z=\lambda_i, i=1:s$, donde λ_i es un auto valor de A. Esta observación importante permite ampliar la definición de una función matricial de la siguiente forma.

Definición 2.3.2. Sea $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ una matriz con auto valores $\lambda_i, k=1:s$ de multiplicidad "m_k", respectivamente.

1. Una función escalar $f(z)$ está definida en el espectro de A si existen los valores:

$$f^{(j)}(\lambda_k),\, j = 0 : m_k - 1$$

Para cada auto valor λ_k, $k = 1 : s$.

2. Si $f(z)$ es una función escalar definida en el espectro de A, el polinomio $r(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k$ es llamado un polinomio de interpolación para $f(z)$ sí:

$$r^{(j)}(\lambda_k) = f^{(j)}(\lambda_k),\; j = 0 : m_k - 1, k = 1 : s$$

3. Si $f(z)$ es una función escalar definida en el espectro de A y $r(z)$ es un polinomio de interpolación para $f(z)$, definimos

$$f(A) = r(A) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k A^k \tag{2.3}$$

Observaciones 2.3.1.

1. Las funciones $z^{m/n}$ y $\ln(z)$ con "m" y "n" números enteros, son funciones escalares definidas en los espectros de matrices no singulares. Porque, estas son funciones de valores múltiples, pues si $z = re^{i\theta}, -\pi < \theta \leq \pi$, entonces para $k = 0 : n - 1$ tenemos:

$$z^{m/n} = r^{m/n}\left[\cos\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi) + isen\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)\right] \tag{2.4}$$

$$\ln(z) = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \tag{2.5}$$

Si A es una matriz no singular, $A^{m/n}$ y $\ln(A)$ son matrices que resultan de (2.4) o (2.5), considerando $k = 0$ respectivamente. En ambos casos serán denominados valor principal.

2. Una función $f(z)$, definida por una serie de potencias, puede ser escrita como una integral de Cauchy, esto es:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_r (z - z_0)^{-1} f(z)dz.$$

La correspondiente función matricial puede ser definida como [Higham 2008, pág. 8]:

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_r (zI - A)^{-1} f(z)dz.$$

Donde "r" es un contorno que contiene en su interior los auto valores de la matriz A, siendo la integración realizada para cada componente.

2.4. Sistemas Conservativos.

En este sección se hace uso de las funciones matriciales para presentar la solución a los problemas de valor inicial con coeficientes matriciales de primer y segundo orden, la de primer orden será resuelta de manera análoga al caso escalar; la de segundo orden, en el caso homogéneo, será resuelta usando la técnica de Cauchy de las series de potencias y empleando la técnica de variación de parámetros en el caso general.

Dada la ecuación diferencial matricial (1.3),

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = f(t)$$

Dónde: M, C y K son matrices que representan la masa, el amortiguamiento y la rigidez respectivamente, "q" es un vector columna de incógnitas que depende de "t", $f(t)$ es un vector columna que depende de "t" que representa la excitación externa del sistema.

Un sistema se llama conservativo si no existe energía de disipación, es decir la fuerza de amortiguamiento es nula, o sea $C=0$.

2.4.1. La ecuación diferencial vectorial de primer orden $\dot{u}=Au+f(t)$.

Teorema 2.4.1. El problema de valor inicial de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u}=Au+f(t) \\ u(t_0)=u_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Con $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ una matriz, $f(t)=\left[f_i(t)\right]_{n\times 1}$ vector de funciones continuas, $u=\left[u_i\right]_{n\times 1}$ vector de incógnitas, $\dot{u}=\left[\dot{u}_i\right]_{n\times 1}$, y t_0 y u_0 dados, tiene como única solución a:

$$u(t)=e^{A(t-t_0)}u_0+\int_0^t e^{A(t-s)}f(s)\,ds. \tag{3.2}$$

<u>Prueba</u>.

Existencia.

Consideremos la ecuación diferencial vectorial homogénea de primer orden

$$\dot{u}=Au. \tag{3.3}$$

En analogía al caso escalar $(\dot{u}=au)$, consideremos:

$$F(t)=e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k t^k$$

Cuya j-ésima derivada está dada por:

$$\begin{aligned}\frac{d^j}{dt^j}F(t)&=\frac{d^j}{dt^j}e^{At}=\sum_{k=j}^{\infty}j!\binom{k}{j}c_kA^kt^{k-j}\\&=A^j\sum_{k=j}^{\infty}j!\binom{k}{j}c_k(At)^{k-j}=A^j\frac{d^j}{dz^j}e^z\Big|_{z=At}\\&=A^je^{At},\ j\geq 1\end{aligned}$$

En particular, resulta:

$$\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}=e^{At}A.$$

Si $u(t)=e^{At}$ se tiene $\dot{u}=Au$.

Empleando la condición inicial de la Ecuación (3.1):

$$u(t_0)=e^{At_0}=u_o$$

Luego:

$$u(t)=e^{At-At_0+At_0}=e^{A(t-t_0)}e^{At_0}$$

Entonces:

$$u(t)=e^{A(t-t_0)}u_0$$

Es solución al problema de Cauchy homogéneo

$$\begin{cases}\dot{u}=Au,\\u(t_0)=u_0.\end{cases}\qquad(3.4)$$

Unicidad.

Sea $v(t)$ otra solución del problema de Cauchy (3.3), definimos:

$$r(t)=e^{-At}v(t)\qquad(3.5)$$

De donde:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}r(t)&=e^{-At}v'(t)-Ae^{-At}v(t)\\&=e^{-At}\left[Av(t)\right]-Ae^{-At}v(t)\\&=0\end{aligned}$$

Como $\frac{d}{dt}r(t)=0$, entonces $r(t)=k$, k = constante. Así que $r(t)=r(t_0)$, para todo $t\in R$. Luego de (3.5) y (3.4) se tiene:

$$r(t)=e^{-At_0}v(t_0)=e^{-At_0}u_0$$

Es decir,

$$e^{-At}v(t)=e^{-At_0}u_0$$

Entonces:

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{At}e^{-At_0}u_0 \\ &= e^{A(t-t_0)}u_0 \\ &= u(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto el problema de Cauchy homogéneo (3.4) tiene una única solución.

Vamos a resolver ahora el problema no homogéneo (3.1), tenemos

$$\dot{u}-Au=f(t)$$

Entonces:

$$e^{-At}\dot{u}-Ae^{-At}u=e^{-At}f(t)$$

Ahora, integrando entre t_0 y t y tomando en cuenta la condición inicial de (3.1), se tiene:

$$\int_{t_0}^{t}e^{-At}\dot{u}dt-\int_{t_0}^{t}Ae^{-At}udt=\int_{t_0}^{t}e^{-At}f(t) \qquad (3.6)$$

Empleando integración por partes:

$$\int_{t_0}^{t}e^{-At}\dot{u}dt=e^{-At}u\Big|_{t_0}^{t}-\int_{t_0}^{t}(A)e^{-At}udt \qquad (3.7)$$

Reemplazando (3.7) en (3.6), resulta:

$$e^{-At}u(t)-e^{-At_0}u_0+\int_{t_0}^{t}Ae^{-At}udt-\int_{t_0}^{t}Ae^{-At}udt=\int_{t_0}^{t}e^{-As}f(s)ds$$

$$e^{-At}u(t)-e^{-At_0}u_0=\int_{t_0}^{t}-e^{-As}f(s)ds$$

Finalmente, obtenemos:

$$u(t)=e^{A(t-t_0)}u_0+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-s)}f(s)ds \qquad \textbf{lqqd}.$$

Observación 2.4.1. El Teorema 2.4.1 nos servirá para establecer la existencia y unicidad de la solución para los sistemas no conservativos.

2.4.2. La ecuación diferencial vectorial de segundo orden $\ddot{u}+Au=f(t)$.

Consideremos la ecuación diferencial vectorial de segundo orden:

$$\ddot{u}+Au=f(t) \tag{3.8}$$

2.4.2.1. Caso homogéneo

Teorema 2.4.2. El problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \ddot{u}+Au=0 \\ u(t_0)=u_0, \dot{u}(t_0)=u_1 \end{cases} \tag{3.9}$$

Dónde: $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $u=[u_i]_{n\times 1}$ es un vector de incógnitas que dependen de "t" y $\ddot{u}=[\ddot{u}_i]_{n\times 1}$, tiene como única solución a:

$$u(t)=C(t-t_0)u_0+D(t-t_0)u_1,$$

Dónde: $C(t)$ y $D(t)$ están definidos como:

$$C(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}A^k, \qquad D(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}A^k$$

Simbólicamente:

$$u(t)=\cos\left(\sqrt{A}(t-t_0)\right)u_0+\frac{sen\left(\sqrt{A}(t-t_0)\right)}{\sqrt{A}}u_1,$$

Prueba.

Proponemos la solución de la ecuación diferencial (3.9) como una serie de potencias:

$$u(t)=\sum_{k=0}^{\infty}v_k\frac{(t-t_0)^k}{k!} \tag{3.10}$$

Dónde: " v_k " son vectores de orden " $n\times 1$ " que serán determinados.

Sustituyendo (3.10) en (3.9) y desarrollando convenientemente las sumas obtenemos:

$$\sum_{k=2}^{\infty}(v_{k+2}+Av_k)\frac{(t-t_0)^k}{k!}=0\ .$$

Podemos concluir que los coeficientes vectoriales " v_k " deben satisfacer el problema vectorial en diferencias:

$$v_{k+2}+Av_k=0,\ \forall k\geq 0\,.$$

Por inducción, obtenemos que:

$$v_{2k}=(-1)^k A^k v_0,\quad v_{2k+1}=(-1)^k A^k v_1,\ k\geq 0\ ,$$

También de las condiciones iniciales de la ecuación (3.9) se tiene que $v_0=u_0, v_1=u_1$ de allí

$$u(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(t-t_0)^{2k}}{(2k)!}A^k u_0+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(t-t_0)^{2k+1}}{(2k+1)!}A^k u_1$$

O simplemente:

$$u(t)=C(t-t_0)u_0+D(t-t_0)u_1 \;, \tag{3.11}$$

Donde:

$$C(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}A^k \;, \tag{3.12}$$

$$D(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}+1}{(2k+1)!}A^k \tag{3.13}$$

Simbólicamente, escribimos:

$$C(t)=\cos\left(\sqrt{A}t\right), \tag{3.14}$$

$$D(t)=\frac{sen\left(\sqrt{A}t\right)}{\sqrt{A}} \tag{3.15}$$

Las series $C(t)$ y $D(t)$ satisfacen la ecuación diferencial matricial:

$$\ddot{E}(t)+AE(t)=0\,, \tag{3.16}$$

Siendo éstas linealmente independientes.

Finalmente reemplazando (3.15) y (3.14) en (3.11) obtenemos:

$$u(t)=\cos\left(\sqrt{A}(t-t_0)\right)u_0+\frac{sen\left(\sqrt{A}(t-t_0)\right)}{\sqrt{A}}u_1\,,$$

Que viene a ser solución de la ecuación diferencial (3.9) y por la linealidad de la ecuación diferencial, ésta es única. **Lqqd.**

2.4.2.2. Caso general

Teorema 2.4.3. El problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \ddot{u} + Au = f(t) \\ u(t_0) = u_0, \quad \dot{u}(t_0) = u_1 \end{cases}$$

Dónde: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $f(t) = [f_i(t)]_{n\times 1}$ es un vector de funciones continuas, $u = [u_i]_{n\times 1}$ es un vector de incógnitas que dependen de "t", $\ddot{u} = [\ddot{u}]_{n\times 1}$, y "$t_0$", "$u_0$", "$u_1$" son dados, tiene como única solución:

$$u(t) = C(t-t_0)u_0 + D(t-t_0)u_1 + \int_{t_0}^{t} D(t-s)f(s)ds$$

Dónde: $C(t)$ y $D(t)$ son las series definidas en (3.12) y (3.13) respectivamente. Simbólicamente,

$$u(t) = \cos\left[\sqrt{A}(t-t_0)\right]u_0 + \frac{sen\left[\sqrt{A}(t-t_0)\right]}{\sqrt{A}}u_1 + \int_{t_0}^{t} \frac{sen\left[\sqrt{A}(t-s)\right]}{\sqrt{A}} f(s)ds$$

<u>Prueba</u>.

En seguida, consideremos el problema de valor inicial formado por la Ecuación (3.8), con $f(t)$ continua:

$$\begin{cases} \ddot{u} + Au = f(t) \\ u(t_0) = u_0, \quad \dot{u}(t_0) = u_1 \end{cases} \tag{3.17}$$

Vamos a procurar una solución particular de (3.17) usando el método de variación de parámetros, esto es, una solución de la forma

$$u(t) = C(t - t_0)a(t) + D(t - t_0)b(t), \tag{3.18}$$

Dónde: $a(t)$ y $b(t)$ son vectores que dependen de "t". Derivando $u(t)$, obtenemos:

$$\dot{u}(t) = \dot{C}(t-t_0)a(t) + C(t-t_0)\dot{a}(t) + \dot{D}(t-t_0)b(t) + D(t-t_0)\dot{b}(t). \tag{3.19}$$

Haciendo $C(t - t_0)\dot{a}(t) + D(t - t_0)\dot{b}(t) = 0$, y derivando (3.19), se obtiene

$$\ddot{u}(t)=\ddot{C}(t-t_0)a(t)+\dot{C}(t-t_0)\dot{a}(t)+\ddot{D}(t-t_0)b(t)+\dot{D}(t-t_0)\dot{b}(t). \qquad (3.20)$$

Sustituyendo (3.20) en la Ecuación {3.17) y usando el dato que $C(t)$ y $D(t)$ es solución de la Ecuación (3.16) obtenemos

$$\dot{C}(t-t_0)\dot{a}(t)+\dot{D}(t-t_0)\dot{b}(t)=f(t)$$

Este procedimiento da origen al sistema de ecuaciones vectoriales:

$$C(t-t_0)\dot{a}(t)+D(t-t_0)\dot{b}(t)=0$$

$$\dot{C}(t-t_0)\dot{a}(t)+\dot{D}(t-t_0)\dot{b}(t)=f(t)$$

El cual eliminando, para obtener $\dot{a}(t)$ y $\dot{b}(t)$ se tiene que:

$$\left(D(t-t_0)\dot{C}(t-t_0)-\dot{D}(t-t_0)C(t-t_0)\right)\dot{a}(t)=D(t-t_0)f(t)$$

$$\left(C(t-t_0)\dot{D}(t-t_0)-\dot{C}(t-t_0)D(t-t_0)\right)\dot{b}(t)=C(t-t_0)f(t)\ .$$

Por otro lado, las expresiones entre paréntesis son identidades matriciales trigonométricas y, consecuentemente, tenemos:

$$\begin{aligned}\dot{a}(t)&=-D(t-t_0)f(t)\\ \dot{b}(t)&=C(t-t_0)f(t)\end{aligned}$$

Integrando las dos últimas igualdades y sustituyendo en la Ecuación (3.18) los valores obtenidos, resulta:

$$u(t)=C(t-t_0)\left[a(t_0)-\int_{t_0}^{t}D(s-t_0)f(s)ds\right]+D(t-t_0)\left[b(t_0)-\int_{t_0}^{t}C(s-t_0)f(s)ds\right]$$

Esto es:

$$u(t)=C(t-t_0)a(t_0)+D(t-t_0)b(t_0)+\int_{t_0}^{t}\left[D(t-t_0)C(s-t_0)-C(t-t_0)D(s-t_0)\right]f(s)ds$$

Empleando (3.17),(3.18) y (3.19) y aplicando la identidad trigonométrica del seno de una diferencia, se tiene:

$$u(t)=C(t-t_0)\dot{u}(0)+D(t-t_0)\dot{u}(0)+\int_{t_0}^{t}D(t-s)f(s)ds \tag{3.21}$$

Observaciones 2.4.2.

1. En la literatura, frecuentemente, la demostración de la Fórmula (3.21) anterior es hecha utilizando la reducción de Hamilton. Este proceso consiste en transformar el problema de segundo orden:

$$\begin{cases} \ddot{u}+Au=f(t) \\ u(t_0)=u_0,\dot{u}(t_0)=u_1 \end{cases} \tag{3.22}$$

En un sistema de primer orden, mediante un cambio de variables

$$\begin{cases} \dot{v}=\begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix}v+\begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}=Bv+f(t) \\ v(t_0)=\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Enseguida se emplea la fórmula de variación de parámetros (3.2), observando que la exponencial $e^{B(t-t_o)}$, donde B es una matriz, la llamada matriz compañera:

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix}$$

Es simplemente la matriz:

$$\begin{bmatrix} C(t-t_0) & D(t-t_0) \\ \dot{C}(t-t_0) & \dot{D}(t-t_0) \end{bmatrix}$$

2. Las matrices $C(t)$ y $D(t)$ satisfacen la ecuación diferencial matricial:

$$\ddot{E}(t)+AE(t)=0\,.$$

Sujeta a las condiciones iniciales:

$$\begin{array}{ll} C(0)=I & \dot{C}(0)=0 \\ D(0)=0 & \dot{D}(0)=I \end{array}$$

Son denominados las soluciones fundamentales del Problema (3.22). Cabe destacar que la solución denotada por $D(t)$ será de particular interés, y la llamaremos la solución dinámica. Además de esto, la solución dinámica $D(t)$ satisface el problema matricial de valor inicial:

$$\left\{\ddot{D}(t)+AD(t)=0, \quad \dot{D}(0)=I, \quad D(0)=0\right.$$

Y que $C(t)=\dot{D}(t)$ .Entonces, de acuerdo con el Teorema 3.3, la solución de (3.22) es:

$$u(t)=\dot{D}(t-t_0)u_0+D(t-t_0)u_1+\int_{t_0}^{t} D(s-t)f(s)ds \ .$$

Por lo tanto, concluimos que la solución dinámica $D(t)$ contiene toda la información necesaria para resolver la ecuación conservativa vectorial de segundo orden

$$\ddot{u}+Au=f(t)$$ **lqqd**.

2.5. Sistemas no conservativos.

En esta sección se presenta el método matricial operacional para determinar la solución $u(t)$ de la ecuación

$$M\,\ddot{u}+C\,\dot{u}+K\,u=f(t),$$

Donde las matrices M , C y K son arbitrarias de orden “n”. Si M es no singular, pre multiplicamos la ecuación por M^{-1} transformándola en:

$$\ddot{u} + C_1\dot{u} + K_1 u = f_1(t).$$

Los resultados presentados en este capítulo, son siguiendo la teoría de Claeyssen [Claeyssen J. 1990], y están fundamentados en el concepto de solución dinámica matricial.

2.5.1. El método matricial operacional.

Consideremos la ecuación diferencial vectorial:

$$\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t). \tag{4.1}$$

Aplicando la transformada de Laplace a la Ecuación (4.1) obtenemos:

$$L\{\ddot{u}\} + CL\{\dot{u}\} + KL\{u\} = L\{f(t)\}$$

De donde:

$$\left[\lambda^2 u(\lambda) - \dot{u}(0) - \lambda u(0)\right] + C\left[\lambda u(\lambda) - u(0)\right] + Ku(\lambda) = F(\lambda)$$

Ordenando:

$$\left[\lambda^2 I + C\lambda + K\right]u(\lambda) = \dot{u}(0) + (\lambda I + C)u(0) + F(\lambda)$$

O de manera más compacta, resulta la ecuación operacional:

$$\Delta(\lambda)u(\lambda) = H(\lambda) + F(\lambda) \tag{4.2}$$

Donde: $\Delta(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda C + K$,

$$H(\lambda) = \dot{u} + (\lambda I + C)u(0).$$

$u(\lambda)$ y $F(\lambda)$ son las transformadas de Laplace de “u” y de $f(t)$ respectivamente.

Ahora introduciremos formalmente el concepto de solución dinámica (ya mencionada en la sección 2.4), que es la base para la obtención de la solución $u(t)$ de (4.1).

Definición 2.5.1. La solución matricial al problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{D}+C\dot{D}+KD=0, \\ \dot{D}(0)=I, D(0)=0, \end{cases} \tag{4.3}$$

Se denomina solución dinámica asociada a la Ecuación (4.1).

A continuación presentamos el teorema en el que se asocian las ecuaciones diferenciales dadas en (4.1) y (4.3).

Teorema 5.1. La solución al problema:

$$\begin{cases} \ddot{u}+C\dot{u}+Ku=f(t), \\ \dot{u}(0)=\dot{u}_0, u(0)=u_0, \end{cases}$$

Es dada por:

$$u(t)=D(t)\dot{u}_0+\left(\dot{D}(t)+D(t)C\right)u_0+\int_0^t D(t-s)f(s)ds$$

Donde $D(t)$ es la solución dinámica, o sea, la solución al problema matricial

$$\begin{cases} \ddot{D}+C\dot{D}+KD=0 \\ \dot{D}(0)=I, \quad D(0)=0. \end{cases}$$

<u>Prueba</u>.

Procediendo de manera análoga a la obtención de la ecuación operacional (4.2), de (4.3) resulta:

$$\Delta(\lambda)D(\lambda)=H(\lambda)+F(\lambda),$$

Donde: $\Delta(\lambda)=\lambda^2 I+\lambda C+K$

$$H(\lambda)=\dot{D}(0)+(\lambda I+C)D(0).$$

Como $F=0$, $\dot{D}(0)=I$, $D(0)=0$, se obtiene la ecuación:

$$\Delta(\lambda)D(\lambda)=I \tag{4.4}$$

Siendo $D(\lambda)$ la transformada de Laplace de $D(t)$ y es referida como la matriz de transferencia del sistema (4.1).

Vemos de (4.4) que $\Delta^{-1}(\lambda)=D(\lambda)$. Tomando en cuenta esta igualdad y pre multiplicando (4.2) por $\Delta^{-1}(\lambda)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} u(\lambda)&=D(\lambda)H(\lambda)+D(\lambda)F(\lambda)\\ &=D(\lambda)\dot{u}(0)\big(\lambda D(\lambda)+D(\lambda)C\big)u(0)+D(\lambda)F(\lambda)\end{aligned}$$

Y tomando la transformada inversa de Laplace obtenemos:

$$u(t)=D(t)\dot{u}(0)+\big(\lambda D(\lambda)+D(\lambda)C\big)u(0)+D(\lambda)F(\lambda) \tag{4.5}$$

Lqqd.

La Ecuación (4.5) indica que para conocer la respuesta (solución) del sistema (4.1) es suficiente conocer la solución dinámica asociada al mismo.

2.5.2. Obtención de la solución dinámica.

Veamos, brevemente, dos alternativas teóricas para la obtención de la solución dinámica $D(t)$. Por un lado, si consideramos la ecuación:

$$\ddot{u}+C\dot{u}+Ku=0 \tag{4.6}$$

Las soluciones de la forma $u(t)=e^{\lambda t}v$ (llamadas soluciones propias) de (4.6) son obtenidos resolviendo el sistema:

$$\left(\lambda^2 I+\lambda C+K\right)v=0, \quad v\neq 0 \tag{4.7}$$

Lo que equivale a hallar las raíces (auto valores de (4.6)) del polinomio característico:

$$p(\lambda)=\det\left(\lambda^2 I+\lambda C+K\right)=\sum_{i=0}^{2n} b_i\lambda^{2n-i} \tag{4.8}$$

Y determinar los auto vectores v. Además de eso, como

$$D(\lambda)=\Delta^{-1}(\lambda)=\frac{adj\Delta(\lambda)}{p(\lambda)},$$

Los polos de $D(\lambda)$ son los auto valores de (4.6) y, como existe un número finito de ellos, la integral de Bromwich para la transformada inversa de Laplace se reduce a una integral de contorno limitado.

$$D(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} D(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda \tag{4.9}$$

Donde Γ es una circunferencia que encierra los auto valores de (4.6). Por otro lado cuando la solución dinámica es escrita como una serie de Taylor, o sea:

$$D(t)=\sum_{j=0}^{\infty} D_j\frac{t^j}{j!}, \tag{4.10}$$

Donde $D_j=D^{(j)}(0)$ y es sustituida en la Ecuación (4.3), da origen al problema matricial en diferencias:

$$\begin{cases} D_{j+2}+CD_{j+1}+KD_j=0, \\ D_1=I,\ D_0=0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Se observa que en el cálculo de la Fórmula (4.9) es necesario conocer la matriz de transferencia, además para (4.11) no es fácil generar las matrices D_j para j muy grande.

En la sección siguiente, veremos un método alternativo para calcular la solución dinámica.

2.5.3. Método de cálculo para la solución dinámica.

Teorema 5.2. La solución dinámica $D(t)$ asociada a la ecuación:

$$\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t)$$

Es dada por

$$D(t) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) D_{2n-j},$$

Donde $b_i, i = 0 : 2n$ son los coeficientes del polinomio característico $p(\lambda) = \det(\lambda^2 I + \lambda C + K)$, la función $d(t)$ satisface el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} D_{j+2} + CD_{j+1} + KD_j = 0, \quad j = 0 : 2n-3 \\ D_1 = 0, \ D_0 = 0 \end{cases}$$

Prueba.

El sistema $\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t)$ puede ser escrito como:

$$\dot{w} = Ew,$$

Donde:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -C \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix}$$

Y cuya solución es $w(t) = e^{Et} w(0)$ Además de esto,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} D(t) \\ \dot{D}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{D}(t) \\ \ddot{D}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{D}(t) \\ -kD(t)-C\dot{D}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D(t) \\ \dot{D}(t) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} D(t) \\ \dot{D}(t) \end{bmatrix} = e^{Et}\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \qquad (4.12)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la igualdad $\frac{d}{dt}e^{Et} = Ee^{Et}$ obtenemos

$\lambda\varepsilon(\lambda) - I = E\varepsilon(\lambda)$, esto es

$$(\lambda I - E)\varepsilon(\lambda) = I \qquad (4.13)$$

Donde $\varepsilon(\lambda)$ es la transformada de Laplace de e^{Et} .Entonces de (4.13) se tiene que:

$$\varepsilon(\lambda) = (\lambda I - E)^{-1} = \frac{adj(\lambda I - E)}{\det(\lambda I - E)}. \qquad (4.14)$$

Podemos verificar que $(\lambda I - E) = \det(\lambda^2 I + \lambda C + K) = p(\lambda)$, en efecto la matriz:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -C \end{bmatrix}$$

Es cuadrada de orden "$2n$", donde aplicando determinante de matrices por bloques en el proceso siguiente se obtiene:

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - E) &= \det\begin{bmatrix} \lambda I & -I \\ K & \lambda I + C \end{bmatrix} \\
&= \det\begin{bmatrix} 0 & -I \\ K + \lambda^2 I + C\lambda & \lambda I + C \end{bmatrix} \\
&= (-1)^n \det\begin{bmatrix} K + \lambda^2 I + C\lambda & \lambda I + C \\ 0 & -I \end{bmatrix} \\
&= (-1)^n \det\left[K + \lambda^2 I + C\lambda\right]\det[-I] \\
&= (-1)^n \det\left[K + \lambda^2 I + C\lambda\right](-1)^n \det[I] \\
&= \det\left[K + \lambda^2 I + C\lambda\right] \\
&= p(\lambda)
\end{aligned}$$

Donde $p(\lambda)$ es el polinomio característico ya definido en (4.8). Por otro lado, también tenemos la siguiente igualdad para la matriz adjunta [Collante A. 2005, págs. 47-50].

$$adj(\lambda I - E) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i \lambda^{j-i-1} E^{2n-j},$$

Y, de (4.14), obtenemos que:

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{\sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j=1} b_i \lambda^{j-i-1} E^{2n-j}}{p(\lambda)} .$$

Utilizando la integral de Bromwich para determinar la inversa de la transformada de Laplace, tenemos que:

$$e^{Et} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{adj(\lambda I - E)}{p(\lambda)} e^{\lambda t} d\lambda = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j=1} b_i \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{j-i-1} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{p(\lambda)} \right) E^{2n-j}, \tag{4.15}$$

Siendo Γ una circunferencia que encierra todas las raíces de $p(\lambda)$.

La Función:

$$d(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t}}{p(\lambda)} d\lambda, \tag{4.16}$$

Es de clase C^{∞} y sus derivadas son dadas por:

$$d^{(m)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\lambda^m e^{\lambda t}}{p(\lambda)} d\lambda. \tag{4.17}$$

Al evaluar la integral de línea dada por la Ecuación (4.17) se consigue obtener [Collante A. 2005, pág. 51],

$$d^{(2n-i)}(0) = 1, \; d(0) = d'(0) = \cdots = d^{(2n-2)}(0) = 0. \tag{4.18}$$

Además de (4.16), aplicando la fórmula integral de Bromwich se tiene que la transformada de Laplace de la función es:

$$L\left\{d\left(t\right)\right\}=\frac{1}{p\left(\lambda\right)}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
1&=P\left(\lambda\right)l\left[d\right]\\
&=\left(\sum_{i=0}^{2n}b_i\lambda^{2n-i}\right)l\left\{d\left(t\right)\right\}\\
&=\frac{b_0\lambda^{2n}+b_1\lambda^{2n-1}+b_2\lambda^{2n-2}+\cdots+b_{N-1}\lambda+b_N}{p\left(\lambda\right)}\\
&=b_0\left(\frac{\lambda^{2n}}{p\left(\lambda\right)}\right)+b_1\left(\frac{\lambda^{2n-1}}{p\left(\lambda\right)}\right)+b_2\left(\frac{\lambda^{2n-2}}{p\left(\lambda\right)}\right)+\cdots+b_N\left(\frac{1}{p\left(\lambda\right)}\right)\\
&=1+b_0\left(\lambda^{2n}L\left\{d\left(t\right)\right\}-1\right)+b_1\left(\lambda^{2n-1}L\left\{d\left(t\right)\right\}\right)+b_2\left(\lambda^{2n-2}L\left\{d\left(t\right)\right\}\right)+\cdots+b_N\left(L\left\{d\left(t\right)\right\}\right)
\end{aligned}$$

Se sumó y restó 1 ya que $b_0=1$

$$=1+b_0\left(\lambda^{2n}L\left\{d\left(t\right)\right\}-1\right)+b_1\left(\lambda^{2n-1}L\left\{d\left(t\right)\right\}\right)+b_2\left(\lambda^{2n-2}L\left\{d\left(t\right)\right\}\right)+\cdots+b_N\left(L\left\{d\left(t\right)\right\}\right)$$

Empleando (4.18) la última igualdad la podemos expresar como desarrollos de la transformada de Laplace de derivadas, es decir:

$$\begin{aligned}
1&=1+b_0\left(\lambda^{2n}L\left\{dt\right\}-\lambda^{2n-1}d\left(0\right)-\lambda^{2n-2}d'\left(0\right)-\cdots-\lambda d^{(2n-2)}\left(0\right)-d^{(2n-1)}\left(0\right)\right)+\\
&\quad b_1\left(\lambda^{2n-1}L\left\{dt\right\}-\lambda^{2n-2}d\left(0\right)-\lambda^{2n-3}d'\left(0\right)-\cdots-\lambda d^{(2n-2)}\left(0\right)\right)+\cdots+\\
&\quad b_{2n-1}\left(\lambda L\left\{d\left(t\right)\right\}-d\left(0\right)\right)+b_{2n}\left(L\left\{d\left(t\right)\right\}\right)\\
&=1+\sum_{i=0}^{2n}b_iL\left\{d^{(2n-1)}\left(t\right)\right\},
\end{aligned}$$

De donde se concluye que $\sum_{i=0}^{2n}b_iL\left\{d^{(2n-1)}\left(t\right)\right\}=0.$.

Por la linealidad de la transformada de Laplace se tiene:

$$L\left(\sum_{i=0}^{2n} b_i d^{(2n-i)}(t)\right) = 0. \tag{4.19}$$

De (4.18) y de (4.19) se logra establecer que la función $d(t)$ satisface el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{2n} b_i d^{(2n-i)}(t) = 0, \\ d^{(2n-i)}(0) = 1, \;\; d(0) = d'(0) = \cdots = d^{(2n-2)}(0) = 0, \end{cases}$$

Sustituyendo (4.17) en (4.15) obtenemos:

$$e^{Et} = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j=1} b_i d^{(j-i-1)}(t) E^{2n-j}. \tag{4.20}$$

De (4.12), tenemos que:

$$\frac{d^k}{dt^k}\begin{bmatrix} D(t) \\ \dot{D}(t) \end{bmatrix} = E^k e^{Et} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix},$$

Y en $t = 0$

$$\begin{bmatrix} D_k \\ D_{k+1} \end{bmatrix} = E^k \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix},$$

Esto es:

$$\begin{bmatrix} D_k \\ D_{k+1} \end{bmatrix} = E^k \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \;\; \mathrm{k} \geq 0. \tag{4.21}$$

A través de (4.12) y (4.20), podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} D(t) \\ \dot{D}(t) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j=1} b_i d^{(j-i-1)}(t) E^{2n-j} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j=1} b_i d^{(j-i-1)}(t) \begin{bmatrix} D_{2n-j} \\ D_{2n-j+1} \end{bmatrix}, \tag{4.22}$$

Donde la última igualdad fue obtenida de (4.21). De este modo, tendremos una fórmula para la solución dinámica

$$D(t) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j=1} b_i d^{(j-i-1)}(t) D_{2n-j}$$

Donde los coeficientes matriciales D_{2n-j}, $j=1:2n$ pueden ser determinados recursivamente por la aplicación de (4.11). **Lqqd.**

Para efecto numérico, enfatizamos la segunda igualdad obtenida a partir de (4.22), ósea:

$$\dot{D}(t)=\sum_{j=1}^{2n}\sum_{i=0}^{j=1}b_i d^{(j-i-1)}(t)D_{2n-j+1}$$

Estos resultados fueron establecidos por J. R. Claeyssen, [Claeyssen J. 1990, pág. 76].

2.5.4. Interpretación física de la solución dinámica.

Consideremos un sistema físico con "n" componentes, cuyas respuestas $u_i, i=1:n$ son determinadas a partir del siguiente P.V.I.

$$\begin{cases} \ddot{u}+C\dot{u}+Ku=0, \\ \dot{u}(0)=e_j, u(0)=0, \end{cases} \tag{4.23}$$

Donde C y K son matrices cualesquiera, $u=[u_i]_{n\times 1}$ es el vector columna de desplazamientos y $e_j=[\delta_{ij}]_{n\times 1}$ es el j-ésimo vector de la base canónica.

La solución de (4.23) de acuerdo con (4.5), está dada por:

$$u(t)=D(t)\dot{u}(0)+\left(\dot{D}(t)+D(t)C\right)u(0)+\int_0^t D(t-s)f(s)ds.$$

Como $\dot{u}(0)=e_j, u(0)=0, f(t)=0$, tenemos:

$$u(t)=D(t)e_j$$

Y la k-ésima componente es:

$$u_k(t) = e_k^T u(t) = e_k^T D(t) e_j = D_{kj}(t).$$

De este modo, podemos afirmar que el elemento $D_{kj}(t)$ de la solución dinámica $D(t)$ es la respuesta de la k-ésima componente del sistema, debido a una fuerza unitaria concentrada en la j-ésima componente.

2.6. DEFINICIÓN DE TÉRMINOS BÁSICOS

- **Coeficiente:** Es el número que va situado a la izquierda de una letra o literal.
- **Constante:** Valor de tipo permanente
- **Función de transferencia:** Cociente entre la transformada de Laplace de la salida de un sistema y la transformada de Laplace de la entrada.
- **Función:** Usada en matemáticas para modelar situaciones de la dependencia de una variable sobre otra.
- **Matriz:** Colección rectangular de números o expresiones.
- **Matriz aumentada:** Matriz que representa un sistema de ecuaciones. Las entradas incluyen columnas para los coeficientes de cada variable y una columna final para los términos constantes.
- **Matriz inversa:** Matriz que se simboliza por $[A]^{-1}$, que produce una matriz identidad cuando se la multiplica por [A].
- **Sistema de ecuaciones:** Conjunto de ecuaciones que presentan soluciones comunes.
- **Transformación:** útil para modelar, analizar y diseñar sistemas de control, así como para resolver ecuaciones diferenciales lineales.

- **Transformada de Laplace:** transformación que asocia a cada función real $f(t)$ una función compleja $F(s)$. (Z: número complejo).

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

3.1 Ubicación Geográfica del Estudio.

Universidad Nacional del Altiplano.

3.2 Periodo de Duración del Estudio.

Año académico 2017.

3.3 Procedimiento.

El trabajo de investigación se realizó de la siguiente forma:

La búsqueda de información relacionada al tema de investigación en fuentes primarios, segundarios y páginas de internet y otros¸ para tener una idea clara sobre el tema de investigación; luego se efectuó la búsqueda de antecedentes relacionados sobre la investigación y finalmente el análisis del marco teórico para aplicarlo al modelo matemático utilizando ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes matriciales en la vibración de edificios.

3.4 Variables

3.4.1. Operacionalización de variables.

3.4.1.1. Variable Independiente (X)

Ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes matriciales.

3.4.1.2. Variable dependiente (Y)

Modelo matemático en vibración de edificios.

3.5 Análisis del resultado

3.5.1 Aplicación de sistemas no conservativos: modelación de sistemas con "N" grados de libertad para edificios

En este capítulo se presentan algunos modelos de sistemas no conservativos, es decir sistemas en la cual la energía del sistema disminuye en el tiempo, razón por la cual un movimiento producido por alguna perturbación inicial, no continúa para siempre. Varios factores contribuyen para este amortiguamiento. El más común es la fricción viscosa.

A continuación consideramos sistemas constituidos por edificios de varios pisos, que al ser modelados, se obtiene una formulación matricial de la forma:

$$M\,\ddot{x} + D\,\dot{x} + K\,x = h(t).$$

3.5.2 Formulación de un modelo matemático básico

Un edificio puede ser considerado como un sistema de elementos con masa distribuida y elasticidad. Pero hay elementos que son masivos y duros (pisos) y están conectados con otros miembros que poseen masa relativamente pequeña pero de gran flexibilidad (paredes, columnas).

En una estructura idealizada de "N" pisos que se muestra en la gráfica N° 08 las ecuaciones de movimiento puede ser descrita de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i &= k_{i+1}\left(\ddot{x}_{i+1} - x_i\right) - k_i\left(x_i - x_{i-1}\right) + c_{i+1}\left(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i\right) \\ &\quad - c_i\left(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}\right) + u_i + w_i, \qquad i = 1 : N-1 \\ m_N\ddot{x}_N &= -k_N\left(x_N - x_{N-1}\right) - c_N\left(\dot{x}_N - \dot{x}_{N-1}\right) + u_N + w_{N,} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dónde: m_i , c_i y k_i son la masa, coeficiente de amortiguamiento y rigidez de i-*ésimo* piso respectivamente, "u" la fuerza de control y "w" la carga externa ejercida sobre el *i*-ésimo piso. Por tanto las Ecuaciones (5.1) pueden ser escritas también en forma matricial.

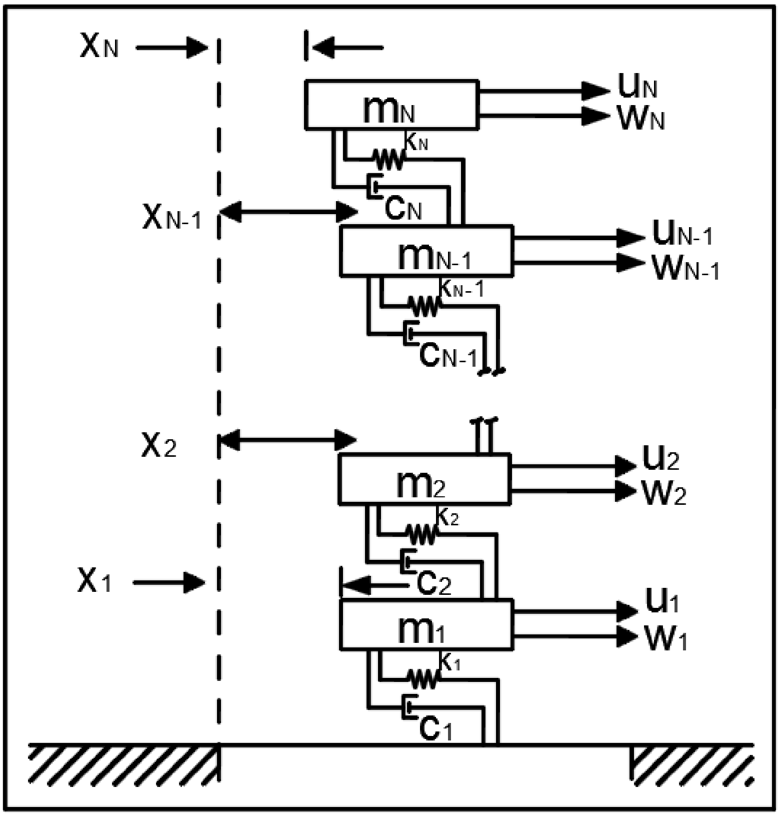

Grafico N° 08: Modelo básico.

Como sigue:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = u + w \,, \qquad (5.2)$$

Donde:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_N \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_N \end{bmatrix}$$

$$K=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_N \end{bmatrix},$$

Son las matrices de masa, amortiguación y rigidez respectivamente.

$$x=\left(x_1,x_2,...,x_N\right)^T,$$
$$u=\left(u_1,\mathrm{u}_2,...,\mathrm{u}_N\right)^T,$$
$$w=\left(w_1,\mathrm{w}_2...,\mathrm{w}_N\right)^T,$$

Son el vector desplazamiento relativo a la base, el vector fuerza de control y el vector de carga externa respectivamente.

3.5.3 Formulación de un modelo matemático con excitación sísmica.

Tenemos el movimiento de una estructura lineal elástica (grafica N° 09) con "N" grados de libertad y amortiguamiento viscoso, sujeta a una aceleración $\dot{X}_g\left(t\right)$ en la base, la cual satisface las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{z} &= k_{i+1}\left(z_{i+1}-z_i\right)-k_i\left(z_i-z_{i-1}\right)+c_{i+1}\left(\dot{z}_{i+1}-\dot{z}_i\right) \\ &\quad -c_i\left(\dot{z}_i-\dot{z}_{i-1}\right), i=1:N-1 \\ m_N\ddot{z}_N &= -k_N\left(z_N-z_{N-1}\right)-c_N\left(\dot{z}_N-\dot{z}_{N-1}\right) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Donde "m_i", "c_i" y "k_i" son la masa, coeficiente de amortiguamiento y rigidez del *i*-ésimo piso respectivamente, y "z_i" es el desplazamiento absoluto de la i-ésima masa.

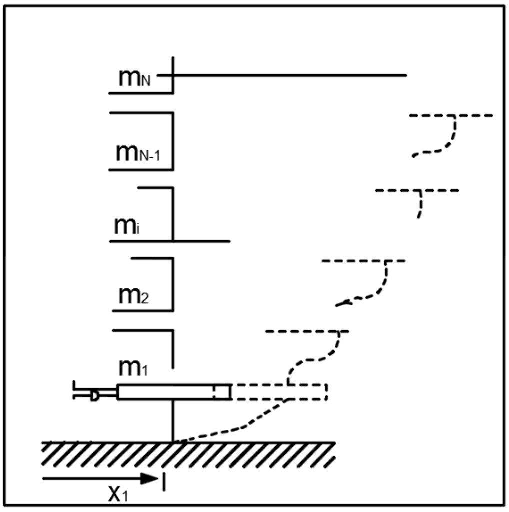

Grafico N° 09: Edificio sin amortiguamiento de masa regulada.

Por lo tanto, si el desplazamiento absoluto "z_i" es sustituido por el desplazamiento relativo "x_i", se establece las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x_i = z_i - X_g \\ \dot{x}_i = \dot{z}_i - \dot{X}_g \\ \ddot{x}_i = \ddot{z}_i - \ddot{X}_g \end{cases} \tag{5.4}$$

Reemplazando las Ecuaciones (5.4) en las Ecuaciones (5.3), obtenemos

$$\begin{aligned} m_1\left(\ddot{x}_i + \ddot{X}_g\right) &= k_{i+1}\left(x_{i+1} - x_i\right) - k_i\left(x_i - x_{i-1}\right) + c_{i+1}\left(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i\right) \\ &\quad - c_i\left(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}\right), i = 1 : N-1 \\ m_N\left(\ddot{x}_N + \ddot{X}_g\right) &= -k_N\left(x_N - x_{N-1}\right) - c_N\left(\dot{x}_N - \dot{x}_{N-1}\right) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Finalmente las ecuaciones dadas en (5.5) también pueden ser escritas como una ecuación diferencial matricial de segundo orden como sigue:

$$M\left(\ddot{x} + v\ddot{x}_g\right) + C\dot{x} + Kx = 0, \tag{5.6}$$

Donde M , C y K son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez ya conocidas, $v=(1,1,\ldots,1)^T$ es un vector "N" dimensional, y $x=(x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$, es el vector de desplazamientos relativo.

Considerando el mismo modelo anterior, pero con un amortiguador de masa regulada y colocado en el último piso (grafica N° 10). Entonces la ecuación de movimiento del nuevo sistema de múltiples grados de libertad es:

$$M\left(\ddot{x}+v\ddot{X}_g\right)+C\dot{x}+Kx-f=0.$$

Esta ecuación es idéntica a la Ecuación (5.6), excepto por la adición del vector $f=(0,0,0,\ldots,c_d\,x_d+k_d x_d)^T$ que representa la fuerza aplicada a los pisos.

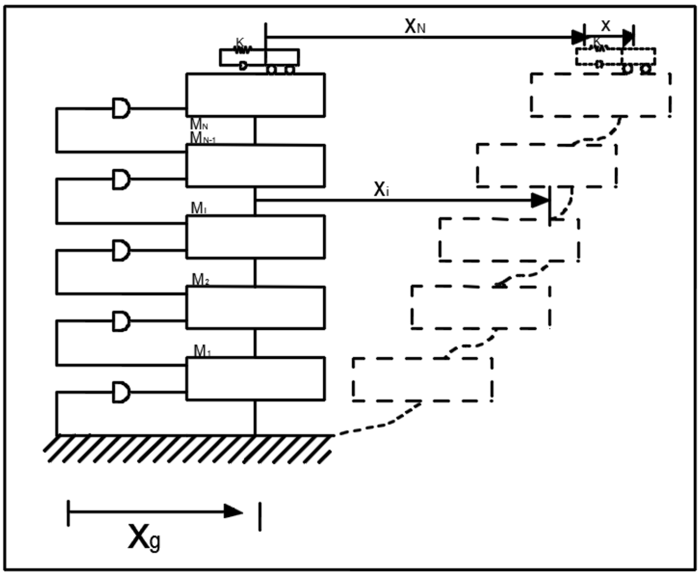

Grafico N° 10: Edificio con amortiguamiento de masa regulada.

De la Grafica N° 10 tenemos:

x_d , es el desplazamiento del vibrador absorbente relativo,

k_d , es la rigidez de la fuerza y c_d es el coeficiente de amortiguamiento.

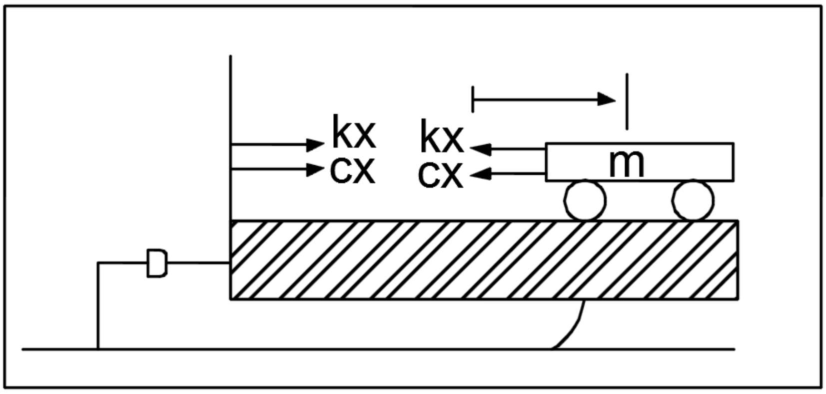

Grafico N° 11: Amortiguamiento de masa regulada.

3.5.4 Vibración horizontal de un edificio de 4 pisos.

Consideremos un modelo de vibración horizontal de un edificio de cuatro pisos [Inman D. 2001, págs. 282-283], expuesto a vientos que ocasionan un desplazamiento inicial de:

$$u(0) = \begin{bmatrix} 0,025 \\ 0,020 \\ 0,010 \\ 0,001 \end{bmatrix},$$

Tal como está representado en la gráfica N° 12.

La ecuación diferencial vectorial de segundo orden con coeficientes matriciales de orden 4 es como sigue:

$$M\ \ddot{u} + C\ \dot{u} + K\ u = F(t)$$

$$u(0) = \begin{bmatrix} 0,025 \\ 0,020 \\ 0,010 \\ 0,001 \end{bmatrix}, \qquad \dot{u}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.7}$$

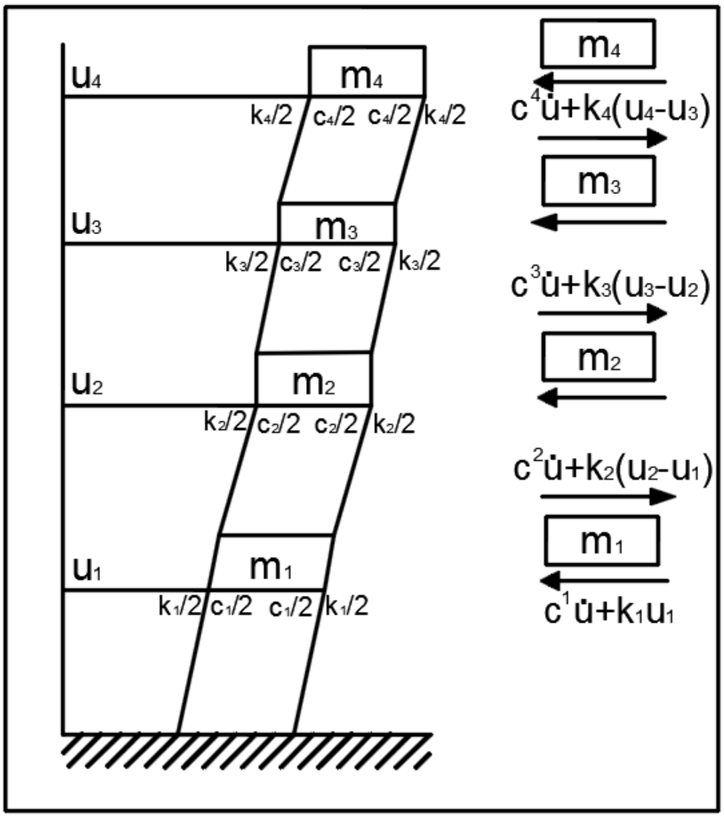

Grafico N° 12: Modelo de vibración horizontal de un edificio de cuatro y las fuerzas restauradoras en cada masa (piso).

Donde:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix},$$

Y la matriz:

$$C = \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \\ c^4 \end{bmatrix}$$

Es consecuencia de la suposición de determinado amortiguamiento (i, en cada nodo del sistema.

Consideraremos que $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 4000$ Kg y $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 5000$ N/m. De este modo,

$$M = \begin{bmatrix} 4000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4000 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 10000 & -5000 & 0 & 0 \\ -5000 & 10000 & -5000 & 0 \\ 0 & -5000 & 10000 & -5000 \\ 0 & 0 & -5000 & 5000 \end{bmatrix},$$

Suponemos que existe un amortiguamiento de $\zeta_i = 0.01, \quad i = 1:4$, en cada nodo.

Estos datos dan origen a la matriz [Canagualpa G.1995, pág. 47].

$$C = \begin{bmatrix} 121,3652 & -349576 & -6,2651 & -3,0352 \\ -34,9576 & 115,1000 & -37,9928 & -44,2579 \\ -6,2651 & -37,9928 & 112,0649 & -44,2579 \\ -3,0352 & -9,3003 & -44,2579 & -77,1073 \end{bmatrix}$$

Por otro lado vamos a suponer que se tiene la fuerza externa

$$F(t) = 4000 \begin{bmatrix} e^{-0,5t} \cos 8t \\ e^{-0,25t} sen 8t \\ e^{-0,1t} \cos 10t \\ e^{-0,05t} sen 10t \end{bmatrix}$$

Reescribiendo la Ecuación (5.7) en la forma

$$\ddot{u} + A_1 \dot{u} + A_2 u = f(t)$$

Se tiene

$$A_1 = M^{-1}.\mathrm{C}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{303413}{10000000} & -\frac{43697}{5000000} & -\frac{62651}{40000000} & -\frac{1897}{2500000} \\ -\frac{43697}{5000000} & \frac{1151}{40000} & -\frac{47491}{5000000} & -\frac{93003}{40000000} \\ -\frac{62651}{40000000} & -\frac{47491}{5000000} & \frac{1120649}{40000000} & -\frac{442579}{40000000} \\ -\frac{1897}{2500000} & -\frac{93003}{40000000} & -\frac{442579}{40000000} & \frac{771073}{40000000} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = M^{-1}.\mathrm{K}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

Su polinomio característico asociado $p(\lambda) = \det\left(\lambda^2 I + \lambda A_1 + A_2\right)$ es:

$$P(\lambda) = \lambda^8 + 0{,}1064093499\lambda^7 + 8{,}753911474\lambda^6 + 0{,}6159559004\lambda^5 + 23{,}45006228\lambda^4$$
$$+ 0{,}8854267010\lambda^3 + 19{,}53736167\lambda^2 + 0{,}2211687011\lambda + 2{,}44140625$$

Resolviendo la ecuación característica, $p(\lambda) = 0$, se obtiene los siguientes resultados

$$\lambda_1 = -0{,}003882885493 - 0{,}3882697145i,$$
$$\lambda_2 = -0{,}003882885493 + 0{,}3882697145i,$$
$$\lambda_3 = -0{,}01712927403 - 1{,}7128418i,$$
$$\lambda_4 = -0{,}01712927403 + 1{,}7128418i,$$
$$\lambda_5 = -0{,}02101216964 - 2{,}101111514i,$$
$$\lambda_6 = -0{,}02101216964 + 2{,}101111514i,$$
$$\lambda_7 = -0{,}01118034583 - 1{,}117978085i,$$
$$\lambda_8 = -0{,}01118034583 + 1{,}117978085i,$$

Por tanto los coeficientes del polinomio característico son los $b_i, \;\; i = 0:2n,$ es decir:

$$
\begin{aligned}
b_0 &= 1, \\
b_1 &= 0,1064093499, \\
b_2 &= 0,8753911474, \\
b_3 &= 0,6159559004, \\
b_4 &= 23,45006228, \\
b_5 &= 0,8854267010, \\
b_6 &= 19,53736167, \\
b_7 &= 0,2211687011, \\
b_8 &= 2,44140625.
\end{aligned}
$$

A continuación obtenemos la solución dinámica escalar $d(t)$ resolviendo el sistema:

$$\sum_{j=0}^{8} b_j d^{(8-j)}(t) = 0$$

$$d(0) = 0 = d^{(1)}(0) = d^{(2)}(0) = d^{(3)}(0) = d^{(4)}(0) = d^{(5)}(0) = d^{(6)}(0) = 0; d^{(7)}(0) = 1$$

Reemplazando los "b_1" y desarrollando la sumatoria, se tiene la ecuación diferencial homogénea de octavo orden con valores iniciales

$$
\begin{aligned}
&d^{(8)} + 0,1064093499d^{(7)} + 8,75391147d^{(6)} + 0,6159559004d^{(5)} + 23,45006228d^{(4)} \\
&+0,8854267010d^{(3)} + 19,53736167d^{(2)} + 0,2211687011d + 2,44140625 = 0
\end{aligned}
$$

$$d(0) = 0 = d^{(1)}(0) = d^{(2)}(0) = d^{(3)}(0) = d^{(4)}(0) = d^{(5)}(0) = d^{(6)}(0) = 0; d^{(7)}(0) = 1$$

La ecuación característica de la solución dinámica escalar $d(t)$ es:

$$
\begin{aligned}
&r^8 + 0,1064093499r^7 + 0,8753911474r^6 + 0,6634469004r^5 + 0,2345261577r^4 \\
&+1,087872240r^3 + 19,54258219r^2 + 0,4240720214r + 2,44140625 = 0
\end{aligned}
$$

Cuyas raíces son:

$$r_1 = -0,003882885493 - 0,3882697145i,$$
$$r_2 = -0,003882885493 + 0,3882697145i,$$
$$r_3 = -0,01712927403 - 1,7128418i,$$
$$r_4 = -0,01712927403 + 1,7128418i,$$
$$r_5 = -0,02101216964 - 2,101111514i,$$
$$r_6 = -0,02101216964 + 2,101111514i,$$
$$r_7 = -0,01118034583 - 1,117978085\mathrm{i},$$
$$r_8 = -0,01118034583 + 1,117978085\mathrm{i},$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea es:

$$\begin{aligned} d(t) = {} & e^{(-0,003882885493t)}\left(a_1\cos(-0,3882697145t) + a_2 sen(-0,3882697145t)\right) \\ & + e^{(-0,003882885493t)}\left(a_3\cos(0,3882697145t) + a_4 sen(0,3882697145t)\right) \\ & + e^{(-0,01712927403t)}\left(a_5\cos(-1,7128418t) + a_6 sen(-1,7128418t)\right) \\ & + e^{(-0,01712927403t)}\left(a_7\cos(1,7128418t) + a_8 sen(1,7128418t)\right) \\ & + e^{(-0,02101216964t)}\left(a_9\cos(-2,101111514t) + a_{10} sen(-2,101111514t)\right) \\ & + e^{(-0,02101216964t)}\left(a_{11}\cos(2,101111514t) + a_{12} sen(2,101111514t)\right) \\ & + e^{(-0,01118034583t)}\left(a_{13}\cos(-1,117978085t) + a_{14} sen(-1,117978085t)\right) \\ & + e^{(-0,01118034583t)}\left(a_{15}\cos(1,117978085t) + a_{16} sen(1,117978085t)\right) \end{aligned}$$

Al reducir resulta:

$$\begin{aligned} d(t) = {} & e^{-0,003882885493t}\left(c_1\cos(0,3882697145t) + c_2 sen(0,3882697145t)\right) \\ & + e^{-0,01712927403t}\left(c_3\cos(1,7128418t) + c_4 sen(1,7128418t)\right) \\ & + e^{-0,02101216964t}\left(c_5\cos(2,101111514t) + c_6 sen(2,101111514t)\right) \\ & + e^{-0,01118034583t}\left(c_{13}\cos(1,117978085t) + c_8 sen(1,117978085t)\right) \end{aligned}$$

Hallando las constante $c_i\,; i = 1:8,$ y como se conoce que se cumple

$$
\begin{aligned}
d(0) &= 0,\\
d^{(1)}(0) &= 0,\\
d^{(2)}(0) &= 0,\\
d^{(3)}(0) &= 0,\\
d^{(4)}(0) &= 0,\\
d^{(5)}(0) &= 0,\\
d^{(6)}(0) &= 0,\\
d^{(7)}(0) &= 1,
\end{aligned}
$$

Se forma un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son los $c_i\ ; i = 1:8$. Al resolver obtenemos:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= -0,002363208786,\\
c_2 &= -0,1974090656,\\
c_3 &= -0,003143974041,\\
c_4 &= -0,08405060837,\\
c_5 &= -0,0009749474756,\\
c_6 &= -0,02379281549,\\
c_7 &= -0,004532235352,\\
c_8 &= -0,1526093158.
\end{aligned}
$$

Por tanto la solución dinámica escalar es:

$$
\begin{aligned}
d(\mathrm{t}) = e^{-0,003882885493t}&\left(-0,002363208786\cos\left(0,3882697145t\right) - 0,1974090656\,sen\left(0,3882697145t\right)\right)\\
+ e^{-0,01712927403t}&\left(-0,003143974041\cos\left(1,7128418t\right) + 0,08405060837\,sen\left(1,7128418t\right)\right)\\
+ e^{-0,02101216964t}&\left(0,0009749474756\cos\left(2,101111514t\right) - 0,02379281549\,sen\left(2,101111514t\right)\right)\\
+ e^{-0,01118034583t}&\left(0,004532235352\cos\left(1,117978085t\right) - 0,1526093158\,sen\left(1,117978085t\right)\right),
\end{aligned}
$$

Cuya gráfica es dada en la gráfica N° 13.

Hallando las matrices $D_2, D_3, \ldots, D_7$ del problema matricial en diferencias:

$$
\begin{aligned}
D_{j+2} + A_1 D_{j+1} + A_2 D_j &= 0,\ J = 0:5\\
D_1 = 1, \quad D_0 &= 0,
\end{aligned}
$$

Se tiene:

$$D_2 = \begin{bmatrix} -0,03034129999 & 0,008739399999 & 0,001566274999 & 0,0007588 \\ 0,008739399999 & -0,028775 & 0,009498199999 & 0,002325074999 \\ 0,001566274999 & 0,009498199999 & -0,028016225 & 0,01106447499 \\ 0,0007588 & 0,002325074999 & 0,01106447499 & -0,01927682499 \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} -2,498999999 & 1,2495 & 3,602404086\times10^{-10} & -4,622143602\times10^{-10} \\ 1,2495 & -2,499 & 1,249499999 & -4,384667924\times10^{-11} \\ 3,60240513\times10^{-10} & 1,249499999 & -2,498999999 & 1,249499999 \\ -4,622144192\times10^{-10} & -4,384707172\times10^{-11} & 1,249499999 & -1,249499999 \end{bmatrix}$$

Gráfica de la solución escalar $d(t)$ es:

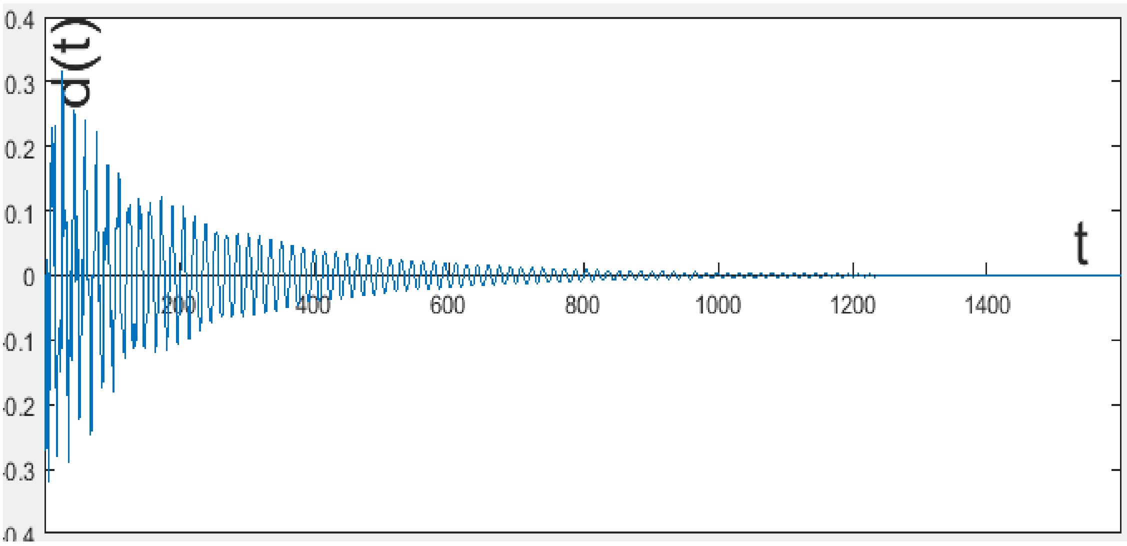

Grafico N° 13: Grafica de la solución dinámica escalar d(t).

$$D_4 = \begin{bmatrix} 0,1735202889 & -0,1156114043 & 0,01591094216 & 0,002018283775 \\ -0,1156114043 & 0,1419401062 & -0,1135931205 & 0,01792922593 \\ 0,01591094216 & -0,1135931205 & 0,1914495149 & -0,09768220964 \\ 0,002018283775 & 0,01792922593 & -0,09768220964 & 0,07583807933 \end{bmatrix}$$

Es Posible relacionar la masa, la amortiguación, la rigidez y la fuerza externas, es posible obtener un modelo matemático mediante el método operacional matricial, teniendo en cuenta la solución dinámica matricial.

$$D_5 = \begin{bmatrix} 7,803126246 & -6,242500998 & 1,560625245 & 3,156013554\times10^{-9} \\ -6,242500999 & 9,363751503 & -6,242500996 & 1,560625248 \\ 1,560625245 & -6,24250996 & 9,363751493 & -4,681875747 \\ 3,156013533\times10^{-9} & 1,560625248 & -4,681875747 & 3,121250497 \end{bmatrix}$$

$$D_6 = \begin{bmatrix} -8671833172 & 0,7884632882 & -0,27256226655 & 0,02604005111 \\ 0,7884632882 & -1,139745036 & 0,8145033394 & -0,2465222143 \\ -0,2725622655 & 0,8145033394 & -1,11370557 & 0,5419412688 \\ 0,02604005111 & -0,2465222143 & 0,5419412688 & -0,3252420872 \end{bmatrix}$$

Finalmente la solución dinámica $\mathrm{D}(t)$ asociada a la ecuación

$$\ddot{u} + A_1\dot{u} + A_2 u = f(t)$$

Es dada por:

$$D(t) = \sum_{j=1}^{8}\sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) D_{8-j.}$$

Es decir:

$$D(t) = (b_0 d(t)) D_7 + \left(b_0 d^{(1)}(t) + b_1 d^{(0)}(t)\right) D_6 + \left(b_0 d^{(2)}(t) + b_1 d^{(1)}(t) + b_2 d^{(0)}(t)\right) D_5$$
$$\ldots + \left(b_0 d^{(6)}(t) + b_1 d^{(5)}(t) + \ldots + b_6 d^{(0)}(t)\right) D_1 + \left(b_0 d^{(7)}(t) + b_1 d^{(6)}(t) + \ldots + b_7 d^{(0)}(t)\right) D_{0,}$$

Donde:

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 &= 0,1064093499 \\ b_2 &= 0,8753911474 \\ b_3 &= 0,6159559004 \\ b_4 &= 23,45006228 \\ b_5 &= 0,8854267010 \\ b_6 &= 19,53736167 \\ b_7 &= 0,2211687011 \\ b_8 &= 2,44140625 \end{aligned}$$

Y:

$$
\begin{aligned}
d(t) = e^{-0.003882885493t} & \left(-0,0023632087896\cos(0,3882697145t) + 0,1974090656 sen(0,3882697145t)\right) \\
& + e^{-0,01712927403t}\left(-0,003143974041\cos(1,7128418t) + 0,08405060837 sen(1,7128418t)\right) \\
& + e^{-0,02101216964t}\left(0,0009749474756\cos(2,101111514t) - 0,02379281549 sen(2,1011514t)\right) \\
& + e^{-0,01118034583t}\left(0,004532235352\cos(1,117978085t) - 0,1526093158 sen(1,117978085t)\right)
\end{aligned}
$$

Finalmente la solución del problema es

$$
u(t) = D(t)\dot{u}_0 + \left(\dot{D}(t) + D(t)A_1\right)u_0 + \int_0^t D(t-s)\, f(s)\, ds
$$

Donde:

$$
\dot{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
u_0 = M^{-1}\begin{bmatrix} 0,025 \\ 0,02 \\ 0,01 \\ 0,001 \end{bmatrix}
$$

$$
f(t) = \begin{bmatrix} e^{-0,5t}\cos(8t) \\ e^{-0,25t}\operatorname{sen}(8t) \\ e^{-0,1t}\cos(10t) \\ e^{-0,05t} sen(10t) \end{bmatrix}
$$

$$
D(t) = \begin{bmatrix} D_{11}(t) & D_{12}(t) & D_{13}(t) & D_{14}(t) \\ D_{21}(t) & D_{22}(t) & D_{23}(t) & D_{24}(t) \\ D_{31}(t) & D_{32}(t) & D_{33}(t) & D_{34}(t) \\ D_{41}(t) & D_{42}(t) & D_{43}(t) & D_{44}(t) \end{bmatrix}
$$

La solución dinámica matricial $D(t)$ y la solución vectorial:

$$
u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix}
$$

Donde cada componente es:

- Primera componente

$$
\begin{aligned}
u_1(t) = {} & e^{-0.003882885493t}\left(0,002016065092\cos(0,3882697144t)+\right)0,07148238292sen(0,3882697144t)\\
& +e^{-0,01118034583t}\left(0,004957534491\cos(1,117978084t)+0,01018707891sen(1,117978084t)\right)\\
& +e^{-0,01712924021t}\left(0,003199685151\cos(1,17128418t)+0,007454400083sen(1,7128418t)\right)\\
& +e^{-0,02101216964t}\left(0,005927141677\cos(2,101111514\,t)+0,02191391552sen(2,101111514\,t)\right)\\
& +e^{-0,05t}\left(7,407847419\times10^{-7}\cos(10t)+3,22633917\times10^{-8}\,sen(10t)\right)\\
& -e^{-0,1t}\left(1,64381331\times10^{-6}\cos(10t)+1,480457742\times10^{-6}\,sen(10t)\right)\\
& +e^{-0,25t}\left(0,0003293261777sen(8t)-2,196019571\times10^{-6}\cos(8t)\right)\\
& -e^{-0,5t}\left(0,01607131318\cos(8t)+0,002035849891\,sen(8t)\right)
\end{aligned}
$$

Cuya gráfica es dada en la gráfica N°14.

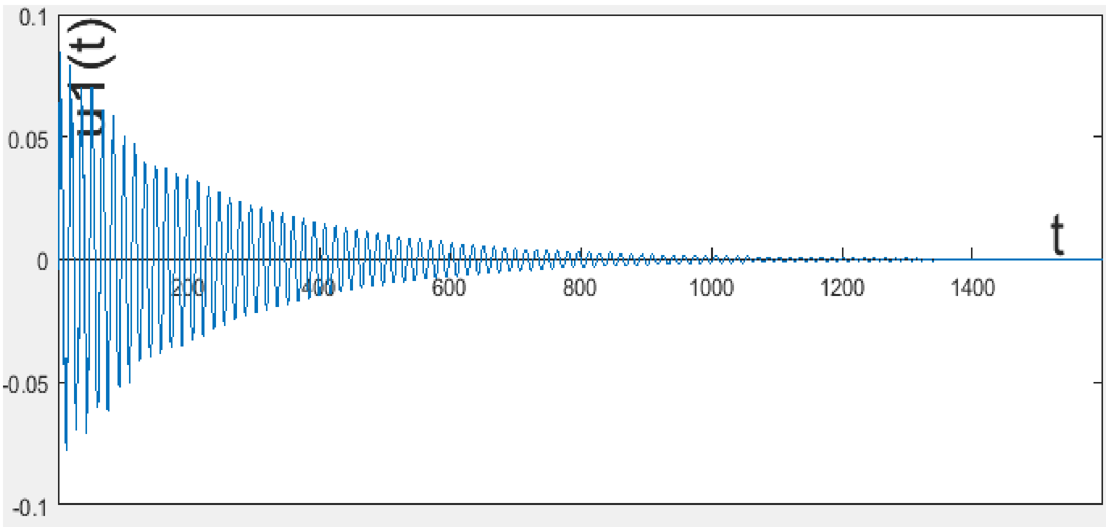

Grafico N° 14: Grafica de la solución de movimiento de la primera componente u(t).

- Segunda componente:

$$
\begin{aligned}
u_2(t) = {} & e^{-0.003882885493t}\left(0{,}00003788963069\cos(0{,}3882697144t) + 0{,}1343429353\,sen(0{,}3882697144t)\right) \\
& + e^{-0{,}01118034583t}\left(0{,}00495753449\cos(1{,}11797808t) + 0{,}01018707892\,sen(1{,}117978084t)\right) \\
& + e^{-0{,}0171292402t}\left(0{,}001111238959\cos(1{,}17128418t) + 0{,}002588885857\,sen(1{,}7128418t)\right) \\
& + e^{-0{,}02101216964t}\left(0{,}003357406614\,sen(2{,}101111514\,t) - 0{,}00908090835\cos(2{,}101111514\,t)\right) \\
& + e^{-0{,}05t}\left(2{,}169948373\times10^{-6}\cos(10t) - 1{,}632793049\times10^{-6}\,sen(10t)\right) \\
& + e^{-0{,}1t}\left(0{,}000995662599\cos(10t) - 5{,}318792266\times10^{-6}\,sen(10t)\right) \\
& + e^{-0{,}25t}\left(0{,}000995662599\cos(8t) - 0{,}01622714077\,sen(8t)\right) \\
& - e^{-0{,}5t}\left(0{,}0003211097011\cos(8t) + 6{,}386967822\,sen(8t)\right)
\end{aligned}
$$

Cuya gráfica es dada en la gráfica N° 15.

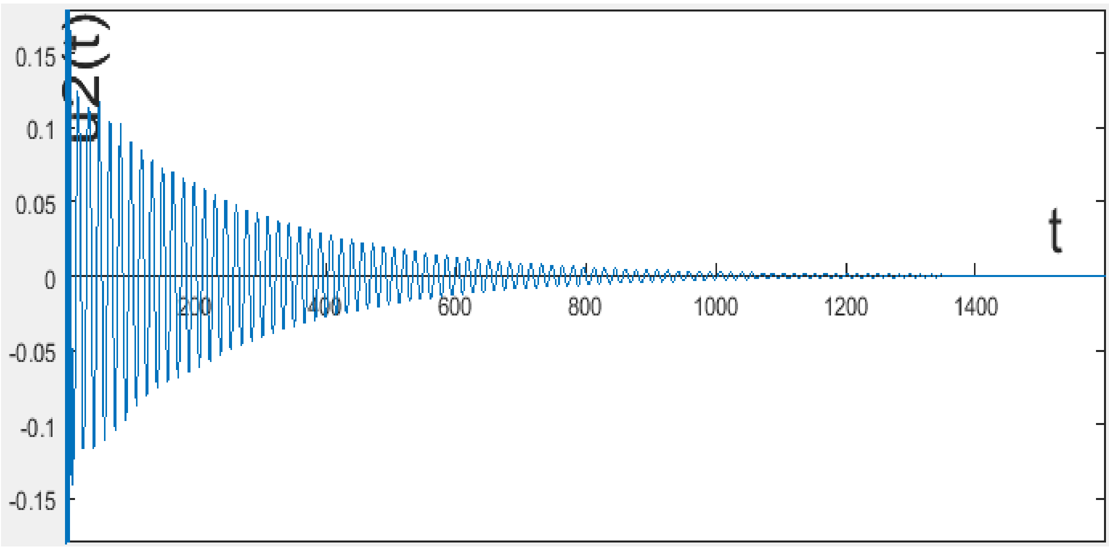

Grafico N° 15: Grafica de la solución de movimiento de la segunda componente u(t).

- Tercera componente:

$$u_3(t)=e^{-0.003882885493t}\left(0,005104855334\cos\left(0,3882697144t\right)+0,180333747\,sen\left(0,3882697144t\right)\right)$$
$$+e^{-0,01118034583t}\left(2,755298523\times10^{-12}\,sen\left(1,117978084t\right)-7,707047248\times10^{-11}\cos\left(1,117978084t\right)\right)$$
$$+e^{-0,01712924 02t}\left(0,002819755785\cos\left(1,17128418t\right)+0,006555289369\,sen\left(1,7128418t\right)\right)$$
$$+e^{-0,02101216964t}\left(0,07985616221\cos\left(2,101111514\,t\right)-0,02952453858\,sen\left(2,101111514\,t\right)\right)$$
$$+e^{-0,05t}\left(9,449843173\times10^{-6}\cos\left(10t\right)+0,0001805150932\,sen\left(10t\right)\right)$$
$$+e^{-0,1t}\left(0,0102573235\cos\left(10t\right)+0,0001805150932\,sen\left(10t\right)\right)$$
$$+e^{-0,25t}\left(0,0003295876122\,sen\left(8t\right)-2,056543769\times10^{-5}\cos\left(8t\right)\right)$$
$$+e^{-0,5t}\left(5,776596433\times10^{-}6\cos\left(8t\right)+4,918437299\times10^{-6}\,sen\left(8t\right)\right)$$

Cuya gráfica es dada en la gráfica N° 16.

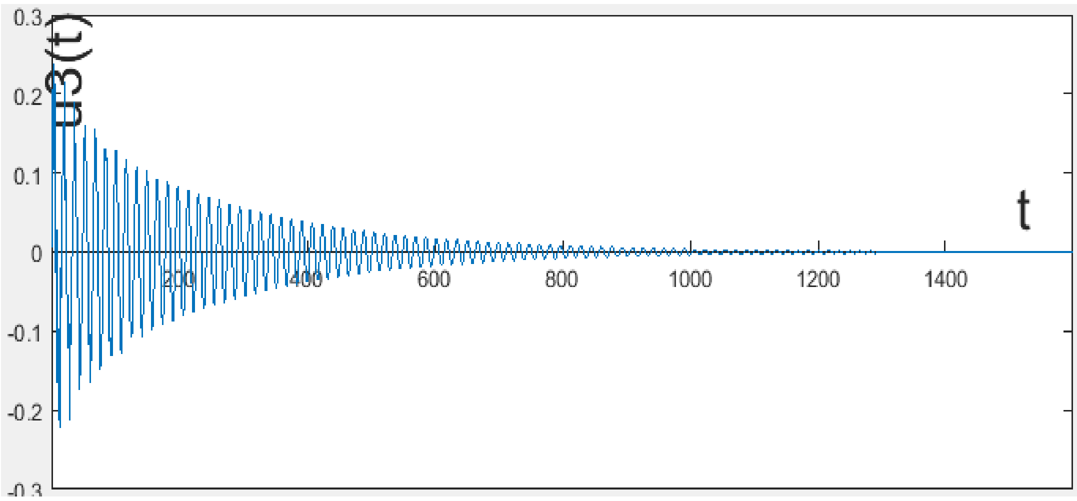

Grafico N° 16: Grafica de la solución de movimiento de la tercera componente u(t).

- Cuarta componente:

$$
\begin{aligned}
u_4(t) &= e^{-0.0038828885493t}\left(0,005805026965\cos\left(0,3882697144t\right)+0,2058253179\,sen\left(0,3882697144t\right)\right)\\
&+e^{-0,01118034583t}\left(0,004957534657\cos\left(1,117978084t\right)+0,010187078902sen\left(1,117978084t\right)\right)\\
&+e^{-0,01712922402t}\left(0,002088446097\cos\left(1,17128418t\right)+0,004865514181sen\left(1,7128418t\right)\right)\\
&+e^{-0,02101216964t}\left(0,01166015079sen\left(2,101111514\,t\right)-0,003153766083\cos\left(2,101111514\,t\right)\right)\\
&+e^{-0,05t}\left(8,252532941\times10^{-5}\cos\left(10t\right)-0,01012769853\times10^{-6}\,sen\left(10t\right)\right)\\
&+e^{-0,1t}\left(0,0001300636085\cos\left(10t\right)-6,799250541\times10^{-6}\,sen\left(10t\right)\right)\\
&+e^{-0,25t}\left(5,111560134\times10^{-6}\cos\left(8t\right)-6,128641958\times10^{-6}\,sen\left(8t\right)\right)\\
&-e^{-0,5t}\left(3,771807528\times10^{-7}\cos\left(8t\right)-1,339245808\times10^{-6}\,sen\left(8t\right)\right)
\end{aligned}
$$

Cuya gráfica es dada en la gráfica N° 17.

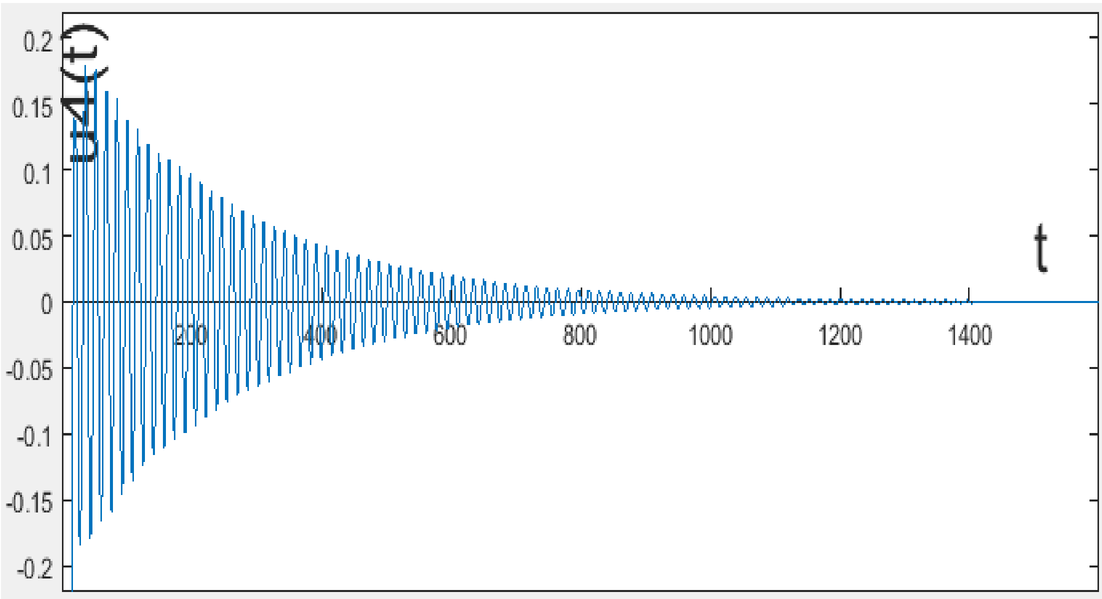

Grafico N° 17: Grafica de la solución de movimiento de la cuarta componente u(t).

CAPITULO IV

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

4.1 DISEÑO METODOLÓGICO DE INVESTIGACIÓN

4.1.1 Tipo y Diseño de Investigación.

4.1.1.1 Tipo de Investigación.

El tipo de investigación es básica teórica-aplicativa, ya que toda investigación se basa en profundizar los resultados del tema apropiada, también incrementa los conocimientos que existen en las aplicaciones de modelo matemático utilizando ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo con coeficientes matriciales en la vibración de edificios.

4.1.1.2 Diseño de Investigación.

El diseño de la investigación bajo el cual se realizó el presente proyecto de investigación es inductivo-deductivo, y aplicativo que consiste en aplicar las ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo con coeficientes matriciales en la vibración de edificios.

4.1.2 Métodos, Técnicas y Estrategias

4.1.2.1 Método.

Los métodos utilizados son deductivo y aplicativo; porque se ha analizado las definiciones y teoremas de ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo con coeficientes matriciales, para aplicarlos en la vibración de edificios.

Técnica.

Lectura y análisis de las definiciones, propiedades y teoremas de las ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes matriciales, además los conceptos básicos de oscilaciones y vibraciones, para poder utilizar en la investigación, en los materiales de consulta para la asimilación y aplicación apropiada en la investigación.

4.1.2.2 Estrategias.

Revisión bibliográfica y búsqueda en el internet informaciones necesarias para la facilitación y aplicación en la investigación.

CAPITULO V

CONCLUSIONES

Al terminar el trabajo de investigación, se llegó a las siguientes conclusiones:

- El modelo matemático siguiente $M\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=f(t)$, donde M, C y K son matrices arbitrarias de "nxn", ha sido obtenido mediante una formulación en la que se relacionan las diferentes componentes que actúan en el sistema, en el que se analiza la vibración de un edificio.

- Para su solución de $M\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=f(t)$ se requiere la llamada solución dinámica, la que permite determinar la respuesta en el dominio temporal, evitando la necesidad de alguna forma diagonal o de la forma canónica de Jordan.

- La solución dinámica $D(t)$ nos permite dar una interpretación física acerca de cada uno de los elementos (pisos) del movimiento de un edificio, el cual sometido a un sismo, nos permite afirmar que su elemento $D_{kj}(t)$ es la respuesta de la k-ésima componente del sistema, debido a una fuerza unitaria concentrada en la j-ésima componente.

CAPITULO VI

RECOMENDACIONES:

- Se recomienda tener en cuenta la teoría de ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes matriciales en la vibración de edificios, para trabajos de investigación en el área de ingeniería civil en el tema de modelamiento para problemas de vibraciones en movimientos sísmicos.

- Se recomienda utilizar la teoría ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con coeficientes matriciales en los próximos trabajos de investigación en el área de ingenierías, para que pueda ver el modelamiento en temas específicos en dichas áreas.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS:

[1]. Apostol T. (2006). Análisis Matemático, Reverte S.A..

[2]. Avello A. (2006). Teoria de Maquinas. Universidad de Navarra.

[3]. Braun, M. (1993). Differential equations and their applications, Springer—Verlag: Berlin.

[4]. Boyce W. E. y DiPrima R. C. (1996). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera: Limusa. México.

[5]. Canagualpa G. (1995).A solução dinamica em sistemas mecanicos amortecidos, dissertação de Mestrado,UFGS/CPGMAP.

[6]. Claeyssen J. (1990). On predicting the response of non-conservative linear vibrating systems by using dynamical matrix solutions, Journal of Sound and Vibration.

[7]. Collante A. (2005). Controlabilidad y observabilidad en ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes matriciales. UNI.

[8]. Fazlollah R. (1977). Los Espacios Lineales en Ingenieria. Reverte S. A.

[9]. Marcellán, F. & Casasús, L. & Zarzo, L. (1990). Ecuaciones diferenciales. Problemas lineales y aplicaciones, McGraw—Hill.

[10]. Graham S. (2000). Fundamentals of Mechanical Vibrations. Mc Graw_Hill.

[11]. Higham N. (2008) Functions of Matrices Theory and computation. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[12]. Inman D.(2001). Engineering Vibration. Prentice hall, Inc.

[13]. Meirovitch L. (1986). Elements of Vibration Analysis. Mc Graw-Hill, Inc.

[14]. Sproviero M. (2005). Transformada de Laplace y e Fourier. Nueva Librería, Buenos Aires.

[15]. D.S. N°011-2006-VIVIENDA. Reglamento nacional de edificaciones. G.040.

ANEXOS

Para poder realizar los gráficos se utilizó el programa matemático **MATLAB**, siguiendo el siguiente procedimiento en cada caso:

- Primero se define el vector de “x”, en nuestro caso "t” que representa el tiempo, de un tiempo cero hasta un tiempo 1600, y se coloca el valor de cuanto en cuanto queremos que varié nuestro tiempo en este caso 0.1, finalmente se coloca el punto y coma para que no aparezca en la pantalla todo los valores que asume t.

```
t=0:0.1:1600;
```

- Segundo se define el vector “y” con una regla de correspondencia o la que queramos graficar; de igual manera colocaremos punto y coma para que no aparezca en la pantalla los valores que asumirá “d(t)”; para nuestro caso graficaremos: “d(t)”; con la siguiente formula:

```
d(t)=exp(-0.003882885493*t).*(-0.002363208786.*cos(0.3882697145*t)-
0.1974090656.*sin(0.3882697145*t))+exp(-0.01712927403*t).*(-
0.003143974041.*cos(1.7128418*t)+0.08405060837.*sin(1.7128418*t))+exp(-
0.02101216964*t).*(0.0009749474756.*cos(2.101111514*t)-
0.02379281549.*sin(2.101111514*t))+exp(-
0.01118034583*t).*(0.004532235352.*cos(1.117978085*t)-
0.1526093158.*sin(1.117978085*t));
```

- Tercero, se usa el comando **PLOT** para poder hacer un bosquejo del grafico que estamos deseando; de la siguiente manera:

  Plot (t,d).

- Finalmente en el grafico que se nos muestre colocaremos en los ejes coordenados los datos que deseemos que aparezcan y del tamaño que lo deseemos; en nuestro caso en el eje “x” colocaremos “t” que representa en el tiempo, así como en el eje “y” colocaremos el valor de “d(t)” que representa la variación en el tiempo.