

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA**  
**ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS PARA LA SOLUCIÓN DE  
LA ONDA. CONSISTENCIA, CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD.**

**TESIS**

**PRESENTADA POR:**

**ANDINA ALAY LERMA**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:**

**LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

**PUNO – PERÚ**

**2018**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO**  
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA  
ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

**MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS PARA LA SOLUCIÓN DE LA  
ONDA. CONSISTENCIA, CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD.**

**TESIS PRESENTADA POR:**

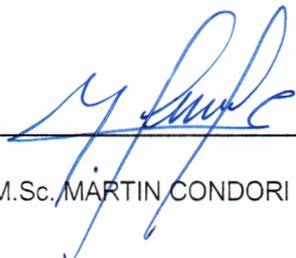
**ANDINA ALAY LERMA**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:  
LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

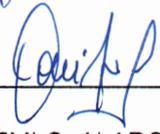


**APROBADA POR EL JURADO REVISOR CONFORMADO POR:**

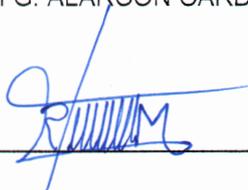
**PRESIDENTE:**

  
M.Sc. MARTIN CONDORI CONCHA

**PRIMER MIEMBRO:**

  
M. NOEMI G. ALARCON CARDENAS

**SEGUNDO MIEMBRO:**

  
M.Sc. ROXANA TICONA MAMANI

**DIRECTOR / ASESOR:**

  
Lic. ADOLFO CANAHUIRE CONDORI

Tema : Ecuaciones Diferenciales

Área : Matemática Aplicada

Línea de investigación: Matemática Aplicada

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 16 DE NOVIEMBRE 2018

## DEDICATORIA

*A mi madre y hermanos, por permitirme  
con su apoyo vivir los mejores momentos de  
mi vida.*

**ANDINA ALAY LERMA**

## AGRADECIMIENTO

*A la Dra. Juana Idelza Zavaleta Gómez, Msc. Martin Condori Concha y a mi asesor Lic. Adolfo Canahuire Condori, por aceptarme realizar este proyecto bajo su dirección, por su apoyo para guiarme durante todo el proceso que me llevo este trabajo.*

*También al estudiante Alex Quispe Rodríguez y mi compañero Jhon Williams Lupaca Quispe, por ayudarme con sus conocimientos en cuestiones específicas.*

*A los miembros del jurado calificador:*

- *M.Sc. Martin Condori Concha*
- *M. Noemi G. Alarcon Cardenas*
- *M.Sc. Roxana Ticona Mamani*

*Quienes con sus críticas constructivas lograron mejorar esta tesis.*

*A todos los docentes de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas por su orientación durante mi vida universitaria, por sus consejos y los conocimientos que me brindaron.*

*A la Universidad Nacional del Altiplano, del cual siempre me sentiré orgullosa de ser parte.*

## ÍNDICE GENERAL

<b>DEDICATORIA</b> .....	3
<b>AGRADECIMIENTO</b> .....	4
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b> .....	7
<b>ÍNDICE DE ACRÓNIMOS</b> .....	8
<b>RESUMEN</b> .....	9
<b>ABSTRACT</b> .....	10
<b>CAPÍTULO I</b> .....	11
<b>1. INTRODUCCIÓN</b> .....	11
<b>1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b> .....	14
<b>1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA</b> .....	14
<b>1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN</b> .....	15
<b>1.3.1. HIPÓTESIS GENERAL</b> .....	15
<b>1.3.2. HIPÓTESIS ESPECÍFICAS</b> .....	15
<b>1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO</b> .....	15
<b>1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN</b> .....	16
<b>1.5.1. OBJETIVO GENERAL</b> .....	16
<b>1.5.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS</b> .....	16
<b>CAPÍTULO II</b> .....	17
<b>2. REVISIÓN DE LITERATURA</b> .....	17
<b>2.1. MARCO TEÓRICO</b> .....	17
<b>2.1.1. MALLA O CUADRICULA</b> .....	17
<b>2.1.2. DIFERENCIAS FINITAS</b> .....	18
<b>2.1.3. SERIE DE TAYLOR</b> .....	18
<b>2.1.4. APROXIMACIÓN DE LA PRIMERA DERIVADA</b> .....	18
<b>2.1.5. DERIVADAS DE ORDENES MAYORES</b> .....	21
Derivadas en Dos Dimensiones.....	22
Derivadas en Tres Dimensiones .....	24
<b>2.1.6. MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS EN UNA DIMENSIÓN</b> .....	27
<b>2.1.7. ERROR DE TRUNCACIÓN</b> .....	37
<b>2.1.8. CONVERGENCIA</b> .....	38
<b>2.1.9. CONSISTENCIA</b> .....	39
<b>2.1.10. CONDICIONAMIENTO DE UN PROBLEMA</b> .....	40

2.1.11.	ESTABILIDAD.....	40
2.1.12.	TEOREMA DE EQUIVALENCIA.....	47
2.1.13.	LA ONDA BIDIMENSIONAL.....	48
2.2.	MARCO CONCEPTUAL.....	58
CAPÍTULO III.....		63
3.	METODOLOGÍA.....	63
3.1.	UBICACIÓN.....	63
3.2.	PERIODO DE DURACIÓN DEL ESTUDIO.....	63
3.3.	TIPO Y DISEÑO DE INVESTIGACIÓN.....	63
3.3.1.	TIPO DE INVESTIGACIÓN.....	63
3.3.2.	DISEÑO DE INVESTIGACIÓN.....	64
3.4.	MÉTODOS Y TÉCNICAS.....	64
3.4.1.	MÉTODO.....	64
3.4.2.	TÉCNICA.....	65
3.5.	OPERALIZACIÓN DE VARIABLES.....	65
3.5.1.	VARIABLE INDEPENDIENTE.....	65
3.5.2.	VARIABLE DEPENDIENTE.....	65
CAPÍTULO IV.....		66
4.	RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....	66
4.1.	RESULTADOS.....	66
4.1.1.	ECUACIÓN DE ONDA.....	66
4.1.2.	DISCRETIZACIÓN.....	66
4.1.3.	CONSISTENCIA.....	74
4.1.4.	ESTABILIDAD POR EL ANALISIS DE VON NEUMANN.....	77
4.1.5.	IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA.....	81
4.2.	DISCUSIÓN.....	92
CONCLUSIONES.....		93
RECOMENDACIONES.....		94
BIBLIOGRAFÍA.....		95
ANEXO.....		97

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Distribución del Error.....	43
Figura 2: Pequeña porción de la Membrana .....	49
Figura 3: Componentes de las Fuerzas .....	50
Figura 4: Molécula, dada por el Método de Diferencias Finitas .....	69
Figura 5: Molécula de discretización en los Ejes Cartesianos.....	69
Figura 6: Matriz A de coeficientes .....	72
Figura 7: Matriz u de incógnitas .....	73
Figura 8: Matriz B de datos, iniciales y de frontera.....	74
Figura 9: Simulación con las condiciones iniciales en el $t=1.52$ .....	89
Figura 10: Simulación después de un $t=4.88$ .....	90
Figura 11: Simulación para el tiempo $t=5.04$ .....	90
Figura 12: Simulación de la ecuación de onda en $t=5.40$ .....	91
Figura 13: Simulación de la ecuación de onda para $t=6.32$ .....	91
Figura 14: Simulación de la Ecuación de Onda con fuente en $w_n(50,50)$ para $t=1.36$	101
Figura 15: Simulación de la Ecuación de Onda con Fuente, para $t=5.88$ .....	102
Figura 16: Simulación de la Ecuación de Onda con Fuente, para $t=6.40$ .....	102
Figura 17: Simulación de la Ecuación de Onda con Fuente, para $t=6.60$ .....	103

## ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

$u(x_i, y_j, t_n)$ : Puntos discretos, para la variable en la grilla.

$u_{i,j}^n$ : Discretización en cada punto.

$O(\Delta t^2), O(\Delta x^2), O(\Delta y^2)$ : Orden de Truncacion en el Polinomio de Taylor

$\lambda, \beta, \alpha$ : Parámetros

$h, l, k$ : Espaciado para cada variable  $x, y$  y  $t$

$P_n$ : Puntos de la grilla

EDP: Ecuación Diferencial Parcial

EDF: Esquemas de Diferencias Finitas

$\Phi(x, y, t)$ : Función suave

$\epsilon_{i,j}^n$ : Error en cada punto de la grilla

$g$ : Factor de Amplificación

## RESUMEN

La solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales que evolucionan en el tiempo es un área de trabajo en constante desarrollo. En este trabajo titulado “MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS PARA LA SOLUCIÓN DE LA ONDA. CONSISTENCIA, CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD”, se aborda la solución numérica de la ecuación que gobierna la dinámica lineal de ondas con condiciones iniciales y de frontera. Bajo el método numérico de Diferencias Finitas; se puede plantear el método convirtiéndola en un conjunto de ecuaciones algebraicas y poder así utilizar Matlab para la solución del sistema lineal y para la simulación del problema. Donde la solución numérica está expuesta a un error debido a la discretización y error por la aproximación de las derivadas en diferencias finitas. Por lo que el objetivo es usar el concepto de Consistencia, el cual utiliza la expansión de Taylor y la Estabilidad del esquema de Diferencias Finitas, que utiliza la aproximación para el error dada por la serie de Fourier, conocido como análisis de Von Neumann; requisitos para la convergencia, esto por el Teorema de Lax Richtmyer. Llegando a la conclusión que, al resolver la ecuación de la onda bidimensional, utilizando el método de diferencias finitas, es convergente.

**Palabras Clave:** Consistencia, Convergencia, Diferencias Finitas, Ecuación de Onda, Estabilidad, Matlab.

## ABSTRACT

The numerical solution of partial differential equations that evolve over time is a work area in constant development. In this research work entitled "METHOD OF FINITE DIFFERENCES FOR THE SOLUTION OF THE WAVE EQUATION. CONSISTENCY, CONVERGENCE AND STABILITY "the numerical solution of the equation that governs the linear dynamics of waves with initial and frontier conditions is addressed. Under the numerical method of Finite Differences; The method can be proposed by converting it into a set of algebraic equations and thus be able to use Matlab for the solution of the linear system and for the simulation of the problem. Where the numerical solution is exposed to an error due to the discretization and error by the approximation of the derivatives in finite differences. So the objective is to use the concept of Consistency, which uses the expansion of Taylor and the Stability of the Finite Differences scheme, which uses the approximation for the error given by the Fourier series, known as Von Neumann analysis; requirements for convergence, this by the Lax Richtmyer Theorem. Concluding, that when solving the equation of the two-dimensional wave, using the finite difference method, it is convergent.

Keywords: Consistency, Convergence, Finite Differences, Matlab, Stability, Wave Equation.

## CAPÍTULO I

### 1. INTRODUCCIÓN

Con el uso de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para resolver problemas físicos se simplifica mucho el modelo de la realidad física, todo ello se debe a que en las fórmulas matemáticas aparece una sola variable independiente sobre la que dependen todas las otras variables pertinentes. Sin lugar a dudas utilizar este tipo de ecuaciones diferenciales es útil, aunque limita las clases de problemas que se puede investigar, ya que en la mayoría de los casos se necesitan varias variables independientes. Modelar un problema de la vida real desde el punto de vista matemático, en el que se haga intervenir dos o más variables independientes conduce a las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales(EDP).

Las EDP lineales y no lineales resuelven problemas concretos de la ciencia aplicada, resaltando la importancia de las ecuaciones diferenciales parciales porque permite modelar fenómenos físicos, fenómenos naturales y modelos de matemática que no son fáciles de modelar con las ecuaciones diferenciales ordinarias. Por lo cual es complicado hallar la solución analítica en una ecuación diferencial parcial ya que modelan problemas de alta complejidad que no es fácil de resolver por métodos clásicos o convencionales, por lo que es necesario recurrir a herramientas que permiten dar soluciones aproximadas. Es el caso de los métodos numéricos donde es factible dar soluciones numéricas haciendo uso de un software adecuado, una de estas EDP es la ecuación de la onda.

En anteriores trabajos se considera el uso de la Transformada de Fourier para hallar la solución de la Ecuación de Onda unidimensional no homogénea y algunos investigadores solucionaron la ecuación de la onda 1-D como un problema de valores iniciales usando

diferencias finitas y se resolvieron la ecuación de la onda en 2-D y 3-D utilizando diferencias finitas generalizadas, y otros abordaron la solución computacional de la ecuación de onda.

Este trabajo, presenta de manera clara el proceso y el algoritmo del método de diferencias finitas; como un método para discretizar la ecuación de onda, su dominio, las condiciones iniciales y las condiciones de frontera. Para después, elaborar un programa en MATLAB donde se hallarán las soluciones discretas del problema.

Dado que la solución numérica; está expuesta a un error debido a la discretización, esto debido a la aproximación de las derivadas en diferencias finitas. Por lo cual, es necesario verificar la Consistencia y Estabilidad del esquema de Diferencias Finitas. Al ser el problema lineal y de valor inicial, se puede utilizar el Teorema Fundamental del Análisis Numérico de Equivalencia. Teniendo así, la convergencia del esquema numérico.

Ya que esta investigación halla soluciones discretas al problema de la onda bidimensional, amplia vacíos que se puede encontrar en algunos artículos referidos al tema. En lo que es aplicar el método de diferencias finitas; para hallar la solución numérica aproximada de la ecuación de la Onda, y su posterior análisis de Consistencia, Estabilidad requisitos para utilizar el Teorema de Equivalencia, para obtener la Convergencia de soluciones; además de desarrollar el algoritmo y el programa en MATLAB que, permite la solución de sistema de ecuaciones lineales; así como también la simulación de la onda con las condiciones planteadas.

El trabajo de investigación se estructura de la siguiente manera:

En el capítulo I, se desarrollan todas las componentes del problema, como son el planteamiento, formulación, hipótesis; en los cuales se tiene una mirada general, al problema, para el que se utiliza el método de diferencias finitas. El capítulo II, contiene el marco teórico, en el cual se desarrolla importantes sub capítulos estos son: Discretización, Serie de Taylor, Consistencia, Análisis de Von Neumann; para el cual, se ha investigado varias fuentes con el fin de describir definiciones y teoremas. Lo importante de este capítulo es que permite orientar el proceso de resolución del problema. En el capítulo III, se refiere al diseño de investigación, se aclara precisamente el tipo de investigación seleccionado, que en este caso es de tipo cualitativo. En el capítulo IV, se describen los resultados de la investigación.

## 1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las ecuaciones lineales y no lineales resuelven problemas de la vida real, resaltando la importancia de las ecuaciones diferenciales parciales; que permite modelar fenómenos físicos, fenómenos naturales y modelos de la vida real que no son fáciles de modelar con las ecuaciones diferenciales ordinarias. Dada la dificultad de hallar una o más soluciones del problema, el objetivo fundamental es determinar soluciones aproximadas con el esquema de discretización asociado al método de diferencias finitas, que consiste en discretizar el dominio las variables y los operadores los mismos que constituye la grilla. Hallando la solución aproximada para la ecuación diferencial parcial de la onda, ya que no es fácil de resolver por métodos clásicos o convencionales; por lo que se utilizan métodos numéricos, los cuales son las herramientas que nos permiten dar soluciones aproximadas, donde es factible dar soluciones numéricas haciendo uso de un software como Matlab. Así también el otro objetivo es determinar que, las soluciones numéricas convergen a la solución analítica.

## 1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En la presente investigación se plantea, responder la siguiente interrogante:

¿Es posible aplicar el método de Diferencias Finitas y comprobar la Consistencia, Estabilidad y Convergencia, para determinar la solución aproximada de la ecuación de la Onda Bidimensional?

### **1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN**

#### **1.3.1. HIPÓTESIS GENERAL**

Con la aplicación del Método de Diferencias Finitas para la discretización y comprobando los conceptos de Consistencia, Estabilidad y Convergencia, se puede determinar una buena solución aproximada de la ecuación de la Onda Bidimensional.

#### **1.3.2. HIPÓTESIS ESPECÍFICAS**

- Con la utilización de la serie de Taylor, para la aproximación de las derivadas, se obtiene el esquema de discretización en diferencias finitas (MDF); del cual se podrá obtener una ecuación algebraica que hallará soluciones aproximadas en cada punto de la grilla, para la ecuación de Onda Bidimensional.
- El Teorema de Equivalencia para la convergencia de soluciones, determinará si la solución discreta de la ecuación de Onda Bidimensional numérica, no diverge.
- Con el desarrollo del algoritmo en el programa de MATLAB, permitirá la visualización la solución aproximada de la ecuación de la Onda Bidimensional discretizada.

### **1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO**

Una ecuación diferencial parcial permite modelar fenómenos físicos, como la descripción de las ondas, que se representa en ecuaciones diferenciales, donde al resolver esta ecuación, da la posibilidad de entender su comportamiento cualitativo. Este trabajo presenta el proceso que se toma para obtener las soluciones numéricas, y da el algoritmo por el método de diferencias finitas, para la solución de la ecuación de onda; con dominio rectangular, condiciones iniciales y condiciones de frontera, en el software MATLAB.

El trabajo aporta, en la aplicación clara y sencilla, del método de diferencias finitas, y el análisis de convergencia de las soluciones aproximadas por diferencias finitas, como su posterior implementación en un software. Por lo cual los beneficios que se obtendrá de este trabajo es tener un mejor entendimiento para estudiantes con un interés de solucionar ecuaciones diferenciales parciales, con dominio rectangular, que no son fáciles de hallar de manera analítica; dado que en este trabajo se llega a la conclusión, de que el método de diferencias finitas tiene una buena aproximación a la solución analítica.

## **1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN**

### **1.5.1. OBJETIVO GENERAL**

Aplicar el Método de Diferencias Finitas. Consistencia, Estabilidad y Convergencia, para determinar la solución aproximada, de la ecuación de la Onda Bidimensional.

### **1.5.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Utilizar, la serie de Taylor para la aproximación de las derivadas, el método de discretización de diferencias finitas (MDF). Para obtener un esquema numérico explícito, de la ecuación de onda bidimensional.
- Comprobar, para el esquema en diferencias finitas de la ecuación de onda bidimensional, los conceptos de consistencia y estabilidad. Cuya relación está dado en el Teorema de Lax o de Equivalencia, el cual garantiza la convergencia de la solución discreta, para la ecuación de la Onda Bidimensional numérica.
- Desarrollar el algoritmo en el programa de MATLAB que permitirá la visualización la solución aproximada de la ecuación de la Onda Bidimensional numérica.

## CAPÍTULO II

### 2. REVISIÓN DE LITERATURA

#### 2.1. MARCO TEÓRICO

##### 2.1.1. MALLA O CUADRICULA

Una malla generada numéricamente, es pensada como el conjunto organizado de puntos formado por las intersecciones de las líneas de un sistema de coordenadas. La característica esencial de un sistema tal es que alguna línea coordenada (o en tres dimensiones, alguna superficie coordenada) sea coincidente con cada segmento de la frontera de la región física. El uso de intersecciones de líneas coordenadas para definir los puntos de la malla proporciona una estructura organizacional que permite que todos los cálculos sean realizados en una malla cuadrada fija cuando las ecuaciones diferenciales que se estén resolviendo hayan sido transformadas de tal manera que las coordenadas curvilíneas reemplacen a las coordenadas cartesianas como variable independiente. La malla libera a la simulación computacional de restringirse a ciertas formas de frontera y permite la generación de códigos de uso general en los cuales la forma de la frontera es especificada simplemente en la entrada de datos. Las fronteras también pueden estar en movimiento, ya sea por especificaciones externas o en respuesta al desarrollo de la solución física. Similarmente, el sistema de coordenadas puede ajustarse para seguir la variación en la solución física. En cualquier caso, la malla generada numéricamente, permite que todos los cálculos sean realizados en una malla cuadrada fija en el campo computacional (también llamado espacio lógico), el cual es siempre rectangular por construcción.

### 2.1.2. DIFERENCIAS FINITAS

El método para resolver toda clase de ecuaciones diferenciales parciales consiste en reemplazar las derivadas por cocientes de diferencias, convirtiendo la ecuación a una ecuación de diferencia. Luego se escribirá(nodo) de los componentes de la malla que subdivide la región de interés, en la cual los valores de la función son desconocidos.

Resolviendo estas ecuaciones simultáneamente, se obtienen valores para la función en cada nodo que son aproximados a los valores verdaderos. Donde se deducen, las relaciones que se necesitan independientemente.

### 2.1.3. SERIE DE TAYLOR

**DEFINICIÓN 2.2.3:** Sea  $f(x)$  una función definida  $(a, b)$  en que tiene hasta la  $k$  –ésima derivada, entonces la expansión de  $f(x)$  usando serie de Taylor alrededor del punto  $x_i$  contenido en el intervalo  $(a, b)$  será:

$$f(x) = f(x_i) + \frac{(x - x_i)}{1!} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_i} + \dots + \frac{(x - x_i)^k}{k!} \left. \frac{d^k f}{dx^k} \right|_{\varepsilon}$$

Donde  $\varepsilon = x_i + \theta(x - x_i)$  y  $0 < \theta < 1$

### 2.1.4. APROXIMACIÓN DE LA PRIMERA DERIVADA.

#### Diferencias Progresivas.

Considerando la serie de Taylor anterior con  $k = 2$  y  $x = x_i + \Delta x$ , se tiene.

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{\Delta x^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{\varepsilon_p}$$

de esta ecuación se obtiene la expresión para aproximación de la primera derivada

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{\varepsilon_p}$$

en este caso la aproximación de  $f'(x)$  mediante diferencias progresivas es de primer orden, o sea  $O(\Delta x)$ . Siendo  $O_p(\Delta x)$  el error local de truncamiento, definido como,

$$O_p(\Delta x) = - \frac{\Delta x^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{\varepsilon_p}$$

Es común escribir la anterior de la forma siguiente:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} - O_p(\Delta x)$$

Como,

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

### Diferencias Regresivas

Considerando la serie de Taylor como el anterior caso; con  $k = 2$  y  $x = x_i - \Delta x$  se tiene,

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{\Delta x^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{\varepsilon_\gamma}$$

de esta ecuación se obtiene la siguiente expresión para la aproximación de la primera derivada;

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{\varepsilon_\gamma}$$

en este caso la aproximación de  $f'(x)$  mediante diferencias regresivas es de primer orden,  $O(\Delta x)$ . Siendo  $O_\gamma(\Delta x)$  el error local de truncamiento, definido como,

$$O_\gamma(\Delta x) = \frac{\Delta x^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{\varepsilon_\gamma}$$

Es común escribir la anterior expresión como,

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} + O_\gamma(\Delta x)$$

También,

$$f'(x_i) = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$$

para simplificar notación.

### Diferencias Centradas

Considerando la serie de Taylor con  $k = 3$  y escribiendo  $f(x)$ , en  $x = x_i + \Delta x$  y  $x = x_i - \Delta x$ , se tiene;

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{\Delta x^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} + \frac{\Delta x^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{\varepsilon_p} \dots (1)$$

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{\Delta x^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} - \frac{\Delta x^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{\varepsilon_\gamma} \dots (2)$$

Restando la Ec.(1) y (2), se tiene;

$$f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x) = 2\Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{\Delta x^3}{3!} \left[ \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{\varepsilon_p} + \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{\varepsilon_\gamma} \right]$$

esta última expresión, lleva a la siguiente aproximación de la primera derivada mediante diferencias centradas como;

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} + O_c(\Delta x^2)$$

Con un error local de truncamiento de segundo orden  $O_c(\Delta x^2)$ , es decir;

$$O_c(\Delta x^2) = \frac{\Delta x^3}{3!} \left[ \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{\varepsilon_p} + \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{\varepsilon_r} \right]$$

comparado el error local de truncamiento de la aproximación anterior  $O_c(\Delta x^2)$ , con los obtenidos previamente para diferencias progresivas y regresivas  $O_p(\Delta x)$  y  $O_r(\Delta x)$ , se tiene que;

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} O_c(\Delta x^2) < \lim_{\Delta x \rightarrow 0} O_p(\Delta x)$$

Es común encontrar expresada la derivada,

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Como,

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$

### 2.1.5. DERIVADAS DE ORDENES MAYORES

#### Derivada de Orden Dos

Partiendo del desarrollo de Taylor,

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{\Delta x^4}{4!} f^{(4)}(\xi_p)$$

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - \Delta x f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_i) - \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{\Delta x^4}{4!} f^{(4)}(\xi_p)$$

Y eliminando las derivadas primeras, sumando las ecuaciones anteriores y despejando se encuentra que;

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - \Delta x) - 2f(x_i) + f(x_i + \Delta x)}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} f^{(4)}(\xi_p)$$

así, la aproximación a la segunda usando diferencias centradas con un error de truncamiento  $O_c(\Delta x^2)$  es;

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - \Delta x) - 2f(x_i) + f(x_i + \Delta x)}{\Delta x^2}$$

Es común escribir la anterior expresión como,

$$f''(x_i) = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta x^2}$$

para simplificar notación.

### Derivadas en Dos Dimensiones

De forma análoga se construyen aproximaciones en diferencias finitas de primer y segundo orden en dos dimensiones. Usando el teorema de Taylor para funciones en dos variables  $x$  y  $y$ , es posible escribir de forma exacta para el punto  $x_i$  y  $y_j$ :

$$f(x_i + \Delta x, y_j) = f(x_i, y_j) + \Delta x \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_i + \theta_1 \Delta x, y_j)}{\partial x^2}$$

$$f(x_i, y_j + \Delta y) = f(x_i, y_j) + \Delta y \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_i, y_j + \theta_2 \Delta y)}{\partial y^2}$$

Así la aproximación en diferencias hacia delante de  $\partial f/\partial x$  y  $\partial f/\partial y$  es:

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} \simeq \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - f(x_i, y_j)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \simeq \frac{f(x_i, y_j + \Delta y) - f(x_i, y_j)}{\Delta y}$$

o en su forma simplificada, (para simplificar la notación  $\Delta x = h$  y  $\Delta y = k$ ), se tiene:

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} \simeq \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{h}$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \simeq \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{k}$$

La aproximación en diferencias hacia atrás de  $\partial f/\partial x$  y  $\partial f/\partial y$  es:

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} \simeq \frac{f(x_i, y_j) - f(x_i - \Delta x, y_j)}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \simeq \frac{f(x_i, y_j) - f(x_i, y_j - \Delta y)}{2\Delta y}$$

o en su forma simplificada, se tiene:

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} \simeq \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{h}$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \simeq \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{k}$$

La aproximación en diferencias centradas de  $\partial f/\partial x$  y  $\partial f/\partial y$  es:

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} \simeq \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - f(x_i - \Delta x, y_j)}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \simeq \frac{f(x_i, y_j + \Delta y) - f(x_i, y_j - \Delta y)}{2\Delta y}$$

o en su forma simplificada, se tiene:

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} \simeq \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{h}$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \simeq \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{k}$$

Por otro lado, la aproximación en diferencias centradas es:

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial x^2} \simeq \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - 2f(x_i, y_j) + f(x_i - \Delta x, y_j)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial y^2} \simeq \frac{f(x_i, y_j + \Delta y) - 2f(x_i, y_j) + f(x_i, y_j - \Delta y)}{\Delta y^2}$$

o en su forma simplificada, se tiene:

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial x^2} \simeq \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial y^2} \simeq \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{k^2}$$

### Derivadas en Tres Dimensiones

De forma análoga se construyen aproximaciones en diferencias finitas de primer y segundo orden en tres dimensiones. Usando el teorema de Taylor para funciones de tres variables  $x, y$  y  $z$ , es posible escribir de forma exacta para el punto  $x_i, y_j$  y  $z_k$  esto es:

$$f(x_i + \Delta x, y_j, z_k) = f(x_i, y_j, z_k) + \Delta x \frac{\partial f(x_i, y_j, z_k)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_i + \theta_1 \Delta x, y_j, z_k)}{\partial x^2}$$

$$f(x_i, y_j + \Delta y, z_k) = f(x_i, y_j, z_k) + \Delta y \frac{\partial f(x_i, y_j, z_k)}{\partial y} + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_i, y_j + \theta_2 \Delta y, z_k)}{\partial y^2}$$

$$f(x_i, y_j, z_k + \Delta z) = f(x_i, y_j, z_k) + \Delta z \frac{\partial f(x_i, y_j, z_k)}{\partial z} + \frac{\Delta z^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_i, y_j, z_k + \theta_3 \Delta z)}{\partial z^2}$$

Así la aproximación en diferencias hacia adelante de  $\partial f / \partial x$ ,  $\partial f / \partial y$  y  $\partial f / \partial z$  es:

$$\frac{\partial f(x_i, y_j, z_k)}{\partial x} \simeq \frac{f(x_i + \Delta x, y_j, z_k) - f(x_i, y_j, z_k)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j, z_k)}{\partial y} \simeq \frac{f(x_i, y_j + \Delta y, z_k) - f(x_i, y_j, z_k)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j, z_k)}{\partial z} \simeq \frac{f(x_i, y_j, z_k + \Delta z) - f(x_i, y_j, z_k)}{\Delta z}$$

O en su forma simplificada (para simplificar la notación, asociamos  $\Delta x = h$ ,  $\Delta y = l$  y  $\Delta z = m$ ), se tiene:

$$\frac{\partial f(x_i, y_j, z_k)}{\partial x} \simeq \frac{f_{i+1,j,k} - f_{i,j,k}}{h}$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j, z_k)}{\partial y} \simeq \frac{f_{i,j+1,k} - f_{i,j,k}}{l}$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j, z_k)}{\partial z} \simeq \frac{f_{i,j,k+1} - f_{i,j,k}}{m}$$

la aproximación en diferencias hacia atrás de  $\partial f / \partial x$ ,  $\partial f / \partial y$  y  $\partial f / \partial z$  es:

$$\frac{\partial f(x_i, y_j, z_k)}{\partial x} \simeq \frac{f(x_i + \Delta x, y_j, z_k) - f(x_i, y_j, z_k)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j, z_k)}{\partial y} \simeq \frac{f(x_i, y_j + \Delta y, z_k) - f(x_i, y_j, z_k)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j, z_k)}{\partial z} \simeq \frac{f(x_i, y_j, z_k + \Delta z) - f(x_i, y_j, z_k)}{\Delta z}$$

O en su forma simplificada, tenemos:

$$\frac{\partial f(x_i, y_j, z_k)}{\partial x} \simeq \frac{f_{i,j,k} - f_{i-1,j,k}}{h}$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j, z_k)}{\partial x} \simeq \frac{f_{i,j,k} - f_{i,j-1,k}}{l}$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j, z_k)}{\partial x} \simeq \frac{f_{i,j,k} - f_{i,j,k-1}}{m}$$

la aproximación en diferencias centradas de  $\partial f/\partial x$ ,  $\partial f/\partial y$  y  $\partial f/\partial z$  es:

$$\frac{\partial f(x_i, y_j, z_k)}{\partial x} \simeq \frac{f(x_i + \Delta x, y_j, z_k) - f(x_i - \Delta x, y_j, z_k)}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j, z_k)}{\partial y} \simeq \frac{f(x_i, y_j + \Delta y, z_k) - f(x_i, y_j - \Delta y, z_k)}{2\Delta y}$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j, z_k)}{\partial z} \simeq \frac{f(x_i, y_j, z_k + \Delta z) - f(x_i, y_j, z_k - \Delta z)}{2\Delta z}$$

o en su forma simplificada, tenemos:

$$\frac{\partial f(x_i, y_j, z_k)}{\partial x} \simeq \frac{f_{i+1,j,k} - f_{i-1,j,k}}{2h}$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j, z_k)}{\partial x} \simeq \frac{f_{i,j+1,k} - f_{i,j-1,k}}{2l}$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j, z_k)}{\partial y} \simeq \frac{f_{i,j,k+1} - f_{i,j,k-1}}{2m}$$

Por otro lado, la aproximación en diferencias centradas de  $\partial^2 f / \partial x^2$ ,  $\partial^2 f / \partial y^2$  y  $\partial^2 f / \partial z^2$  es:

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j, z_k)}{\partial x^2} \simeq \frac{f(x_i + \Delta x, y_j, z_k) - 2f(x_i, y_j, z_k) + f(x_i - \Delta x, y_j, z_k)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j, z_k)}{\partial y^2} \simeq \frac{f(x_i, y_j + \Delta y, z_k) - 2f(x_i, y_j, z_k) + f(x_i, y_j - \Delta y, z_k)}{\Delta y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j, z_k)}{\partial z^2} \simeq \frac{f(x_i, y_j, z_k + \Delta z) - 2f(x_i, y_j, z_k) + f(x_i, y_j, z_k - \Delta z)}{\Delta z^2}$$

o en su forma simplificada, se tiene:

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j, z_k)}{\partial x^2} \simeq \frac{f_{i+1,j,k} - 2f_{i,j,k} + f_{i-1,j,k}}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j, z_k)}{\partial y^2} \simeq \frac{f_{i,j+1,k} - 2f_{i,j,k} + f_{i,j-1,k}}{l^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j, z_k)}{\partial z^2} \simeq \frac{f_{i,j,k+1} - 2f_{i,j,k} + f_{i,j,k-1}}{m^2}$$

### 2.1.6. MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS EN UNA DIMENSIÓN

Considerando la ecuación diferencial parcial

$$(p(x)u'(x))' + q(x)u'(x) - r(x)u(x) = f(x)$$

En  $a \leq x \leq b$  donde :  $u(a) = u_\alpha$  y  $u(b) = u_\beta$

Con condiciones de frontera Dirichlet o cualquier otro tipo de condiciones de frontera.

Para usar el procedimiento general de solución numérica mediante el método de diferencias finitas, se debe hacer:

- Generar una malla del dominio, esto es: Una malla es un conjunto finito de puntos en los cuales buscaremos la solución aproximada a la ecuación diferencial parcial.
- Sustituir las derivadas correspondientes con algunas de las fórmulas de diferencias finitas centradas, en cada punto donde la solución es desconocida para obtener un sistema algebraico de ecuaciones  $Au = f$ .
- Resolver el sistema de ecuaciones y así obtener la solución aproximada en cada punto de la malla.

### Problema con Condiciones de Frontera de Dirichlet

Considerando un caso particular

$$u''(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = u_\alpha, \quad u(1) = u_\beta$$

con condiciones de frontera de Dirichlet. Para usar el procedimiento general de solución numérica mediante el método de diferencias finitas, se debe hacer:

- Generar una malla homogénea del dominio

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{1}{n} = \Delta x$$

- Sustituir la derivada con la forma en diferencias finitas, en cada punto donde la solución es desconocida para obtener un sistema algebraico de ecuaciones. Así, en cada punto  $x_i$  de la malla se aproxima la ecuación diferencial por;

$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h)}{h^2}$$

O en su forma simplificada,

$$u''(x_i) \approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$$

Definiendo la solución aproximada de  $u(x)$  en  $x_i$  como  $u_i$  como la solución del siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\frac{u_\alpha - 2u_1 + u_2}{h^2} = f(x_1)$$

$$\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{h^2} = f(x_2)$$

⋮

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$$

⋮

$$\frac{u_{n-3} - 2u_{n-2} + u_{n-1}}{h^2} = f(x_{n-2})$$

$$\frac{u_{n-2} - 2u_{n-1} + u_\beta}{h^2} = f(x_{n-1})$$

En este sistema de ecuaciones se puede escribir como una matriz  $\mathbf{A}$  y los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{f}$  de la forma;



Con condiciones de frontera de Neumann,

$$\frac{du}{dx} = cte_1 \text{ en } u(0) \text{ y } \frac{du}{dx} = cte_2 \text{ en } u(1)$$

para usar el procedimiento general de solución numérica mediante el método de diferencias finitas, primeramente, se debe de discretizar las condiciones de frontera, una manera seria usar la primera condición de frontera una aproximación usando diferencias progresivas.

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} = \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h}$$

Quedando,

$$\frac{u_1 - u_0}{h} = cte_1$$

para la segunda condición de frontera una aproximación usando diferencias regresivas,

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} = \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h}$$

Quedando,

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = cte_2$$

pero el orden de aproximación no sería el adecuado porque se está aproximando el dominio con diferencias centradas para tener todo el dominio con el mismo error local de truncamiento.

Para usar diferencias centradas;

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} = \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h}$$

en el primer nodo necesitamos introducir un punto de la malla ficticia  $x_{-1} = (x_0 - \Delta x)$  con un valor asociado a  $u_{-1}$ , entonces,

$$\frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = cte_1$$

así también, en el último nodo necesitamos introducir un punto de la malla ficticia  $x_{n+1} = (x_n + \Delta x)$  con un valor asociado a  $u_{n+1}$ , obteniendo

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = cte_2$$

Estos valores no tienen significado físico alguno, dado que esos puntos se encuentran fuera del dominio del problema. Entonces se debe de hacer:

- Se genera una malla homogénea del dominio,

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{1}{n} = \Delta x$$

- Se sustituye la derivada por las diferencias finitas, en cada punto donde la solución es desconocida para obtener un sistema algebraico de ecuaciones. Así, en cada punto  $x_i$  de la malla aproximamos la ecuación diferencial por;

$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h)}{h^2}$$

definiendo la solución aproximada de  $u(x)$  en  $x_i$  como la solución del siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = cte_1$$

$$\frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{h^2} = f(x_1)$$

⋮

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$$

$$\vdots$$

$$\frac{u_{n-2} - 2u_{n-1} + u_n}{h^2} = f(x_{n-1})$$

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = cte_2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene la solución aproximada en cada punto de la malla.

### Discretización del Tiempo

Hasta ahora se ha visto como discretizar la parte espacial de las ecuaciones diferenciales parciales, lo cual permite encontrar la solución estática de los problemas del tipo elíptico. Sin embargo, para ecuaciones del tipo parabólico e hiperbólico dependen del tiempo se necesita introducir una discretización a las derivadas con respecto al tiempo. Al igual que con las discretizaciones espaciales, podemos utilizar algún esquema de diferencias finitas en la discretización del tiempo.

### Ecuación con Primera Derivada Temporal

Para la solución de las ecuaciones diferenciales con derivada temporal ( $u_t$ ), se emplean diferentes esquemas en diferencias finitas para la discretización del tiempo.

Definiendo la ecuación diferencial parcial general de segundo orden como;

$$u_t = \mathcal{L}u$$

Donde,

$$\mathcal{L}u = (p(x)u'(x))' + q(x)u'(x) - r(x)u(x) - f(x)$$

aquí, los coeficientes  $p$ ,  $q$  y  $r$  pueden depender del espacio tiempo. Entonces el esquema  $theta$  está dada por;

$$u_t = (1 - \theta)(\mathcal{L}u^j) + \theta(\mathcal{L}u)^{j+1}$$

Existen diferentes casos del esquema  $theta$  a saber:

- Para  $\theta = 0$ , se obtiene un esquema de diferencias finitas hacia adelante en el tiempo conocido como esquema completamente explícito, ya que el paso  $n + 1$  se obtiene de los términos del paso anterior  $n$ . Es un esquema sencillo, el cual es condicionalmente estable cuando  $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2}$ .
- Para  $\theta = 1$ , se obtiene el esquema de diferencias finitas hacia atrás en el tiempo, conocido como esquema completamente implícito, el cual es incondicionalmente estable.
- Para  $\theta = \frac{1}{2}$ , se obtiene un esquema de diferencias finitas centradas en el tiempo, conocido como esquema Crank-Nicolson, este esquema es también incondicionalmente estable y es más usado por tal razón.

Para la implementación del esquema Crank-Nicolson se toma una diferencia progresiva para el tiempo y se promedian las diferencias progresivas y regresivas en el tiempo para las derivadas parciales. Entonces las discretizaciones correspondientes son:

$$u_t \simeq \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}$$

$$(p(x)u'(x))' \simeq \frac{p}{2} \left[ \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{\Delta x^2} + \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^j + u_{i+1}^{j+1}}{\Delta x^2} \right]$$

$$q(x)u'(x) \simeq \frac{q}{2} \left[ \frac{u_{i-1}^j + u_{i+1}^j}{2\Delta x} + \frac{u_{i-1}^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{2\Delta x} \right]$$

además de  $r(x)u_i^j$  y  $f_i^j$ .

Entonces, una vez que se sustituyen las derivadas por su forma en diferencias finitas, lo siguiente es formar el sistema,

$$Au^{j+1} = Bu^j + f^j$$

Esto se logra, colocando del lado izquierdo la igualdad de los términos que contengan el paso del tiempo correspondiente a  $j + 1$  y del lado derecho a los correspondientes términos de  $j$ .

### Ecuación con Segunda Derivada Temporal

Para el caso de ecuaciones con segunda derivada temporal, esta se aproxima por diferencias centradas en el tiempo es la siguiente:

$$u_{tt} \simeq \frac{u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{\Delta t^2}$$

$$(p(x)u'(x))' \simeq p \left[ \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{\Delta x^2} \right]$$

$$q(x)u'(x) \simeq q \left[ \frac{u_{i-1}^j + u_{i+1}^j}{2\Delta x} \right]$$

además de  $r(x)u_i^j$  y  $f_i^j$ .

Entonces, una vez que se sustituyen las derivadas por su forma en diferencias finitas, lo siguiente es formar el sistema;

$$u_i^{j+1} = 2u_i^j - u_i^{j-1} + (\Delta t)^2 B u^j$$

esto se logra, colocando del lado izquierdo la igualdad de los términos que contengan el paso del tiempo correspondiente a  $j + 1$  y del lado derecho a los correspondientes términos de  $j$  y  $j - 1$ . Para calcular  $u_i^{j+1}$  es necesario conocer  $u_{i-1}$ ,  $u_i$ ,  $u_{i+1}$  en los dos instantes inmediatos anteriores, i.e  $t_j$  y  $u_{j-1}$ .

En particular para calcular  $u_i^1$  es necesario conocer  $u_i^0$  y  $u_i^{-1}$ , si se considera,

$$u_i^{j+1} = 2u_i^j - u_i^{j-1} + (\Delta t)^2 \mathcal{L}u^j$$

para  $j = 0$ , entonces;

$$u_i^1 = 2u_i^0 - u_i^{-1} + (\Delta t)^2 \mathcal{L}u^0$$

de donde tenemos  $u_i^0$  es la condición inicial y  $\frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2\Delta t}$  es la primer derivada de la condición inicial, así tenemos que para el primer tiempo se tiene,

$$u_i^1 = u(x_i, 0) + \Delta t u_t(x_i, 0) + (\Delta t)^2 \mathcal{L}u^0$$

Lo cual permite calcular  $u_i^1$  a partir de las condiciones iniciales . La derivación del método parte de:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \mathcal{L}u^j \\ \frac{u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{(\Delta t)^2} &= \mathcal{L}u^j \\ u_i^{j+1} &= 2u_i^j - u_i^{j-1} + (\Delta t)^2 \mathcal{L}u^j \end{aligned}$$

donde el error intrínseco a la discretización es de orden cuadrático, pues se ha usado diferencias finitas centradas, tanto para el espacio como para el tiempo.

### 2.1.7. ERROR DE TRUNCACIÓN

Como punto de partida en este estudio del error de truncación (E.T) considerando la ecuación de difusión;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Si se utiliza un esquema de diferencias hacia adelante para la derivada temporal y un esquema de diferencias centrales para la segunda derivada, se puede escribir la ecuación anterior como:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \cdot \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta t)^2}$$

Sin embargo, de los anteriores conceptos; las aproximaciones hacia adelante y central tienen asociados errores de truncación de ordenes  $O(h)$  y  $O(h)^2$ , respectivamente, donde  $h$  es la discretización correspondiente a la aproximación utilizada. Si incluimos el efecto del error de truncamiento se debe escribir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \alpha \cdot \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta t)^2} + O(\Delta t) + O(\Delta x)^2$$

En este caso el error de truncación es igual a:  $O(\Delta t) + O(\Delta x)^2$  también  $O(\Delta t, (\Delta x)^2)$  el error de truncación asociado con todas las derivadas en una ecuación diferencial parcial, debería ser obtenido por puntos de expansión alrededor del mismo punto ( $n$ : tiempo,  $i$ : espacio).

El esquema de diferencias finitas anterior se conoce comúnmente como *esquema explícito simple* para la ecuación de Difusión. Un esquema *explícito* es aquel en el cual el término desconocido de la ecuación puede ser evaluado en término de otras cantidades conocidas. La ecuación anterior puede ser escrita como un *esquema implícito*.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \cdot \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

Al igual que el esquema explícito la aproximación de esta, tiene un error de truncación  $O(\Delta t, (\Delta x)^2)$ .

### 2.1.8. CONVERGENCIA

Se entiende por convergencia de un método numérico la garantía de que, al realizar un buen número de repeticiones (iteraciones), las aproximaciones obtenidas terminan por acercarse cada vez más al verdadero valor buscado.

En la medida en la que un método numérico requiera de un menor número de iteraciones que otro, para acercarse al valor numérico deseado, se dice que tiene una mayor rapidez de convergencia. Se entiende por estabilidad de un método numérico el nivel de garantía de convergencia, y es que algunos métodos numéricos no siempre convergen y, por el contrario, divergen; es decir, se alejan cada vez más y más del resultado deseado.

**DEFINICIÓN 2.2.8:** Dada la condición inicial  $u_0(x)$ , para lo cual existe una solución  $u(x, t)$  de la EDP. Un esquema de diferencias finitas de un solo paso que aproxima la EDP se dice que es un esquema convergente si todas las soluciones  $v_j^n$ , dadas por el esquema de diferencias finitas, tal que  $v_j^0$  converge a  $u_0(x)$  cuando  $jh \rightarrow x$ ; se cumple  $v_j^n \rightarrow u(x, t)$  siempre que  $(jh, nk) \rightarrow (x, t)$  cuando  $h, k \rightarrow 0$ .

### 2.1.9. CONSISTENCIA

La consistencia de una EDP se relaciona con el grado en el cual la representación de diferencias finitas aproxima a la EDP original. De acuerdo a la ecuación;

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} - \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_0, y_0} \cdot \frac{\Delta x}{2!} - \dots$$

Cambiando a una notación indicial se tiene;

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \text{Error de Truncación}$$

de acuerdo a eso la diferencia entre la derivada original y su aproximación de diferencias finitas se define como el error de truncación.

La representación por diferencias finitas de una ecuación diferencial parcial, se dice consistente si se puede mostrar que la diferencia entre ambas desaparece en el caso que el tamaño de la grilla de aproximación,  $\Delta x$  y el intervalo de tiempo,  $\Delta t$  se reduce a lo siguiente:

$$\lim_{\text{grilla} \rightarrow 0} (EDP - EDF) = \lim_{\text{grilla} \rightarrow 0} (E.T.) = 0$$

Donde:

EDP=Ecuación Diferencial Parcial

EDF=Ecuación en Diferencias Finitas

E.T.=Error de Truncación

**DEFINICIÓN 2.2.9:** Dada una ecuación diferencial parcial  $Pu = f$  y un esquema de diferencias finitas  $P_{h,k}u = f$ ; decimos que el *EDF* es consistente con la *EDP*; sii para cualquier función suave  $\Phi(x, t)$  se cumple;

$$P\Phi - P_{h,k}\Phi \rightarrow 0 \text{ cuando } h, k \rightarrow 0$$

donde la convergencia es puntual, en cada punto de la malla.

### 2.1.10. CONDICIONAMIENTO DE UN PROBLEMA

Un problema bien condicionado o bien puesto, si la solución es única y depende continuamente de los datos en el sentido de que sus pequeñas perturbaciones provocan cambios, también pequeños en los resultados.

**DEFINICIÓN 2.2.10:** Un problema de valor inicial (*PVI*) se dice que es bien puesto en una norma  $\| \cdot \|$  si y solamente si existe solución, es única y depende continuamente de los datos iniciales, es decir existe una constante  $C$  y  $\alpha$  tal que;

$$\|u(x, t)\| \leq C e^{\alpha t} \|u_0(x)\|$$

### 2.1.11. ESTABILIDAD

La estabilidad de una aproximación numérica, no tiene relación con la *EDP* misma, sino más bien con los problemas de aproximación y oscilaciones que pueden ocurrir al llevar a cabo de operaciones aritméticas que se requieren para resolver las ecuaciones de diferencias finitas.

El método de Von Neumann se basa en la descomposición de los errores, en series de Fourier. Para ilustrar el procedimiento se considera la ecuación de difusión;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

la que puede ser escrita como,

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

y resuelta para la incógnita  $u_i^{n+1}$ :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

la cual se debe simplificar mediante la definición de un parámetro adimensional, que por simplicidad se denota con  $r$  :

$$r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$$

con lo que se puede escribir;

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Suponiendo que la solución exacta de esta ecuación, la que se obtiene mediante el uso de un computador con precisión infinita, se denomina  $D$ . De igual forma, se denomina  $N$  a la solución numérica de dicha ecuación, la que se obtiene con un computador real. Si la solución analítica de la EDP se denomina  $A$ , se puede escribir lo siguiente:

- ¿Cuál es efecto del error de redondeo global?
  - ✓ Si crece esto conduce a una estabilidad de tipo fuerte.
  - ✓ Si decrece o no crece esto conduce a una estabilidad fuerte.
- ¿Cuál es el efecto del error de redondeo individual (iteración a iteración)?
  - ✓ Si crece esto conduce a una condición de inestabilidad de tipo débil.
  - ✓ Si decrece o no crece esto conduce a una condición de estabilidad débil.

Las dos situaciones anteriores llevaron a plantear la búsqueda de condiciones de estabilidad local o débil, y con esto asegurar una estabilidad fuerte o completa. Uno de los métodos más utilizados es el basado en un análisis de serie de Fourier, también conocido como análisis de Von Neumann. En forma adicional se tiene el método matricial que es una extensión del anterior.

### **Análisis de Fourier o Von Neumann**

Considerando la ecuación de diferencias finitas planteada para la ecuación de Difusión.

Sea  $\xi$  una representación del error de redondeo, el cual permite escribir:

$$N = D + \xi \dots (1)$$

La solución numérica calculada debería satisfacer la ecuación de diferencias finitas presentada de la ecuación de Difusión. De manera que al substituir la solución (1) en la ecuación de diferencia se obtiene.

$$D_i^{n+1} + \xi_i^{n+1} = D_i^n + \xi_i^n + r(D_{i+1}^n + \xi_{i+1}^n - 2D_i^n - 2\xi_i^n + D_{i-1}^n + \xi_{i-1}^n)$$

Dado que la solución exacta  $D$  debe satisfacer la ecuación de diferencias, es posible escribir lo siguiente para el error de redondeo;

$$\xi_i^{n+1} = \xi_i^n + r(\xi_{i+1}^n - 2\xi_i^n + \xi_{i-1}^n) \dots (2)$$

En este caso, la solución exacta  $D$  y el error de redondeo  $\xi$  deben satisfacer la misma ecuación de diferencias. Esto significa que tanto el error de redondeo como la solución numérica que poseen las mismas propiedades de crecimiento a través del tiempo. Cualquiera perturbación de los valores de entrada en la iteración  $n$  será prevenida de crecer sin cota en el caso de un esquema numérico estable, o crecerá aún más en el caso de un esquema numérico inestable.

Considerando una distribución del error en un tiempo cualquiera sobre la grilla de discretización. En la Figura 1 se muestra un ejemplo de la distribución del error para  $t = 0$ .

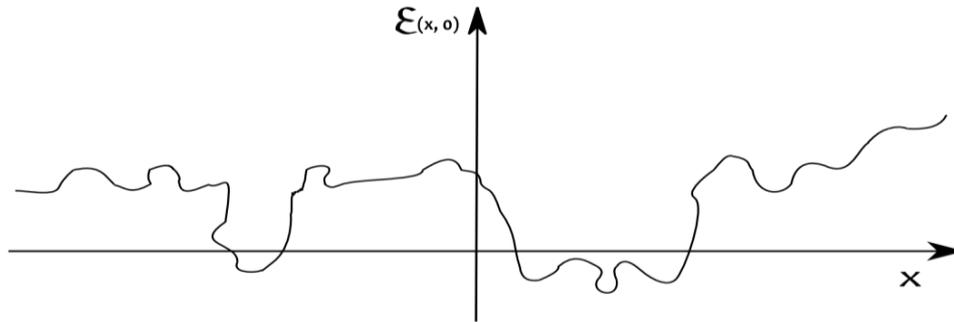


Figura 1: Distribución del Error

Fuente: Antonio Carrillo Ledesma, Osmar Mendoza Bernal

Suponiendo que el error puede ser escrito como una serie de Fourier de la forma:

$$\xi(x, t) = \sum_m b_m(t) e^{ik_m x}$$

donde el periodo de la frecuencia fundamental ( $m = 1$ ) se supone igual a  $2.L$ . Para el caso de que el intervalo  $L$  está en unidades de longitud se puede escribir el número de onda como:

$$k_m = \frac{m\pi}{L} \quad m = 0, 1, 2, \dots, M$$

donde  $m$  es el número de intervalos de longitud  $\Delta x$  contenidos en el intervalo  $L$ . En la ecuación el término  $b_m(t)$  se conoce como la amplitud del error  $k_m x$  es el ángulo de fase.

Dado que la ecuación de diferencias presentada (2) es lineal es posible concentrarse en el comportamiento de un único término de la serie de Fourier que describe al error, lo que permite limitar el análisis. En este caso se considera el término:

$$\xi_i^n = b_m(n\Delta t) e^{ik_m i \Delta x} = b_m(n) e^{ik_m i \Delta x}$$

el cual puede ser escrito para los otros términos en la ecuación (2),

$$\xi_i^{n+1} = b_m((n+1)\Delta t)e^{Ik_m i \Delta x} = b_m(n+1)e^{Ik_m i \Delta x} \dots (3)$$

$$\xi_{i-1}^n = b_m(n\Delta t)e^{Ik_m(i-1)\Delta x} = b_m(n)e^{Ik_m(i-1)\Delta x}$$

$$\xi_{i+1}^n = b_m(n\Delta t)e^{Ik_m(i+1)\Delta x} = b_m(n)e^{Ik_m(i+1)\Delta x}$$

Al sustituir los términos en (2) se tiene luego de simplificar por el término  $e^{Ik_m i \Delta x}$ , la siguiente expresión:

$$b_m(n+1) = b_m(n) + r b_m(n)(e^{Ik_m \Delta x} - 2 + e^{-Ik_m \Delta x})$$

Lo que puede ser simplificada aún más como:

$$b_m(n+1) = b_m(n) \left( 1 - 2r \left( 1 - \frac{e^{Ik_m \Delta x} + e^{-Ik_m \Delta x}}{2} \right) \right)$$

luego utilizando la identidad trigonométrica,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

reemplazándola a la ecuación anterior es escrita como:

$$b_m(n+1) = b_m(n)(1 - 2r(1 - \cos(k_m \Delta x))) = b_m(n)G$$

donde  $G$  se conoce como Factor de Amplificación, es decir que la amplitud de una componente arbitraria de la serie de Fourier para el error se multiplica por este factor en cada iteración temporal. Para el esquema de diferencias finitas explícito planteado en la ecuación (1) el factor de amplificación es:

$$G = \frac{b_m(n+1)}{b_m(n)} = 1 - 2r(1 - \cos(k_m \Delta x)) \dots (4)$$

Al sustituir el factor obtenido en la ecuación (3) se puede mostrar que :

$$\xi_i^{n+1} = G\xi_i^n \dots (5)$$

lo que permite identificar una condición necesaria para que el método numérico sea estable. En efecto, la ecuación (5) muestra que entre iteraciones sucesivas el error se modifica de acuerdo a un factor  $G$ . Si este factor es inferior a 1 se asegura que el error no crezca entre iteraciones sucesivas, De esta manera surge el criterio de estabilidad siguiente:

$$|G| \leq 1$$

la que se conoce como condición de Von Neumann.

En el caso particular de la ecuación (4) es posible utilizar otra identidad trigonométrica para reducir aún más dicha expresión:

$$\text{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{2}$$

al reemplazar dicha identidad en la ecuación (4) se obtiene:

$$G = \frac{b_m(n+1)}{b_m(n)} = 1 - 4r \text{sen}^2 \left( \frac{k_m \Delta x}{2} \right) = 1 - 4r \text{sen}^2 \left( \frac{\beta}{2} \right)$$

en donde el producto  $\beta = k_m \Delta x$  se como el parámetro de frecuencia. Si tomamos la expresión para el factor de Amplificación como una función del ángulo de fase y se considera diferentes valores de parámetro  $r$ , es posible tener una idea grafica de la convergencia del esquema explícito.

El método sería estable solo para algunos valores de  $r$  (0.2 y 0.4), mientras que para los otros valores se violaría dicha condición. Este grafico nos indica que el método es condicionalmente estable, esto es, solo para algunos valores de  $r$  sería estable. Se analiza con mayor detención la condición de estabilidad.

$$|G| = \left| 1 - 4r \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\beta}{2} \right) \right| \leq 1$$

lo que se pueda escribir como:

$$-1 \leq 1 - 4r \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\beta}{2} \right) \leq 1 \dots (6)$$

al evaluar la desigualdad en la ecuación (6) tenemos dos posibilidades. La primera posibilidad da origen a:

$$1 - 4r \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\beta}{2} \right) \leq 1$$

lo que permite obtener

$$4r \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\beta}{2} \right) \geq 0$$

lo que es siempre verdadero. La segunda posibilidad da origen a

$$1 - 4r \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\beta}{2} \right) \geq -1$$

lo que permite obtener,

$$4r \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\beta}{2} \right) \leq 2$$

que se puede desarrollar finalmente a:

$$r \leq \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\beta}{2} \right)}$$

lo que indica que hay relación entre el intervalo de simulación  $\Delta t$ , el tamaño de la grilla  $\Delta x$  y el parámetro  $\alpha$  que permite que el método sea estable.

Considerando la ecuación de onda o de transporte por advección en una dimensión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

donde  $c$  es la velocidad de traslación de onda. Lax(1954) propone el siguiente método de primer orden para resolver esta ecuación:

$$u_i^{n+1} = \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2} + \frac{c\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2} \right)$$

Si al igual que en caso anterior se considera una expansión en serie de Fourier para el error de truncación descrito ya anteriormente, es posible seguir el mismo procedimiento anterior para obtener la siguiente expresión para el factor de amplificación:

$$G = \frac{b_m(n+1)}{b_m(n)} = \cos(k_m \Delta x) - Iv \operatorname{sen}(k_m \Delta x)$$

Donde  $v = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$  se conoce como el número de Courant. La condición de estabilidad para este método establece:

$$|G| = |\cos(k_m \Delta x) - Iv \operatorname{sen}(k_m \Delta x)| = \sqrt{\cos^2(\beta) + v^2 \operatorname{sen}^2(\beta)} \leq 1$$

Si se toma la expresión para el Factor de Amplificación como una función del ángulo de fase, y se considera diferentes valores del parámetro  $v$ , es posible tener una idea gráfica de la convergencia de Lax.

### 2.1.12. TEOREMA DE EQUIVALENCIA

Si se tiene un problema de valor inicial se encuentra “bien puesto”, y además se tiene una aproximación de diferencias finitas que es consistente, si dicho esquema es estable su solución converge hacia la solución del problema real.

**TEOREMA 2.2.12:** Un esquema de diferencias finitas consistente en una ecuación diferencial parcial, para el cual el problema de valor inicial es bien puesto, es convergente si y solo si es estable.

En forma general se tiene que, si un esquema de aproximación es consistente y estable, es también convergente. En este sentido se tiene que en el caso que la grilla de aproximación se refina, la solución de la ecuación de diferencias finitas (EDF) se aproxima a la solución de la EDP original.

### 2.1.13. LA ONDA BIDIMENSIONAL

Como la cuerda vibrante en es un problema vibratorio unidimensional básico. Igualmente, importante es su análogo bidimensional, es decir el movimiento de una membrana elástica.

Supuestos físicos:

- La masa de la membrana es constante. Tiene flexibilidad perfecta y no ofrece resistencia a la flexión.
- La membrana se tensa y se fija en su frontera en el plano  $xy$ .
- La tensión  $T$  por unidad de longitud, es la misma en todos los puntos y no cambia durante el movimiento.
- La deflexión  $v(x, y, t)$  de la membrana durante el movimiento es pequeño en comparación al tamaño de la membrana y todos los ángulos de inclinación son pequeños.

Deducción de la ecuación:

La ecuación diferencial que gobierna el movimiento de la membrana se obtiene considerando las fuerzas que actúan sobre una pequeña porción de la membrana, como la Figura 2 lo muestra.

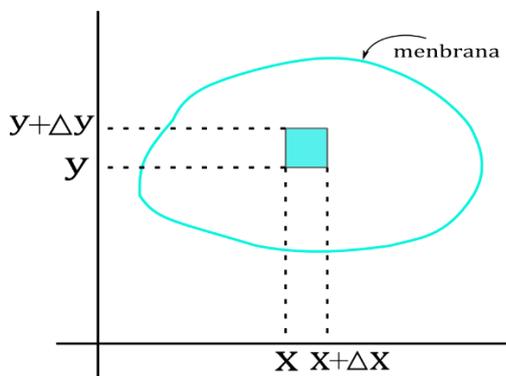


Figura 2: Pequeña porción de la Membrana

Fuente: Erwin Kreyszig

Componentes horizontales de las fuerzas:

Primero se considera los componentes horizontales de las fuerzas. Estos componentes se obtienen multiplicando las fuerzas por los cosenos de los ángulos de inclinación. Dado que estos ángulos son pequeños, sus cosenos están cerca de 1. Por lo tanto, las componentes horizontales de las fuerzas en los lados opuestos son aproximadamente iguales. Dado en la Figura 3.

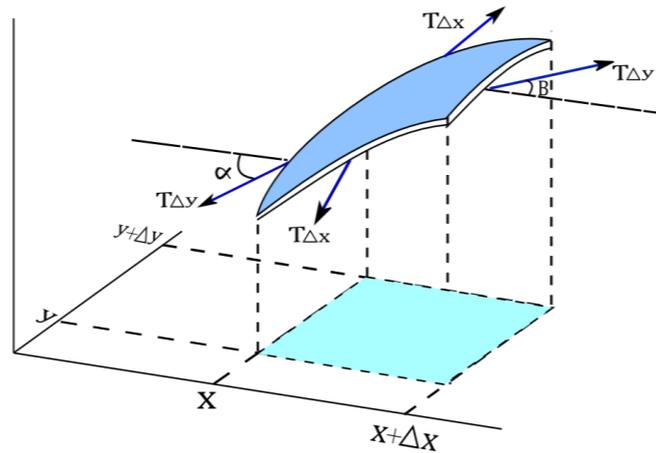


Figura 3: Componentes de las Fuerzas

Fuente: Erwin Kreyszig

Por lo tanto, el movimiento de las partículas de la membrana en una dirección horizontal será insignificanamente pequeño. De esto concluimos que podemos considerar el movimiento de la membrana como transversal; es decir, cada partícula se mueve verticalmente.

Componentes verticales de las fuerzas:

Estas componentes a lo largo del lado derecho e izquierdo son;

$$T\Delta y \text{ sen } \beta \quad y \quad - T\Delta y \text{ sen } \alpha$$

Aquí  $\alpha$  y  $\beta$  son los valores del ángulo de inclinación (que varía ligeramente a lo largo de los bordes) en el medio de los bordes, y el signo menos aparece porque la fuerza en el lado izquierdo se dirige hacia abajo. Como los ángulos son pequeños, podemos reemplazar sus senos por sus tangentes. Por lo tanto, la resultante de esos dos componentes verticales es:

$$\begin{aligned} T\Delta y(\text{sen } \beta - \text{sen } \alpha) &\approx T\Delta y(\tan \beta - \tan \alpha) \\ &= T\Delta y[u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] \dots (1) \end{aligned}$$

donde los subíndices  $x$  denotan derivadas parciales  $y_1$  y  $y_2$  son valores entre  $y$  y  $y + \Delta y$ . De manera similar, el resultante de las componentes verticales de las fuerzas que actúan sobre los otros dos lados de la porción es;

$$T\Delta x[u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_2, y)] \cdots (2)$$

La segunda ley de Newton da el PDE del modelo:

Según la segunda ley de Newton, la suma de las fuerzas dadas por (1) y (2) es igual a la masa  $\rho\Delta A$  de esa pequeña porción multiplicada por la aceleración  $\partial^2 u / \partial t^2$ ; aquí  $\rho$  es la masa de la membrana no desviada por unidad de área, y  $\Delta A = \Delta x \Delta y$  es el área de esa porción cuando no está desviado. Entonces,

$$\rho\Delta x\Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta y[u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] + T\Delta x[u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_2, y)]$$

donde la derivada de la izquierda se evalúa en algún punto adecuado  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  correspondiente a esa porción. Dividido por  $\rho\Delta x\Delta y$  da:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \left[ \frac{u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_2, y)}{\Delta y} \right]$$

Si se deja  $\Delta x$  y  $\Delta y$  que se acerque a cero, se obtiene el PDE del modelo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Donde;

$$c^2 = \frac{T}{\rho}$$

Esta PDE es llamada la ecuación bidimensional de la onda. La expresión en paréntesis es el Laplaciano  $\Delta^2 u$  de  $u$ . Reemplazando en la ecuación anterior se tiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta^2 u$$

### Solución de la Membrana rectangular

Teniendo en cuenta la ecuación de la onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \dots (1)$$

$$u(x, y, t) = 0 \quad \dots (2) \text{ Condición en la frontera}$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y) \quad \dots (3) \text{ Condiciones iniciales}$$

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y) \quad \dots (4)$$

#### Paso 1: Tres ecuaciones diferenciales ordinarias

Aplicando el método de separación de variables,

$$u(x, y, t) = F(x, y)G(t) \dots (5)$$

Considerando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= F_x G & ; & & \frac{\partial u}{\partial y} &= F_y G & ; & & \frac{\partial u}{\partial t} &= F \dot{G} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= F_{xx} G & ; & & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= F_{yy} G & ; & & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= F \ddot{G} \end{aligned}$$

Reemplazando en (1) y separando variables,

$$\frac{F_{xx} + F_{yy}}{F} = \frac{\ddot{G}}{c^2 G}$$

De donde se obtiene,

$$\ddot{G} + \lambda^2 G = 0 \dots (6) \quad \text{Donde } \lambda = cu$$

$$F_{xx} + F_{yy} + Fu^2 = 0 \dots (7)$$

Aplicando una vez más el periodo de separación de variables en la función de amplitud  $F(x, y)$ .

$$F(x, y) = H(x)Q(y) \dots (8)$$

Reemplazando (7) y separando las variables se obtiene;

$$\frac{1}{H} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -\frac{1}{Q} \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + u^2 Q \right) = -k^2$$

de esta expresión se obtienen dos ecuaciones para  $H$  y  $Q$ ;

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k^2 H = 0 \quad \dots (9)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + p^2 Q = 0 \quad \rightarrow \quad p^2 = u^2 - k^2 \dots (10)$$

**Paso 2:** Satisfacción de las condiciones de frontera.

Las soluciones generales para (9) y (10) son:

$$\begin{aligned} H(x) &= A \cos kx + B \sin kx \\ Q(y) &= C \cos py + D \sin py \end{aligned}$$

Por (5) y (2) se sigue que la función  $F = HG$  debe ser cero en la frontera. Se obtienen así las condiciones:

$$\begin{aligned} H(0) &= 0 & H(a) &= 0 \\ Q(0) &= 0 & Q(b) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $H(0) = A = 0$  y entonces,

$$H(a) = B \operatorname{sen} ka = 0$$

Debe tomarse  $B \neq 0$ , pues de otro modo  $H$  y  $F = 0$ . Por lo que,  $ka = m\pi$

$$k = \frac{m\pi}{a} \quad (m \text{ es entera})$$

Del mismo modo se concluye que  $C = 0$  y  $p$  debe restringirse a los valores  $p = n\pi/b$ .

Se obtienen así las soluciones:

$$H_m(x) = \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} ; m = 1, 2, 3, \dots$$

$$Q_n(y) = \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b} ; n = 1, 2, 3, \dots$$

por lo que;

$$F_{mn}(x, y) = H_m(x)Q_n(y) = \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b} ; m = 1, 2, 3, \dots ; n = 1, 2, 3, \dots$$

Una vez que se ha analizado (7), se analiza (6).

puesto que  $p^2 = u^2 - k^2$  en (10) y  $\lambda = cu$  en (6), se tiene;

$$\lambda = c\sqrt{p^2 + k^2}$$

Como  $p = n\pi/b$  ;  $k = m\pi/a$  , reemplazando;

$$\lambda_{mn} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} ; m = 1, 2, 3, \dots ; n = 1, 2, 3, \dots \quad \dots (11)$$

Entonces en la ecuación (6), la solución general es:

$$G_{mn}(t) = [B_{mn} \cos \lambda_{mn}t + B_{mn}^* \operatorname{sen} \lambda_{mn} t]$$

$$v_{mn}(x, y, t) = F_{mn}(x, y)G_{mn}(t)$$

$$v_{mn}(x, y, t) = [B_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn}^* \operatorname{sen} \lambda_{mn} t] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b} \dots (12)$$

$$\lambda_{mn} = \lambda_{nm}$$

$$f_{mn} = \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi y$$

$$f_{nm} = \operatorname{sen} n\pi x \operatorname{sen} m\pi y$$

$$f_{mn} \neq f_{nm}$$

Para  $\lambda_{mn} = \lambda_{nm}$  quiere decir que existen muchas vibraciones que puedan tener las misma frecuencia, pero diferentes lineales nodales.

Si  $\lambda_{12} = \lambda_{21} = c\pi\sqrt{5}$  entonces:  $f_{12} = \operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} 2\pi y$  y  $f_{21} = \operatorname{sen} 2\pi x \operatorname{sen} \pi y$

La solución:

$$u_{12} = (B_{12} \cos c\pi\sqrt{5}t + B_{12}^* \operatorname{sen} c\pi\sqrt{5}t)$$

$$u_{21} = (B_{21} \cos c\pi\sqrt{5}t + B_{21}^* \operatorname{sen} c\pi\sqrt{5}t)$$

**Paso 3:** Solución del problema completo.

Para obtener la solución que también satisface las condiciones iniciales (3) y (4), se considera las series dobles.

$$v(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}(x, y, t)$$

$$v(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [B_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn}^* \operatorname{sen} \lambda_{mn} t] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \dots (13)$$

A partir de esta expresión y (3) se obtiene:

$$v(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [B_{mn}] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} = f(x, y) \dots (14)$$

la anterior es una serie doble de Fourier.

Suponiendo que  $f(x, y)$ , puede desarrollarse en una serie como esta. Entonces los coeficientes de Fourier  $B_{mn}$  de  $f(x, y)$  en (14) pueden determinarse de la siguiente manera. Al hacer:

$$K_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_m(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \dots (15)$$

Entonces (14) se puede escribir en la forma,

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

para  $y$  como constante este serie senoidal de Fourier en función  $x$ .

Sabiendo que los coeficientes de desarrollo son:

$$K_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} dx \dots (16)$$

además (15) es la serie senoidal de Fourier de  $K_m(y)$  y por medio del mismo análisis anterior se tiene;

$$B_{mn} = \frac{2}{b} \int_0^b K_m(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy$$

por esta expresión y (16) se obtiene la fórmula de Euler:

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad \dots (17)$$

$$m = 1, 2, 3 \dots; \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

para los coeficientes de Fourier de  $f(x, y)$  en la serie doble de Fourier (14).

Para determinar los  $B_{mn}^*$  se deriva (13) término a término con respecto a  $t$ ; usando (4),

se obtiene:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [B_{mn}^* \operatorname{sen} \lambda_{mn}] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} = g(x, y)$$

Suponiendo que  $g(x, y)$  puede desarrollarse en esta serie doble de Fourier. Entonces

procediendo como se hizo anteriormente se obtiene:

$$B_{mn}^* = \frac{4}{ab\lambda_{mn}} \int_0^b \int_0^a g(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad \dots (18)$$

$$m = 1, 2, 3 \dots; \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

(Erwin)

## 2.2. MARCO CONCEPTUAL

Para la presente investigación, se encontró los siguientes trabajos relacionados con los conceptos de la investigación.

- **CASASUS ACEVEDO Álvaro, BENITO MUÑOZ Juan José, UREÑA PRIETO Francisco, GAVETE CORVINOS Luis (2009).** En el trabajo de investigación titulado “Resolución de la ecuación de Ondas en 2-D y 3-D utilizando diferencias finitas generalizadas. Consistencia y Estabilidad”, realizado en Madrid se presenta la utilización del Método de Diferencias Finitas Generalizadas para la resolución de la ecuación de onda, para 2-D y 3-D. Para ambos casos se inician el trabajo, con la obtención de las expresiones explícitas en diferencias finitas generalizadas; a partir de estas expresiones se estudia el error de truncamiento, consistencia, estabilidad y convergencia de la formulación explícita.
  
- **SANCHEZ, L.M. UREÑA, F. BENITO, J. GAVETE ,L.(2009)** En el trabajo de investigación titulado “Resolución de la ecuación de Difusión en 2-D y 3-D utilizando diferencias finitas generalizadas. Consistencia y Estabilidad”, realizado en Madrid. En esta investigación se presenta la utilización del Método de Diferencias Finitas Generalizadas para la resolución de la ecuación de difusión, para 2-D y 3-D. Se inicia con la discretización explícita, en diferencias finitas generalizadas. A partir de estas expresiones se estudia el error de truncamiento, consistencia, estabilidad y convergencia. En el trabajo se incluyen algunos resultados, de entre los numerosos casos analizados, como ejemplos representativos de la resolución de la ecuación de difusión que pretenden ilustrar el buen comportamiento del método.

- **SANTAMARÍA SANDOVAL Alex Javier, RAMIREZ MARTINEZ José Javier (2015)** En el trabajo de investigación titulado “Diferencias Finitas Asistido con Matlab en la Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales Hiperbólicas”, realizado en Perú, se presenta la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas asistido con el software matemático MATLAB, específicamente de la ecuación de Onda. Se aplica el método de aproximación con diferencias finitas el cual es explícito y consiste en definir una versión discreta de la ecuación diferencial parcial hiperbólica, reflejada, en una ecuación en diferencias, la cual permitió a través de un sistema de ecuaciones lineales calcular una solución aproximada de la ecuación diferencial parcial sobre un dominio discreto.
- Las bases del método de diferencias finitas consisten en la construcción de una malla de una manera estructurada, donde los nodos de la misma, en un espacio  $n$  dimensional, están localizados en las intersecciones de  $n$  familias de líneas rectas, el reemplazo de las derivadas continuas de la ecuación diferencial por las expresiones equivalentes en diferencias finitas y la resolución del sistema de ecuaciones que queda planteado como consecuencia de la anterior sustitución.
- **H. Saberi Naja y F. Izadiy (2014)**. En el trabajo de investigación titulado “Comparación de dos métodos de diferencia finita para resolver ecuación de onda amortiguada”, realizado en Islamic Azad University, se presenta dos esquemas de diferencias finitas, para resolver esta ecuación con condición inicial y de frontera. Estudiaron, la estabilidad y la consistencia de estos métodos explícitos, que aproximan las soluciones de la ecuación de onda con consistencia de orden dos, para examinar la precisión de los resultados; comparan los resultados con la solución obtenida por los métodos de separación de variable, también se presenta un ejemplo

numérico para cada método y la comparación de estos. Finalmente, los gráficos del error han sido trazados para mostrar que los métodos funcionan con alta precisión.

- **LINES Laurence R., SLAWINSKI Raphael and BORDING R. Phillip (1998).** En el trabajo de investigación titulada “Un medio para el análisis de estabilidad de la ecuación onda en diferencias finitas; cálculos de ecuaciones”, realizado en USA, analizo la estabilidad, para las soluciones obtenidas por diferencias finitas, de ecuaciones diferenciales parciales, usa el método desarrollado originalmente por Von Neumann. Esto es, elegido el muestreo espacial y temporal para evitar la inestabilidad numérica. Por lo que concluyen que el método en diferencias finitas es estable, esto por el análisis de Von Neuman que utiliza las series de Fourier.
  
- **MANNING Peter M. y MARGRAVE Gary F. (1999).** En el trabajo de investigación titulada “Modelado con diferencias finitas, análisis de Fourier y estabilidad”, realizado en USA, utiliza el análisis de Fourier para presentar conclusiones sobre la estabilidad y la dispersión en el modelado de diferencias finitas. Se presenta el modelo de diferencia finita más elemental, una dimensión en el espacio con precisión de segundo orden en espacio y tiempo. Para esta dimensión espacial, las fórmulas de casos se derivan para corregir la dispersión causada por el muestreo de cuadrícula finita. Las conclusiones extraídas son compatibles con otras discusiones sobre la estabilidad en una dimensión, trabaja mucho en la estabilidad de los algoritmos de diferencias finitas, siguiendo generalmente el enfoque de Von Neumann con el uso directo de la ecuación de onda.

- **MALLO Isaías Alonso y PORTILLO Ana M. (2011).** En el trabajo de investigación titulada “Estabilidad de discretizaciones espaciales, de la ecuación de onda con condiciones de frontera absorbentes”, realizado en la Universidad de Valladolid, se obtuvo una aproximación numérica y se realizó la computación en un dominio acotado e impone condiciones de contorno de frontera absorbentes para la ecuación de ondas unidimensional. Muestra que las ecuaciones diferenciales ordinarias que se obtienen están débilmente bien puestas, si se considera la norma euclídea discreta. Para ello prueban condiciones necesarias con la única restricción de que los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias al imponer las condiciones de frontera absorbentes sean de segundo orden en tiempo.
  
- **RÉKA Dávid (2015).** En el trabajo de investigación titulada “Análisis de estabilidad de esquemas de diferencias finitas para el calor 1D. Ecuación en un dominio espacial ilimitado”, realizado en Eötvös Loránd University, halla la solución numérica que converja a la solución exacta; mediante el refinamiento de la red. Utilizaron el concepto de, consistencia y estabilidad; para proporcionar la convergencia. El objetivo del trabajo fue, hallar la solución para la ecuación de calor unidimensional, en un dominio espacial ilimitado. Presenta la teoría clásica de Lax y Richtmyer, para un esquema consistente la estabilidad es suficiente y necesaria para la convergencia. Entonces deriva algunas condiciones simples suficientes y necesarias para la estabilidad, para eso presenta la teoría del análisis de Fourier, define la síntesis de Fourier y verifica otras condiciones para la estabilidad. Los esquemas que examinan son condicionalmente estables.

- **GUZMÁN F.S.(2010).** En el trabajo de investigación titulada “Solución de la ecuación de onda como un problema de valores iniciales usando diferencias finitas”, realizado en México, presento la solución de la ecuación de onda, como ejemplo para la solución de problemas de valores iniciales con condiciones de frontera, usando la aproximación de diferencias finitas. Primero desarrolla una solución elemental y una discretización directa a manera de introducción. Posteriormente resuelve la ecuación de onda como un sistema de primer orden, estudia la hiperbolicidad del sistema de ecuaciones resultante, calcula los modos y velocidades características del sistema y se imponen condiciones de frontera en términos de las variables características. En el caso de la aproximación con diferencias finitas de la ecuación diferencial parcial, trabaja la convergencia a una solución correcta en el límite continuo, y que sirva de guía para la correcta solución de problemas de valores iniciales con condiciones de frontera en general.
  
- **HERNÁNDEZ GALVÁN Blanca Leticia (2014).** En el trabajo de investigación titulada “Enfoque polinomial de la estabilidad de ecuaciones en diferencias finitas”, realizado en México DF, establece la relación que hay entre la teoría de polinomios de Schur y de von Neumann y la noción de estabilidad en el método de diferencias finitas. Es decir, el análisis de la estabilidad, en el método de diferencias finitas puede verse, en parte, como una fuerte aplicación de la teoría de polinomios de Schur y de Von Neumann.

## CAPÍTULO III

### 3. METODOLOGÍA

#### 3.1. UBICACIÓN

El presente estudio de investigación, se realizó en el ámbito de las Ecuaciones Diferenciales Parciales y el Análisis Numérico.

#### 3.2. PERIODO DE DURACIÓN DEL ESTUDIO

ACTIVIDADES	2018								
	M	A	M	J	J	A	S	O	N
REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	x	x							
EJECUCIÓN DEL PROYECTO		x							
PRESENTACIÓN DEL PROYECTO		x	x						
REVISIÓN Y APROBACIÓN DEL PROYECTO				x					
EJECUCIÓN DEL BORRADOR DE TESIS					x	x	x	x	x
SUSTENTACIÓN DE TESIS									x

#### 3.3. TIPO Y DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

##### 3.3.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN

El tipo de investigación del presente trabajo; es de tipo cualitativo, ya que intenta sacar sentido e interpretar los fenómenos de acuerdo con los significados. La investigación cualitativa implica la utilización y recogida de una gran variedad de conceptos.

### 3.3.2. DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

El diseño de la investigación es de tipo no experimental. Pero se manipula software Matlab para la manipulación de las variables.

### 3.4. MÉTODOS Y TÉCNICAS

#### 3.4.1. MÉTODO

El método de Diferencias Finitas, permite convertir una ecuación diferencial parcial en una ecuación algebraica, para encontrar aproximaciones para las derivadas parciales que están en ecuación.

Hay varios pasos, para la solución del problema. El primero: Es tener la ecuación a la cual discretizar. El segundo: Es la identificación del dominio de flujo y las condiciones de contornos e iniciales. El tercero: Es la discretización geométrica del dominio de flujo. Teniendo así un problema matemático en el que tenemos suficiente número de ecuaciones para resolver el número de variables que permitirá la solución, del problema.

Cuando se sustituye estas aproximaciones, la ecuación se convierte en un conjunto de ecuaciones algebraicas y en el proceso también se hace uso de las condiciones de contorno e iniciales. Al hablar de discretización geométrica del dominio se refiere a que se está viendo una malla rectangular con un espaciado de malla uniforme y por la condición de contorno, los límites del dominio son, igual a una constante.

Al resolver el sistema de ecuaciones en Matlab se hace el análisis del esquema numérico, lo que es responder a la pregunta; dado un esquema de discretización, como podemos decir que este nos llevara a una satisfactoria solución.

Las tres condiciones para una buena solución son la consistencia, estabilidad y la convergencia. Lo que se espera es la convergencia entre la solución calculada y la

solución exacta, entonces para lograr esto se tiene: En primer lugar, se debe tener la consistencia. En segundo lugar, condición de estabilidad para que los errores no se acumulen.

Entonces para lograr la convergencia se utiliza el Teorema de Lax que es para un problema de valor inicial lineal bien planteado con una discretización consistente. La estabilidad es la condición necesaria y suficiente para la convergencia. Luego se espera obtener una solución que es mejor y mejor de tal manera que para un espacio cada vez más pequeño en la grilla, podemos esperar que la solución calculada coincida con la exacta.

### **3.4.2. TÉCNICA**

Lectura y análisis de materiales de consulta.

## **3.5. OPERALIZACIÓN DE VARIABLES**

### **3.5.1. VARIABLE INDEPENDIENTE**

Método de Diferencias Finitas

### **3.5.2. VARIABLE DEPENDIENTE**

Ecuación Bidimensional de la Onda

## CAPÍTULO IV

### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

#### 4.1. RESULTADOS

##### 4.1.1. ECUACIÓN DE ONDA

La ecuación de onda general en dos dimensiones espaciales, con velocidad de onda constante  $c$ , se puede escribir en forma compacta.

$$P = \left\{ \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) \right.$$

Con las condiciones de frontera,

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= 0 \\ u(1, y, t) &= 0 \\ u(x, 0, t) &= 0 \\ u(x, 1, t) &= 0 \end{aligned}$$

y las condiciones iniciales;

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= 1 \quad \text{si } x = y = 0 \\ u(x, y, 0) &= 0 \quad \text{si } x \neq 0 \neq y \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x, y, t=0} &= 0 \end{aligned}$$

##### 4.1.2. DISCRETIZACIÓN

#### MALLA:

Introduciendo una malla en el tiempo y en el espacio. La malla en el tiempo consiste en puntos de tiempo.

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N_t}$$

Con un espaciado constante  $\Delta t = t_{n+1} - t_n, n \in \mathcal{J}_t$ .

Los métodos de diferencias finitas son fáciles de implementar en dominios simples rectangulares o en forma de caja. En un dominio con forma de rectángulo o caja, los puntos de malla se introducen por separado en las diversas direcciones espaciales.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N_x} \text{ en la dirección } x,$$

$$y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{N_y} \text{ en la dirección } y,$$

Se puede escribir un punto de malla general como  $(x_i, y_j, t_n)$  con  $i \in \mathcal{J}_x, j \in \mathcal{J}_y$  .y  $n \in \mathcal{J}_t$ . (Langtangen, 2013)

Con los espaciamientos de malla constante  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$  y  $\Delta y = y_{i+1} - y_i$ .

La variable no conocida  $u$  en el punto de la malla  $(x_i, y_j, t_n)$  es denotada por  $u_{i,j}^n$ .

### DISCRETIZACIÓN POR EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

Las ecuaciones de onda bidimensionales se discretizan mediante el ensamblaje de bloques de construcción para la discretización de las ecuaciones de onda 2D.

La discretización de las segundas derivadas vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_n &= \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} + O(\Delta t)^2 \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i &= \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x)^2 \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_j &= \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} + O(\Delta y)^2 \end{aligned}$$

Siendo la ecuación discretizada,

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \left( \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \dots (1)$$

Discretizando las Condiciones de Frontera:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = 0 &\rightarrow u_{0,j}^n = 0 \\ u(l, y, t) = 0 &\rightarrow u_{l,j}^n = 0 \\ u(x, 0, t) = 0 &\rightarrow u_{i,0}^n = 0 \\ u(x, l, t) = 0 &\rightarrow u_{i,l}^n = 0 \end{aligned}$$

Discretizando las Condiciones Iniciales:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) = 0 &\rightarrow u_{i,j}^0 = 0 && \text{si } x = y = 0 \\ u(x, y, 0) = 1 &\rightarrow u_{i,j}^0 = 1 && \text{si } x \neq 0 \neq y \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x,y,t=0} = 0 &\rightarrow \frac{u_{i,j}^1 - u_{i,j}^{-1}}{2\Delta x} = 0 \\ &\downarrow \\ &u_{i,j}^1 = u_{i,j}^{-1} \end{aligned}$$

Teniendo que todos los valores de los niveles de tiempo  $n$  y  $n - 1$  son conocidos, se puede entonces resolver para lo único desconocido  $u_{i,j}^{n+1}$ . El resultado se puede escribir de la forma siguiente:

$$u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1} = \Delta t^2 c^2 \left( \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right)$$

$$\lambda = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} c^2 \qquad \beta = \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} c^2$$

$$u_{i,j}^{n+1} = 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} + \lambda(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) + \beta(u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n)$$

$$h = \Delta x = \frac{L}{N_x - 1} \quad x_i = (i - 1)\Delta x \quad i = 0, 1, 2, \dots, N_x$$

$$l = \Delta y = \frac{M}{N_y - 1} \quad y_j = (j - 1)\Delta y \quad j = 0, 1, 2, \dots, N_y$$

$$k = \Delta t = \frac{T}{N_t - 1} \quad t^n = (n - 1)\Delta t \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_t$$

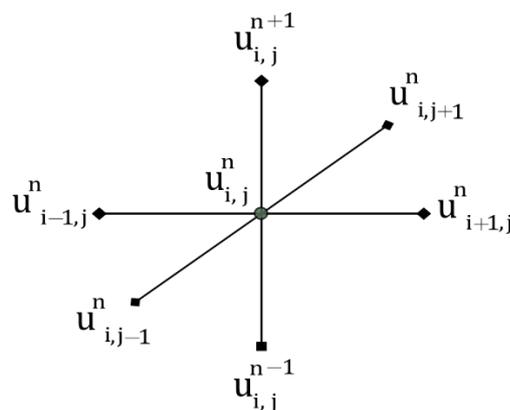


Figura 4: Molécula, dada por el Método de Diferencias Finitas

Fuente: Elaboración propia

De la Figura 4. La molécula dada por el método Diferencias Finitas; que discretiza y se puede decir que es un esquema explícito; dado que el paso a hallar depende de los demás anteriores.

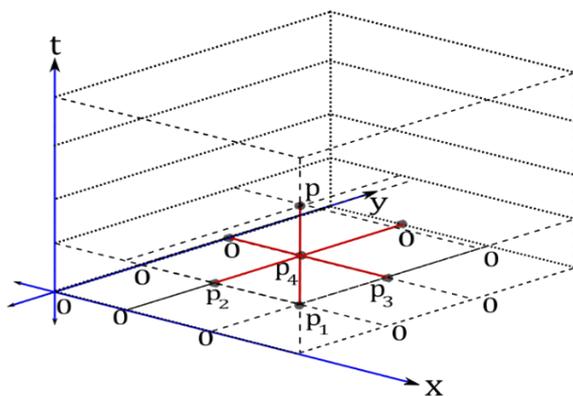


Figura 5: Molécula de discretización en los Ejes Cartesianos

Fuente: Elaboración propia

Para  $N_x = N_y = N_t=3$

Y denotando la variable  $u$  en la malla como:

$$\begin{aligned}u_{1,1}^0 &= p_1 \\u_{2,1}^0 &= p_2 \\u_{1,2}^0 &= p_3 \\u_{2,2}^0 &= p_4\end{aligned}$$

Para  $t = 0$ ; reemplazando en el esquema discreto se tiene:

$$\begin{aligned}u_{1,1}^1 = p_5 &\rightarrow p_5 = (1 - \lambda - \beta) + \frac{\lambda}{2} + \frac{\beta}{2} \\u_{2,1}^1 = p_6 &\rightarrow p_6 = (1 - \lambda - \beta) + \frac{\lambda}{2} + \frac{\beta}{2} \\u_{1,2}^1 = p_7 &\rightarrow p_7 = (1 - \lambda - \beta) + \frac{\lambda}{2} + \frac{\beta}{2} \\u_{2,2}^1 = p_8 &\rightarrow p_8 = (1 - \lambda - \beta) + \frac{\lambda}{2} + \frac{\beta}{2}\end{aligned}$$

Para  $t = 1$ ; reemplazando en el esquema discreto;

$$\begin{aligned}u_{1,1}^2 = p_9 &\rightarrow p_9 = (2 - 2\lambda - 2\beta)p_5 - 1 + \lambda p_6 + \beta p_7 \\u_{2,1}^2 = p_{10} &\rightarrow p_{10} = (2 - 2\lambda - 2\beta)p_6 - 1 + \lambda p_5 + \beta p_8 \\u_{1,2}^2 = p_{11} &\rightarrow p_{11} = (2 - 2\lambda - 2\beta)p_7 - 1 + \lambda p_8 + \beta p_5 \\u_{2,2}^2 = p_{12} &\rightarrow p_{12} = (2 - 2\lambda - 2\beta)p_8 - 1 + \lambda p_7 + \beta p_6\end{aligned}$$

Para  $t = 2$ ; reemplazando en el esquema discreto;

$$\begin{aligned}u_{1,1}^3 = p_{13} &\rightarrow p_{13} = (2 - 2\lambda - 2\beta)p_9 - p_5 + \lambda p_{10} + \beta p_{11} \\u_{2,1}^3 = p_{14} &\rightarrow p_{14} = (2 - 2\lambda - 2\beta)p_{10} - p_6 + \lambda p_9 + \beta p_{12} \\u_{1,2}^3 = p_{15} &\rightarrow p_{15} = (2 - 2\lambda - 2\beta)p_{11} - p_7 + \lambda p_{12} + \beta p_9 \\u_{2,2}^3 = p_{16} &\rightarrow p_{16} = (2 - 2\lambda - 2\beta)p_{12} - p_8 + \lambda p_{11} + \beta p_{10}\end{aligned}$$





$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_m \\ P_{m+1} \\ \vdots \\ P_{2m} \\ P_{2m+1} \\ \vdots \\ P_{3m} \\ P_{3m+1} \\ \vdots \\ P_{tm} \end{bmatrix}$$

Figura 7: Matriz u de incógnitas

Fuente: Elaboración propia

Donde las separaciones dadas por las líneas discontinuas, representan en un nivel de tiempo, con algunos puntos que son afectadas por las condiciones de frontera; esto por la molecula de discretizacion evaluada en los puntos de frontera.

Para la matriz  $\mathbf{u}$  .Donde  $P_1, P_2, P_3 \dots P_m$  son los puntos en el tiempo 1, y para el caso  $P_{m+1}, P_{m+2}, P_{m+3} \dots P_{2m}$  para el tiempo 2 y asi para el tiempo  $t$  esto es;  $P_{tm}$ .La cual se representa las líneas discontinuas que separan la matriz columna.

Y la matriz  $B$  muestra un matriz dividida por líneas discontinuas, en la primera parte son completadas por las condiciones iniciales y de frontera; son constantes dadas por  $\alpha, \beta, \lambda$ .

En la segunda separacion solo las condiciones de frontera.



Y para una función suave;

$$P\Phi = \frac{\partial^2 \Phi(x, y, t)}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y, t)}{\partial y^2} \right)$$

también se puede dar la notación siguiente:

$$P\Phi = c^2(\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) - \Phi_{tt}$$

Y discretizandola por medio de Diferencias Finitas:

$$P_{h,k,l}\Phi = c^2 \left( \frac{\Phi_{i+1,j}^n - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n}{h^2} + \frac{\Phi_{i,j+1}^n - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i,j-1}^n}{l^2} \right) - \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i,j}^{n-1}}{k^2}$$

Siendo;

$$\Phi_{i,j}^n = \Phi(ih, jl, nk)$$

Utilizando la expansión de Taylor para la expansión de cada termino en la EDF:

$$\Phi_{i+1,j}^n = \Phi_{i,j}^n + h\Phi_x + \frac{1}{2}h^2\Phi_{xx} + \frac{1}{6}h^3\Phi_{xxx} + O(h^4)$$

$$\Phi_{i-1,j}^n = \Phi_{i,j}^n - h\Phi_x + \frac{1}{2}h^2\Phi_{xx} - \frac{1}{6}h^3\Phi_{xxx} + O(h^4)$$

$$\Phi_{i,j+1}^n = \Phi_{i,j}^n + l\Phi_y + \frac{1}{2}l^2\Phi_{yy} + \frac{1}{6}l^3\Phi_{yyy} + O(l^4)$$

$$\Phi_{i,j-1}^n = \Phi_{i,j}^n - l\Phi_y + \frac{1}{2}l^2\Phi_{yy} - \frac{1}{6}l^3\Phi_{yyy} + O(l^4)$$

$$\Phi_{i,j}^{n+1} = \Phi_{i,j}^n + k\Phi_t + \frac{1}{2}k^2\Phi_{tt} + \frac{1}{6}k^3\Phi_{ttt} + O(k^4)$$

$$\Phi_{i,j}^{n-1} = \Phi_{i,j}^n - k\Phi_t + \frac{1}{2}k^2\Phi_{tt} - \frac{1}{6}k^3\Phi_{ttt} + O(k^4)$$

Por la definición de consistencia:

$$P_{h,l,k}\Phi - P\Phi = c^2 \left[ \left( \frac{\Phi_{i+1,j}^n - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n}{h^2} + \frac{\Phi_{i,j+1}^n - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i,j-1}^n}{l^2} \right) - \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i,j}^{n-1}}{k^2} \right] - [c^2(\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) - \Phi_{tt}] \dots (1)$$

Sabiendo que:

$$O(h^2) + O(h^2) = O(h^2)$$

Reemplazando la expansión por Taylor de cada termino, en la ecuación anterior; se sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{i+1,j}^n - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n}{h^2} &= \frac{\Phi_{i,j}^n + h\Phi_x + \frac{1}{2}h^2\Phi_{xx} + \frac{1}{6}h^3\Phi_{xxx} + O(h^4) - 2\Phi_{i,j}^n}{h^2} \\ &\quad + \frac{\Phi_{i,j}^n - h\Phi_x + \frac{1}{2}h^2\Phi_{xx} - \frac{1}{6}h^3\Phi_{xxx} + O(h^4)}{h^2} \\ &= \Phi_{xx} + O(h^2) \quad \dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{i,j+1}^n - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i,j-1}^n}{l^2} &= \frac{\Phi_{i,j}^n + l\Phi_y + \frac{1}{2}l^2\Phi_{yy} + \frac{1}{6}l^3\Phi_{yyy} + O(l^4) - 2\Phi_{i,j}^n}{l^2} \\ &\quad + \frac{\Phi_{i,j}^n - l\Phi_y + \frac{1}{2}l^2\Phi_{yy} - \frac{1}{6}l^3\Phi_{yyy} + O(l^4)}{l^2} \\ &= \Phi_{yy} + O(l^2) \quad \dots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i,j}^{n-1}}{k^2} &= \frac{\Phi_{i,j}^n + k\Phi_t + \frac{1}{2}k^2\Phi_{tt} + \frac{1}{6}k^3\Phi_{ttt} + O(k^4) - 2\Phi_{i,j}^n}{k^2} \\ &\quad + \frac{\Phi_{i,j}^n - k\Phi_t + \frac{1}{2}k^2\Phi_{tt} - \frac{1}{6}k^3\Phi_{ttt} + O(k^4)}{k^2} \\ &= \Phi_{tt} + O(k^2) \quad \dots (4) \end{aligned}$$

Finalmente teniendo las ecuaciones (2), (3) y (4), en (1):

$$\begin{aligned} P_{h,l,k}\Phi - P\Phi &= c^2(\Phi_{xx} + O(h^2) + \Phi_{yy} + O(l^2)) - \Phi_{tt} \\ &\quad + O(k^2) - c^2(\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) + \Phi_{tt} \\ &= O(h^2) + O(l^2) + O(k^2) \end{aligned}$$

Luego tomando el limite cuando  $P_{h,l,k}\Phi - P\Phi \rightarrow 0$  se tiene;

$$\lim_{h,l,k \rightarrow 0} [P_{h,l,k}\Phi - P\Phi] = \lim_{h,l,k \rightarrow 0} [O(h^2) + O(l^2) + O(k^2)]$$

Donde se cumple evidentemente la definición.

#### 4.1.4. ESTABILIDAD POR EL ANALISIS DE VON NEUMANN

- Error entre la solución calculada y la solución exacta de la ecuación discretizada, y que esta no debería ser amplificada a medida que se avanza en el tiempo.
- La estabilidad garantiza que el esquema produce una solución limitada, si la solución exacta misma está limitada.

Análisis de Von Neumann

Para la ecuación:

$$u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1} = \Delta t^2 c^2 \left( \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right)$$

El error  $\epsilon$ , también satisface la ecuación:

$$\epsilon_{i,j}^{n+1} - 2\epsilon_{i,j}^n + \epsilon_{i,j}^{n-1} = \Delta t^2 c^2 \left( \frac{\epsilon_{i+1,j}^n - 2\epsilon_{i,j}^n + \epsilon_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{\epsilon_{i,j+1}^n - 2\epsilon_{i,j}^n + \epsilon_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right)$$

De forma simplificada:

$$\epsilon_{i,j}^{n+1} - 2\epsilon_{i,j}^n + \epsilon_{i,j}^{n-1} = \lambda(\epsilon_{i+1,j}^n - 2\epsilon_{i,j}^n + \epsilon_{i-1,j}^n) + \beta(\epsilon_{i,j+1}^n - 2\epsilon_{i,j}^n + \epsilon_{i,j-1}^n) \dots (5)$$

Lo que dice  $u_{i,j}^n$  y  $\epsilon_{i,j}^n$  tienen el mismo comportamiento de crecimiento o disminución con respecto al tiempo.

Para ecuaciones diferenciales lineales con condiciones de contorno periódicas, la variación espacial del error puede expandirse en una serie finita de Fourier en un intervalo.

$$\epsilon_{i,j}^n \approx g^n e^{\imath p i \Delta x} e^{\imath q j \Delta y}$$

$$\epsilon_{i,j}^{n+1} \approx g^{n+1} e^{\imath p i \Delta x} e^{\imath q j \Delta y}$$

$$\epsilon_{i,j}^{n-1} \approx g^{n-1} e^{\imath p i \Delta x} e^{\imath q j \Delta y}$$

$$\epsilon_{i+1,j}^n \approx g^n e^{\imath p (i+1) \Delta x} e^{\imath q j \Delta y}$$

$$\epsilon_{i-1,j}^n \approx g^n e^{\imath p (i-1) \Delta x} e^{\imath q j \Delta y}$$

$$\epsilon_{i,j+1}^n \approx g^n e^{\imath p i \Delta x} e^{\imath q (j+1) \Delta y}$$

$$\epsilon_{i,j-1}^n \approx g^n e^{\imath p i \Delta x} e^{\imath q (j-1) \Delta y}$$

Reemplazando en (5), se obtiene:

$$\begin{aligned} & g^{n+1}e^{ip\Delta x}e^{iqj\Delta y} - 2g^ne^{ip\Delta x}e^{iqj\Delta y} + g^{n-1}e^{ip\Delta x}e^{iqj\Delta y} = \\ & = \lambda(g^ne^{ip(i+1)\Delta x}e^{iqj\Delta y} - 2g^ne^{ip\Delta x}e^{iqj\Delta y} + g^ne^{ip(i-1)\Delta x}e^{iqj\Delta y}) + \\ & + \beta(g^ne^{ip\Delta x}e^{iq(j+1)\Delta y} - 2g^ne^{ip\Delta x}e^{iqj\Delta y} + g^ne^{ip\Delta x}e^{iq(j-1)\Delta y}) \end{aligned}$$

Dividiendo por  $g^ne^{ip\Delta x}e^{iqj\Delta y}$  la ecuación, quedando;

$$g - 2 + g^{-1} = \lambda(e^{ip\Delta x} + e^{-ip\Delta x} - 2) + \beta(e^{iq\Delta y} + e^{-iq\Delta y} - 2)$$

Por la identidad:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2\left(\frac{k_m\Delta x}{2}\right) &= -\left(\frac{e^{ik_m\Delta x} + e^{-ik_m\Delta x} - 2}{4}\right) \\ -4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{k_m\Delta x}{2}\right) &= e^{ik_m\Delta x} + e^{-ik_m\Delta x} - 2 \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación, para poder simplificarla;

$$g - 2 + g^{-1} = \lambda\left(-4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{p\Delta x}{2}\right)\right) + \beta\left(-4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{q\Delta y}{2}\right)\right)$$

Solucionando  $g$ ,

$$g^2 + g\left(4\lambda \operatorname{sen}^2\left(\frac{p\Delta x}{2}\right) + 4\beta \operatorname{sen}^2\left(\frac{p\Delta x}{2}\right) - 2\right) + 1 = 0$$

Denotando  $A = 4\lambda \operatorname{sen}^2\left(\frac{p\Delta x}{2}\right) + 4\beta \operatorname{sen}^2\left(\frac{p\Delta x}{2}\right) - 2$ , luego:

$$g^2 + Ag + 1 = 0$$

Para la ecuación se tiene que hallar las raíces de la ecuación cuadrática

$$g = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4}}{2}$$

Para que el algoritmo sea estable  $|g| = 1$ ; luego:

$$g = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - 1}$$

Si  $\left(\frac{A}{2}\right) = |b| < 1$  se tiene  $g$  es complejo:

$$g = -\frac{A}{2} \pm i \sqrt{1 - \frac{A^2}{4}}$$

$$g = b \pm i\sqrt{1 - b^2}$$

Luego el módulo de la amplificación es  $|g|^2 = b^2 + (1 - b^2) = 1$ ; de donde se obtiene que es estable .

Como  $|b| < 1$  es  $-1 \leq b \leq 1$

Lo cual sería:

$$-1 \leq -\frac{A}{2} \leq 1$$

$$-1 \leq 1 - 2 \left[ \lambda \operatorname{sen}^2 \left( \frac{p\Delta x}{2} \right) - \beta \operatorname{sen}^2 \left( \frac{q\Delta y}{2} \right) \right] \leq 1$$

$$0 \leq 2 - 2 \left[ \lambda \operatorname{sen}^2 \left( \frac{p\Delta x}{2} \right) - \beta \operatorname{sen}^2 \left( \frac{q\Delta y}{2} \right) \right] \leq 2$$

$$0 \leq 1 - \lambda \operatorname{sen}^2 \left( \frac{p\Delta x}{2} \right) - \beta \operatorname{sen}^2 \left( \frac{q\Delta y}{2} \right) \leq 1$$

$$0 \leq 1 - \left[ \lambda \operatorname{sen}^2 \left( \frac{p\Delta x}{2} \right) + \beta \operatorname{sen}^2 \left( \frac{q\Delta y}{2} \right) \right] \leq 1$$

$$0 \leq \lambda \operatorname{sen}^2 \left( \frac{p\Delta x}{2} \right) + \beta \operatorname{sen}^2 \left( \frac{q\Delta y}{2} \right) \leq 1$$

Tomando valores máximos para la función  $\operatorname{sen}^2 \left( \frac{p\Delta x}{2} \right) + \operatorname{sen}^2 \left( \frac{q\Delta y}{2} \right)$ ;

$$0 \leq \lambda + \beta \leq 1$$

$$0 \leq \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta y^2} \leq 1$$

$$0 \leq \Delta t^2 \left( \frac{c^2}{\Delta x^2} + \frac{c^2}{\Delta y^2} \right) \leq 1$$

$$0 \leq \Delta t \leq \sqrt{\frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{c^2 (\Delta x^2 + \Delta y^2)}}$$

Donde es estable bajo esos términos. Por lo tanto, por el teorema de Lax para el problema bien puesto es convergente; ya que es estable y consistente como ya se comprobó.

#### 4.1.5. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

La implementación numérica del esquema de diferencias finitas para el problema de la onda bidimensional se hace uso de las mismas condiciones anteriores.

Entonces el algoritmo en Matlab es la siguiente:

*Clear*

Inicializando los valores para la matriz de coeficientes, dado por el número de puntos en las dimensiones espacial y temporal.

*N=40;*

La velocidad de la Onda

*c=1;*

Ingresando los valores para el espacio entre puntos en las diferentes dimensiones.

*dx=0.1;*

*dy=0.15;*

$$dt=0.04;$$

Se obtiene los valores para los elementos de la matriz.

$$lambda=(dt^2/dx^2)*c;$$

$$beta=(dt^2/dy^2)*c;$$

$$alpha=2-2*lambda-2*beta;$$

$$gamma=-((alpha+lambda+beta)/2);$$

Formando la matriz diagonal identidad con la dimensión ya mencionada.

$$A\_diag=eye(N)*-1;$$

Formando la matriz triangular inferior.

$$A1=zeros(1,N-2);$$

$$l1=length(A1);$$

for i=3:4:l1

$$A1(1,i)=beta$$

end

for i=4:4:l1

$$A1(1,i)=beta$$

end

$$A2=zeros(1,N-3);$$

```
l2=length(A2);  
  
for i=2:2:l2  
  
A2(1,i)=lambda  
  
end  
  
A3=zeros(1,N-4);  
  
l3=length(A3);  
  
for i=1:l3  
  
A3(1,i)=alpha  
  
end  
  
A4=zeros(1,N-5);  
  
l4=length(A4);  
  
for i=1:2:l4  
  
A4(1,i)=lambda  
  
end  
  
A5=zeros(1,N-6);  
  
l5=length(A5);  
  
for i=1:4:l5  
  
A5(1,i)=beta
```

*end*

*for i=2:4:l5*

*A5(1,i)=beta*

*end*

*A6=zeros(1,N-8);*

*l6=length(A6);*

*for i=1:l6*

*A6(1,i)=-1*

*end*

Sumando las diagonales para formar la matriz completa, llamada tridiagonal.

*A=A\_diag + diag(A1,-2) + diag(A2,-3) + diag(A3,-4) + diag(A4,-5) + diag(A5,-6) +  
diag(A6,-8);*

La matriz columna para los valores de las condiciones iniciales y frontera, y también en los siguientes pasos en el tiempo; donde son solo ceros.

*B=zeros(N,1);*

*b=length(B);*

*for j=1:4*

*B(j,1)=gamma*

*end*

*for j=5:8*

*B(j,1)=1*

*end*

Donde la solución está dada por la matriz columna u hallada por la división izquierda que es mas general.

*u=A\B*

Los valores de u son:

<i>0,8844444444444445</i>	<i>-0,362715738991007</i>	<i>-0,967190745181162</i>
<i>0,8844444444444445</i>	<i>-0,362715738991007</i>	<i>-0,736874585376415</i>
<i>0,8844444444444445</i>	<i>-0,755668784284888</i>	<i>-0,736874585376415</i>
<i>0,8844444444444445</i>	<i>-0,755668784284888</i>	<i>-0,736874585376416</i>
<i>0,564483950617284</i>	<i>-0,755668784284888</i>	<i>-0,736874585376415</i>
<i>0,564483950617284</i>	<i>-0,755668784284888</i>	<i>-0,336258521395786</i>
<i>0,564483950617284</i>	<i>-0,973978377210707</i>	<i>-0,336258521395786</i>
<i>0,564483950617284</i>	<i>-0,973978377210707</i>	<i>-0,336258521395787</i>
<i>0,114064943758574</i>	<i>-0,973978377210707</i>	<i>-0,336258521395786</i>

$0,114064943758574$	$-0,973978377210707$	$0,142070623085202$
$0,114064943758574$	$-0,967190745181162$	$0,142070623085202$
$0,114064943758574$	$-0,967190745181162$	$0,142070623085202$
$-0,362715738991007$	$-0,967190745181162$	$0,142070623085203$
$-0,362715738991007$		

Los valores anteriores, hasta el tiempo  $t = 10$  , para un espaciado  $L$  hasta 3; y halla las soluciones para los puntos  $P_n$ .

### Simulación Numérica:

Resolver la ecuación diferencial Parcial

*clear;*

La ecuación

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + c^2 u_{yy}$$

Ingresando los valores del dominio

$$Lx=L;$$

$$Ly=M;$$

$$dx=0.1;$$

$$dy=dx;$$

La cantidad de puntos en cada eje espacial

$$Nx=fix(Lx/dx);$$

$$Ny=fix(Ly/dy);$$

Formando los vectores desde 0 hasta un Lx, con un espacio Nx

$$x=linspace(0, Lx, Nx);$$

$$y=linspace(0, Ly, Ny);$$

Tiempo

$$T=Nt;$$

Formando la matriz donde se guarda los valores de las variables.

$$un=zeros(Nx,Ny);$$

Denotando u en un tiempo n-1 y n+1 respectivamente.

$$unm1=wn;$$

$$unp1=wn;$$

Donde los parámetros

$$CFL=0.4; \%CFL=c.dt/dx$$

$$c=1;$$

$$dt=CFL*dx/c;$$

La condición inicial, dado para el problema que se esta resolviendo.

$$wn (:, :) = I;$$

Inicializando

$t=0;$

Resolviendo para la condición, por medio del esquema de diferencias finitas.

*while*( $t < T$ )

Ingresando las condiciones de frontera

$wn(:,1)=0;$

$wn(:,end)=0;$

$wn(1,:)=0;$

$wn(end,:)=0;$

La solución por el esquema de diferencias finitas

$t=t+dt;$

$wnm1=wn; wn=wnp1;$

*for*  $i=2:Nx-1$ , *for*  $j=2:Ny-1$

$unp1(i,j)=2*un(i,j)-wnm1(i,j) + CFL^2*(un(i+1,j)+un(i,j+1) - 4*un(i,j)+un(i-1,j) + un(i,j-1));$

*end, end*

Visualización

*clf;*

```
subplot(2,1,1);
```

```
imagesc(x, y, wn'); colorbar; caxis([-0.02 0.02])
```

```
title(sprintf('t=%.2f',t));
```

```
subplot(2,1,2);
```

```
mesh(x,y,wn'); colorbar; caxis([-0.02 0.02])
```

```
axis([0 Lx 0 Ly -0.05 0.05]);
```

```
shg; pause(0.01);
```

```
end
```

Lo que da como resultado la simulación por el método de diferencias finitas en cada instante de tiempo, como se muestra en las figuras siguientes:

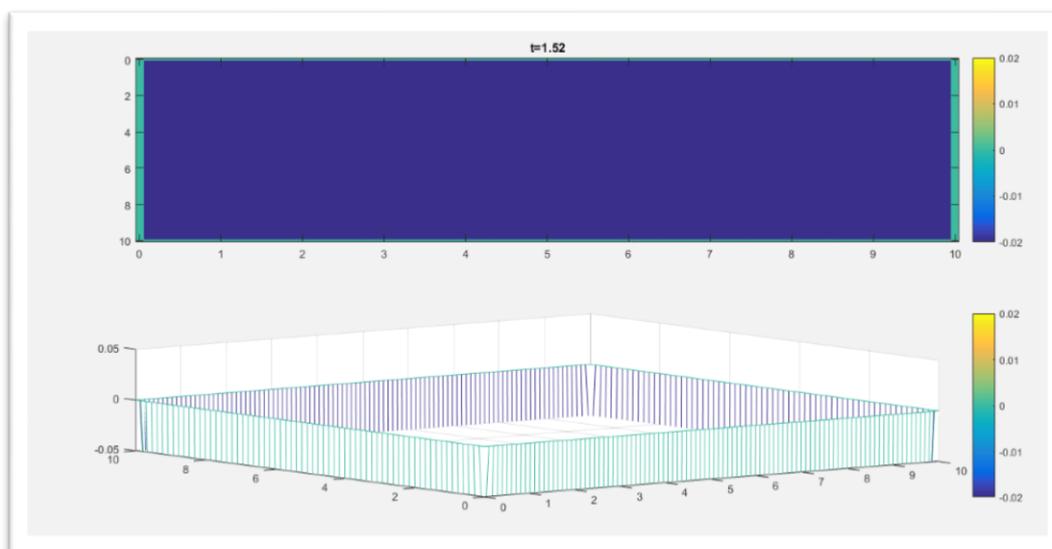


Figura 9: Simulación con las condiciones iniciales en el  $t=1.52$

Fuente: Elaboración propia

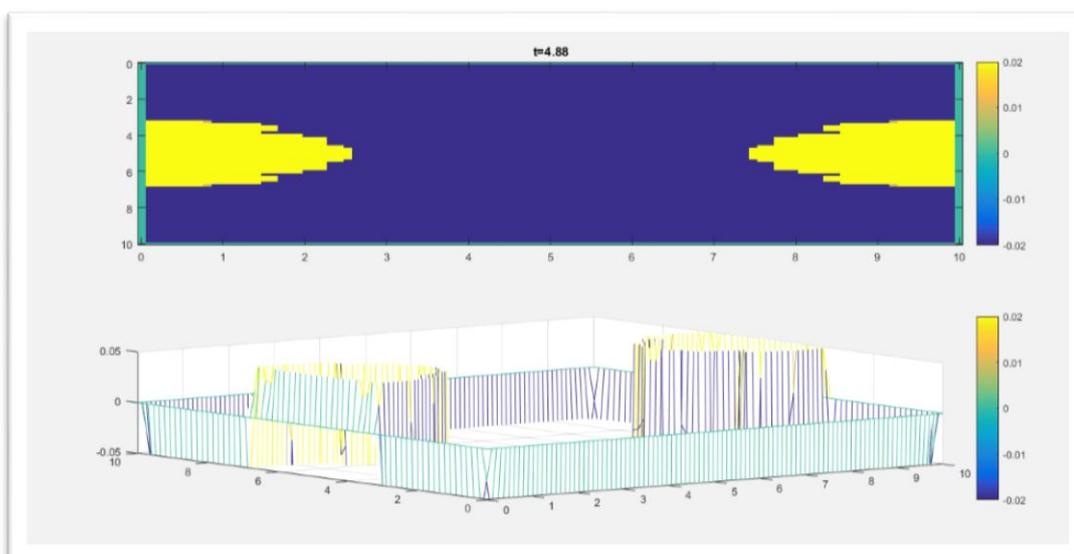


Figura 10: Simulación después de un  $t=4.88$

Fuente: Elaboración propia

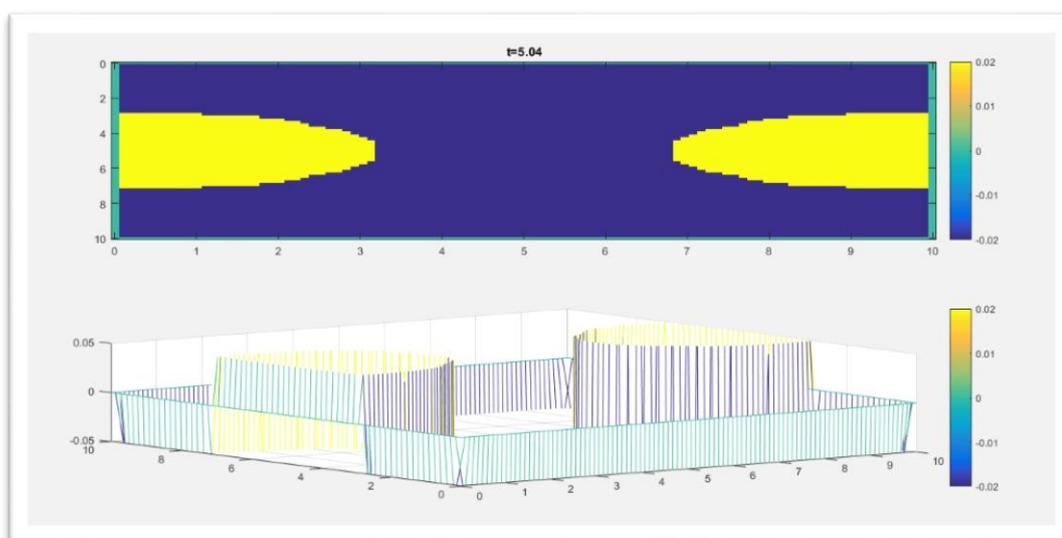


Figura 11: Simulación para el tiempo  $t=5.04$

Fuente: Elaboración propia

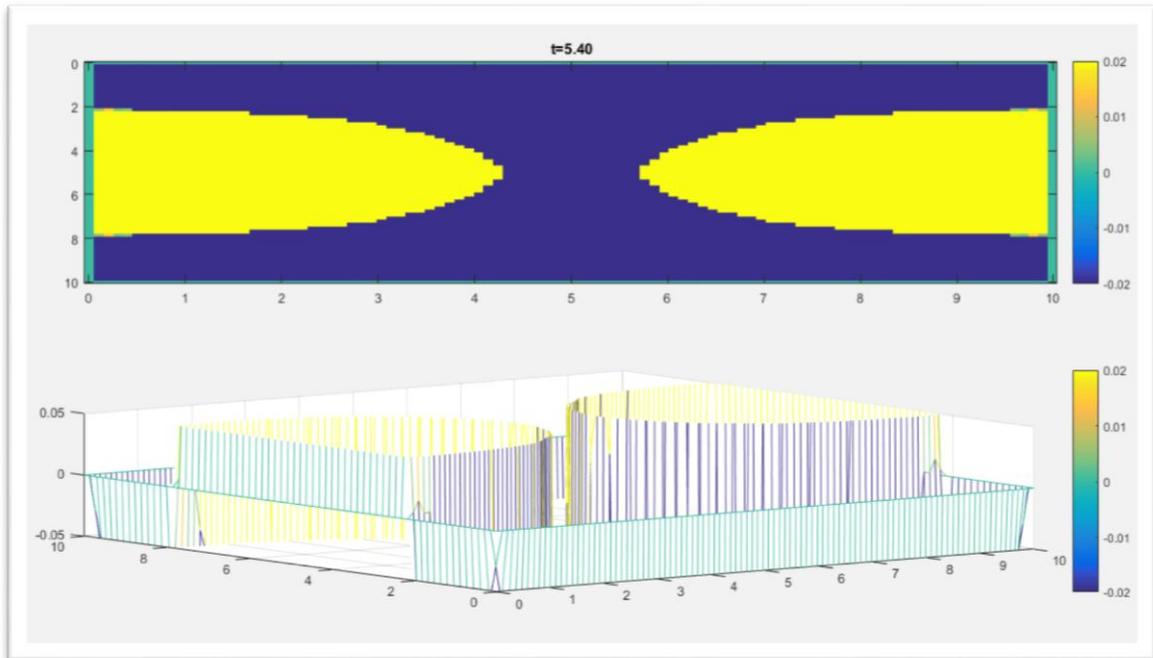


Figura 12: Simulación de la ecuación de onda en  $t=5.40$

Fuente: Elaboración propia

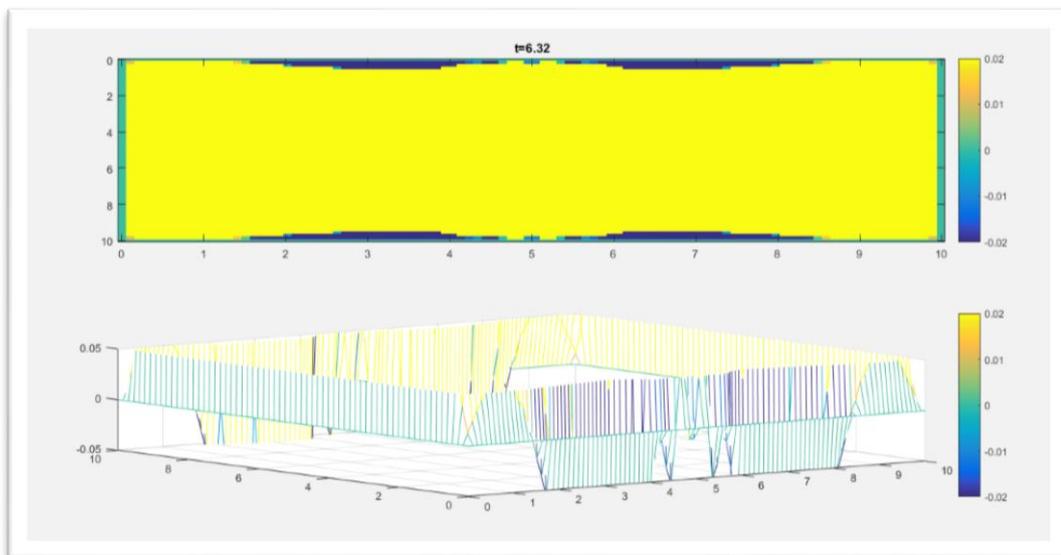


Figura 13: Simulación de la ecuación de onda para  $t=6.32$

Fuente: Elaboración propia

## 4.2. DISCUSIÓN

En el trabajo realizado utilizando el esquema de diferencias finitas, es un método adecuado para la ecuación de la onda bidimensional; ya que es convergente bajo los requerimientos del Teorema de Lax. Porque se comprobó los conceptos de consistencia y estabilidad. Entonces dado que el esquema discretizado es consistente, y los errores en cada paso del tiempo no se amplifica tanto, por el análisis de Von Neumann se sabe que la amplificación es igual a uno, y esto dice que el error se amplifica de manera lineal y no exponencial, lo cual sería inestable.

Si bien la aproximación por diferencias centradas, es requerida para obtener un esquema para la ecuación bidimensional. Definitivamente se puede tomar las diferencias de distintas formas, teniendo así un esquema explícito o implícito. En el problema que se resolvió, ya que se utilizó diferencias centradas el esquema resultó explícito. Al ser el esquema explícito la estabilidad es condicionada y por lo tanto también la convergencia, dada por la relación que hay entre ellas en el Teorema de Equivalencia que se utilizó. Por lo tanto para cada tipo de diferencias que se tome se podrá comprobar su convergencia y saber qué tipo de estabilidad aporta cada tipo de diferencia.

## CONCLUSIONES

Al terminar el trabajo de investigación, se llegó a las siguientes conclusiones:

- El método de diferencias finitas, al ser una forma sencilla relativamente, para poder resolver la ecuación de onda bidimensional; es efectiva de acuerdo al esquema que se eligió. Con una aproximación justificable y adecuada teóricamente de las derivadas de segundo orden.
- Por el teorema de equivalencia de Lax, también se tuvo la convergencia, realizando primero la consistencia del esquema numérico que se cumplió satisfactoriamente. Para la estabilidad se vio que la amplificación del error es constante con el tiempo, que también se pudo decir un intervalo para la estabilidad; teniendo así comprobada la convergencia del esquema numérico.
- El algoritmo realizado en el programa de Matlab, necesario para la solución de ecuaciones, generadas en cada punto de la malla. Mostro ser imprescindible para la obtención de las soluciones discretas y simulación del problema.

## RECOMENDACIONES

- Tener una ecuación numérica diferente, como el esquema de Lax-Friedrichs, Crank-Nicolson, Du Fort-Frankel, etc.
- Analizar la Convergencia, teniendo un esquema implícito.
- Discretizar la Ecuación de la Onda, con diferentes condiciones de frontera como de Cauchy o Robin, con una función fuente.
- Analizar, los errores en la matriz tridiagonal para este problema.
- La ecuación de onda en tres dimensiones, utilizando diferencias finitas, así como también tener la convergencia; con la estabilidad por el método de Von Neumann.
- Utilizar esquemas implícitos, para la ecuación de onda tridimensional.
- Simulación de la Ecuación de la Onda, en un esquema implícito en Matlab.
- Analizar el número de condicionamiento, para la matriz de coeficientes, para saber si se amplifica el error en la solución.

## BIBLIOGRAFÍA

- Alvaro Casaus Acevedo, J. J. (s.f.). Resolución de la ecuación de Ondas 2D y 3D utilizando diferencias finitas generalizadas. Consistencia y Estabilidad.
- Antonio Carrillo Ledesma, O. M. (2015). Introducción al Método de Diferencias Finitas y su Implementación Computacional. 3-7, 10-17. UNAM.
- Cabrera Santamaria Marco Antonio, T. R. (Marzo de 2005). Diferencias Finitas asistidas con Matlab en la solución de Ecuaciones Diferenciales Parabolicas. Peru, Lambayeque.
- Cuenca, U. d. (s.f.). Membrana, Ecuación de la Onda en dos dimensiones.
- David, R. (s.f.). Análisis de Estabilidad de Esquemas de Diferencias Finitas para el Calor en 1D. Ecuación en un dominio espacial Ilimitado.
- Erwin, K. (s.f.). Advanced Engineering Mathematics. Ohio State University.
- F. Izady, H. N. (s.f.). Comparación de dos métodos de Diferencias Finitas para resolver la ecuación de la Onda Amortiguada.
- F. Margrave, P. M. (s.f.). Modelado con Diferencias Finitas. Análisis de Fourier y Estabilidad.
- Galvan, B. L. (s.f.). Enfoque polinomial de la Estabilidad de ecuaciones en Diferencias Finitas.
- Guzman, F. (s.f.). Solución de la Ecuación de Onda como un problema de Valores Iniciales usando Diferencias Finitas.
- L.M. Sanchez, F. J. (s.f.). Resolución de la ecuación de Difusión en 2D y 3D utilizando las diferencias finitas generalizadas. Consistencia y Estabilidad.

- Langtangen, H. P. (Diciembre de 2013). Método de Diferencias Finitas para el movimiento de la Onda. 56. Universidad de Oslo.
- Laurence R. Lines, R. S. (s.f.). Un medio para el análisis de Estabilidad de la Onda en Diferencias Finitas. Cálculo de Ecuaciones.
- Mercedes, O. R. (2001). Método de Diferencias Finitas para Ecuaciones Diferenciales Parciales. Trujillo, Perú.
- Ricahrd L.Burden, J. D. (2005). Análisis Numérico. Canada.
- Santamaria Sandoval Alex Javier, R. M. (s.f.). Diferencias Finitas asistido con Matlab en la Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales Hiperbólicas.
- Vadillo, F. (Enero de 2003). Matemática Numérica.
- Y.Niño, C. y. (2001). Método de Diferencias Finitas. Modelación Numérica en Ingeniería Hidraulica y Ambiental.

## ANEXO

Ecuación de la Onda Bidimensional con Fuente;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f$$

el cual puede ser discretizado como;

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + c^2 \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} + f_i^n$$

tomando  $\Delta x = \Delta y$ ;

$$u_{i,j}^{n+1} = 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} + \left[ c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right]^2 (u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n) + \Delta t^2 f_i^n$$

donde las condiciones de frontera hacen que se reflejen las ondas; luego por las condiciones de Dirichlet dado por:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = 0 & \quad u(L_x, y, t) = 0 \\ u(x, 0, t) = 0 & \quad u(x, L_y, t) = 0 \end{aligned}$$

Discretizando:

$$\begin{aligned} u_{0,j}^n = 0 & \quad u_{L_x,j}^n = 0 \\ u_{i,0}^n = 0 & \quad u_{i,L_y}^n = 0 \end{aligned}$$

y las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) = 0 & \quad \text{si } x = y = 0 \\ u(x, y, 0) = 1 & \quad \text{si } x \neq 0 \neq y \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x,y,t=0} & = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u(x, y, 0) = 0 &\rightarrow u_{i,j}^0 = 0 && \text{si } x = y = 0 \\
 u(x, y, 0) = 1 &\rightarrow u_{i,j}^0 = 1 && \text{si } x \neq 0 \neq y \\
 \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x,y,t=0} = 0 &\rightarrow \frac{u_{i,j}^1 - u_{i,j}^{-1}}{2\Delta x} = 0 \\
 &&& \downarrow \\
 &&& u_{i,j}^1 = u_{i,j}^{-1}
 \end{aligned}$$

**Donde la simulación numérica es:**

*clear;*

*%wtt=c^2wxx + c^2 wyy + f*

Ingresando el dominio, dado por los ejes espaciales.

*Lx=10;*

*Ly=10;*

*dx=0.1;*

*dy=0.15;*

Ingresando para que tiempo y definiendo constantes.

*T=8;*

*CFL=0.4; %CFL=c.dt/dx*

*c=1;*

*dt=CFL\*dx/c;*

*Nt=T/dt;*

*nx=fix(Lx/dx);*

$$ny=fix(Ly/dy);$$

Definiendo los vectores;

$$x=linspace(0, Lx, nx);$$

$$y=linspace(0, Ly, ny);$$

Denotando la matriz para el dominio.

$$wn=zeros(nx,ny);$$

Variable para el tiempo n-1 y n+1 respectivamente;

$$wnm1=wn;$$

$$wnp1=wn;$$

La condición inicial, dado para el problema que se está resolviendo;

$$wn(:, :) = 1;$$

Inicializando

$$t=0;$$

Ciclo en el paso del tiempo; y así hallar la solución para cada paso del tiempo.

$$\text{while}(t < T)$$

$$\text{if } t = 0$$

$$wnp1(:, :) = wnm1(:, :)$$

$$\text{end}$$

Ingresando las condiciones de frontera

$$wn(:, 1) = 0;$$

```
wn(:,end)=0;
```

```
wn(1,:)=0;
```

```
wn(end,:)=0;
```

La solución por el esquema de diferencias finitas;

```
t=t+dt;
```

```
wnm1=wn; wn=wnp1;
```

Fuente,

```
wn(3,50)=dt^2*20*sin(30*pi*t/20);
```

```
for i=2:nx-1, for j=2:ny-1
```

```
wnp1(i,j)=2*wn(i,j)-wnm1(i,j) ...
```

```
+ CFL^2*(wn(i+1,j)+wn(i,j+1) - 4*wn(i,j)+wn(i-1,j) + wn(i,j-1));
```

```
end, end
```

Visualización:

```
clf;
```

```
subplot(2,1,1);
```

```
imagesc(x, y, wn'); colorbar; caxis([-0.02 0.02])
```

```
title(sprintf('t=%0.2f',t));
```

```
subplot(2,1,2);
```

```
mesh(x,y,wn'); colorbar; caxis([-0.02 0.02])
```

```
axis([0 Lx 0 Ly -0.05 0.05]);
```

```
shg; pause(0.01);
```

```
end
```

Lo cual nos da una simulación dada en las siguientes, para las condiciones iniciales y de frontera ya mencionada, con una fuente en el punto  $wn(50,50)$  ; desde el cual iniciara las ondas.

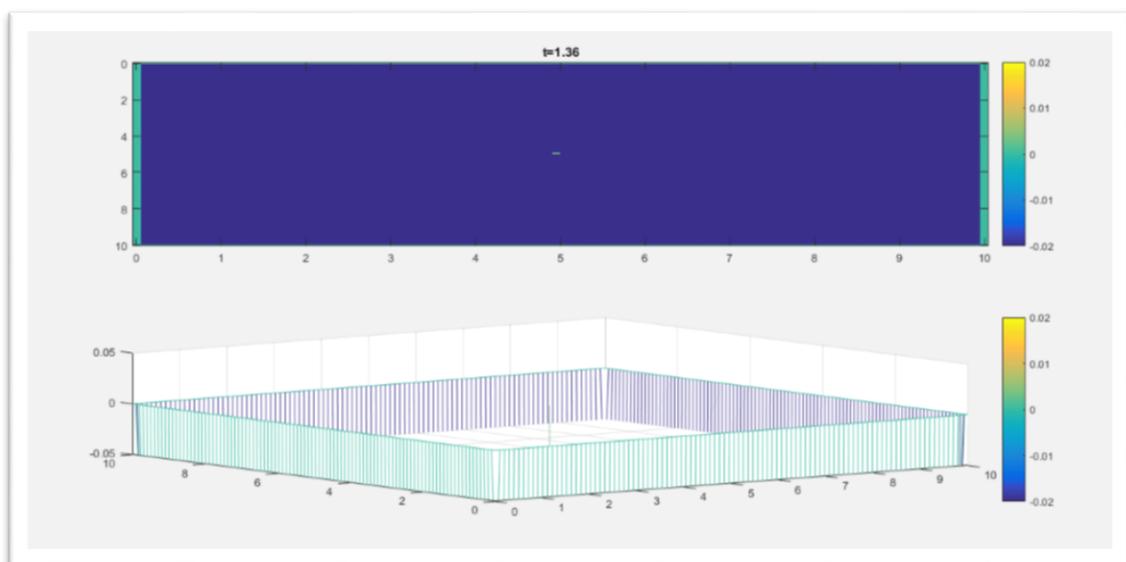


Figura 14: Simulación de la Ecuación de Onda con fuente en  $wn(50,50)$  para  $t=1.36$

Fuente: Elaboración propia

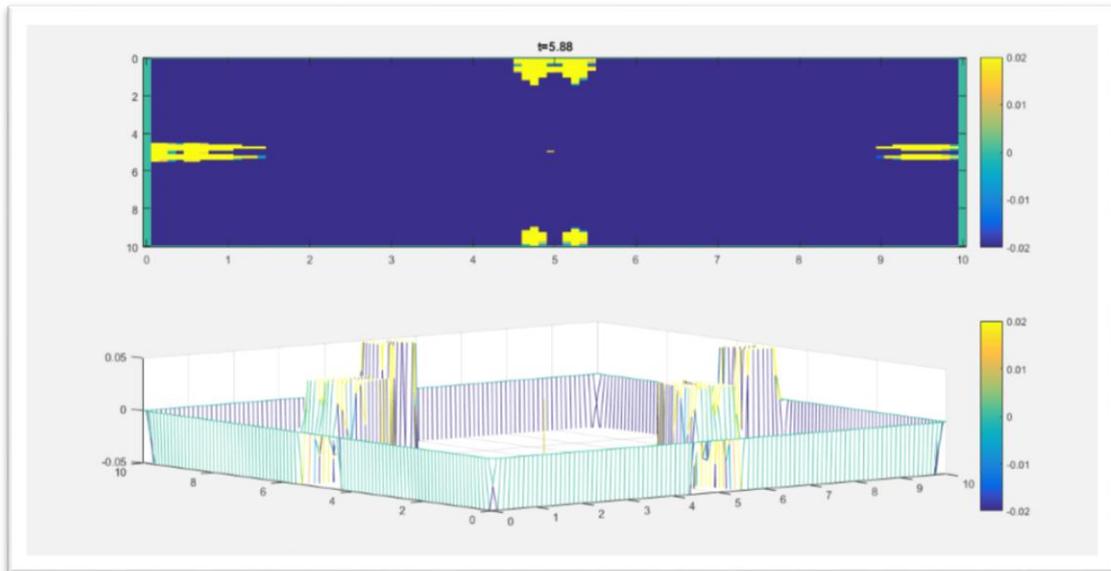


Figura 15: Simulación de la Ecuación de Onda con Fuente, para  $t=5.88$

Fuente: Elaboración propia

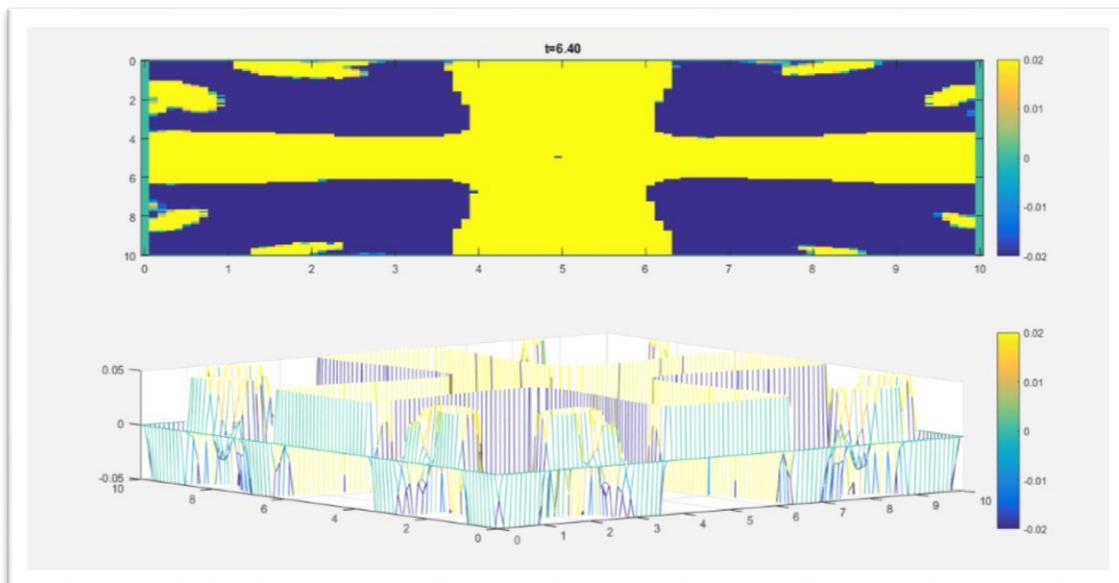


Figura 16: Simulación de la Ecuación de Onda con Fuente, para  $t=6.40$

Fuente: Elaboración propia

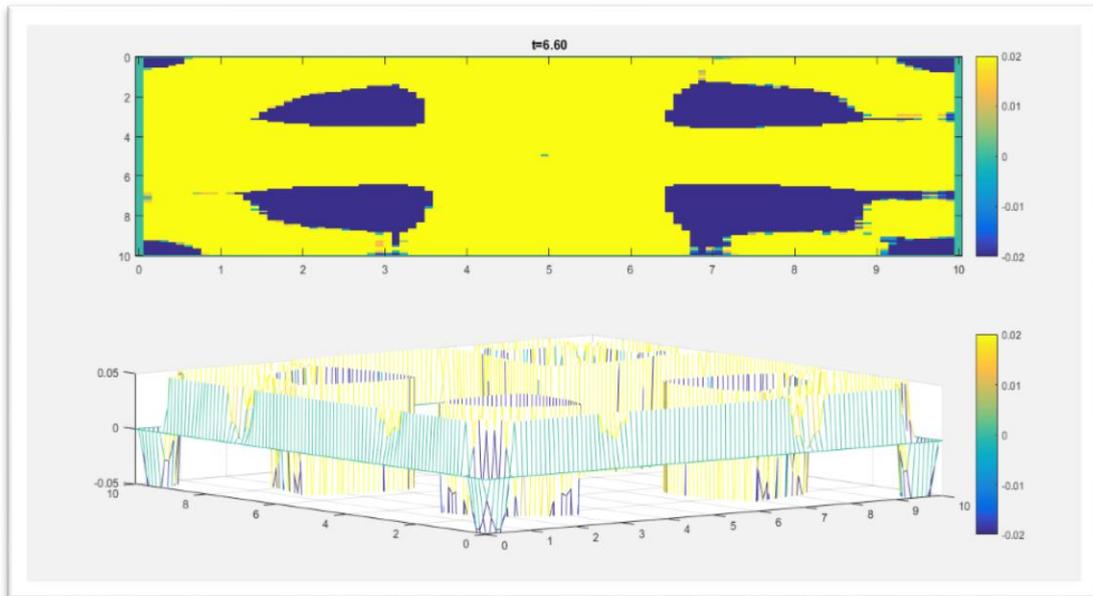


Figura 17: Simulación de la Ecuación de Onda con Fuente, para  $t=6.60$

Fuente: Elaboración propia