# UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

## ESCUELA DE POSGRADO

## MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

**TESIS**

# MÉTODO HEURÍSTICO EN EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO INTEGRAL EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍAS DE LA UNA – PUNO

**PRESENTADA POR:**

**SERAPIO CECILIO CALCINA CUEVAS**

**PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE:**

**MAGISTER SCIENTIAE EN EDUCACIÓN**

**MENCIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA**

**PUNO, PERÚ**

**2018**

# UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

## ESCUELA DE POSGRADO

## MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

## TESIS

# MÉTODO HEURÍSTICO EN EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO INTEGRAL EN LOS ESTUDIANTES DE INGENIERÍAS DE LA UNA - PUNO

**PRESENTADA POR:**

**SERAPIO CECILIO CALCINA CUEVAS**

**PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE:**

**MAGISTER SCIENTIAE EN EDUCACIÓN**
**MENCIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA**

APROBADA POR EL SIGUIENTE JURADO:

PRESIDENTE
………………………………………..
Dr. FELIPE GUTIÉRREZ OSCO

PRIMER MIEMBRO
…………………………………………………..
M.Sc. GODOFREDO HUAMAN MONROY

SEGUNDO MIEMBRO
……………………………………………………………
M.Sc. JUAN CARLOS BENAVIDES HUANCA

ASESOR DE TESIS
………………………………….
Dr. LINO VILCA MAMANI

Puno, 23 de agosto del 2018

**ÁREA** : Logros de aprendizaje de la matemática
**TEMA** : Método heurístico en el aprendizaje de la matemática
**LÍNEA** : Resultados de aprendizaje de la matemática

# DEDICATORIA

Con mucho cariño a mi esposa Yaquelin y a mis hijas Yashiel, e Ytzel, quienes son los que me apoyan en forma incondicional y son fuente de mi permanente inspiración y deseo de superación.

A mis padres Julián Calcina Mamani y mi madre Julia Cuevas, quienes son los que me apoyan en forma incondicional para lograr mis objetivos en la vida.

# AGRADECIMIENTOS

- Mi agradecimiento se dirige a quien ha forjado mi camino, y me ha dirigido por el sendero correcto, a Dios, él en que todo momento está conmigo ayudándome a aprender de mis errores y no cometerlos otra vez.
- A los docentes de la maestría en educación, mención didáctica de la matemática por compartir sus conocimientos y experiencias.
- A mi familia por su apoyo constante.

# ÍNDICE GENERAL

**Pág.**

## CAPÍTULO I

## REVISIÓN DE LITERATURA

## CAPÍTULO II

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

## CAPÍTULO III

## MATERIALES Y MÉTODOS

## CAPÍTULO IV

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

# ÍNDICE DE TABLAS

**Pág.**

# ÍNDICE DE FIGURAS

**Pág.**

# INDICE DE ANEXOS

**Pág.**

# RESUMEN

La presente investigación denominado "método heurístico en el aprendizaje del cálculo integral en los estudiantes de ingenierías de la Universidad Nacional del altiplano - Puno" durante el primer semestre del 2017 que corresponde desde 27 de marzo del 2017 hasta 26 de julio del 2017; tiene como objetivo de contribuir al proceso enseñanza-aprendizaje, la utilización del método heurístico en el aprendizaje del cálculo integral en estudiantes de Ingenierías. La hipótesis con que se desarrolló la investigación es: La aplicación del método heurístico produce efectos positivos en el aprendizaje del cálculo integral en estudiantes de segundo semestre de ingenierías de la Universidad Nacional del Altiplano Puno. Se desarrolla como sigue: los estudiantes de ingenierías, antes de la aplicación del método heurístico presentan niveles bajos en el aprendizaje, como se observa en la tabla 06 tiene promedio de 9.67 puntos y después del tratamiento los niveles de aprendizaje de los estudiantes del grupo experimental son superiores al grupo control, como se observa en el cuadro 17, el grupo experimental tiene promedio de14.08 y grupo control tiene promedio de 10.26 puntos. La metodología empleada en la investigación es experimental con diseño cuasi experimental constituido por un grupo de control y un grupo experimental. La muestra son alumnos del segundo semestre de ingenierías: mecánica eléctrica grupo experimental, cuyos resultados se organizan utilizando la prueba estadística Z de comparación de medias. La conclusión de la investigación es: "La aplicación del método heurístico produce efectos positivos en el aprendizaje del Calculo Integral en los estudiantes de ingenierías de la universidad nacional del altiplano".

**Palabras clave:** Aprendizaje, cálculo, enseñanza, heurístico y método

# ABSTRACT

The present research “heuristic method in the learning of integral calculus in the students of Engineering from the National University of the Altiplano – Puno” during the first half of the 2017 which corresponds from March 27, 2017 until July 26, 2017; It is intended to contribute to the teaching-learning process, the use of the heuristic method in the learning of integral calculus in engineering students. The hypothesis with the research developed is: The application of heuristic method produces positive effects on learning of integral calculus students in the second semester of engineering of the National University of the Altiplano Puno. Develops as follows: students of engineering, prior to application of the heuristic method present low levels in learning, as shown in table 06 has average of 9.67 points and after the treatment of learning for students in the experimental group levels are higher than the control group, as seen in table 17, the experimental group has average de14.08 and control group have average of 10.26 points. The methodology used in the research is experimental design consisting of a control group quasi-experimental and an experimental group. The sample are students in the second semester of Engineering: mechanical electrical experimental group, whose results are organized using the Z test of comparison of means. The conclusion of the investigation is: “The application of heuristic method produces positive effects on learning of the Integral calculation in engineering students of the National University of the Altiplano”.

**Keywords:** Calculation, heuristic, learning, method and teaching.

# INTRODUCCIÓN

La presente investigación denominado: Método heurístico en el aprendizaje del cálculo integral en los estudiantes de ingenierías de la Universidad Nacional del Altiplano - Puno, se concretó motivado por las innumerables dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los cursos básicos de matemáticas en las escuelas profesionales de ingenierías y más concretamente en la asignatura del cálculo integral o Análisis Matemático I, que en muchos casos la sola explicación teórica, ejercicios, y la solución de resolución de problemas que carece de métodos y procedimientos en la enseñanza del cálculo integral, que no es adecuada para el desarrollo de las capacidades y habilidades en los estudiantes de ingenierías . Es por esta razón se aplica el método heurístico en la enseñanza de la solución de problemas del cálculo integral en los estudiantes de ingenierías de la Universidad Nacional del Altiplano, con el objetivo de contribuir al proceso enseñanza-aprendizaje en cálculo integral y además aportando a la didáctica de la matemática a nivel superior.

El trabajo de investigación está dividido por capítulos y estructurado de manera secuencial, terminando al final con las conclusiones sugerencias y anexos. El cual se detalla a continuación.

En el capítulo I se hace referencia al marco teórico y los antecedentes encontrados que tienen relación al presente trabajo de investigación. Por otro lado, también se ha construido un marco conceptual mediante la definición de términos básicos para explicar el problema de investigación a tratar.

En el capítulo II se hace referencia al planteamiento del problema, la formulación del mismo y la determinación de los objetivos e hipótesis. Estos aspectos dieron orientación al trabajo de investigación realizado sobre aplicación del método heurístico en el aprendizaje del cálculo integral en estudiantes de ingenierías de la Universidad Nacional del Altiplano -Puno.

En el capítulo III se tiene a los materiales y métodos, se tiene el tipo y diseño de la investigación realizada, correspondiendo ésta al cuasi-experimental con un grupo experimental y un grupo control con prueba de entrada y salida, la población y muestra, así como el tratamiento estadístico y los materiales empleados en la investigación.

En lo concerniente al capítulo IV tenemos los resultados y discusión de los resultados con tres fases: la primera es referido a las condiciones de inicio del experimento de los dos grupos que han de ser homogéneos, la segunda son los resultados del tratamiento experimental en el grupo experimental y la tercera es referido a la comparación de los dos grupos en la prueba de salida para determinar diferencias.

Finalmente presentamos un aspecto importante de la presente investigación, las conclusiones a la que hemos arribado, que son un total de tres, siendo la primera conclusión la general que relaciona el planteamiento del problema e hipótesis general. Las demás conclusiones son de carácter específico y están referidas a las capacidades de razonamiento y demostración, comunicación matemática, resolución de problemas y la actitud frente al área. Presentando luego las sugerencias de la presente investigación y todos los anexos respectivos.

# CAPÍTULO I

# REVISIÓN DE LITERATURA

## 1.1. Marco Teórico

### 1.1.1. Heurística

La heurística que significa «hallar, inventar», aparece en más de una categoría gramatical. Cuando se usa como sustantivo, se refiere a la disciplina, el arte o la ciencia del descubrimiento. Cuando aparece como adjetivo, se refiere a cosas más concretas, como estrategias, reglas, silogismos y conclusiones heurísticas.

Estos dos usos están íntimamente relacionados, ya que la heurística usualmente propone estrategias que guían el descubrimiento. El término fue utilizado por **Albert Einstein** en la publicación sobre efecto fotoeléctrico (1905), con el cual obtuvo el premio Nobel en Física en el año 1921 y cuyo título traducido al idioma español es: “Sobre un punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz”

Actualmente se han hecho adaptaciones al término en diferentes áreas, así definen la heurística como un arte, técnica o procedimiento práctico o informal, para resolver problemas. Alternativamente, Lakatos lo define como un conjunto de reglas metodológicas no necesariamente forzosas, positivas y negativas, que sugieren o establecen cómo proceder y qué problemas evitar a la hora de generar soluciones y elaborar hipótesis.

Es generalmente considerado que la capacidad **heurística** es un rasgo característico de los humanos desde cuyo punto de vista puede describirse como *el arte y la ciencia del descubrimiento y de la invención* o de resolver problemas mediante la creatividad y el pensamiento lateral o pensamiento divergente.

Según el matemático George Pólya la base de la heurística está en la experiencia de resolver problemas y en ver cómo otros lo hacen. Consecuentemente se dice que hay búsquedas ciegas, búsquedas heurísticas (basadas en la experiencia) y búsquedas racionales.

La popularización del concepto se debe a George Pólya, con su libro *Cómo resolverlo* (*How to solve it*). Habiendo estudiado tantas pruebas matemáticas desde su juventud, quería saber cómo los matemáticos llegan a ellas. El libro contiene la clase de recetas heurísticas que trataba de enseñar a sus alumnos de matemáticas.

En la matemática, la heurística existe desde la Grecia antigua. Sin embargo, la formalización y el alto grado de rigor en matemática le ha restado importancia al estudio del descubrimiento, considerándolo más bien de interés para la psicología. Aunque existe el campo de la teoría de la demostración, éste nada tiene que ver con encontrar patrones de demostración o reglas para encontrar las demostraciones de los teoremas.

La palabra heurus proviene del griego erus. Hay trabajos de Poincaré, Hadamard y Polya sobre la creación en matemática. Al respecto el libro "Razonamiento plausible" de George Polya, describe las posibilidades de creación en las diversas ramas de la matemática y trabajos concretos de algunos matemáticos.

### 1.1.2. Método heurístico

#### 1.1.2.1 Definición

El método heurístico conocido como "**IDEAL**", formulado por Bransford y Stein (1984), incluye cinco pasos:

**Identificar los problemas**: En el método IDEAL el primer paso consiste en identificar y definir claramente el problema y especificar como su resolución representa una oportunidad para mejora la calidad de respuesta del individuo o grupo.

**Definir las metas**: En esta etapa se deben definir un mínimo de dos o tres metas las cuales una vez logradas permitirán considerar el problema como resuelto. Al incluir varias metas u objetivos, el problema es atacado desde diversas perspectivas y de manera más amplia.

**Explorar posibles estrategias:** Esta etapa involucra un nuevo análisis de las metas propuestas, además de la evaluación de las opciones o estrategias que tentativamente pueden ser empleadas para alcanzar dichas metas.

**Anticipar las posibles consecuencias y actuar:** Esta cuarta fase del método IDEAL destaca la importancia de anticipar posibles efectos negativos que pudieran resultar al implementar las estrategias seleccionadas. Una evaluación adecuada podría evitar decisiones que lleven a resultados no deseados. Muchas de las posibles consecuencias negativas pueden ser divisadas en la etapa de anticipar, permitiendo de esta forma tomar precauciones para evitarlas. Una vez anticipadas las posibles consecuencias y tomadas las decisiones pertinentes en base a los resultados de dicho análisis, se procede a implementar la estrategia o plan de acción seleccionado.

**Lecciones Aprendidas:** Una de las maneras más efectivas de aprender consiste en analizar los resultados de las acciones emprendidas y elaborar conclusiones o lecciones aprendidas. Esta última fase del método hace énfasis en la importancia de tomarse el tiempo de registrar e internalizar lo aprendido en cada una de las etapas después de su aplicación en la resolución de un problema. Cabe destacar que el método IDEAL es el resultado de la integración de las ideas de varios autores pioneros en el área de Resolución de Problemas, en un marco de trabajo que es fácil de entender y aplicable en situación cotidianas en cualquier contexto

Peralta (2000) define al método heurístico, como la actividad del estudiante en el proceso de aprendizaje; actividad mental, como es obvio, pero que en determinados niveles puede ser simplemente manipulativa. De esta forma el estudiante se convierte en sujeto activo, eje del proceso, mientras que la labor del profesor se centra en despertar el interés (motivar) y orientar su actividad. Asimismo, en todo momento el docente, debe acompañar al estudiante, para ayudar a resolver errores en los que incurra y aprovecharlos para empezar la estrategia intelectual cuyo fin es que el estudiante descubra por sí mismo los conceptos y las soluciones a los problemas.

Se considera por tanto la conveniencia de una metodología, por supuesto, activa; pero no sólo eso, sino que esa actividad se oriente a la elaboración de los conceptos y propiedades, lo que significa que sea heurística. El estudiante siente así alegría al descubrir la verdad por su propia inventiva, a partir de situaciones didácticas hábilmente creadas ante él por el profesor para despertar el interés.

Fortea (2003) describe al método heurístico por ceder al estudiante gran parte del protagonismo en el proceso enseñanza-aprendizaje, pues deberá ser quien a través de la investigación y la experimentación descubra la solución de los problemas. El profesor actúa como guía o tutor, plantea problemas, sugiere métodos, suministra material y contrasta las soluciones. Con este método se fomenta la responsabilidad e iniciativa del estudiante, pero también puede dar lugar a que solo considere aquellas cuestiones que más le agraden, no interesándose por otros temas de importancia.

Varderas (2000) El método heurístico como mediador del aprendizaje es un método de enseñanza activo, en el cual el docente a través del diálogo y mediante interrogaciones motiva, incita, guía al estudiante a comprender, a encontrar razones antes de fijar los conocimientos. El estudiante debe tener oportunidad de descubrir justificaciones o fundamentos y debe investigar para ello, ejercitando de esta forma sus facultades mentales, alimentando sus iniciativas personales y desenvolviendo su espíritu de investigación".

#### 1.1.2.2 Características del método heurístico

Las principales características que presenta el método heurístico son:

a) **Es una conversación instructiva**. - Bien se sabe que la instrucción es la que alimenta y nutre a la educación para que de este modo pueda crecer y progresar o desarrollarse. El método heurístico es un instrumento de que el profesor se vale, para poder realizar dicha educación, puesto que sostiene como ninguno la atención al discípulo y educa su voluntad, obtiene de sus facultades cognitivas el mayor rendimiento posible, le proporciona el placer inefable de que él descubra la verdad, le infunde curiosidad del saber y confianza en su capacidad y le convence de que es posible instruirse así mismo.

b) **Se basa en un diálogo. -** En el método heurístico, el diálogo es utilizado a gran escala, pues se toma en consideración que dicho diálogo no es más que una participación del diálogo universal, que une a los seres entre sí, y que hace que toda palabra del hombre dicha a sí misma es también comunicativa.

El diálogo por consiguiente como conectivo universal del ser está en la forma de interrogar y en la forma de responder. La lección dialogada es siempre fructífera de alguna manera y por eso en el método heurístico se exige más repetición de donde se resalta que es más corto porque su eficacia compensa la duración del ejercicio.

c) **Su esencia es la interrogación. -** En el método heurístico todo conocimiento que se desea que los alumnos descubran tiene que dividirse en una serie de interrogantes, las cuales generalmente son expuestas por el profesor.

Esta interrogación por parte del maestro debe empezar por llamar la atención de los alumnos sobre el asunto de la lección y fundándose en los conocimientos que aquellos tienen, les expone un conjunto de situaciones hábilmente combinadas, intentando con ella, hacerles descubrir o encontrar por sí mismo la verdad o el conocimiento deseado.

El profesor para cumplir a cabalidad con esta característica tiene que considerar que:

- ✓ Las preguntas estén al alcance de los alumnos y que sean variadas.
- ✓ La claridad de la interrogación y que cada pregunta considere la corrección la sencillez y la brevedad.
- ✓ Las interrogantes deben expresarse metódicamente, obedeciendo a un plan y dentro de la graduación, en lo posible se debe considerar que las más fáciles preceden a las difíciles y que a su vez preparen la solución del tema en estudio.
- ✓ El número de interrogantes debe estar en concordancia con el tema y los objetivos del aprendizaje del tema de estudio.

d) **Es un método activo.** - En este método se descarta las lecciones dogmáticas o expositivas, pues se exige que el estudiante haga un esfuerzo personal, haciéndole encontrar por sí mismo lo que se le quiere enseñar. Desde este punto de vista, concebir al método heurístico como activo, no es errar sino acertar, pues la participación del alumno en la elaboración del conocimiento es siempre requerida y sin actividad no se puede avanzar, sin aun comenzar en la aplicación heurística.

En resumen, es un método activo que requiere obligatoriamente la participación conjunta del profesor y del alumno y en el cual el segundo aprende contribuyendo el mismo en las respuestas, descubriendo por su propio parecer los conocimientos. Pero no solo la actividad en mención la realiza el alumno, sino que a su vez el maestro se ve en la obligación y necesidad de interesarse más aun en su curso o materia que tiene a su cargo.

#### 1.1.2.3 Pólya y el método heurístico

Aprender la respuesta de un problema no proporciona una idea cabal del proceso de resolución ya que siempre queda pendiente un paso a partir del cual se generan varios interrogantes. El estudiante identifica este importante paso al reflexionar sobre la forma en que se llega a la solución del problema.

La obra de Pólya explota la inquietud que todos poseemos por descubrir y pone en juego las facultades inventivas para resolver problemas. Está basado en un estudio profundo en los métodos de solución llamado método heurístico, Que permite lo que presenta un nuevo aspecto de las matemáticas, como un proceso de invención como ciencia experimental e inductiva, proporcionando no la solución estereotipada de los problemas, si no los procedimientos originales de cómo se llegó a los procesos de solución, es decir, da los caminos para resolver los problemas y dispone los elementos del pensamiento de tal manera que intuitivamente actúen cuando se presente un problema sin resolver.

Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento. Experiencias de este tipo a una edad conveniente puede determinar una afición para el trabajo intelectual e imprimirle una huella imperecedera en la mente y en el carácter.

Por ello el profesor de matemática tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matara en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabara desaprovechando su oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos plantándole problemas adecuados a sus conocimientos y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarle ciertos recursos para ello.

La teoría de Pólya está basada en el estudio del método heurístico en la solución de problemas matemáticos.

**La heurística** es la capacidad de un sistema para realizar de forma inmediata innovaciones positivas para sus fines. La capacidad heurística es un rasgo característico de los humanos, desde cuyo punto de vista puede describirse como el arte y la ciencia del descubrimiento y de la invención o de resolver problemas mediante la creatividad y el pensamiento lateral o pensamiento divergente.

**Los métodos heurísticos** son estrategias generales de resolución y reglas de decisión utilizadas por los solucionadores de problemas. Basadas en la experiencia previa con problemas similares. Estas estrategias indican las vías o posibles enfoques a seguir para alcanzar una solución

### 1.1.3. Pólya y sus cuatro pasos para la resolución de problemas matemáticos

En sus estudios, estuvo interesado en el proceso del descubrimiento, o cómo es que se derivan los resultados matemáticos. Advirtió que para entender una teoría, se debe conocer cómo fue descubierta. Por ello, su enseñanza enfatizaba en el proceso de descubrimiento aún más que simplemente desarrollar ejercicios apropiados. Para involucrar a sus estudiantes en la solución de problemas, generalizó su método en los siguientes cuatro pasos:

1. Entender el problema.
2. Configurar un plan

3. Ejecutar el plan
4. Mirar hacia atrás

Este método está enfocado a la solución de problemas matemáticos, por ello nos parece importante señalar alguna distinción entre "ejercicio" y "problema". Para resolver un ejercicio, uno aplica un procedimiento rutinario que lo lleva a la respuesta. Para resolver un problema, uno hace una pausa, reflexiona y hasta puede ser que ejecute pasos originales que no había ensayado antes para dar la respuesta. Esta característica de dar una especie de paso creativo en la solución, no importa que tan pequeño sea, es lo que distingue un problema de un ejercicio. Sin embargo, es prudente aclarar que esta distinción no es absoluta; depende en gran medida del estadio mental de la persona que se enfrenta a ofrecer una solución.

Hacer ejercicios es muy valioso en el aprendizaje de las matemáticas: Nos ayuda a aprender conceptos, propiedades y procedimientos -entre otras cosas-, los cuales podremos aplicar cuando nos enfrentemos a la tarea de resolver problemas.

Como apuntamos anteriormente, la más grande contribución de Pólya en la enseñanza de las matemáticas es su Método de Cuatro Pasos para resolver problemas. A continuación presentamos un breve resumen de cada uno de ellos y sugerimos la lectura del libro "Cómo Plantear y Resolver Problemas" de este autor (está editado por Trillas).

**Paso 1: Entender el Problema.**

La comprensión del problema pasa por una correcta interpretación del enunciado. El autor plantea que, si se quiere desarrollar en los alumnos habilidades y destrezas para la resolución de problemas, una de las facetas en la que se debe insistir será en el análisis de enunciados. ¿Cómo concretarlo? Parece obvio que se tiene que poner problemas en los que lo más interesante no sea la búsqueda de la solución, ni la estrategia utilizada, ni la visión retrospectiva final, si no el estudio profundo de enunciado. De forma que sea esta una etapa de familiarización, exploración, etc. En ella se dan los primeros contactos con el problema: ¿Qué se pide?, ¿Qué datos nos dan?, ¿de qué trata el problema?, etc.

Estas son algunas preguntas que surgen en este paso:

1. ¿Entiendes todo lo que dice?

2. ¿Puedes replantear el problema en tus propias palabras?
3. ¿Distingues cuáles son los datos?
4. ¿Sabes a qué quieres llegar?
5. ¿Hay suficiente información?
6. ¿Hay información extraña?
7. ¿Es este problema similar a algún otro que hayas resuelto antes?

**Paso 2: Configurar un Plan.**

Un plan de ejecución del problema, es decir, como se va a hacer. En este aspecto es preciso asumir la idea de que es mejor tener un mal plan que o tener ningún plan

Por lo general, las buenas ideas se basan en las experiencias previas y en los conocimientos adquiridos. El profesor puede mediante preguntas y sugerencias ir acercando al alumno a la situación que le permita trazar un plan de resolución.

Los comentarios que aran aflorar el plan de trabajo que, tanto en lo que se refiera a su totalidad como en lo que concierna a sus diversas partes, debe ser comentado como ocurrencia y descubrimiento en los alumnos, podría ser de este estilo:

1. Ensayo y Error (Conjeturar y probar la conjetura).
2. Usar una variable.
3. Buscar un Patrón
4. Hacer una lista.
5. Resolver un problema similar más simple.
6. Hacer una figura.
7. Hacer un diagrama
8. Usar razonamiento directo.
9. Usar razonamiento indirecto.
10. Usar las propiedades de los Números.
11. Resolver un problema equivalente.
12. Trabajar hacia atrás.
13. Usar casos
14. Resolver una ecuación
15. Buscar una fórmula.
16. Usar un modelo.
17. Usar análisis dimensional.

18. Identificar sub-metas.
19. Usar coordenadas.
20. Usar simetría.

**Paso 3: Ejecutar el Plan.**

El autor afirma que durante el proceso de resolución es conveniente evitar el hacer por hacer. Hay que ser consciente del por qué se hace las cosas. De modo que, aun cuando la resolución nos implique afectivamente, debemos reservarnos la capacidad de tomar la suficiente distancia del mismo como para posibilitar la verificación de cada paso.

Aspectos a considerar en este paso:

Implementar la o las estrategias que escogiste hasta solucionar completamente el problema o hasta que la misma acción te sugiera tomar un nuevo curso.

1. Concédete un tiempo razonable para resolver el problema. Si no tienes éxito solicita una sugerencia o haz el problema a un lado por un momento (¡puede que "se te prenda el foco" cuando menos lo esperes!).
2. No tengas miedo de volver a empezar. Suele suceder que un comienzo fresco o una nueva estrategia conducen al éxito.

**Paso 4: Mirar hacia atrás.**

En este paso ya se ha llegado a la solución del problema. ¡Ya está resuelto! La dosis de satisfacción que se recibe está elevada que podemos llegar a creer que ya hemos terminado. Pero, no es así. Resulta muy útil recordar el problema desde el principio. Volver a leer el enunciado y considerar si se a encontrado lo que se pedía, ayudara a evitar errores referentes a la desviación del objetivo. También puede ayudar a decidir si la respuesta puede ser la correcta o no.

Con preguntas como:

1. ¿Es tu solución correcta?
2. ¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema?
3. ¿Adviertes una solución más sencilla?
4. ¿Puedes ver cómo extender tu solución a un caso general?
5. ¿Cuál era la información importante?

### 1.1.4. El papel del docente que utiliza el método heurístico

Este método pretende desarrollar en el estudiante cierta autonomía en el proceso de la búsqueda de soluciones a las situaciones problemáticas que se le presentan. Por medio del diálogo dirigido, el docente debe crear en el aula las situaciones problematizadas y contextualizadas de forma que los discentes comprendan y analicen la situación a través de preguntas con las cuales los lleva a reflexionar sobre las posibles formas de dar solución a dichas situaciones. Durante el diálogo, el profesor debe realizar preguntas con propósitos previamente establecidos para no perder la dirección que desea darle al proceso. La interacción entre profesor estudiante se ve claramente favorecida con el uso de este método, se propicia el debate y el intercambio de criterios. El profesor debe desarrollar la habilidad de formular preguntas claras, para lograr la comprensión del estudiante de lo que se quiere; sin respuestas obvias, para que el estudiante reflexione y analice; y que tengan una secuencia lógica y en el grado de dificultad de forma que el proceso se desarrolle de forma gradual.

### 1.1.5. Los objetivos fundamentales del método heurístico

1. Asimilación y transferencia de estructuras conceptuales y procedimientos algorítmicos novedosos en un contexto de resolución de problemas.
2. Desarrollo de estrategias heurísticas.
3. Generación de estrategia positivas hacia las matemáticas.

Puede observarse, en el primer objetivo, una preocupación primordial por los contenidos específicos de las matemáticas, en contra de la irrelevancia que este aspecto suele tener en otras metodologías de este tipo. En segundo lugar, se coloca el desarrollo de estrategias heurísticas que son técnicas que tienen una alta probabilidad de conducir a la resolución de muchos tipos de problemas. Han sido identificadas mediante el análisis de la actuación de expertos o mediante la programación de un ordenador que efectúan tareas intelectualmente exigentes. Rio cita a Pólya (1965), Shoenfeld (1985), Newel y Simon (1972) quienes han seleccionado heurísticas como las siguientes:

- ✓ Representación gráfica o simbólica: Trazar un dibujo o un diagrama que resuma la información del enunciado, representar con números o letras las variables etc.

- ✓ Problema análogo: Buscar un problema con una estructura similar o equivalente que ya haya sido resuelto o que sea más sencillo.
- ✓ Casos especiales: Simplificar el problema fijándose en caso especiales (dando valores a las variables, entre otras formas).
- ✓ Subproblemas: Descomponer el problema en partes (considerando, por ejemplo, condiciones y objetivos parciales) de modo que la solución progresiva de ellos conduzca a la solución completa del problema.
- ✓ Registro de alternativas y exploración sistemática: Buscar relaciones entre los datos y la incógnita (o entre la hipótesis y la tesis) que permitan transformarlos o acercarlos.

**Las heurísticas**, como estrategias cognitivas que son, ocupan un papel importante en la educación y, por su gran versatilidad y aplicabilidad, su desarrollo se incluye como objetivo en el modelo de enseñanza.

Las personas se adaptan al contexto si logran una clara percepción de él, si lo comprenden y lo aceptan, todo esto se evidencia a través de las acciones y de las actitudes que cada ser humano tiene como respuesta a las situaciones que se le presentan. De aquí la importancia de desarrollar en el estudiante la habilidad de observar y reflexionar sobre los acontecimientos cotidianos, y que descubra por sí mismo que debe ir transformando la forma en que piensa y actúa sobre dichos acontecimientos. En el centro educativo se debe favorecer, por lo tanto, las actitudes positivas del estudiante y evitar las actitudes negativas porque además de todo obstaculizan el aprendizaje y su evolución como ser humano.

### 1.1.6. Aplicación del método heurístico

Se propone un interesante esquema para la preparación, en caso de los profesores, se basa en pequeñas reuniones de grupos de trabajo donde se experimenta y se reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas. La iniciación de la práctica con los estudiantes debe hacerse gradualmente; el profesor selecciona cuidadosamente algunos problemas en cuyo proceso resolutivo intervengan pocos conocimientos matemáticos y los reparte a los pequeños grupos; después de un tiempo razonable de trabajo que incluye la reflexión sobre la forma en que se han abordado los problemas, se realiza una puesta en común para analizar, estructurar y sintetizar las diferentes estrategias de resolución. Los problemas deben ser sencillos para garantizar la implicación y el éxito de la mayoría de los estudiantes. Cuando los estudiantes se han familiarizado y hecho suyos los procesos mentales adecuados, viene la etapa de trabajo hacia la transferencia de estos procesos al campo más específicamente matemático. A pesar de estas exigencias iniciales, se cree que, después, el método funciona sin ninguna dificultad y desde luego, sus efectos educativos son realmente notables.

### 1.1.7. El aprendizaje del cálculo integral

El método heurístico de G. POLYA en la enseñanza-aprendizaje del cálculo integral está enfocado en la solución de problemas, por ello es importante señalar alguna distinción entre ejercicio y problema.

Para resolver un ejercicio, se utiliza algoritmos que llevan a la respuesta. Para resolver un problema, se hace un análisis, se reflexiona y hasta puede ser que se ejecuten pasos originales que no se han ensayado antes para dar respuesta.

Esta característica de dar una especie de paso creativo en la solución, no importa que tan pequeño sea, es lo que distingue un problema de un ejercicio del cálculo integral. Sin embargo, es prudente aclarar que esta distención no es absoluta; depende en gran medida del estado mental de la persona que enfrenta a ofrecer una solución.

Es importante aclarar que estos elementos (incógnitas y datos) se encuentran presentes en todo proceso de la solución de un problema, pero a su vez estos deben ser esclarecidos en la fase de la comprensión del problema porque son determinantes para encontrar una solución con éxito.

Hacer ejercicios es muy importante y valioso en el aprendizaje de las matemáticas en especial en el cálculo integral: nos ayuda a aprender conceptos, propiedades, teoremas y procedimientos entre otras cosas, los cuales podemos aplicar, cuando se trata de resolver problemas del cálculo integral.

Como se planteó anteriormente, la más grande contribución de George Pólya en la enseñanza matemática es su método heurístico es de cuatro pasos para resolver problemas. A continuación, estos cuatro pasos aplicaremos para resolver problemas del cálculo integral.

### 1.1.7.1 Comprende el problema para resolver la solución

La compresión del problema del cálculo integral, consiste en saber qué es lo que se pregunta y cuál es la información que se da y las condiciones que caracterizan el problema. No tiene sentido responder a una pregunta que no se comprende, se debe familiarizarse con el problema, hacer el esfuerzo por entender el significado de las palabras que puedan ser importantes en el enunciado. Ayuda a comprender un problema, responder las siguientes preguntas: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición o condiciones? Un problema se ha comprendido completamente cuando puede repetirse el enunciado en forma ligeramente distinta pero equivalente, cuando pueden separarse claramente los datos, la incógnita y la condición. Mientras un problema no se comprenda, no vale la pena avanzar en dirección alguna.

### 1.1.7.2. Traza un plan para resolver la solución del problema

Al trazar el plan para resolver la solución de problemas del cálculo integral, hace que entre en juego la necesidad de recurrir a la experiencia, a la forma en que se han solucionado problemas anteriores, a los conocimientos adquiridos, a comparar una situación con hechos conocidos o ayudarse al solucionar problemas más simples, a aplicar las condiciones dadas una tras otra hasta completar las solicitadas en el problema. Aparece la heurística, las preguntas orientadoras serían: ¿Se conocen problemas semejantes? ¿Cómo se relacionan con los actuales? ¿Conoce algunas definiciones, propiedades y teoremas útiles para aplicarlo?, luego ¿Empleó todos los datos y condiciones? Generalmente un plan se consolida cuando llega una idea brillante. Se le debe sacar el máximo provecho a los intentos fallidos por resolver el problema, estas enseñanzas deben dejar. Un plan en realidad consiste en determinar una relación entre los datos y la incógnita. La consideración de problemas auxiliares es definitiva en este proceso. Los dibujos son importantes en la concepción del plan.

### 1.1.7.3. Ejecuta el plan en la solución del problema

Para solucionar el problema el estudiante deberá: aplicar a la solución de problemas del cálculo integral los elementos obtenidos en el análisis del problema; de una manera flexible y recursiva, alejada del mecanismo.

Al solucionar el problema se debe comprobar cada una de los pasos

¿Se puede ver claramente que cada paso es correcto?

Antes de hacer algo se debe pensar: ¿Qué se consigue con esto?

Se debe acompañar cada operación matemática dada, con una explicación lo que se hace y para que se hace.

#### 1.1.7.4. Analiza la solución del problema.

Todo problema puede comprobars1e de una o varias formas. Debe mirarse la incógnita obtenida desde varios puntos de vista; mirar los casos extremos del resultado y observar que concuerda con problemas o resultados anteriores. Finalmente, se debe intentar revisar de nuevo la solución a fin de agotar la posibilidad de otra solución más sencilla.

### 1.1.8. Métodos tradicionales en la enseñanza matemática

Sirven fundamentalmente para transmitir conocimientos; están concebidos esencialmente para trabajar con todos los estudiantes, parten del supuesto equivocado de que todos los estudiantes son iguales y escuchando al docente en forma pasiva aprenderán la lección; promueve el memorismo, la pasividad, el academismo teórico, en contra de la formación actitudinal, integral, activa y práctica.

Los métodos tradicionales no propician la investigación elemental, ni la investigación científica, son métodos que acostumbran al educando a la pasividad, dependencia y sumisión; es decir, son imperativos y autoritarios. Magister Dixit, practican la dominación y no así la libertad, ni la creatividad.

Los principales métodos tradicionales son los siguientes:

A) **Método inductivo.** El método inductivo, consiste en conducir el proceso de enseñanza–Aprendizaje, o efectuar el razonamiento de lo particular a lo general, del ejemplo al concepto o definición, de la parte al todo, de lo simple a lo complejo, de lo fácil a lo difícil, de lo concreto a lo abstracto.

La palabra inducción deriva de la voz latina: Inductio, que significa elevarse de los casos particulares a la ley. Este método fue creado por; Francisco Bacón.

B) **Método deductivo**. El método deductivo, consiste en conducir el proceso de Enseñanza Aprendizaje, o efectuar el razonamiento de lo general a lo particular, del concepto o definición al ejemplo, del todo a la parte, de lo complejo a lo simple, de lo difícil a lo fácil, de lo abstracto a lo concreto.

La palabra deducción, deriva de la voz latina: Deductio, que significa descender de la ley general a los casos particulares. Este método fue creado por Aristóteles.

C) **Método analítico.** El método analítico, es la forma o modo de conducir el proceso enseñanza-aprendizaje o el razonamiento, a partir de totalidades significativas, para luego las, separarlas en sus partes y a su vez éstas en sus elementos constitutivos.

D) **Método sintético.** El método sintético, es la forma o modo de conducir el proceso Enseñanza-Aprendizaje o el razonamiento, recomponiendo o reuniendo las partes para formar un todo.

La palabra síntesis, deriva de la voz griega: sunthesis, que significa unión o reunión.

E) **Método mixto.** El método mixto, es aquel que en una sesión de aprendizaje o razonamiento se combina el método inductivo con el método deductivo, o cuando se combina el método analítico con el método sintético.

### 1.1.9. Aprendizaje significativo

**“**El aprendizaje es un proceso por el que los hombres y las sociedades se preparan para hacer frente a nuevas situaciones. Puede producirse conscientemente, tras experimentar situaciones de vida real, aun cuando también pueden inducir a situaciones simuladas e imaginadas. Cuando el ser humano aprende en la escuela, esta tiene que ser construido por el propio alumno**”.** (Capella- Sánchez ,1999: 19).

El **aprendizaje** significativo se produce cuando se atribuye un significado al nuevo contenido de aprendizaje para que se dé este aprendizaje se requiere llevar a cabo un proceso doble y simultaneo, por una parte, se necesita asimilar los contenidos nuevos a la estructura cognoscitiva que ya se tiene; por otro parte, se requiere abordar los contenidos nuevos, de modo que la estructura cognitiva previa tenga que reestructurarse.

Los aprendizajes no solo son procesos intrapersonales, sino fundamentalmente interpersonales, por ello los alumnos deben emprender tareas de aprendizaje colectivamente organizados.

El aprendizaje significativo es un proceso de construcción de conocimientos (conceptual, procedimental y actitudinal), que se da en el alumno en interacción con el medio natural.

### a. Aprendizaje de contenidos conceptuales.

Los contenidos conceptuales “han sido una de las áreas de contenidos dentro de los currículos escolares de todos los niveles educativos, sin lugar dudas, este tipo de saber es imprescindibles en todas las signaturas o cuerpos de conocimiento, porque constituye el entrenado fundamental sobre el que estos se estructuraron”. (Diaz-Hernandes, 1999: 29).

El saber qué, se define como aquella competencia referida al conocimiento de datos, hechos, conceptos y principios**.**

### b. Aprendizaje de contenidos procedimentales.

Los contenidos procedimentales son aquellos que se refieren a la ejecución de estrategias, técnicas, habilidades, destrezas y métodos, es decir, el contenido procedimental es de tipo práctico, porque está basado en la realización de varias acciones u operaciones.

“El aprendizaje de conocimientos, o el desarrollo de competencia procedimental, a groso modo de un proceso gradual en el que deben considérese varias dimensiones, tales como:

1. De una etapa inicial de ejecución insegura, lenta e inexperta, hasta una ejecución rápida y experta.

2. De una ejecución del procedimiento realizado con un alto nivel de control consciente o una realización casi automática.

3. De una ejecución de esfuerzo, de ordenada y sujeta el tanteo por ensayo y por error de los pasos del procedimiento, hasta una ejecución articulada, ordenada y regida por representaciones simbólicas

4. De una comprensión insipiente de los pasos y de la meta que el procedimiento pretende conseguir, hasta una comprensión plena de las acciones involucradas y del logro de una meta plenamente identificada" (Diaz-Hernandes, 1999)

**c. Aprendizaje de contenidos actitudinales.**

Uno de los contenidos no atendidos o poco atendidos en los currículos y en la enseñanza de los distintos niveles educativos, es el de las actitudes, "El aprendizaje de las actividades no atendidas es un proceso lento y gradual donde confluyen distintos factores como las experiencias novedosas y el contexto sociocultural (a través de las instituciones, los medios y las representaciones colectivas)"(Diaz-Hernandes, 1999)

### 1.1.10. El papel del docente para el éxito del aprendizaje del cálculo integral

Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2005) indican que el papel del docente es fundamental para que exista el aprendizaje adecuado, y el éxito va relacionado con el proceso de enseñanza el ser mediador y facilitador dentro del grupo de estudiantes.

Para que exista una propuesta real de aprendizaje del cálculo integral es fundamental que el profesor:

- ✓ Prepare el escenario durante el desarrolla la clase, de manera que se consiga una participación activa de los discentes durante las actividades, con la intención de generar intercambio de ideas sobre el concepto de variable.

- ✓ Asesore a los estudiantes durante el trabajo en equipo e individual, así como guiar las controversias de grupo, el cual tiene como propósito desarrollar habilidades para trabajar con una variable de manera separada y después integrar los distintos usos de la variable para que pueda pasar de un estudio a otro de manera flexible. La obligación del docente es que los estudiantes aprendan, y para ello es importante que en el salón de clases exista un ambiente de confianza, dan sus respuestas libremente, y están motivados, sin temor a participar y a expresarse.

### 1.1.11. Fundamentos históricos del cálculo Integral.

El cálculo integral fue desarrollado por los trabajos de Fermat, Barrow, Wallis y Newton entre otros. Así en 1711 Newton introdujo la fórmula de interpolación de diferencias finitas de una función f(x); fórmula extendida por Taylor al caso de infinitos términos bajo ciertas restricciones, utilizando de forma paralela el cálculo diferencial y el cálculo en diferencias finitas. El aparato fundamental del cálculo diferencial era el desarrollo de funciones en series de potencias, especialmente a partir del teorema de Taylor, desarrollándose casi todas las funciones conocidas por los matemáticos de la época. Pero pronto surgió el problema de la convergencia de la serie, que se resolvió en parte con la introducción de términos residuales, así como con la transformación de series en otras que fuesen convergentes.

### 1.1.12. Calculo integral

La integración es un concepto fundamental del cálculo y del análisis matemático. Básicamente, una integral es una generalización de la suma de infinitos sumandos, infinitamente pequeños.

El cálculo integral, encuadrado en el cálculo infinitesimal, es una rama de las matemáticas en el proceso de integración o antiderivación. Es muy común en la ingeniería y en la ciencia; se utiliza principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución.

#### 1.1.12.1 Integrales Indefinidas

Si F(x) es una antiderivada de f(x) sobre un intervalo I, ósea $F'(x) = f(x)$, entonces a su antiderivada general G(x)=F(x)+c se denota por:

$$G(x) = \int f(x)dx = F(x) + c, \forall x \in I$$

#### 1.1.12.2 Propiedades de la integración.

Las dos propiedades más importantes de la integración son las siguientes:

La integral de la suma (diferencia) de dos funciones es igual a la suma (diferencia) de las integrales de dichas funciones. O sea,

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

*Demostración:* Por un lado

$$\left(\int [f(x) + g(x)]dx\right)' = f(x) + g(x).$$

Por otro lado, $\left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' + \left(\int g(x)dx\right)' = f(x) + g(x).$

Igual se demuestra con la diferencia.

### 1.1.12.3 Integración por cambio de variable

Este método es una consecuencia de la derivación de funciones compuestas. Como su nombre indica, se trata de sustituir la variable x por otra variable t mediante una nueva función g tal que x=g(t), para transformar el integrando f(x)dx en otro más sencillo.

De esta manera, dx=g'(t)dt, con lo que quedaría que

$$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt \, .$$

### 1.1.12.4 Integración por partes

Este método se basa en la derivada de un producto de funciones.

Sean ***u*** y ***v*** dos funciones de una misma variable independiente. Entonces

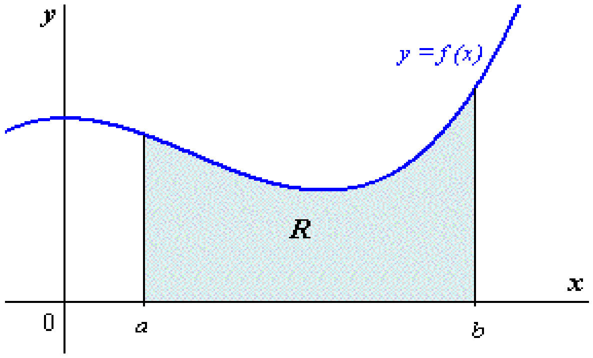
$$\mathrm{d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du \Rightarrow u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du}$$
$$\Rightarrow \int \mathrm{u \cdot dv = u \cdot v} - \int \mathrm{v \cdot du}$$

Esta fórmula reduce el cálculo de la integral $\int u \cdot dv$ al de $\int v \cdot du$.

### 1.1.12.5 Integral definida. Definiciones y propiedades.

Dada una función no negativa f(x), y un intervalo [a, b] en el cual la función esté definida, llamaremos integral definida de f(x) en [a, b] al área encerrado por la curva f entre *a* y *b*, y el eje OX.

Lo denotaremos $\int_a^b f(x)dx$,

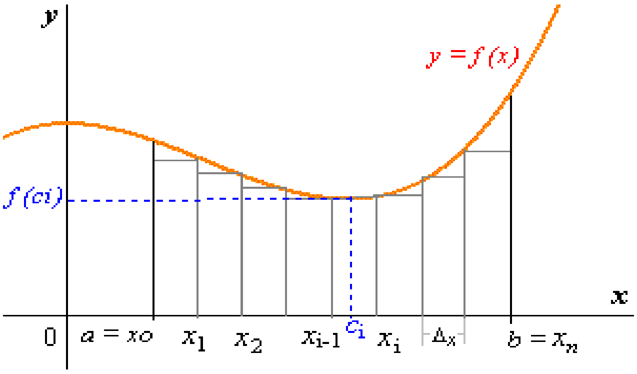


$R = Área\ de\ f(x) = \int_a^b f(x)dx = Integral\ definida\ de\ f(x)\ en\ [a,b]$Dado un intervalo [a, b], llamaremos <u>partición de ese intervalo</u> a un conjunto cualquiera de puntos de [a, b], P = {$x_0$, $x_1$, $x_2$, ……. , $x_n$} tales que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots\ldots < x_n = b.$$

Llamaremos <u>diámetro</u> al mayor de los números $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ………., $x_n - x_{n-1}$.

Consideramos entonces una función f(x) definida en un intervalo [a, b], y tracemos rectángulos de base las anteriores divisiones hechas en ese intervalo y de altura el menor y el mayor de los valores de la función, respectivamente, en dichas divisiones. Obtendremos una aproximación con rectángulos por defecto y otra aproximación de rectángulos por exceso.



### 1.1.13. Definición de términos básicos.

**Método heurístico**

Es el conjunto de procedimientos, técnicas y actividades dirigidas por el maestro para facilitar al estudiante el descubrimiento de la verdad, conduciendo a la solución de un problema a partir de un proceso lógico.

**Estrategias Heurísticas**

Se comportan como recursos organizativos del proceso de resolución, que contribuyen especialmente a determinar la vía de solución del problema abordado.

**Aprendizaje**

Es el proceso a través del cual se adquieren nuevas habilidades, destrezas, conocimientos, conductas o valores como resultado del estudio, la experiencia, la instrucción y la observación.

**Conocimientos previos**

Conocimiento que tiene el alumno y que es necesario activar por estar relacionados con los nuevos contenidos de aprendizaje que se quiere enseñar.

## 1.2. Antecedentes

Realizando las investigaciones relacionadas con el problema en estudio ubicamos las siguientes:

Agudelo (2008) concluye. El método heurístico en la resolución de problemas matemáticos puede utilizarse para mejorar la capacidad de resolución de problemas de los estudiantes desde los primeros grados y especialmente en el quinto grado de básica primaria.

Scandroli (1999) concluye el grupo de alumnas logra construir un listado de las operaciones a realizar, para solucionar el problema, utilizando un elemento de naturaleza heurística, como el solicitado: ``empezar el problema desde el final (meta).”

Bedoya (2008) concluye que: El método heurístico en la resolución de problemas matemáticos puede utilizarse para mejorar la capacidad de resolución de problemas de los estudiantes desde los primeros grados.

Anaya (2007) concluye el método de resolución de problemas mostro resultados satisfactorios debido a que los alumnos aprendieron a resolver. Al propiciar un acercamiento maestro-alumno o zonas de desarrollo próximo como lo propuso Vigotsky, se observó que los alumnos adquirieron confianza en ellos mismos, que les quito el miedo de enfrentar los problemas y que vio elevada su autoestima.

Bolaños (1999) concluye que los métodos heurísticos mejoran la creatividad publicitaria ya que los grupos de control han obtenido los peores resultados. Por otra parte, la experiencia profesional es fundamental en esta actividad, como lo es también conocer los métodos de creatividad, ya que los grupos de la tipología 3 obtuvieron los peores resultados en cinco de los seis factores evaluados.

Perales (1994) concluye que la instrucción en el método heurístico de resolución de problemas-al menos dentro de las limitaciones muéstrales de este estudio no garantiza una mayor exigencia académico, pero si un proceso más sistemático.

Medina (2013) concluye que La aplicación del método heurístico incrementa el rendimiento académico en el área de matemática, de los alumnos del grupo experimental.

Ordoñez (2017) concluye que. Este estudio demostró que la aplicación del método heurístico para la enseñanza de las habilidades investigativas de los estudiantes mejoró significativamente su desempeño. Este método requiere que los estudiantes realizaran lecturas regulares del contenido y mostraron cierta resistencia a esta actividad, sin embargo, luego se sintieron motivados por el aprendizaje que realizaron.

Méndez (2017) concluye que La aplicación del método heurístico de George Polya mejora positiva y significativamente la capacidad de resolución de problemas aritméticos aditivos en los niños y niñas del segundo grado “B” de la Institución Educativa Nº 0083 “San Juan Macías”, del distrito de San Luis - UGEL 07, con un nivel de significancia de $\alpha = 0,05$, $p = < .05$. Esto implica que la aplicación tuvo los efectos esperados e incrementó las puntuaciones promedio del grupo experimental, descartándose que esta variación haya sido producto de variables relacionadas con el desarrollo o aspectos escolares.

Mamani (2017) concluye que el método heurístico causa efectos positivos en el aprendizaje en el estudiante.

Calixto (2015) concluye que la aplicación del método heurístico, permite establecer una relación significativa en el aprendizaje del algebra, la forma de presentar los temas de manera desafiante hace que el discente se inquiete, también propicia un ambiente agradable en salón de clases, lo que permite que su práctica sea efectiva

# CAPÍTULO II

# PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

## 2.1. Planteamiento del problema de investigación.

De acuerdo al desarrollo científico que se está viviendo en la actualidad uno de los aspectos que merece mayor atención en la Educación Superior, Universitaria y no Universitaria, es el trabajo con los estudiantes de ingenierías, donde se afrontan problemas con la articulación entre la enseñanza secundaria y la superior, incidiendo esto de forma elevada en la enseñanza de la matemática, la que necesita de un dominio adecuado de los conocimientos y habilidades precedentes para poder enfrentar con éxito los nuevos contenidos de matemáticas.

Los problemas que comúnmente se presentan son: la falta de dominio de los conceptos básicos y la abstracción formal de ellos, la falta de habilidades para el análisis y resolución de problemas, una deficiente aplicación, y un insuficiente desarrollo de la capacidad creadora.

Los estudiantes de ingenierías que cursan el primer semestre de estudios, tienen problemas relacionados con el aprendizaje del Calculo Integral específicamente en sus aplicaciones. Se ha podido observar, que entre las causas que afectan el aprendizaje de las aplicaciones del cálculo integral en ingenierías afines se encuentra en la resolución de problemas.

Los profesores en la enseñanza de las matemáticas en particular del cálculo integral, utilizan, en la mayoría de las veces, el método expositivo, siendo el comportamiento de los estudiantes, pasivo y repetitivo.

Como resultado del uso de métodos expositivos, los estudiantes obtienen bajos niveles de aprendizaje al final del semestre académico.

En el trabajo de investigación que se pretende realizar, es buscar las alternativas de solución para optimizar el aprendizaje en el área de matemáticas, principalmente en la asignatura del Calculo Integral en los estudiantes de ingeniería de la Universidad Nacional del Altiplano.

## 2.2. Enunciado del problema

### 2.2.1. Problema General:

¿De qué manera la aplicación del método heurístico, influye en el aprendizaje del cálculo integral, en los estudiantes de ingeniería de la Universidad Nacional del Altiplano - Puno?

### 2.2.2. Problemas específicos:

- ✓ ¿Cuál es el nivel de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre el cálculo integral, antes y después del tratamiento de la aplicación del método heurístico entre el grupo de control?
- ✓ ¿Cuál es el nivel de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre el cálculo integral, antes y después del tratamiento de la aplicación del método heurístico entre el grupo experimental?
- ✓ ¿Cuál es el nivel de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre el cálculo integral, después del tratamiento de la aplicación del método heurístico entre el grupo de control y el grupo experimental?

## 2.3. Justificación de la investigación.

La presente investigación se justifica, porque nos permitirá aplicar el método heurístico, en el aprendizaje del Cálculo Integral, aplicando el conocimiento propio del problema y técnicas realizables en la resolución de problemas en un tiempo razonable en los estudiantes de la Escuela Profesional de Ingenierías de la Universidad Nacional del Altiplano.

El método heurístico permite la búsqueda de algunas alternativas de solución que coadyuven a la mejoría en la resolución de problemas del cálculo integral en un tiempo razonable en los estudiantes de Ingenierías de la Universidad Nacional del Altiplano.

Considerando las ventajas de este método sobre otros, siendo alguno de ellas: que se basa en la utilización de reglas empíricas, su aplicación es simple, ahorran tiempo y capacidad mental, entre otros.

Así mismo nos permitirá el empleo de la enseñanza del enfoque en la matemática se contribuye a lograr la tan buscada independencia cognitiva de los estudiantes y la integración de nuevos conocimientos con los preexistentes la construcción de los aprendizajes.

Consideramos que bastan estos elementos aquí planteados para justificar un trabajo de esta naturaleza que busque contribuir a la solución de un problema específico como el cálculo del momento de inercia de un cuerpo, pero de gran relevancia por estar relacionado con muchas áreas del conocimiento y de las investigaciones científicas.

El estudio es importante porque nos permitirá aplicar el método heurístico en el aprendizaje del cálculo integral y su aplicación, cuyas bondades nos permitirá afianzar los aprendizajes de manera significativa, haciéndoles partícipes a los sujetos del aprendizaje.

## 2.4. Objetivos

### 2.4.1. Objetivo general

Determinar los efectos de la aplicación del método heurístico en el aprendizaje del cálculo integral, en los estudiantes de Ingeniería de la Universidad Nacional del Altiplano - Puno.

### 2.4.2. Objetivos específicos.

- ✓ Comparar los niveles de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre el cálculo integral, antes y después del tratamiento de la aplicación del método heurístico entre el grupo de control.
- ✓ Comparar los niveles de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre el cálculo integral, antes y después del tratamiento de la aplicación del método heurístico entre el grupo experimental.
- ✓ Comparar los niveles de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre el cálculo integral, después del tratamiento de la aplicación del método heurístico entre el grupo de control y el grupo experimental

## 2.5. Hipótesis

### 2.5.1. Hipótesis general

Aplicando adecuadamente el método heurístico el aprendizaje de los estudiantes de ingeniería de la Universidad Nacional del Altiplano - Puno, tendrán mejor nivel en su aprendizaje en el cálculo integral.

### 2.5.2. Hipótesis específicas

- ✓ El nivel de aprendizaje del estudiante de ingenierías sobre cálculo integral, antes de la aplicación del método heurístico presentan niveles bajos.

- ✓ Con la aplicación del método heurístico, los estudiantes de ingenierías, tiende a mejorar sus aprendizajes en el cálculo integral

- ✓ Después del tratamiento experimental, los niveles de aprendizaje de los estudiantes de ingenierías en cálculo integral, el grupo experimental son superiores al del grupo de control.

# CAPÍTULO III

# MATERIALES Y MÉTODOS

## 3.1. Lugar de estudio

Universidad Nacional del Altiplano Puno

## 3.2. Población

La población será constituida por 394 estudiantes del segundo semestre de las escuelas profesionales de Ingenierías que llevan el curso de cálculo integral (Análisis Matemático II) de la Universidad Nacional del Altiplano – Puno durante el semestre I del 2017. Tal como se muestra en la tabla 1.

**Tabla 1.**
*Alumnos matriculados en calculo integral en las escuelas profesionales en ingenierías de la UNA Puno*

| **Escuelas profesionales** | **Alumnos matriculados en cálculo integral (Análisis matemático I)** | |
|---|---|---|
| Ingeniería Civil | 54 | 13.71% |
| Ingeniería Mecánica Eléctrica | 38 | 9.64% |
| Ingeniería de Sistemas | 28 | 7.11% |
| Ingeniería Electrónica | 29 | 7.36% |
| Ingeniería de Minas | 48 | 12.18% |
| Ingeniería Agrícola | 23 | 5.84% |
| Ingeniería Agroindustrial | 21 | 5.33% |
| Ingeniería Química | 43 | 10.91% |
| Ingeniería Metalúrgica | 28 | 7.11% |
| Ingeniería Geológica | 24 | 6.09% |
| Ingeniería Estadística e Informática | 19 | 4.82% |
| Ingeniería Topográfica | 39 | 9.90% |
| TOTAL | 394 | 100.00% |

Fuente : Nomina de matrículas UNA-Puno

### 3.3. Muestra

Para el desarrollo de la presente investigación se utilizó el muestreo a conveniencia o intencional. Ya que fui docente del segundo semestre de las escuelas profesionales de Ingenierías de Minas e ingeniería Mecánica eléctrica en el periodo 2017-I de la Universidad Nacional del Altiplano – Puno. Los cuales son: grupo control 48 y grupo experimental 38 en total 86; Tal como se muestra en la tabla 2

**Tabla 2.**
*Alumnos matriculados en cálculo integral en ingeniería de minas e ingeniería mecánica eléctrica*

| Muestra | escuela profesional | N$^{ro.}$ de estudiantes |
|---|---|---|
| Grupo de control | Ingeniería de Minas | 48 |
| Grupo experimental | Ingeniería Mecánica Eléctrica | 38 |
| Total | | 86 |

Fuente : Nomina de matrículas UNA-Puno

### 3.4. Método de investigación

#### 3.4.1 Tipo de Investigación.

Esta investigación es de tipo cuantitativo, Sampieri R., Collado C., y Lucio P. (2009) indican que se utiliza la recolección de datos, el cálculo numérico, para inferir y contrastar hipótesis.

#### 3.4.2 Diseño de Investigación.

El ***diseño de la Investigación*** es ***Cuasi-experimental***, porque requiere por lo menos de dos grupos aleatorios, designando a ambos grupos en forma aleatoria, donde el grupo experimental recibe el tratamiento con método heurístico y el grupo control sin el tratamiento del método heurístico, permitiendo estudiar al cambio que producirá esta, administrado para ello con prueba de entrada y prueba de salida, en ambos grupos.

Donald Aryeta (1996), En “Introducción a la Investigación Pedagógica” plantea el siguiente esquema para el modelo cuasi experimental:

**Tabla 3.**
*Esquema para el modelo cuasi experimental*

| Grupos | Prueba de entrada | Variable Independiente | Prueba de salida |
|---|---|---|---|
| Grupo Experimental (GE) | $Y_1$ | X | $Y_2$ |
| Grupo Control (GC) | $Y_1$ | --- | $Y_2$ |

Fuente: Donald Aryeta (1996),

Donde:

G.E. = grupo experimental

G.C. = grupo control

$Y_1$ = Prueba de entrada

X = tratamiento experimental

$Y_2$ = Prueba de salida

## 3.5. Descripción detallada de métodos por objetivos específicos

**Variable Independiente (X)**

Método heurístico.

**Variable dependiente (Y)**

Aprendizaje del cálculo integral.

| **Variables** | **Dimensiones** | **Indicadores** | **Escalas** |
|---|---|---|---|
| **Variable independiente (X)**<br>• Método heurístico. | • Comprende<br>• Panifica<br>• Ejecuta<br>• Examina | • Comprende el problema<br>• concebir el plan<br>• Ejecuta el plan<br>• Examina la solución obtenida | |
| **Variable dependiente (Y)**<br>• Aprendizaje de cálculo integral. | Influencia en:<br>• El aprendizaje contenidos conceptuales del cálculo integral. | Definiciones propiedades y teoremas del cálculo integral | **Vigesimal de 0-20**<br>• Muy bueno:<br>[17 – 20]<br>• Bueno:<br>[14 – 17<br>• Regular:<br>[11 – 13]<br>• Deficiente:<br>[07 – 10]<br>• Muy deficiente:<br>[00 – 06] |
| | • El aprendizaje contenidos procedimentales del cálculo integral. | • Resuelve ejercicios del cálculo integral<br>• Plantea y resuelve problemas del cálculo integral<br>• Aplica el cálculo integral en problemas de la vida real. | |
| | • El aprendizaje contenidos actitudinales del cálculo integral. | • Valora el cálculo integral | |

## 3.5.1 Técnicas, instrumentos y fuentes de recolección de datos

### 3.5.1.1 Técnicas de investigación

Las principales técnicas a utilizar son:

- ✓ Observación estructurada, para evaluar el aprendizaje del método heurístico del cálculo integral.
- ✓ Evaluación. Para evaluar el nivel de aprendizaje del método heurístico en el aprendizaje del cálculo integral.

### 3.5.1.2 Instrumentos de investigación

Los instrumentos a utilizar son:

- ✓ Prueba de entrada
- ✓ Sesiones de aprendizaje, en un número de ocho.
- ✓ Guías de aprendizaje, en un número de ocho.
- ✓ Prueba de salida

### 3.5.1.3 Plan de procesamiento y análisis de datos

#### 3.5.1.3.1 Plan de tratamiento de los datos.

Haciendo uso del material experimental, se procederá al registro de los resultados de las pruebas de entrada y salida en los dos grupos: de control y experimental; para luego sistematizarlos y clasificándolos para posteriormente presentarlo en la tabla de frecuencias siguiente:

**Tabla 4.**
*Distribución de frecuencias*

| Notas | $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $[00-04\rangle$ | | | | | |
| $[04-08\rangle$ | | | | | |
| $[08-12\rangle$ | | | | | |
| $[12-16\rangle$ | | | | | |
| $[16-20]$ | | | | | |
| Total | | | | | |

Donde:

$x_i$ : Marca de clase.

$f_i$ : Frecuencia absoluta.

$F_i$ : Frecuencia absoluta acumulada.

$h_i$ : Frecuencia relativa.

$H_i$ : Frecuencia relativa acumulada.

% : porcentajes

Además de los estadísticos de posición y de dispersión:

Promedio aritmético

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{n}$$

Varianza

$$v(x) = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^2 f_i}{n-1}$$

**3.5.1.3.2 Plan de análisis e interpretación de datos.**

Luego de la recopilación, clasificación y presentación de los datos para los grupos experimental y de control realizaremos la prueba de hipótesis para determinar el efecto del método heurístico en el aprendizaje del cálculo integral en los alumnos de segundo semestre de la escuela profesional de Ingenierías: Minas y Mecánica Eléctrica de la Universidad Nacional del Altiplano.

Para verificar la confiabilidad de los resultados del presente trabajo de investigación utilizaremos la prueba estadística de la distribución normal, de zeta calculada de acuerdo con el siguiente plan:

**DATOS:**

Son los estadígrafos obtenidos de los dos grupos (experimental y de control).

**Planteamiento de hipótesis**

**Hipótesis nula (** $H_0$ **)**

El método heurístico *no tiene efecto* en el aprendizaje del Cálculo integral en los alumnos del segundo semestre de la escuela profesional de Ingenierías de Minas de la Universidad Nacional del Altiplano.

**Hipótesis alterna ($H_a$)**

El método heurístico *tiene efecto* en el aprendizaje del Cálculo integral en los alumnos del segundo semestre de la escuela profesional de Ingenierías Mecánica eléctrica de la Universidad Nacional del Altiplano.

**Nivel de significancia.**

Es significativa al 5%, es decir $\alpha = 0.05$

Es altamente significativo al 1%, es decir $\alpha = 0.01$

**Estadística de prueba.**

Para verificar la confiabilidad de los resultados del presente trabajo de investigación se utiliza la prueba de la distribución normal de zeta; cuya fórmula es:

$$Z_c = \frac{\overline{x}_e - \overline{x}_c}{\sqrt{\frac{s_e^2}{n_e} + \frac{s_c^2}{n_c}}}$$

Donde:

$\overline{X}_e$ : Promedio de notas del grupo experimental.

$\overline{X}_c$ : Promedio de notas del grupo control.

$S_e^2$ : Varianza del grupo experimental

$S_c^2$ : Varianza del grupo control.

$n_e$ : Número de alumnos de grupo experimental

$n_c$ : Número de alumnos de grupo control

**PASOS:**

1. Determinar el promedio, la varianza según el tamaño de la muestra en estudio.
2. Aplicar la ecuación de la distribución normal zeta calculada
3. Decidir si se acepta o rechaza la hipótesis nula.

# CAPÍTULO IV

# RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para identificar el nivel de aprendizaje del cálculo integral, aplicando del método heurístico en los estudiantes del segundo semestre de las escuelas profesionales de ingenierías, se realizó el análisis e interpretación de la prueba de entrada entre el control y el grupo experimental, antes de iniciar el tratamiento experimental, en seguida el análisis e interpretación de la prueba de salida entre el control y el grupo experimental y finamente se la comparación del grupo control y grupo experimental después del tratamiento, utilizando la prueba estadística de la distribución normal de zeta calculada.

## 4.1 Nivel de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre cálculo integral, antes de la aplicación del método heurístico.

### 4.1.1 Nivel de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre cálculo integral, antes de la aplicación del método heurístico en el grupo control.

**Tabla 5.**
*Resultados de la investigación antes de tratamiento de ingeniería de minas en el grupo control*

| Intervalos | | $X_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 8 | 7 | 10 | 10 | 23.81% | 23.81% |
| 8 | 10 | 9 | 19 | 29 | 45.24% | 69.05% |
| 10 | 12 | 11 | 9 | 38 | 21.43% | 90.48% |
| 12 | 14 | 13 | 4 | 42 | 9.52% | 100.00% |
| 14 | 16 | 15 | 0 | 42 | 0.00% | 100.00% |
| 16 | 18 | 17 | 0 | 42 | 0.00% | 100.00% |
| 18 | 20 | 19 | 0 | 42 | 0.00% | 100.00% |
| Total | | | 42 | | 100.00% | |

Fuente: Datos obtenidos de la prueba de entrada para el grupo control.

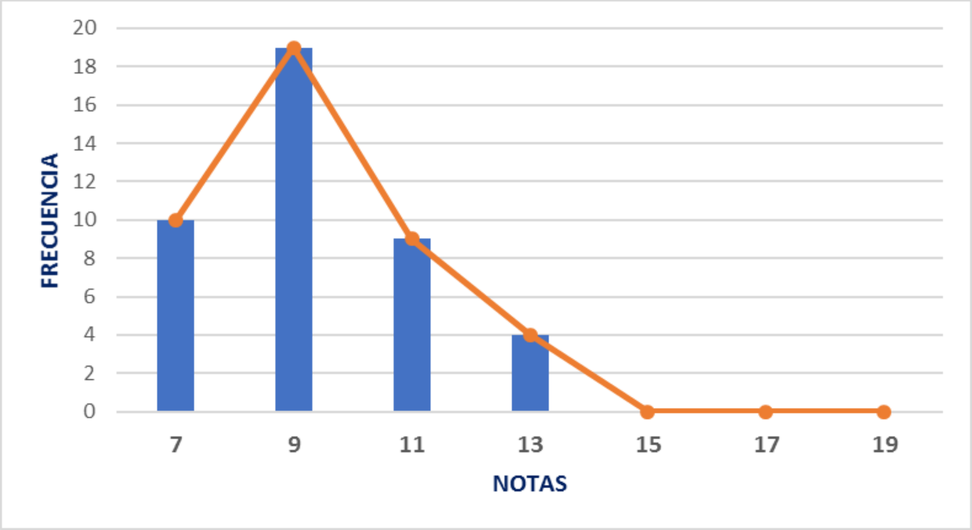


*Figura 1*. Resultados de la prueba de entrada para el grupo control

Fuente: Tabla 5

**Tabla 6.**
*Resultados de la prueba de entrada para el grupo control*

| Prueba de Entrada | *Resultados* |
|---|---|
| Media | 9.67 |
| Error típico | 0.28 |
| Mediana | 9 |
| Moda | 9 |
| Desviación estándar | 1.83 |
| Varianza de la muestra | 3.35 |
| Curtosis | -0.58 |
| Coeficiente de asimetría | 0.25 |
| Rango | 7 |
| Mínimo | 6 |
| Máximo | 13 |
| Suma | 406 |
| Cuenta | 42 |

Observando la tabla 7 de puede determinar que el nivel de aprendizaje de los estudiantes de ingenierías sobre calculo integral antes de la aplicación del método heurística en el grupo control, se tiene una Media muestral igual a 9.67 puntos con una desviación estándar muestral de 1.83 puntos, que corresponde a las escuelas profesionales de Ingeniería de Minas. Por lo tanto, el nivel de aprendizaje para esta escuela profesional es deficiente estando en el rango de calificación de 08 - 10 puntos respectivamente.

### 4.1.2 Nivel de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre cálculo integral, antes de la aplicación del método heurístico en el grupo experimental.

**Tabla 7.**
*Resultados de la investigación antes de tratamiento del grupo experimental*

| Intervalos | | $X_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 8 | 7 | 10 | 10 | 26.32% | 26.32% |
| 8 | 10 | 9 | 15 | 25 | 39.47% | 65.79% |
| 10 | 12 | 11 | 7 | 32 | 18.42% | 84.21% |
| 12 | 14 | 13 | 5 | 37 | 13.16% | 97.37% |
| 14 | 16 | 15 | 1 | 38 | 2.63% | 100.00% |
| 16 | 18 | 17 | 0 | 38 | 0.00% | 100.00% |
| 18 | 20 | 19 | 0 | 38 | 0.00% | 100.00% |
| Total | | | 38 | | 100.00% | |

Fuente: Datos obtenidos de la prueba de entrada para el grupo experimental.

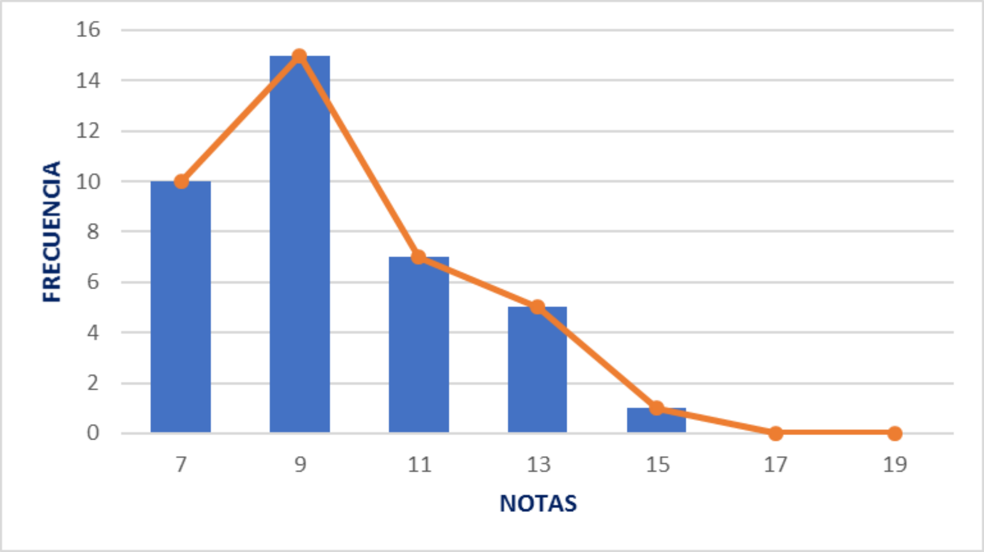


*Figura 2*. Resultados de la prueba de entrada para el grupo experimental

Fuente: Tabla 7

**Tabla 8.**
*Resultados de estadísticos descriptivos en el grupo experimental*

| Prueba de Entrada | Resultados |
|---|---|
| Media | 9.87 |
| Error típico | 0.35 |
| Mediana | 9 |
| Moda | 9 |
| Desviación estándar | 2.15 |
| Varianza de la muestra | 4.60 |
| Curtosis | -0.11 |
| Coeficiente de asimetría | 0.61 |
| Rango | 9 |
| Mínimo | 6 |
| Máximo | 15 |
| Suma | 375 |
| Cuenta | 38 |

Fuente: Datos obtenidos de la prueba de entrada para el grupo experimental.

Observando la tabla 9 de puede determinar que el nivel de aprendizaje de los estudiantes de ingenierías sobre cálculo integral antes el tratamiento de la aplicación del método heurística en el grupo experimental, se tiene una media muestral igual a 9 puntos con una desviación estándar muestral de 2.15 puntos, que corresponde a las escuelas profesionales de Ingeniería Mecánica Eléctrica. Por lo tanto, el nivel de aprendizaje para esta escuela profesional es deficiente estando en el rango de calificación de 08 - 10 puntos respectivamente.

## 4.2 Nivel de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre cálculo integral, después del tratamiento de la aplicación del método heurístico.

### 4.2.1 Nivel de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre cálculo integral, después del tratamiento de la aplicación del método heurístico en el grupo control.

**Tabla 9.**

*Resultados de la investigación después del grupo control*

| INTERVALOS | | $X_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 9 | 8 | 14 | 14 | 33.33% | 33.33% |
| 9 | 11 | 10 | 18 | 32 | 42.86% | 76.19% |
| 11 | 13 | 12 | 10 | 42 | 23.81% | 100.00% |
| 13 | 15 | 14 | 0 | 42 | 0.00% | 100.00% |
| 15 | 17 | 16 | 0 | 42 | 0.00% | 100.00% |
| 17 | 19 | 18 | 0 | 42 | 0.00% | 100.00% |
| 19 | 21 | 20 | 0 | 42 | 0.00% | 100.00% |
| TOTAL | | | 42 | | 100.00% | |

Fuente: Datos obtenidos de prueba de salida para el grupo control.

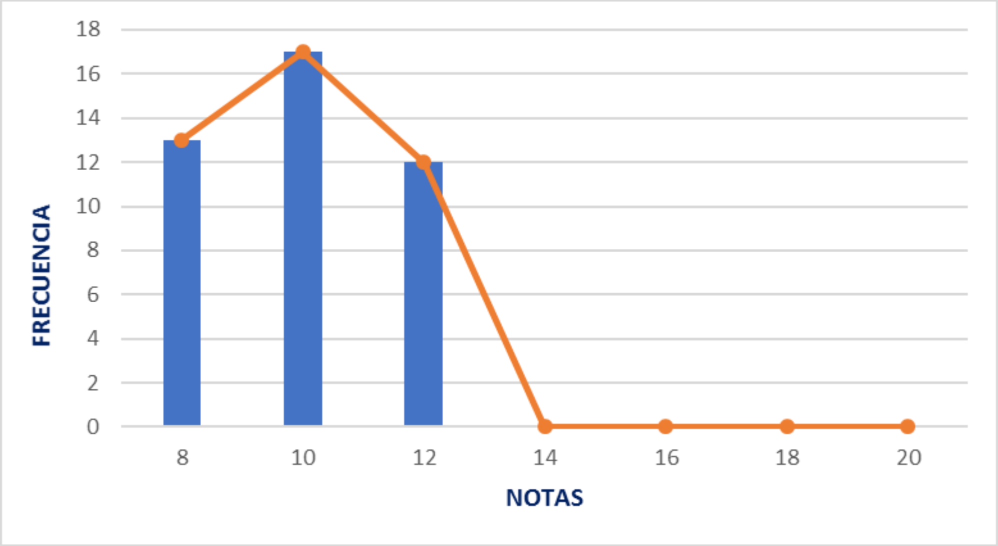


*Figura 3. Resultados prueba de salida para el grupo control*

Fuente :Tabla 9

**Tabla 10.**
*Resultados de estadísticos descriptivos del grupo control*

| Prueba de salida | *Resultados* |
|---|---|
| Media | 10.26 |
| Error típico | 0.26 |
| Mediana | 10 |
| Moda | 10 |
| Desviación estándar | 1.70 |
| Varianza de la muestra | 2.88 |
| Curtosis | -0.59 |
| Coeficiente de asimetría | -0.34 |
| Rango | 6 |
| Mínimo | 7 |
| Máximo | 13 |
| Suma | 431 |
| Cuenta | 42 |

Fuente: Datos obtenidos de la post- prueba para el grupo de control.

Observando la tabla 11 de puede determinar que en el grupo de control existe un mínimo incremento en el nivel de aprendizaje de los estudiantes de segundo semestre de las escuela profesional de Minas de la Universidad Nacional del Altiplano, pues el promedio en la prueba de entrada es de 9.67 puntos con una desviación estándar muestral de 1.83 puntos, y en la prueba de salida es de 10.26 con una desviación estándar muestral de 1.70 puntos; del grupo de control; al cuál no se le sometió a la aplicación del método heurística en la enseñanza del cálculo integral.

### 4.2.2 Nivel de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre cálculo integral, después del tratamiento de la aplicación del método heurístico en el grupo experimental

**Tabla 11.**
*Resultados de la investigación después del tratamiento en el grupo experimental*

| Intervalos | | $X_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 11 | 10 | 4 | 4 | 10.53% | 10.53% |
| 11 | 13 | 12 | 10 | 14 | 26.32% | 36.84% |
| 13 | 15 | 14 | 16 | 30 | 42.11% | 78.95% |
| 15 | 17 | 16 | 3 | 33 | 7.89% | 86.84% |
| 17 | 19 | 18 | 5 | 38 | 13.16% | 100.00% |
| 19 | 21 | 20 | 0 | 38 | 0.00% | 100.00% |
| Total | | | 38 | | 100.00% | |

Fuente: Datos obtenidos de prueba de salida para el grupo experimental.

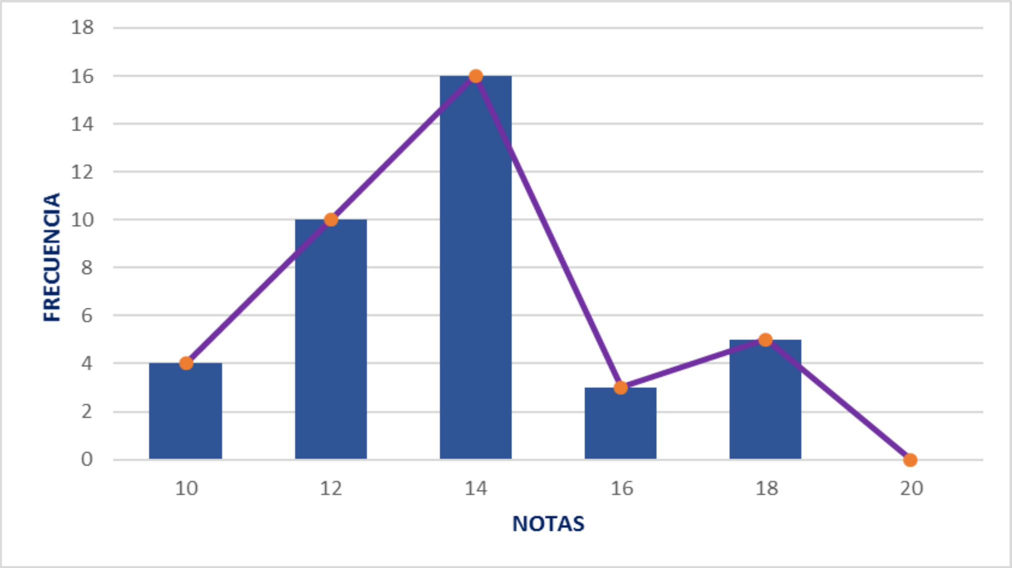


*Figura 4.* Resultados de prueba de salida para el grupo Experimental

Fuente : Tabla 12

**Tabla 12.**
*Resultados de estadísticos descriptivos del grupo experimental*

| Prueba de salida | Resultados |
|---|---|
| Media | 14.08 |
| Error típico | 0.39 |
| Mediana | 14 |
| Moda | 14 |
| Desviación estándar | 2.39 |
| Varianza de la muestra | 5.70 |
| Curtosis | -0.09 |
| Coeficiente de asimetría | 0.04 |
| Rango | 10 |
| Mínimo | 9 |
| Máximo | 19 |
| Suma | 535 |
| Cuenta | 38 |

Observando la tabla 13 se puede determinar que el nivel de aprendizaje de los estudiantes de ingenierías sobre cálculo integral durante la aplicación del método heurística en el grupo experimental, se tiene una media muestral igual a 14.08 puntos con una desviación estándar muestral de 2.39 puntos, que corresponde a la escuela profesional de Ingeniería Mecánica Electrónica. Por lo tanto, el nivel de aprendizaje para esta escuela profesional es bueno estando en el rango de calificación de 14 - 15 puntos respectivamente.

## 4.3 Comparación de Niveles de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre cálculo integral, antes y después del tratamiento de la aplicación del método heurístico.

### 4.3.1 Comparación de niveles de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre cálculo integral, antes y después del tratamiento de la aplicación del método heurístico entre los grupos de control.

**Tabla 13.**

*Resultados estadísticos descriptivos antes y después del tratamiento en el grupo control*

| Prueba de Entrada | *Resultados* | PRUEBA de salida | *Resultados* |
|---|---|---|---|
| Media | 9.67 | Media | 10.26 |
| Error típico | 0.28 | Error típico | 0.26 |
| Mediana | 9 | Mediana | 10 |
| Moda | 9 | Moda | 10 |
| Desviación estándar | 1.83 | Desviación estándar | 1.70 |
| Varianza de la muestra | 3.35 | Varianza de la muestra | 2.88 |
| Curtosis | -0.58 | Curtosis | -0.59 |
| Coeficiente de asimetría | 0.25 | Coeficiente de asimetría | -0.34 |
| Rango | 7 | Rango | 6 |
| Mínimo | 6 | Mínimo | 7 |
| Máximo | 13 | Máximo | 13 |
| Suma | 406 | Suma | 431 |
| Cuenta | 42 | Cuenta | 42 |

Fuente: Datos obtenidos de prueba entrada y salida para grupo control

## PRUEBA DE HIPÓTESIS

Sean $X_a$ y $X_d$ los resultados obtenidos en el grupo de control antes y después respectivamente, y $\mu_d$ y $\mu_a$ sus medias respectivas.

### a) Planteamiento de Hipótesis

**Hipótesis Nula ($H_0$)** No existe diferencia significativa en promedio de los resultados del grupo de control antes y después del tratamiento.

$\mu_1 = \mu_2$

**Hipótesis alterna ($H_1$):** Existe diferencia significativa en promedio de los resultados del grupo de control antes y después del tratamiento.

$\mu_1 \neq \mu_2$

### b) Nivel de significancia

Utilizaremos como nivel de significancia el 5%

$\alpha = 0.05$

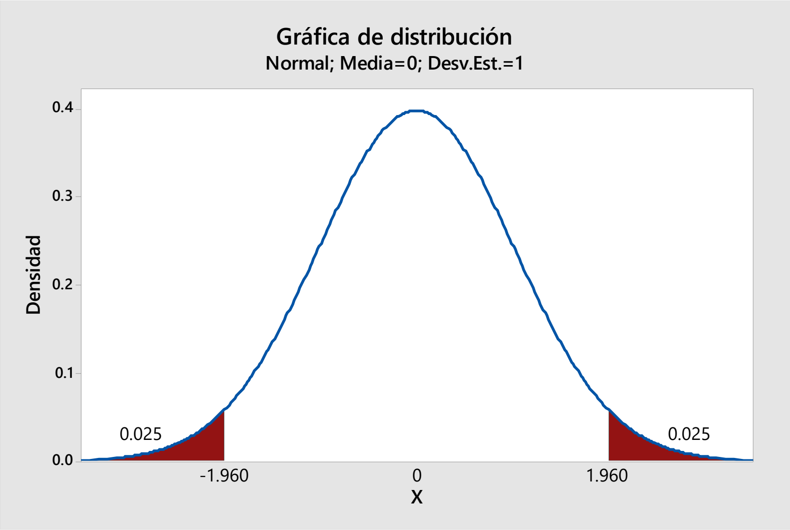
**c) Estadístico de Prueba**

$$z=\frac{\left(\overline{X}_d-\overline{X}_a\right)-\left(\mu_d-\mu_a\right)}{\sqrt{\frac{s_d^2}{n_d}+\frac{s_a^2}{n_a}}}$$

**d) Región critica:**

Con nivel de significancia del 5%, el valor crítico para la distribución normal es:

$$z_t = \text{Región de aceptación}: \langle -1.96\,;1.96 \rangle$$



**e) Decisión**

Prueba

Hipótesis nula $H_0$: $\mu_1 - \mu_2 = 0$

Hipótesis alterna $H_1$: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

| Valor T | GL | Valor p |
|---|---|---|
| -1.55 | 82 | 0.126 |

$$z=\frac{\left(\overline{x}_d-\overline{x}_a\right)-\left(\mu_d-\mu_a\right)}{\sqrt{\frac{s_d^2}{n_d}-\frac{s_a^2}{n_a}}}$$

Reemplazando se tiene que:

$$z_o=\frac{(9.67-10.26)-(0-0)}{\sqrt{\frac{3.35}{42}-\frac{2.88}{42}}}=-1.55$$

Como el estadístico de prueba $z_0$ es menor que $Z_t$, rechazamos la hipótesis alterna y aceptamos la nula, lo que nos indica que no existe diferencia significativa en promedio de los resultados del grupo de control antes y después del tratamiento.

### 4.3.2 Comparación de niveles de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre calculo integral, antes y después del tratamiento de la aplicación del método heurístico entre el grupo experimental.

**Tabla 14.**
*Resultados estadísticos descriptivos antes y después del tratamiento en el grupo experimental*

| Prueba de Entrada | Resultados | Prueba de salida | Resultados |
|---|---|---|---|
| Media | 9.87 | Media | 14.08 |
| Error típico | 0.35 | Error típico | 0.39 |
| Mediana | 9 | Mediana | 14 |
| Moda | 9 | Moda | 14 |
| Desviación estándar | 2.15 | Desviación estándar | 2.39 |
| Varianza de la muestra | 4.60 | Varianza de la muestra | 5.70 |
| Curtosis | -0.11 | Curtosis | -0.09 |
| Coeficiente de asimetría | 0.61 | Coeficiente de asimetría | 0.04 |
| Rango | 9 | Rango | 10 |
| Mínimo | 6 | Mínimo | 9 |
| Máximo | 15 | Máximo | 19 |
| Suma | 375 | Suma | 535 |
| Cuenta | 38 | Cuenta | 38 |

Fuente: Datos obtenidos de prueba entrada y salida para grupo experimental

**PRUEBA DE HIPÓTESIS**

Sean $X_a$ y $X_d$ los resultados obtenidos en el grupo experimental antes y después respectivamente, y $\mu_d$ y $\mu_a$ sus medias respectivas.

**a) Planteamiento de Hipótesis**

**Hipótesis Nula ($H_0$).** No existe diferencia significativa en promedio de los resultados del grupo de experimental antes y después del tratamiento. $\mu_1 = \mu_2$

**Hipótesis alterna (H1):**

Existe diferencia significativa en promedio de los resultados del grupo de experimental antes y después del tratamiento.

$\mu_1 \neq \mu_2$

**b) Nivel de significancia**

Utilizaremos como nivel de significancia el 5%, $\alpha = 0.05$

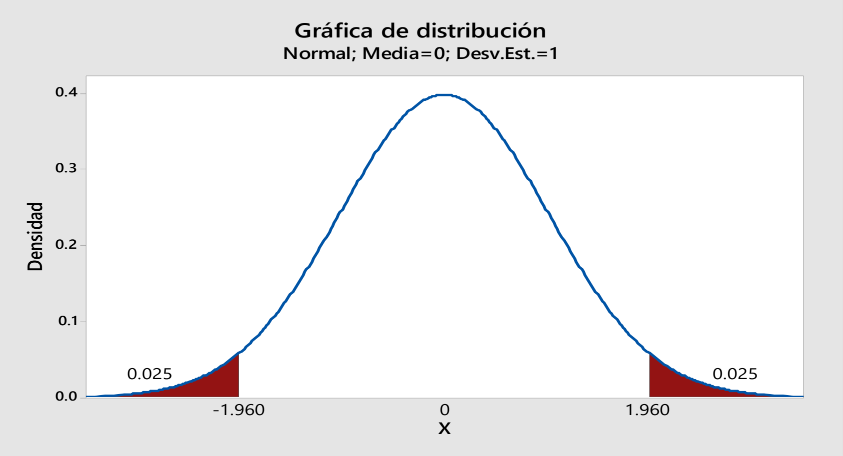
**c) Estadístico de Prueba**

$$z = \frac{\left(\overline{X}_d - \overline{X}_a\right) - \left(\mu_d - \mu_a\right)}{\sqrt{\frac{s_d^2}{n_d} + \frac{s_a^2}{n_a}}}$$

**d) Región critica:**

Con nivel de significancia del 5%, el valor crítico para la distribución normal es:

$$Z_t = \text{Región de aceptación} : \left\langle -1.96 ; 1.96 \right\rangle$$



**e) Decisión**

$$z = \frac{\left(\overline{X}_d - \overline{X}_a\right) - \left(\mu_d - \mu_a\right)}{\sqrt{\frac{s_d^2}{n_d} + \frac{s_a^2}{n_a}}}$$

Los datos lo obtenemos de la tabla 16, teniendo los valores de:

$\overline{x_d} = 9.87$ $s_d^2 = 4.60$ $n_d = 38$

$\overline{x_a} = 14.08$ $s_a^2 = 5.70$ $n_a = 38$

Reemplazando se tiene que:

$$z_0 = \frac{(9.87 - 14.08) - 0}{\sqrt{\frac{4.60}{38} - \frac{5.70}{38}}} = -8.09$$

Como el estadístico de prueba $Z_0$ es mayor que $Z_t$ , rechazamos la hipótesis nula y aceptamos la alterna, lo que nos indica que existe diferencia significativa en promedio de los resultados del grupo de experimental antes y después del tratamiento.

### 4.3.3 Comparación de niveles de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre el cálculo integral, después del tratamiento de la aplicación del método heurístico entre el grupo de control y el grupo experimental.

**Tabla 15.**
*Resultados estadísticos descriptivos después del tratamiento entre el grupo de control y el grupo experimental*

| Prueba de salida grupo Control | Resultados | Prueba de salida grupo Experimental | Resultados |
|---|---|---|---|
| Media | 10.26 | Control | 14.08 |
| Error típico | 0.26 | Error típico | 0.39 |
| Mediana | 10 | Mediana | 14 |
| Moda | 10 | Moda | 14 |
| Desviación estándar | 1.70 | Desviación estándar | 2.39 |
| Varianza de la muestra | 2.88 | Varianza de la muestra | 5.70 |
| Curtosis | -0.59 | Curtosis | -0.09 |
| Coeficiente de asimetría | -0.34 | Coeficiente de asimetría | 0.04 |
| Rango | 6 | Rango | 10 |
| Mínimo | 7 | Mínimo | 9 |
| Máximo | 13 | Máximo | 19 |
| Suma | 431 | Suma | 535 |
| Cuenta | 42 | Cuenta | 38 |

Fuente: Datos obtenidos de prueba de entrada para el grupo control y experimental.

**PRUEBA DE HIPOTESIS**

Sean $X_e$ y $X_c$ los resultados obtenidos en el grupo experimental y de control respectivamente, y $\mu_e$ y $\mu_c$ sus medias respectivas.

a) **Planteamiento de Hipótesis**

**Hipótesis Nula (H0):** No existe diferencia significativa en promedio de los resultados del grupo experimental y el grupo de control. $\mu_1 = \mu_2$

**Hipótesis alterna (H1):** Existe diferencia significativa en promedio de los resultados del grupo experimental y el grupo de control.

$\mu_1 \neq \mu_2$

b) **Nivel de significancia**

Utilizaremos como nivel de significancia el 5%

$\alpha = 0.05$

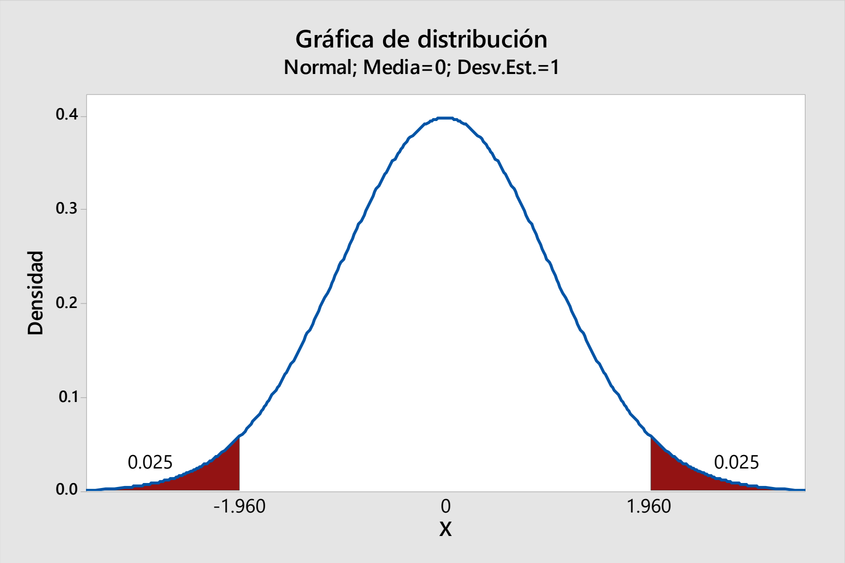
c) **Estadístico de Prueba**

$$z = \frac{\left(\overline{X}_d - \overline{X}_a\right) - \left(\mu_d - \mu_a\right)}{\sqrt{\dfrac{s_d^2}{n_d} + \dfrac{s_a^2}{n_a}}}$$

d) **Región critica:**

Con nivel de significancia del 5%, el valor crítico para la distribución normal es:

$z_t$ = Región de aceptación : $\langle -1.96 ; 1.96 \rangle$



### e) Decisión

$$z = \frac{\left(\overline{X}_d - \overline{X}_a\right) - \left(\mu_d - \mu_a\right)}{\sqrt{\dfrac{s_d^2}{n_d} + \dfrac{s_a^2}{n_a}}}$$

Los datos lo obtenemos de la tabla 17, teniendo los valores de:

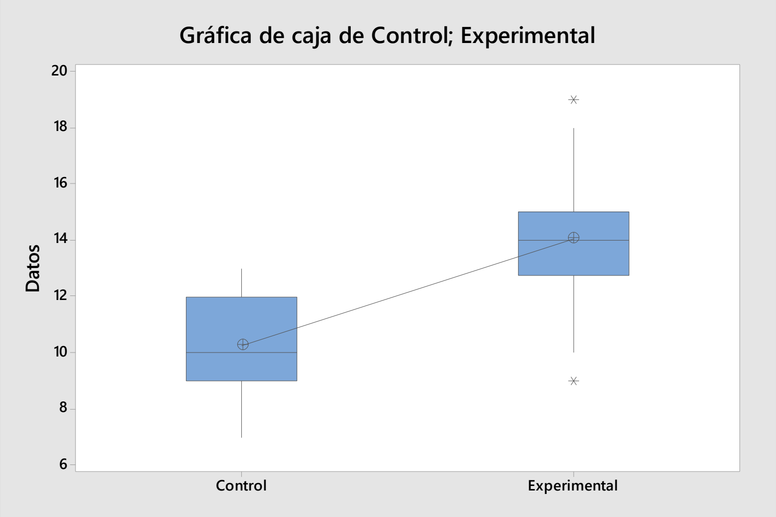
$\overline{x}_d = 10.26$ $s_d^2 = 2.88$ $n_d = 42$

$\overline{x}_a = 14.08$ $s_a^2 = 5.70$ $n_a = 38$

Reemplazando se tiene que:

$$z_0 = \frac{(10.26 - 14.08) - 0}{\sqrt{\dfrac{2.88}{42} + \dfrac{5.70}{38}}} = -8.3$$

Como el estadístico de prueba $Z_0$ es mayor que $Z_t$, rechazamos la hipótesis nula y aceptamos la alterna, lo que nos indica que existe diferencia significativa en el promedio de los resultados del grupo experimental y el grupo de control, lo cual implica que el grupo experimental tuvo mejores resultados que el grupo de control. La grafica también corrobora lo estipulado anteriormente.



# CONCLUSIONES

- Teniendo en cuenta los resultados de la prueba de entrada los estudiantes ya han interiorizado un proceso mecánico en la resolución de problemas lo que les dificulto comprender paso a paso el procedimiento a efectuar. Mientras que en la prueba de salida se observó que el proceso realizado por los estudiantes ya no fue tan mecanizado si no que estuvo basado en el análisis y la reflexión antes de tomar cualquier decisión lo que permitió que tuvieran mayores aciertos en la resolución de problemas.

- Antes del tratamiento del método heurístico el nivel de rendimiento sobre el cálculo integral en los estudiantes de las escuelas profesionales de Ingeniería de Minas de grupo control y la escuela profesional de Ingeniería Mecánica Eléctrica de grupo experimental, en su gran mayoría, es deficiente según teniendo el 66% de desaprobados en el grupo experimental y el 69% de desaprobados en el grupo control.

- Al final del experimento, y después del tratamiento de los datos con análisis estadístico correspondiente, se pudo comprobar que el método heurístico tiene en efecto positivo en el aprendizaje del cálculo integral en los estudiantes del grupo experimental teniendo como resultado del 89% de alumnos aprobados con un promedio de 14.08 puntos.

# RECOMENDACIONES

- Se recomienda a los docentes del área de matemática que enseñan el cálculo integral hacer uso del método heurístico en el desarrollo de sus cesiones de aprendizaje, ya que da mejores resultados en el aprendizaje en los estudiantes.

- Brindar capacitación y asesoría especializada a los docentes, dando a conocer los beneficios obtenidos al utilizar el método heurístico, los efectos positivos provocados en el estudiante. Nuestra educación tradicionalista, magistral hace del estudiante un dependiente del aprendizaje mecánico.

- Se recomienda a la Maestría en Educación, mención Didáctica de la Matemática, realizar investigaciones de los diferentes métodos de aprendizaje en el área de matemáticas a nivel superior.

- Se proponga un plan de actividades para la preparación de los profesores, dando a conocer los beneficios obtenidos al utilizar el método heurístico, los efectos positivos provocados en él discente. Nuestra educación tradicionalista, magistral.

# BIBLIOGRAFÍA

Agudelo, N. (2008). *Método heurístico en la resolución de problemas de matemáticos*. Colombia: Pereira

Anaya, N. (2007). *Aplicación de la heurística en la enseñanza de las ciencias*. España: Mascel

Brand, L. (1962). *Análisis Vectorial*. México: Compañía Editorial Continental S.A.

Bedoya, E. (2008). *Método Heurístico en la resolución de problemas de matemáticos*. Colombia: Pereira

Capella, M. (1999). *Aprendizaje y constructivismo*. Lima-Perú: Massey

Claudio, P. (1995). *Cálculo Vectorial*. Lima-Perú: Prentice Hall.

Chávez, J. (2007). *Guía para el desarrollo de los procesos cognitivos*. ME. Segunda edición. Impreso por Metrocolor S.A. Lima Perú.

Díaz, H. (1999). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. México: Graw Hill Hispanoamericana.

Espinoza, E.  (1996). *Análisis Matemático III*. Lima-Perú: Prentice Hall

Flores, J. (1993). *La investigación Educacional*. Lima – Perú: Desiré.

Gascón, J. (1994). *El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas*. México: Continental S.A

Godino, J. (2000). *Competencias y Comprensión Matemática*. España. Revista de Didáctica de las Matemáticas. 9

Golden, M. (1987). *Representación cognitiva para la resolución de problemas matemáticos*. Hilldale, New Jersey. Editorial C. Janvier.

Guzmán, M. (2001). *La enseñanza de las ciencias y matemática*. España. Editorial Popular.

Giménez, J. (2004). *La actividad matemática en el aula. Homenaje a Paulo Abrantes*. España. Editorial Grao. Serie Didáctica de la Matemática.

Grupo, O. (1987). *Currículum de matemáticas*, España: Popular.

Glass, G. y Stanley, J. (1985). *Métodos estadísticos aplicados a las Ciencias Sociales*. México. Editorial Prentice Hall International.

Hernández, P. (2003). *Metodología de la investigación*. México. Editorial Mac Graw-Hill;

Habana, L. (1989). *Academia de Ciencia y Filosofía de la Habana. Metodología del conocimiento científico*. España: Quinto Sol

Haber, A y Runyon, R (1976). *Estadística General*. México: Raymond E.

Hernández y Baptista, R. (2000). *Metodología de la investigación*. México. Editorial Latinoamericana.

Hasser, S. (1962). *Análisis Matemático II*. México. Editorial. Trillas.

Kaplan, W. (1986). *Matemáticas Avanzadas*. México: Limusa

Kreyszig, E. (1974). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*. (2 volúmenes). México. Editorial Limusa,

Murray, R. (1996). *Análisis Vectorial y una introducción al Análisis Tensorial*. México: Graw Hill,

Moisés, L. (2002). *Cálculo Vectorial*. Lima-Perú. Editorial. Moshera S.R.

Neil, P. (1992). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*. México. Editorial Continental S.A.

Lakatos, I. (1978). *Matemática, ciencia y epistemología*. Madrid: Macmillan

Ordoñez, A. (2017). *Aplicación del método heurístico y desarrollo de habilidades*. Lima-Perú. Editorial Carlos

Peralta, F. (2010). *Resolución de Problemas*. Madrid. Editorial Síntesis S.A.

Pólya, G. (1945). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. México. Editorial Trillas. Serie de Matemáticas.

Pólya, G. (1961). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid. Editorial Tecno.

Spiegel, M. (1995). *Calculo Superior*. México: Graw-Hill.

Scandroli, B. (1999). *Resolución de un problema complejo utilizando un elemento de naturaleza heurística.* Buenos Aires, Argentina: Schirmer.

Spiegel, M. (1995). *Matemáticas Superiores*. México: Graw-Hill.

Sachs, L. (1978). *Estadística aplicada*. Barcelona: Labor.

Sánchez, B. (1964). *Estadística elemental aplicada a la Pedagogía*. Madrid. Publicaciones Teresiana

Varderas, A. (2000). *El método heurístico como mediador del aprendizaje es un método de enseñanza activo.* México. Editorial. Graw Hispanoamericana.

# ANEXOS

**Anexo 1.** Matriz de consistencia

## MATRIZ DE CONSISTENCIA

## "APLICACIÓN DEL MÉTODO HEURÍSTICO EN EL APRENDIZAJE DEL CALCULO INTEGRAL EN LOS ESTUDIANTES DE INGENIERÍAS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO-PUNO 2018."

**TIPO**: Aplicada **NIVEL**: Experimental **DISEÑO**: Cuasi experimental

| Problema | Objetivos | Hipótesis | Variables | Dimensiones | Indicadores | Técnicas | Instrumentos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Problema General:**<br>¿De qué manera la aplicación del método heurístico, influye en el aprendizaje del cálculo integral, en los estudiantes de ingeniería de la Universidad Nacional del Altiplano - Puno? **Problemas específicos:**<br>✓¿Cuál es el nivel de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre el cálculo integral, antes y después del tratamiento de la aplicación del método heurístico entre el grupo de control?<br>✓¿Cuál es el nivel de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre el cálculo integral, antes y después del tratamiento de la aplicación del método heurístico entre el grupo experimental?<br>✓¿Cuál es el nivel de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre el cálculo integral, después del tratamiento de la aplicación del método heurístico entre el grupo de control y el grupo experimental? | **Objetivo general:**<br>Determinar los efectos de la aplicación del método heurístico en el aprendizaje del cálculo integral, en los estudiantes de Ingeniería de la Universidad Nacional del Altiplano - Puno.<br>**Objetivos específicos**<br>✓Comparar los niveles de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre el cálculo integral, antes y después del tratamiento de la aplicación del método heurístico entre el grupo de control.<br>✓Comparar los niveles de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre el cálculo integral, antes y después del tratamiento de la aplicación del método heurístico entre el grupo experimental.<br>✓ Comparar los niveles de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería sobre el cálculo integral, después del tratamiento de la aplicación del método heurístico entre el grupo de control y el grupo experimental. | **Hipótesis general:**<br>Aplicando adecuadamente el método heurístico el aprendizaje de los estudiantes de ingeniería de la Universidad Nacional del Altiplano - Puno, tendrán mejor nivel en su aprendizaje en el cálculo integral.<br>**Hipótesis específicas**<br>✓El nivel de aprendizaje del estudiante de ingenierías sobre cálculo integral, antes de la aplicación del método heurístico presentan niveles bajos.<br>✓Con la aplicación del método heurístico, los estudiantes de ingenierías, tiende a mejorar sus aprendizajes en el cálculo integral<br>✓Después del tratamiento experimental, los niveles de aprendizaje de los estudiantes de ingenierías en cálculo integral, el grupo experimental son superiores al del grupo de control. | **Variable independiente (X)**<br>• Método heurístico.<br>**Variable dependiente (Y)**<br>• Aprendizaje del cálculo integral | • Entender el problema.<br>• Configurar un plan<br>• Ejecutar el plan<br>• Mirar hacia atrás<br>**Influencia en:**<br>• El aprendizaje contenidos conceptuales del cálculo integral<br>• El aprendizaje contenidos procedimentales del cálculo integral<br>• El aprendizaje contenidos actitudinales del cálculo integral | • Comprende el problema<br>• Concebir el plan<br>• Ejecuta el plan<br>• Examina la solución obtenida<br>• Definiciones propiedades y leyes del cálculo integral<br>• Plantea y resuelve problemas del cálculo integral<br>• Aplica el cálculo integral en problemas de la vida real.<br>• Valora el cálculo integral | a) Observación estructurada.<br>b) Evaluación.<br>Población<br>• Estudiantes de ingenierías del segundo semestre que llevan cálculo integral , de la Universidad Nacional del Altiplano<br>394 estudiantes<br>Muestra<br>Con los alumnos del segundo semestre de las escuelas profesionales de Ingenierías de Minas e ingeniería mecánica eléctrica de la Universidad Nacional del Altiplano – Puno simple conformado con 86 estudiantes. | Pruebas Escritas<br>• Prueba Entrada<br>• Prueba Salida |

**Anexo 2.** Prueba de entrada

## PRUEBA DE ENTRADA DE LA INVESTIGACIÓN

**Escuela Profesional: …………………………………………………………….…**
**Apellidos y Nombres : ……………………………………………………………….**
**Código:………………………… Semestre Académico: ……………………………..**
**Asignatura: ……………………………………**

1. Calcular las siguientes integrales indefinidas
   a. $\int x(a-bx^2)dx$
   b. $\int \frac{x+1}{x^2+2x}dx$
   c. $\int \frac{5x+4}{x^2-4x+13}dx$

2. Ahora aplicando la fórmula de integrales por partes resolver las siguientes integrales.

$$\int \frac{\text{sen}3x}{e^x}dx$$

$$\int (\ln x)^2 dx$$

3. Determinar el área del recinto plano limitado por las gráficas de las tres funciones siguientes:

   $y = 1 - x^2$ , $y = x^2 - 3$ , $y = x + 3$

4. Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 3x - 10$, $y = 2x - 4$

5. Determinación de la demanda a partir del ingreso marginal. Si la función del ingreso marginal del producto de una empresa es: $I'(x) = 2050 - 18x - 4x^2$

   Encontrar la función de la demanda

6. Una empresa actualmente produce 220 unidades por semana de un producto. Si el costo de producir x unidades en una semana está dada por la función: $C'(x) = 30 - 0.03x$ Suponiendo que este costo marginal todavía se aplique.

   Determinar el costo extra por semana que se debe considerar al elevar la producción de 200 a 250 unidades por semana.

**Anexo 3.** Prueba de salida

## PRUEBA DE SALIDA DE LA INVESTIGACIÓN

**Escuela Profesional: ………………………………………………………………….…**
**Apellidos y Nombres : …………………………………………………………………….**
**Código:……………………… Semestre Académico: ……………………………..**
**Asignatura: ……………………………………**

1. Calcular las siguientes integrales indefinidas

   a. $\int \left( x^2 + \frac{5}{x} \right)^2 dx$

   d. $\int \frac{\text{senx}}{5 - 2\cos x} dx$

2. Ahora aplicando la fórmula de integrales por partes resolver las siguientes integrales.

   $\int (x^2 + 3x - 1)e^{2x} dx$

   $\int \frac{\text{senx}}{\text{sen}^2 x + 2\cos^2 x} dx$

3. Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^3 - 3x + 8$, $y = -3x$ , y las verticales $x = -3$, $x = 0$

4. Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = cx^3$, siendo $c > 0$, se cortan en los puntos $(0, 0)$ y en $\left( \frac{1}{c}, \frac{1}{c^2} \right)$ .Determinar c de manera que la región limitada entre esas gráficas y sobre el intervalo $\left[ 0, \frac{1}{c} \right]$ tenga área 2/3

5. Una partícula se desplaza en línea recta en forma tal que si v cm/seg. Es la velocidad de la partícula a los t segundos, entonces $V(t) = \text{sen}\,\pi t$, donde el sentido positivo es a la derecha del origen. Si la partícula está en el origen al inicio del movimiento, determine su posición a los 2/3 segundos más tarde.

6. (Ingreso y demanda) El ingreso marginal de una empresa está dado por

   $I'(x) = 20 - 0.01x$

   a) Determine la función de ingreso.

   b) Encuentre la relación de demanda para el producto de la empresa.

**Anexo 4. Silabo**

# SILABO

FACULTAD : Ingeniería Mecánica Eléctrica, Electrónica y Sistemas
ESCUELA PROFESIONAL: Ingeniería Mecánica Eléctrica
**ESPECIALIDAD** : CARRERA PURA

IDENTIFICACIÓN ACADÉMICA

**Asignatura**

| | |
|---|---|
| a) Nombre | : **ANÁLISIS MATEMÁTICO II** |
| b) Código | : 3.30 |
| c) Prerrequisito | : ANÁLISIS MATEMÁTICO I |
| d) Número de horas | : Teóricas: 3 Prácticas: 2 Total: 5 |
| e) Créditos | : 4.00 |
| f) Año y Semestre Académico | : Semestre 2017-I |
| g) Duración de la asignatura | : Del 27 de marzo al 26 de Julio del 2017 |
| h) Área Curricular | : Formación |

**Docente**

| | |
|---|---|
| a) Nombres y Apellidos | : SERAPIO C. CALCINA CUEVAS |
| b) Condición | : CONTRATADO |
| c) Categoría | : AUXILIAR T.C. |

Ambiente donde se realiza el aprendizaje

a) Aula -202

SUMILLA Y CONTENIDOS TRANSVERSALES

**SUMILLA.**

El curso de Análisis Matemático II, proporciona a los estudiantes de Administración los recursos en el campo de las Matemáticas, para generalizar los conceptos del Cálculo Integral. En nuestro mundo, donde los conocimientos matemáticos se desarrollan vertiginosamente y aumentan sus aplicaciones, existe un consenso social sobre la importancia de dotar a los estudiantes de una cultura matemática que estimule el desarrollo de su pensamiento lógico matemático, potenciando su actitud de reflexión. El curso de Análisis Matemático II está dividido en dos unidades:

UNIDAD I: Integrales Indefinidas.
UNIDAD II: Integral Definida y sus aplicaciones.

COMPETENCIA

**COMPETENCIA 1**

Calcula e interpreta la integral indefinida de una función usando diferentes procedimientos, orientados a establecer un patrón consistente de toma de decisiones, adoptando una actitud crítica y analítica.

## COMPETENCIA 2

Evalúa e interpreta la integral definida haciendo uso de las sumatorias y los métodos de integración para luego resolver problemas de áreas, volúmenes y superávit del consumidor y productor, actuando con creatividad y sentido innovador.

TRATAMIENTO POR UNIDADES DIDÁCTICAS

**PRIMERA UNIDAD DIDACTICA: LAS INTEGRALES INDEFINIDAS**.
**TIEMPO DE DESARROLLO:** Del 27 de marzo del 2017 al 23 de mayo del 2017
**TOTAL DE HORAS:** 42 horas.

| Criterio de desempeño | Conocimientos | % de avance | Evidencia de Producto |
|---|---|---|---|
| . Utiliza propiedades, fórmulas básicas de integración y aplica las técnicas de integración en la resolución de integrales indefinidas. | • Antiderivada de una función real.<br>• Integral indefinida.<br>• Propiedades de la integral indefinida.<br>• Fórmulas básicas de integración.<br>• Métodos de integración.<br>• Integración de funciones trigonométricas.<br>• Integración de funciones racionales.<br>• Primer examen parcial | 50% | - Que pueda levantar un perfil personal sobre la dimensionalidad de su estructura cognitiva.<br>-<br>- |
| **Actitudes**: Responsabilidad, organización personal. | | | |
| | | | Fecha de evaluación: 22 de mayo de 2017, de 9:00 a 11:00 a.m. |

**SEGUNDA UNIDAD DIDACTICA: LA INTEGRAL DEFINIDA Y SUS APLICACIONES**.
**TIEMPO DE DESARROLLO:** Del 29 de mayo del 2017 al 24 de Julio del 2017
**TOTAL DE HORAS:** 24 horas.

| Criterio de desempeño | Conocimientos | % de avance | Evidencia de Producto |
|---|---|---|---|
| . Utiliza teoremas fundamentales del cálculo para evaluar integrales definidas y aplica la integral definida de funciones reales al cálculo de áreas, volúmenes, así como aplicaciones a la administración | • Integral definida.<br>• Propiedades de la integral definida.<br>• Teoremas fundamentales del cálculo.<br>• Cálculo de áreas.<br>• Volumen de un sólido de revolución.<br>• Aplicaciones en la administración y economía: Superávit del consumidor y del productor.<br>• Segundo examen parcial.<br>• Integral definida.<br>• Propiedades de la integral definida. | 50% | - Que pueda levantar un perfil personal sobre la dimensionalidad de su estructura cognitiva.<br>-<br>-<br>- |
| **Actitudes**: Responsabilidad, organización personal. | | | |
| | | | Fecha de evaluación: 23 de Julio de 2017, de 9:00 a 11:00 a.m. |

## VI. ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS POR COMPETENCIA

### 6.1. Enseñanza:

Promover conflictos cognitivos sobre estrategias de aprendizaje significativo.

### 6.2. Aprendizaje:

Actividades individuales y grupales para comprender y aplicar las estrategias cognitivas del aprendizaje.

### 6.3. Investigación Formativa

Elaboración de un trabajo de investigación (tesina) sobre: “La importancia de los hábitos de estudio en el aprendizaje de los universitarios”.

### 6.4. Acciones de Responsabilidad Social

Sensibilización de los aprendizajes significativos para el futuro ejercicio profesional en bien del desarrollo de la sociedad.

### 6.5. Enseñanza Virtual

Utilización de las redes sociales para los temas de significancia en el desarrollo del curso.

## VII. MEDIOS Y MATERIALES DIDÁCTICOS

- Pizarra
- Diapositivas
- Data display
- Audiovisuales

## VIII. EVALUACIÓN

### 8.1. Criterios, técnicas e instrumentos de evaluación

| Unidad | Indicadores de evaluación | Ponderación de la evaluación | | Técnicas | Instrumento |
|---|---|---|---|---|---|
| I | Interés en el aprendizaje y en el cerebro en el proceso constructivo del aprendizaje para la consolidación de su estructura cognitiva. | Conocimientos | 30% | Ficha de observación.<br>Guía de prácticas calificadas. | Evaluación escrita. |
| | | Desempeños | 35% | | |
| | | Producto | 35% | | |
| II | Compromiso por los aprendizajes y la PNL, los organizadores y las técnicas de estudio para desarrollar la investigación monográfica. | Conocimientos | 30% | Ficha de observación.<br>Guía de prácticas calificadas. | Evaluación escrita. |
| | | Desempeños | 35% | | |
| | | Producto | 35% | | |

### 8.2. Calificación

$$\mathrm{PP} = \frac{\mathrm{EC(ponderado)} + \mathrm{EP(ponderado)} + \mathrm{EA(ponderado)}}{\text{sumatoria de los ponderados}}$$

$$\text{Promedio final} = \frac{\mathrm{IPP} + \mathrm{IIPP}}{2}$$

## BIBLIOGRAFÍA

- Armando Venero Baldeon, Análisis Matemático 2, Lima-Perú, San Marcos, 2000.
- Robert G. Bartle; Donal R. Sherbert, Introducción al Análisis Matemático de una variable, México, Editorial Limusa S.A. Noriega 2da. Edición, 1996.
- Eduardo Espinoza Ramos, Análisis Matemático II, Lima, Gemar, 2000.
- Espinoza Eduardo, Análisis Matemático II, Lima -Perú, Edit. Servicios Gráficos, 2008.
- Moisés Lázaro Carrión, Análisis Matemático II, Lima, Editorial Moshera, 2002.
- Leithold Louis, El Cálculo con Geometría Analítica, México, Edit. HARLA, 2008.
- EDWARDS, PENNEY, D, Calculo con Geometría Analítica, México, Prentice Hall Hispanoamericana, 2002.

…………………………………………

Lic. Serapio Calcina Cuevas

## **Anexo 5.** Sesiones de aprendizaje

### SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 01

**TÍTULO:** Anti derivada de una función real.

### I. DATOS INFORMATIVOS:

| | |
|---|---|
| 2.1. Escuela Profesional | : Ingeniería Mecánica Electrónica (mañana)<br>Ingeniería Minas (tarde) |
| 2.2. Semestre | : Segundo |
| 2.3. Secciones | : Único |
| 2.4. Turno | : Mañana y tarde |
| 2.3. Docente | : Serapio C. Calcina Cuevas |
| 2.4. Fecha | : 11 y 12 - 04-17 |
| 2.5. DURACIÓN | : 120 minutos. |

### II. APRENDIZAJES ESPERADOS:

- Comprende los conceptos básicos del cálculo integral
- Planifica y reconoce las integrales inmediatas e integrales indefinidas (PP)
- Ejecuta la solución de los ejercicios aplicando los conceptos básicos del cálculo integral (EP)
- Analiza la solución del cálculo integral (AS)

### III. ETAPAS DEL PROCESO DE APRENDIZAJE:

| SECUENCIA | ACTIVIDADES Y/O ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS | RECURSOS DIDÁCTICOS | TIEMPO |
|---|---|---|---|
| **INICIO** | ✓ El docente forma grupos para que cada uno de ellos haga una recopilación de saberes previos sobre cálculo integral, la anti derivada e integrales inmediatas-indefinidas, clasificación del cálculo integral solución de los ejercicios del cálculo integral.<br>✓ Se les proporciona información relevante por medio de un organizador de ideas, sobre el cálculo integral, anti derivada, integrales inmediatas e integrales indefinidas, el cual los estudiantes analizan en forma individual, dual y grupal monitoreada de parte del docente en forma democrática. | • Hojas de papel.<br>• Plumones.<br>• Lapicero.<br>• Puntero láser. | 30 Min. |
| **PROCESO** | ✓ El docente resuelve algunos problemas aplicando el método heurístico indicando a los estudiantes que este método consiste en cuatro pasos a seguir.<br>• **Entender el problema.**<br>a) El alumno debe entender todo el enunciado del ejercicio<br>b) Debe distinguir los datos con la condición del ejercicio<br>c) El alumno debe saber a dónde quiere llegar<br>d) El alumno debe tener suficiente información para resolver los ejercicios de antideriavadas.<br>• **Configurar un plan**<br>a) El alumno debe buscar una variable del ejercicio<br>b) Debe realizar una lista de los datos que le brinda el ejercicio<br>c) El alumno debe identificar las condiciones que tiene el ejercicio en el tema de antideribadas.<br>d) Debe realizar los gráficos si el ejercicio lo amerita para tener más clara la idea.<br>e) El alumno deberá buscar y tener lacro que propiedad, formula o principio debe aplicar para dar soluciones.<br>• **Ejecutar el plan** | • Hojas impresas.<br>• Plumones.<br>• Pizarra.<br>• Cuadernos<br>• Puntero láser.<br>• Hojas.<br>• Libros.<br>• cuadernos. | 70 Min. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **SALIDA** | a) En esta parte el alumno debe aplicar los conocimientos adquiridos en la teoría y resolver los ejercicios<br>b) El alumno debe conceder un tiempo razonable para resolver los ejercicios de antiderivadas<br>c) No debe tener miedo a equivocarse en la solución de los ejercicios<br>• **Mirar hacia atrás**<br>En esta parte ya se ha llegado a la solución del problema. El alumno debe hacerse las siguientes preguntas.<br>a) ¿Es mi solución correcta?<br>b) ¿Mi respuesta satisface lo establecido en el problema?<br>c) ¿Puedo extender mi solución a un caso general?<br>✓ Resuelven la solución de las integrales inmediatas aplicando el método heurístico en los problemas y ejercicios planteados en los módulos de aprendizaje. | | 20 Min. |

1. **SISTEMA DE EVALUACIÓN:**

| CAPACIDADES | INDICADORES | TÉCNICAS E INSTRUMENTOS |
|---|---|---|
| • Comprende.<br>• Elabora el plan.<br>• Ejecuta el plan.<br>• Analiza la solución. | ✓ Comprende correctamente la anti derivada e integrales inmediatas.<br>✓ Elabora y Planifica creativamente la información sobre la solución de las integrales inmediatas, haciendo uso los concentos básicos de las integrales.<br>✓ Ejecuta el plan para la solución de problemas utilizando los conceptos básicos del cálculo integral.<br>✓ Analiza la solución obtenida. | • Observación.<br>Ficha de observación |
| ACTITUDES FRENTE AL ÁREA | • Valora los aprendizajes desarrollados como parte de su proceso formativo.<br>• Creatividad y Persevera en la resolución de problemas.<br>• Participa activamente en la hora de matemática. | • Observación.<br>Ficha de observación |

2. **BIBLIOGRAFIA:**

- Armando Venero Baldeon, Análisis Matemático 2, Lima-Perú, San Marcos, 2000.
- Robert G. Bartle; Donal R. Sherbert, Introducción al Análisis Matemático de una variable, México, Editorial Limusa S.A. Noriega 2da. Edición, 1996.
- Eduardo Espinoza Ramos, Análisis Matemático II, Lima, Gemar, 2000.
- Espinoza Eduardo, Análisis Matemático II, Lima -Perú, Edit. Servicios Gráficos, 2008.
- Moisés Lázaro Carrión, Análisis Matemático II, Lima, Editorial Moshera, 2002.
- Leithold Louis, El Cálculo con Geometría Analítica, México, Edit. HARLA, 2008.

## SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 02

### I. TÍTULO: Propiedades de la integral indefinida y Métodos de integración

### II. DATOS INFORMATIVOS:

| | |
|---|---|
| 2.1. Escuela Profesional | : Ingeniería Mecánica Electrónica (mañana)<br>Ingeniería Minas (tarde) |
| 2.2. Semestre | : Segundo |
| 2.3. Secciones | : Único |
| 2.4. Turno | : Mañana y tarde |
| 2.3. Docente | : Serapio Calcina Cuevas |
| 2.4. Fecha | : 18 y 19 - 04-17 |
| 2.5. DURACIÓN | : 120 minutos. |

### III. APRENDIZAJES ESPERADOS:

- Comprende las Propiedades de la integral indefinida y los Métodos de integración (CP).
- Planifica en forma adecuada para determinar la solución de las integrales indefinidas y los diferentes métodos para resolverlo. (PP)
- Ejecuta la solución de las integrales indefinidas, aplicando los conceptos básicos del cálculo integral. (EP)

### IV. ETAPAS DEL PROCESO DE APRENDIZAJE:

| SECUENCIA | ACTIVIDADES Y/O ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS | RECURSOS DIDÁCTICOS | TIEMPO |
|---|---|---|---|
| **INICIO** | ✓ Se les proporciona información relevante por medio de un organizador de ideas, sobre propiedades de la integral inmediatas y los métodos de integración, y solución de las mismas, el cual los estudiantes analizan en forma individual y grupal monitoreada de parte del docente en forma democrática<br>✓ Se plantea una lluvia de preguntas estructuradas y no estructuradas: ¿Qué propiedades cumple una integral inmediata? ¿Qué métodos existen para resolver las integrales?; Explique brevemente algunas conclusiones sobre lo desarrollado. | • Hojas de papel.<br>• Plumones.<br>• Lapicero.<br>• Puntero láser. | 30 Min. |
| **PROCESO** | ✓ El docente resuelve algunos problemas utilizando el método heurístico para ello a los alumnos les explica los pasos que deben seguir.<br>• **Entender el problema.**<br>a) El alumno debe comprender el enunciado de cada ejercicio<br>b) Debe distinguir los datos con la condición del ejercicio de integrales.<br>c) El alumno debe saber a dónde quiere llegar (objetivo)<br>d) El alumno debe tener suficiente información para resolver los ejercicios de integrales inmediatas.<br>• **Configurar un plan**<br>a) El alumno debe buscar una variable independiente del ejercicio<br>b) Debe realizar una lista de todos los datos que le brinda el ejercicio<br>c) El alumno debe identificar las condiciones que tiene el ejercicio en el tema de integrales inmediatas.<br>d) Debe realizar los gráficos si el ejercicio lo amerita para tener más clara la idea.<br>e) El alumno deberá buscar y tener claro que propiedad, | • Hojas impresas.<br>• Plumones.<br>• Pizarra.<br>• Cuadernos<br>• Puntero láser.<br>• Hojas.<br>• Libros.<br>• cuadernos. | 70 Min. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **SALIDA** | formula o principio debe aplicar para dar soluciones a los ejercicios.<br>• **Ejecutar el plan**<br>a) En esta parte el alumno debe aplicar los conocimientos adquiridos en la teoría y resolver los ejercicios<br>b) El alumno debe conceder un tiempo razonable para resolver los ejercicios de integrales inmediatas<br>c) No debe tener miedo a equivocarse en la solución de los ejercicios<br>• **Mirar hacia atrás**<br>En esta parte ya se ha llegado a la solución del problema. El alumno debe hacerse las siguientes preguntas.<br>a) ¿Es mi solución correcta?<br>b) ¿Mi respuesta satisface lo establecido en el problema?<br>c) ¿Puedo extender mi solución a un caso general?<br>✓ Se deja un taller de 4 problemas para que lo desarrollen en sus guías de trabajo y ellos mismos deben plantearse otros ejercicios, socializando mínimamente con 4 personas dentro o fuera de la Institución.<br>✓ Resuelven los problemas y ejercicios planteados en los módulos de aprendizaje. | | 20 Min. |

## V. SISTEMA DE EVALUACIÓN:

| CAPACIDADES | INDICADORES | TÉCNICAS E INSTRUMENTOS |
|---|---|---|
| • Comprende.<br>• Elabora el plan.<br>• Ejecuta el plan.<br>• Analiza la solución. | ✓ Comprende las propiedades de las integrales inmediatas y los métodos de integración.<br>✓ Planifica en forma adecuada para determinar la solución de los problemas utilizando los métodos de integración.<br>✓ Ejecuta la solución de los ejercicios utilizando las propiedades y los métodos de integración<br>✓ Analiza y generaliza la solución por los métodos de integración. | • Observación.<br>Ficha de observación |
| ACTITUDES FRENTE AL ÁREA | • Valora los aprendizajes desarrollados como parte de su proceso formativo.<br>• Creatividad y Persevera en la resolución de problemas.<br>• Participa activamente en la hora de matemática. | • Observación.<br>Ficha de observación |

## VI. BIBLIOGRAFIA:

- Armando Venero Baldeon, Análisis Matemático 2, Lima-Perú, San Marcos, 2000.
- Robert G. Bartle; Donal R. Sherbert, Introducción al Análisis Matemático de una variable, México, Editorial Limusa S.A. Noriega 2da. Edición, 1996.
- Eduardo Espinoza Ramos, Análisis Matemático II, Lima, Gemar, 2000.
- Espinoza Eduardo, Análisis Matemático II, Lima -Perú, Edit. Servicios Gráficos, 2008.
- Moisés Lázaro Carrión, Análisis Matemático II, Lima, Editorial Moshera, 2002.

# SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 03

## I. TÍTULO: Integración de funciones trigonométricas

## II. DATOS INFORMATIVOS:

2.1. Escuela Profesional : Ingeniería Mecánica Electrónica (mañana)
Ingeniería Minas (tarde)
2.2. Semestre : Segundo
2.3. Secciones : Único
2.4. Turno : Mañana y tarde
2.3. Docente : Serapio Calcina Cuevas
2.4. Fecha : 25 y 26 - 04-17
2.5. DURACIÓN : 120 minutos.

.

## III. APRENDIZAJES ESPERADOS:

- Comprende e Identifica las Integración de funciones trigonométricas (C.P).
- Planifica y Analiza en forma adecuada Integración de funciones trigonométricas. (P.P).
- Ejecuta y Resuelve problemas utilizando método heurístico en Integración de funciones trigonométricas (E.P)

## IV. ETAPAS DEL PROCESO DE APRENDIZAJE:

| SECUENCIA | ACTIVIDADES Y/O ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS | RECURSOS DIDÁCTICOS | TIEMPO |
|---|---|---|---|
| **INICIO** | ✓ El docente forma grupos para que cada uno de ellos haga una recopilación de saberes previos sobre la integración de funciones trigonométricas<br>✓ Se plantea una lluvia de preguntas estructuradas y no estructuradas: ¿Qué son las funciones trigonométricas? ¿Cómo se integra las funciones trigonométricas? ¿Cómo se reconoce el cálculo integral exactas y factor de integración? ¿Cómo se resuelve las integrales de funciones trigonométricas?; Explique brevemente algunas conclusiones sobre lo desarrollado. | • Hojas de papel.<br>• Plumones.<br>• Lapicero.<br>• Puntero láser. | 30 Min. |
| **PROCESO** | ✓ El docente resuelve algunos ejercicios y problemas utilizando el método heurístico y explica los pasos que deben seguir para tener éxito en la solución de los ejercicios de integrales de funciones trigonométricas.<br>• **Entender el problema.**<br>a) El alumno debe comprender el enunciado de cada ejercicio<br>b) Debe distinguir los datos con la condición del ejercicio de integrales.<br>c) El alumno debe saber a dónde quiere llegar (objetivo)<br>d) El alumno debe tener suficiente información para resolver los ejercicios de integrales de funciones trigonométricas.<br>• **Configurar un plan**<br>a) El alumno debe buscar una variable independiente del ejercicio<br>b) Debe realizar una lista de todos los datos que le brinda el ejercicio<br>c) El alumno debe identificar las condiciones que tiene el ejercicio en el tema de integrales de funciones trigonométricas.<br>d) Debe realizar los gráficos si el ejercicio lo amerita para tener más clara la idea.<br>e) El alumno deberá buscar y tener claro que propiedad, formula o principio debe aplicar para dar soluciones a los ejercicios. | • Hojas impresas.<br>• Plumones.<br>• Pizarra.<br>• Cuadernos<br>• Puntero láser.<br>• Hojas.<br>• Libros.<br>• cuadernos. | 70 Min. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **SALIDA** | • **Ejecutar el plan**<br>a) En esta parte el alumno debe aplicar el plan para resolver los ejercicios de integrales de funciones trigonométricas<br>b) El alumno debe conceder un tiempo razonable para resolver los ejercicios de integrales de funciones trigonométricas<br>c) No debe tener miedo a equivocarse en la solución de los ejercicios<br>• **Mirar hacia atrás**<br>En esta parte ya se ha llegado a la solución del problema. El alumno debe hacerse las siguientes preguntas.<br>a) ¿Es mi solución correcta?<br>b) ¿Mi respuesta satisface lo establecido en el problema?<br>c) ¿Puedo extender mi solución a un caso general?<br>✓ Se deja un taller de 4 problemas para que lo desarrollen en sus guías de trabajo y ellos mismos deben plantearse otros ejercicios, socializando mínimamente con 4 personas dentro o fuera de la Institución.<br>✓ Resuelven los problemas y ejercicios planteados en los módulos de aprendizaje. | | 20 Min. |

## V. SISTEMA DE EVALUACIÓN:

| CAPACIDADES | INDICADORES | TÉCNICAS E INSTRUMENTOS |
|---|---|---|
| • Comprende.<br>• Elabora el plan.<br>• Ejecuta el plan.<br>• Analiza la solución. | ✓ Comprende e Identifica correctamente las integrales de funciones trigonométricas.<br>✓ Planifica y Analiza creativamente la información sobre las integrales de funciones trigonométricas<br>✓ Ejecuta y Resuelve problemas utilizando los conceptos básicos de las integrales de funciones trigonométricas<br>✓ Analiza la solución obtenida. | • Observación.<br>Ficha de observación |
| ACTITUDES FRENTE AL ÁREA | • Valora los aprendizajes desarrollados como parte de su proceso formativo.<br>• Creatividad y Persevera en la resolución de problemas.<br>• Participa activamente en la hora de matemática. | • Observación.<br>Ficha de observación |

## VI. BIBLIOGRAFIA:

- Armando Venero Baldeon, Análisis Matemático 2, Lima-Perú, San Marcos, 2000.
- Robert G. Bartle; Donal R. Sherbert, Introducción al Análisis Matemático de una variable, México, Editorial Limusa S.A. Noriega 2da. Edición, 1996.
- Eduardo Espinoza Ramos, Análisis Matemático II, Lima, Gemar, 2000.
- Espinoza Eduardo, Análisis Matemático II, Lima -Perú, Edit. Servicios Gráficos, 2008.
- Moisés Lázaro Carrión, Análisis Matemático II, Lima, Editorial Moshera, 2002.
- Leithold Louis, El Cálculo con Geometría Analítica, México, Edit. HARLA, 2008.

## SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 04

1. **TÍTULO:** Integración de funciones racionales.
2. **DATOS INFORMATIVOS:**

2.1. Escuela Profesional : Ingeniería Mecánica Electrónica (mañana)
Ingeniería Minas (tarde)
2.2. Semestre : Segundo
2.3. Secciones : Único
2.4. Turno : Mañana y tarde
2.3. Docente : Serapio Calcina Cuevas
2.4. Fecha : 9 y 10- 05-17
2.5. DURACIÓN : 120 minutos.

3. **APRENDIZAJES ESPERADOS:**
   - Comprende y identifica la Integración de funciones racionales. (CP).
   - Planifica en forma adecuada para determinar la solución de la Integración de funciones racionales. (PP)
   - Ejecuta la solución de la Integración de funciones racionales (EP)
   - Analiza y generaliza la solución de la Integración de funciones racionales. (V)

4. **ETAPAS DEL PROCESO DE APRENDIZAJE:**

| SECUENCIA | ACTIVIDADES Y/O ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS | RECURSOS DIDÁCTICOS | TIEMPO |
|---|---|---|---|
| **INICIO** | ✓ El docente forma grupos para que cada uno de ellos haga una recopilación de saberes previos sobre Integración de funciones racionales<br>✓ Se plantea una lluvia de preguntas estructuradas y no estructuradas: ¿Qué son las funciones racionales? ¿Cómo se integran las funciones racionales? ¿Cómo se resuelven las Integrales de funciones racionales?; Explique brevemente algunas conclusiones sobre lo desarrollado. | • Hojas de papel.<br>• Plumones.<br>• Lapicero.<br>• Puntero láser. | 30 Min. |
| **PROCESO** | ✓ El docente resuelve algunos problemas utilizando el método heurístico para resolver las integrales con funciones racionales y plantea los pasos que deben seguir.<br>• **Entender el problema.**<br>a) El alumno debe comprender el enunciado de cada ejercicio<br>b) Debe distinguir los datos con la condición del ejercicio de integrales con funciones racionales.<br>c) El alumno debe saber a dónde quiere llegar (objetivo)<br>d) El alumno debe tener suficiente información para resolver los ejercicios de integrales con funciones racionales.<br>• **Configurar un plan**<br>a) El alumno debe buscar una variable independiente del ejercicio<br>b) Debe realizar una lista de todos los datos que le brinda el ejercicio<br>c) El alumno debe identificar las condiciones que tiene el ejercicio en el tema de integrales con funciones racionales.<br>d) Debe realizar los gráficos si el ejercicio lo amerita para tener más clara la idea.<br>e) El alumno deberá buscar y tener claro que propiedad, formula o principio debe aplicar para dar soluciones a los ejercicios. | • Hojas impresas.<br>• Plumones.<br>• Pizarra.<br>• Cuadernos<br>• Puntero láser.<br>• Hojas.<br>• Libros.<br>• cuadernos. | 70 Min. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **SALIDA** | • **Ejecutar el plan**<br>a) En esta parte el alumno debe aplicar el plan para resolver los ejercicios de integrales con funciones racionales<br>b) El alumno debe conceder un tiempo razonable para resolver los ejercicios de integrales con funciones racionales<br>c) No debe tener miedo a equivocarse en la solución de los ejercicios<br>• **Mirar hacia atrás**<br>En esta parte ya se ha llegado a la solución del problema. El alumno debe hacerse las siguientes preguntas.<br>a) ¿Es mi solución correcta?<br>b) ¿Mi respuesta satisface lo establecido en el problema?<br>c) ¿Puedo extender mi solución a un caso general?<br>✓ Se deja un taller de 4 problemas para que lo desarrollen en sus guías de trabajo y ellos mismos deben plantearse otros ejercicios, socializando mínimamente con 4 personas dentro o fuera de la Institución.<br>✓ Resuelven los problemas y ejercicios planteados en los módulos de aprendizaje. | | 20 Min. |

## 5. SISTEMA DE EVALUACIÓN:

| CAPACIDADES | INDICADORES | TÉCNICAS E INSTRUMENTOS |
|---|---|---|
| • Comprende.<br>• Elabora el plan.<br>• Ejecuta el plan.<br>• Analiza la solución. | ✓ Comprende e Identifica correctamente las integrales de funciones racionales, clasifica y la solución de mismas.<br>✓ Planifica y Analiza creativamente la información sobre las integrales de funciones racionales, haciendo uso de los conceptos básicos del cálculo integral.<br>✓ Ejecuta y Resuelve problemas utilizando los conceptos básicos de las integrales de funciones racionales.<br>✓ Analiza la solución obtenida. | • Observación.<br>Ficha de observación |
| ACTITUDES FRENTE AL ÁREA | • Valora los aprendizajes desarrollados como parte de su proceso formativo.<br>• Creatividad y Persevera en la resolución de problemas.<br>• Participa activamente en la hora de matemática. | • Observación.<br>Ficha de observación |

## 6. BIBLIOGRAFIA:

- Armando Venero Baldeon, Análisis Matemático 2, Lima-Perú, San Marcos, 2000.
- Robert G. Bartle; Donal R. Sherbert, Introducción al Análisis Matemático de una variable, México, Editorial Limusa S.A. Noriega 2da. Edición, 1996.
- Eduardo Espinoza Ramos, Análisis Matemático II, Lima, Gemar, 2000.
- Espinoza Eduardo, Análisis Matemático II, Lima -Perú, Edit. Servicios Gráficos, 2008.

## SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 05

**I.** **TÍTULO:** Integral definida

**II.** **DATOS INFORMATIVOS:**

2.1. Escuela Profesional : Ingeniería Mecánica Electrónica (mañana)
Ingeniería Minas (tarde)
2.2. Semestre : Segundo
2.3. Secciones : Único
2.4. Turno : Mañana y tarde
2.3. Docente : Serapio Calcina Cuevas
2.4. Fecha : 16 y 17- 05-17
2.5. DURACIÓN : 120 minutos.

**III.** **APRENDIZAJES ESPERADOS:**

- ✓ Comprende y identifica las Integrales definidas (CP).
- ✓ Planifica en forma adecuada para determinar la solución de las Integrales definidas. (PP)
- ✓ Ejecuta la solución las Integrales definidas. (EP)

**IV.** **ETAPAS DEL PROCESO DE APRENDIZAJE:**

| SECUENCIA | ACTIVIDADES Y/O ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS | RECURSOS DIDÁCTICOS | TIEMPO |
|---|---|---|---|
| **INICIO** | ✓ El docente forma grupos para que cada uno de ellos haga una recopilación de saberes previos sobre las Integrales definidas y solución las mismas.<br>✓ Se plantea una lluvia de preguntas estructuradas y no estructuradas: ¿Qué son las integrales definidas? ¿Qué es una integral definida? ¿Cómo se resuelve las integrales definidas?; Explique brevemente algunas conclusiones sobre lo desarrollado. | • Hojas de papel.<br>• Plumones.<br>• Lapicero.<br>• Puntero láser. | 30 Min. |
| **PROCESO** | ✓ El docente resuelve algunos problemas utilizando el método heurístico para resolver las integrales definidas y plantea los pasos que deben seguir.<br>• **Entender el problema.**<br>a) El alumno debe comprender el enunciado de cada ejercicio de integrales definidas<br>b) Debe distinguir los datos con la condición del ejercicio de integrales definidas.<br>c) El alumno debe saber a dónde quiere llegar (objetivo)<br>d) El alumno debe tener suficiente información para resolver los ejercicios de integrales definidas.<br>• **Configurar un plan**<br>a) El alumno debe buscar una variable independiente del ejercicio<br>b) Debe realizar una lista de todos los datos que le brinda el ejercicio<br>c) El alumno debe identificar las condiciones que tiene el ejercicio en el tema de integrales definidas.<br>d) Debe realizar los gráficos si el ejercicio lo amerita para tener más clara la idea.<br>e) El alumno deberá buscar y tener claro que propiedad, formula o principio debe aplicar para dar soluciones a los ejercicios. | • Hojas impresas.<br>• Plumones.<br>• Pizarra.<br>• Cuadernos<br>• Puntero láser.<br>• Hojas.<br>• Libros.<br>• cuadernos. | 70 Min. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **SALIDA** | • **Ejecutar el plan**<br>a) En esta parte el alumno debe aplicar el plan para resolver los ejercicios de integrales definidas<br>b) El alumno debe conceder un tiempo razonable para resolver los ejercicios de integrales definidas<br>c) No debe tener miedo a equivocarse en la solución de los ejercicios<br>• **Mirar hacia atrás**<br>En esta parte ya se ha llegado a la solución del problema. El alumno debe hacerse las siguientes preguntas.<br>a) ¿Es mi solución correcta?<br>b) ¿Mi respuesta satisface lo establecido en el problema?<br>c) ¿Puedo extender mi solución a un caso general?<br>✓ Se deja un taller de 3 problemas para que lo desarrollen en sus guías de trabajo y ellos mismos deben plantearse otros ejercicios, socializando mínimamente con 4 personas dentro o fuera de la Institución.<br>✓ Resuelven los problemas y ejercicios planteados en los módulos de aprendizaje. | | 20 Min. |

## V. SISTEMA DE EVALUACIÓN:

| CAPACIDADES | INDICADORES | TÉCNICAS E INSTRUMENTOS |
|---|---|---|
| • Comprende.<br>• Elabora el plan.<br>• Ejecuta el plan.<br>• Analiza la solución. | ✓ Comprende e Identifica y resuelve correctamente las Integrales definidas<br>✓ Planifica y Analiza creativamente la información las Integrales definidas haciendo uso de los concentos básicos de las mismas.<br>✓ Ejecuta y Resuelve problemas utilizando los conceptos básicos de las Integrales definidas<br>✓ Analiza la solución obtenida. | • Observación.<br>Ficha de observación |
| ACTITUDES FRENTE AL ÁREA | • Valora los aprendizajes desarrollados como parte de su proceso formativo.<br>• Creatividad y Persevera en la resolución de problemas.<br>• Participa activamente en la hora de matemática. | • Observación.<br>Ficha de observación |

## VI. BIBLIOGRAFIA:

- Armando Venero Baldeon, Análisis Matemático 2, Lima-Perú, San Marcos, 2000.
- Robert G. Bartle; Donal R. Sherbert, Introducción al Análisis Matemático de una variable, México, Editorial Limusa S.A. Noriega 2da. Edición, 1996.
- Eduardo Espinoza Ramos, Análisis Matemático II, Lima, Gemar, 2000.
- Espinoza Eduardo, Análisis Matemático II, Lima -Perú, Edit. Servicios Gráficos, 2008.
- Moisés Lázaro Carrión, Análisis Matemático II, Lima, Editorial Moshera, 2002.
- Leithold Louis, El Cálculo con Geometría Analítica, México, Edit. HARLA, 2008.

## SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 06

## I. TÍTULO: Teoremas fundamentales del cálculo.

## II. DATOS INFORMATIVOS:

2.1. Escuela Profesional : Ingeniería Mecánica Electrónica (mañana)
Ingeniería Minas (tarde)
2.2. Semestre : Segundo
2.3. Secciones : Único
2.4. Turno : Mañana y tarde
2.3. Docente : Serapio Calcina Cuevas
2.4. Fecha : 24 y 25- 05-17
2.5. DURACIÓN : 120 minutos.

## III. APRENDIZAJES ESPERADOS:

- Comprende y identifica los Teoremas fundamentales del cálculo (CP).
- Planifica en forma adecuada para determinar la solución utilizando Teoremas fundamentales del cálculo. (PP)
- Ejecuta la solución usando Teoremas fundamentales del cálculo (EP)

## IV. ETAPAS DEL PROCESO DE APRENDIZAJE:

| SECUENCIA | ACTIVIDADES Y/O ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS | RECURSOS DIDÁCTICOS | TIEMPO |
|---|---|---|---|
| **INICIO** | ✓ El docente forma grupos para que cada uno de ellos haga una recopilación de saberes previos sobre los Teoremas fundamentales del cálculo y clasificación de las mismas.<br>✓ Se plantea una lluvia de preguntas estructuradas y no estructuradas: ¿Qué son los Teoremas fundamentales del cálculo? ¿Cómo se clasifican lo Teoremas fundamentales del cálculo?; Explique brevemente algunas conclusiones sobre lo desarrollado. | • Hojas de papel.<br>• Plumones.<br>• Lapicero.<br>• Puntero láser. | 30 Min. |
| **PROCESO** | ✓ El docente resuelve algunos problemas utilizando el método heurístico para resolver los Teoremas fundamentales del cálculo y plantea los pasos que deben seguir.<br>• **Entender el problema.**<br>a) El alumno debe comprender el enunciado de cada teorema.<br>b) Debe distinguir los datos con la condición de los teoremas del cálculo integral.<br>c) El alumno debe saber a dónde quiere llegar (objetivo demostración)<br>d) El alumno debe tener suficiente información para aplicar los teoremas.<br>• **Configurar un plan**<br>a) El alumno debe buscar una variable independiente del ejercicio<br>b) Debe realizar una lista de todos los teoremas<br>c) El alumno debe identificar las condiciones que tiene cada teorema.<br>d) El alumno deberá buscar y tener claro los teoremas que tiene el cálculo integral.<br>• **Ejecutar el plan**<br>a) En esta parte el alumno debe aplicar el plan para resolver los ejercicios. | • Hojas impresas.<br>• Plumones.<br>• Pizarra.<br>• Cuadernos<br>• Puntero láser.<br>• Hojas.<br>• Libros.<br>• cuadernos. | 70 Min. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **SALIDA** | b) El alumno debe conceder un tiempo razonable para resolver los ejercicios de integrales.<br>c) No debe tener miedo a equivocarse en la solución de los ejercicios<br>• **Mirar hacia atrás**<br>En esta parte ya se ha llegado a la solución del problema. El alumno debe hacerse las siguientes preguntas.<br>a) ¿Es mi solución correcta?<br>b) ¿Mi respuesta satisface lo establecido en el problema?<br>c) ¿Puedo extender mi solución a un caso general?<br>✓ Se deja un taller de 04 problemas para que lo desarrollen en sus guías de trabajo y ellos mismos deben plantearse otros ejercicios, socializando mínimamente con 4 personas dentro o fuera de la Institución.<br>✓ Resuelven los problemas y ejercicios planteados en los módulos de aprendizaje. | | 20 Min. |

## V. SISTEMA DE EVALUACIÓN:

| CAPACIDADES | INDICADORES | TÉCNICAS E INSTRUMENTOS |
|---|---|---|
| • Comprende.<br>• Elabora el plan.<br>• Ejecuta el plan.<br>• Analiza la solución. | ✓ Comprende e Identifica correctamente los Teoremas fundamentales del cálculo.<br>✓ Planifica y Analiza creativamente la información sobre los Teoremas fundamentales del cálculo.<br>✓ Ejecuta y Resuelve problemas utilizando los Teoremas fundamentales del cálculo.<br>✓ Analiza y generaliza la solución obtenida. | • Observación.<br>Ficha de observación |
| ACTITUDES FRENTE AL ÁREA | • Valora los aprendizajes desarrollados como parte de su proceso formativo.<br>• Creatividad y Persevera en la resolución de problemas.<br>• Participa activamente en la hora de matemática. | • Observación.<br>Ficha de observación |

## VI. BIBLIOGRAFIA:

- Armando Venero Baldeon, Análisis Matemático 2, Lima-Perú, San Marcos, 2000.
- Robert G. Bartle; Donal R. Sherbert, Introducción al Análisis Matemático de una variable, México, Editorial Limusa S.A. Noriega 2da. Edición, 1996.
- Eduardo Espinoza Ramos, Análisis Matemático II, Lima, Gemar, 2000.
- Espinoza Eduardo, Análisis Matemático II, Lima -Perú, Edit. Servicios Gráficos, 2008.
- Moisés Lázaro Carrión, Análisis Matemático II, Lima, Editorial Moshera, 2002.
- Leithold Louis, El Cálculo con Geometría Analítica, México, Edit. HARLA, 2008.

# SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 7

## I. TÍTULO: Cálculo de áreas de un sólido

## II. DATOS INFORMATIVOS:

2.1. Escuela Profesional : Ingeniería Mecánica Electrónica (mañana)
Ingeniería Minas (tarde)
2.2. Semestre : Segundo
2.3. Secciones : Único
2.4. Turno : Mañana y tarde
2.3. Docente : Serapio Calcina Cuevas
2.4. Fecha : 7 y 8- 06-17
2.5. DURACIÓN : 120 minutos.

## III. APRENDIZAJES ESPERADOS:

- ✓ Comprende e Identifica correctamente el Cálculo de áreas de un sólido (CP)
- ✓ Analiza creativamente la información sobre el Cálculo de áreas de un sólido. (PP)
- ✓ Resuelve problemas utilizando los conceptos de aplicación de las integrales definidas (EP)
- ✓ Examina la solución obtenida (AS)

## IV. ETAPAS DEL PROCESO DE APRENDIZAJE:

| SECUENCIA | ACTIVIDADES Y/O ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS | RECURSOS DIDÁCTICOS | TIEMPO |
|---|---|---|---|
| **INICIO** | ✓ El docente forma grupos para que cada uno de ellos haga una recopilación de saberes previos sobre la aplicación de las integrales definidas para el Cálculo de áreas de un sólido.<br>✓ Se plantea una lluvia de preguntas estructuradas y no estructuradas: ¿Cómo se puede encontrar el área?; Explique brevemente algunas conclusiones sobre lo desarrollado. | • Hojas de papel.<br>• Plumones.<br>• Lapicero.<br>• Puntero láser. | 30 Min. |
| **PROCESO** | ✓ El docente resuelve algunos problemas utilizando el método heurístico para resolver Cálculo de áreas y plantea los pasos que deben seguir.<br>• **Entender el problema.**<br>a) El alumno debe comprender el enunciado de cada ejercicio.<br>b) Debe distinguir los datos con la condición en el cálculo de áreas de un sólido<br>c) El alumno debe saber a dónde quiere llegar (objetivo)<br>d) El alumno debe tener suficiente información para calcular el área de un sólido<br>• **Configurar un plan**<br>a) El alumno debe buscar una variable independiente del ejercicio<br>b) Debe realizar una lista de todos los datos que tiene el ejercicio.<br>c) El alumno debe identificar las condiciones que tiene cada problema.<br>d) El alumno deberá buscar y tener claro las propiedades y condiciones que se requiere para dar solución a los problemas<br>• **Ejecutar el plan**<br>a) El alumno debe buscar una variable independiente del ejercicio<br>b) Debe realizar una lista de todos los datos que le brinda el | • Hojas impresas.<br>• Plumones.<br>• Pizarra.<br>• Cuadernos<br>• Puntero láser.<br>• Hojas.<br>• Libros.<br>• cuadernos. | 70 Min. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **SALIDA** | ejercicio<br>c) El alumno debe identificar las condiciones que tiene el ejercicio en el tema de integrales definidas.<br>d) Debe realizar los gráficos si el ejercicio lo amerita para tener más clara la idea.<br>e) El alumno deberá buscar y tener claro que propiedad, formula o principio debe aplicar para dar soluciones a los ejercicios.<br>• **Mirar hacia atrás**<br>En esta parte ya se ha llegado a la solución del problema. El alumno debe hacerse las siguientes preguntas.<br>a) ¿Es mi solución correcta?<br>b) ¿Mi respuesta satisface lo establecido en el problema?<br>c) ¿Puedo extender mi solución a un caso general?<br>✓ Se deja un taller de 4 problemas para que lo desarrollen en sus guías de trabajo y ellos mismos deben plantearse otros ejercicios, socializando mínimamente con 4 personas dentro o fuera de la Institución.<br>✓ Resuelven los problemas y ejercicios planteados en los módulos de aprendizaje. | | 20 Min. |

## V. SISTEMA DE EVALUACIÓN:

| CAPACIDADES | INDICADORES | TÉCNICAS E INSTRUMENTOS |
|---|---|---|
| • Comprende.<br>• Elabora el plan.<br>• Ejecuta el plan.<br>• Analiza la solución. | ✓ Comprende e Identifica correctamente Sistema de cálculo integral<br>✓ Analiza creativamente la información sobre Sistema de cálculo integral, haciendo uso de los de los concentos básicos del cálculo integral.<br>✓ Resuelve problemas utilizando los conceptos de Sistema de cálculo integral<br>✓ Examina la solución obtenida | • Observación.<br>Ficha de observación |
| ACTITUDES FRENTE AL ÁREA | • Valora los aprendizajes desarrollados como parte de su proceso formativo.<br>• Creatividad y Persevera en la resolución de problemas.<br>• Participa activamente en la hora de matemática. | • Observación.<br>Ficha de observación |

## VI. BIBLIOGRAFIA:

- Armando Venero Baldeon, Análisis Matemático 2, Lima-Perú, San Marcos, 2000.
- Robert G. Bartle; Donal R. Sherbert, Introducción al Análisis Matemático de una variable, México, Editorial Limusa S.A. Noriega 2da. Edición, 1996.
- Eduardo Espinoza Ramos, Análisis Matemático II, Lima, Gemar, 2000.
- Espinoza Eduardo, Análisis Matemático II, Lima -Perú, Edit. Servicios Gráficos, 2008.
- Moisés Lázaro Carrión, Análisis Matemático II, Lima, Editorial Moshera, 2002.
- Leithold Louis, El Cálculo con Geometría Analítica, México, Edit. HARLA, 2008.

## SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 8

I. **TÍTULO:** Cálculo de volumen de un solido

II. **DATOS INFORMATIVOS:**

2.1. Escuela Profesional : Ingeniería Mecánica Electrónica (mañana)
Ingeniería Minas (tarde)
2.2. Semestre : Segundo
2.3. Secciones : Único
2.4. Turno : Mañana y tarde
2.3. Docente : Serapio Calcina Cuevas
2.4. Fecha : 13 y 14- 06-17
2.5. DURACIÓN : 120 minutos.

III. **APRENDIZAJES ESPERADOS:**

- ✓ Comprende e Identifica correctamente el Cálculo de volumen (CP)
- ✓ Analiza creativamente la información sobre el Cálculo de volumen. (PP)
- ✓ Resuelve problemas utilizando los conceptos de aplicación de las integrales definidas (EP)

IV. **ETAPAS DEL PROCESO DE APRENDIZAJE:**

| SECUENCIA | ACTIVIDADES Y/O ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS | RECURSOS DIDÁCTICOS | TIEMPO |
|---|---|---|---|
| **INICIO** | ✓ El docente forma grupos para que cada uno de ellos haga una recopilación de saberes previos sobre la aplicación de las integrales definidas para el Cálculo de volumen de un sólido.<br>✓ Se plantea una lluvia de preguntas estructuradas y no estructuradas: ¿Cómo se puede encontrar el volumen?; Explique brevemente algunas conclusiones sobre lo desarrollado. | • Hojas de papel.<br>• Plumones.<br>• Lapicero.<br>• Puntero láser. | 30 Min. |
| **PROCESO** | ✓ El docente resuelve algunos problemas utilizando el método heurístico para calcular el volumen de un sólido y plantea los pasos que deben seguir.<br>• **Entender el problema.**<br>a) El alumno debe comprender el enunciado de cada ejercicio.<br>b) Debe distinguir los datos con la condición para calcular el volumen de un sólido<br>c) El alumno debe saber a dónde quiere llegar (objetivo)<br>d) El alumno debe tener suficiente información para calcular el volumen de un sólido<br>• **Configurar un plan**<br>a) El alumno debe buscar una variable independiente del ejercicio<br>b) Debe realizar una lista de todos los datos que tiene el ejercicio.<br>c) El alumno debe identificar las condiciones que tiene cada problema.<br>d) El alumno deberá buscar y tener claro las propiedades y condiciones que se requiere para dar solución a los problemas<br>• **Ejecutar el plan**<br>a) El alumno debe buscar una variable independiente del ejercicio | • Hojas impresas.<br>• Plumones.<br>• Pizarra.<br>• Cuadernos<br>• Puntero láser.<br>• Hojas.<br>• Libros.<br>• cuadernos. | 70 Min. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **SALIDA** | b) Debe realizar una lista de todos los datos que le brinda el ejercicio<br>c) El alumno debe identificar las condiciones que tiene el ejercicio en el tema de calcular el volumen de un sólido.<br>d) Debe realizar los gráficos si el ejercicio lo amerita para tener más clara la idea.<br>e) El alumno deberá buscar y tener claro que propiedad, formula o principio debe aplicar para dar soluciones a los ejercicios.<br>• **Mirar hacia atrás**<br>En esta parte ya se ha llegado a la solución del problema. El alumno debe hacerse las siguientes preguntas.<br>a) ¿Es mi solución correcta?<br>b) ¿Mi respuesta satisface lo establecido en el problema?<br>c) ¿Puedo extender mi solución a un caso general?<br>✓ Se deja un taller de 4 problemas para que lo desarrollen en sus guías de trabajo y ellos mismos deben plantearse otros ejercicios, socializando mínimamente con 4 personas dentro o fuera de la Institución.<br>✓ Resuelven los problemas y ejercicios planteados en los módulos de aprendizaje. | | 20 Min. |

## V. SISTEMA **DE EVALUACIÓN:**

| CAPACIDADES | INDICADORES | TÉCNICAS E INSTRUMENTOS |
|---|---|---|
| • Comprende.<br>• Elabora el plan.<br>• Ejecuta el plan.<br>• Analiza la solución. | ✓ Comprende e Identifica correctamente Sistema de cálculo integral<br>✓ Analiza creativamente la información sobre Sistema de cálculo integral, haciendo uso de los de los concentos básicos del cálculo integral.<br>✓ Resuelve problemas utilizando los conceptos de Sistema de cálculo integral<br>✓ Examina la solución obtenida | • Observación.<br>Ficha de observación |
| ACTITUDES FRENTE AL ÁREA | • Valora los aprendizajes desarrollados como parte de su proceso formativo.<br>• Creatividad y Persevera en la resolución de problemas.<br>• Participa activamente en la hora de matemática. | • Observación.<br>Ficha de observación |

## **VI.** BIBLIOGRAFIA**:**

- Armando Venero Baldeon, Análisis Matemático 2, Lima-Perú, San Marcos, 2000.
- Robert G. Bartle; Donal R. Sherbert, Introducción al Análisis Matemático de una variable, México, Editorial Limusa S.A. Noriega 2da. Edición, 1996.
- Eduardo Espinoza Ramos, Análisis Matemático II, Lima, Gemar, 2000.
- Espinoza Eduardo, Análisis Matemático II, Lima -Perú, Edit. Servicios Gráficos, 2008.
- Moisés Lázaro Carrión, Análisis Matemático II, Lima, Editorial Moshera, 2002.
- Leithold Louis, El Cálculo con Geometría Analítica, México, Edit. HARLA, 2008.

**Anexo 6.** Guías de aprendizaje

## GUÍAS DIDÁCTICAS DE APRENDIZAJE

**UNIDAD DIDÁCTICA:** Integral indefinida

**Objetivo**: Hallar una función de la que es conocida su derivada es lo que se conoce habitualmente por Integración. En esta unidad se busca profundizar en el proceso recíproco al de la derivación, o cálculo de la **integral indefinida**. **Objetivos**. Reconocer el papel de inversas entre las operaciones de derivación e integración.

Contenidos:

- ✓ La antiderivada de una función.
- ✓ La antiderivada general
- ✓ La integral indefinida
- ✓ Integrales por sustitución o cambio de variable
- ✓ Integrales de las funciones trigonométricas
- ✓ Integrales de funciones racionales
- ✓ Integración por partes

**Aprendizaje esperado:**

- ✓ Comprende la antiderivada de una función real.
- ✓ Identifica la integral indefinida y conoce sus propiedades para resolver ejercicios aplicativos.
- ✓ Verifica la solución de las integrales utilizando integrales por cambio de variables.
- ✓ Reconoce y sabe cuándo utilizar las integrales por de funciones trigonométricas.

**Metodología:** Aplicación de método heurístico

## La Antiderivada General

### Definición

Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ sobre $I$, entonces a la función $G(x)=F(x)+C$ se le conoce como la ***antiderivada general*** de $f(x)$.

### La Integral Indefinida

Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ sobre un intervalo $I$, es decir: sí $F'(x) = f(x)$, entonces a su antiderivada general $G(x) = F(x) + C$ se le denota por:

$$G(x) = \int f(x)dx = F(x) + C,\ x \in I$$

Pues $G'(x) = F'(x) = f(x)$ y se le llama ***integral indefinida*** de $f(x)$.

**Definición**

En una integral indefinida $\int f(x)dx$; la función $f(x)$ recibe el nombre de ***función integrando*** y la variable $x$ se denomina ***variable de integración***.

Notaciones Usuales

En términos de diferenciales, sabemos que $dF(x) = F'(x)dx$ y por tanto, $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ entonces

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{. Pues } F'(x) = f(x)$$

ó también puede expresarse como:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \ \}$$

$$\int d(F(x)) = F(x) + C \ \}$$

**Propiedades Básicas de la integral Indefinida**

$$\int c f(x)dx = c\int f(x)dx,\ c \in R$$

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)\,dx$$

**Ejemplo**

Si $n \neq -1$, hallar la integral indefinida de la función $y = x^n$.

**Solución**

Buscamos $F(x)$ tal que $F'(x) = x^n$.

Por simple inspección, la función $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, que está definida pues $n+1 \neq 0$ por hipótesis, cumple $F'(x) = x^n$.

Luego, aplicando la fórmula de notaciones usuales

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

**Ejemplo**

Hallar $\int (4x^3 - 3x^2 + 2x + 2)dx$

**Solución**

Buscamos una antiderivada $F(x)$ de $4x^3 - 3x^2 + 2x + 2$.

Por simple inspección $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 2x$, cumple:

$$F'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

Luego, aplicando la fórmula de notaciones usuales

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

$$\int (4x^3 - 3x^2 + 2x + 2)dx = x^4 - x^3 + x^2 + 2x + C$$

**Teorema (Cambio de Variable)**

Sea $f : J$™ $R$, $u : E$™ $J$ y asumiendo que:

1. $f(x)$ es continua sobre un intervalo $J$
2. $u = g(x) = u(x)$ es una función con derivada continua y con una inversa

   $x = g^*(u)$ sobre un intervalo $E$
3. $u'(x) \neq 0$ para todo $x$ò$E$
4. $rang(u) = u(E) = u(x) / x$ò$E \subset J$

Entonces, para $u$ò$u(E)$:

$$\int f(u)du = \int f(u(x))u'(x)dx$$

$$u = g(x)$$

**Demostración:**

Sea $F(u) = \int f(u)du$ y definimos

$$G(x) = F(u(x)) \quad ............................(\alpha)$$

Probaremos que $G(x)$ es la integral indefinida de la función $f(u(x))u'(x)$ o sea

$$\frac{dG(x)}{dx} = f(u(x))u'(x) \quad ...................(\beta)$$

En efecto:

Utilizando la ecuación $(\alpha)$ se tiene:

$$\frac{dG(x)}{dx}=\frac{d}{dx}F(u(x))$$

$$\frac{dG(x)}{dx}=\frac{d}{dx}F(u), u=g(x)$$

$$\frac{dG(x)}{dx}=\frac{dF(u)}{du}\frac{du}{dx},\ \text{por regla de cadena}$$

$$\frac{dG(x)}{dx}=f(u)u'(x),\ \text{pues}\ \frac{dF(u)}{du}=f(u)$$

$$\frac{dG(x)}{dx}=f(u(x))u'(x),\ \text{pues}\ u=u(x)$$

De donde se concluye lo siguiente:

Sí $u=u(x)$, entonces $\int f(u)du=F(u)=F(u(x))=G(x)+C=\int f(u(x))u'(x)dx$

**Ejemplo**

Calcular $\int x^2(x^3-1)dx$

**Solución.** Donde:

$$x^3-1=u$$

$$3x^2dx=du$$

$$x^2dx=\frac{du}{3}$$

Luego reemplazando en la integral $\int x^2(x^3-1)dx$ tenemos:

$$\int x^2(x^3-1)dx=\int(x^3-1)x^2dx$$

$$\int x^2(x^3-1)dx=\int\frac{udu}{3}$$

$$\int x^2(x^3-1)dx=\frac{u^2}{6}+C,\ \text{donde}\ u=x^3-1$$

$$\int x^2(x^3-1)dx=\frac{(x^3-1)^2}{6}+C$$

**Ejemplo**

Calcular $\int\cos^4(x+\frac{\pi}{2})\cos xdx$

**Solución**

Recordando $\cos(x+\frac{\pi}{2})=-\text{sen}\,x$

$$\int \cos^4(x+\frac{\pi}{2})\cos x dx=\int (\cos(x+\frac{\pi}{2}))^4\cos x dx$$

$$\int \cos^4(x+\frac{\pi}{2})\cos x dx=\int (-\text{sen}\,x)^4\cos x dx$$

$$\int \cos^4(x+\frac{\pi}{2})\cos x dx=\int \text{sen}^4 x\cos x dx$$

$$\int \cos^4(x+\frac{\pi}{2})\cos x dx=\int \text{sen}^4 x d(\text{sen}\,x)$$

$$\int \cos^4(x+\frac{\pi}{2})\cos x dx=\int u^4 du,\ \text{donde } u=\sin x$$

$$\int \cos^4(x+\frac{\pi}{2})\cos x dx=\frac{u^5}{5}+C$$

$$\int \cos^4(x+\frac{\pi}{2})\cos x dx=\frac{\text{sen}^5 x}{5}+C$$

**Integrales Inmediatas**

Puesto que la diferenciación e integración son operaciones inversas entonces los casos más sencillos de integración provienen de invertir las fórmulas de diferenciación.

**Integral de la Diferencial de una Variable**

$$\int dx=x+C$$

Se lee: La integral de $x$, es igual a $x$

$$\int dx=x+C$$

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad , \quad n\neq -1$$

Sea $u=f(x)$, una función diferenciable en $x$.

$$\int u^n dx=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$$

$$\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C$$

$$\int e^u du=e^u+C$$

$$\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+C\,,\ a>0\,,\ a\neq 1$$

$$\int \frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right)+C$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+C$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+C$$

**Segundo Grupo de Fórmulas Básicas de Integración**

Sea $u=f(x)$, una función diferenciable en $x$.

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=arcsen\left(\frac{u}{a}\right)+C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\ln|u+\sqrt{u^2+a^2}\,|+C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}\,|+C$$

$$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du=\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}arcsen\left(\frac{u}{a}\right)+C$$

$$\int \sqrt{u^2-a^2}\,du=\frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}\,|+C$$

$$\int \sqrt{u^2+a^2}\,du=\frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2+a^2}\,|+C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}}=\frac{1}{2}arcsen\left(\frac{u}{a}\right)+C\,,\ a>0$$

**Tercer Grupo de Fórmulas Básicas de Integración**

Sea $u=f(x)$, una función diferenciable en $x$.

$$\int \operatorname{sen} u\,du=-\cos u+C$$

$$\int \cos u\,du=\operatorname{sen} u+C$$

$$\int \tan u\,du=-\ln|\cos u|+C$$

$$\int \cot u\,du=\ln|\operatorname{sen} u|+C$$

$$\int \sec u\,du=\ln|\sec u+\tan u|+C$$

$$\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C = \ln\left|\tan\left(\frac{u}{a}\right)\right| + C$$

$$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$$

$$\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$$

$$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$$

$$\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$$

**Métodos de Integración**

**Teorema (Integración por partes)**

Sean $u = u(x)$ y $v = v(x)$ dos funciones diferenciables. Entonces se cumple

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

**Prueba** La diferencial del producto de funciones $u \cdot v$ es:

$$d(uv) = udv + vdu,\ luego$$

$$udv = d(uv) - vdu,\ integrando$$

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu,\ Pues\quad \int d(uv) = uv + C$$

$$\int udv = uv + C - \int vdu$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

(La constante $C$ es sumada a la constante de la integral indefinida $\int vdu$, dando lugar a otra constante).

Así, hemos probado que $\int udv = uv - \int vdu$.

**Casos Especiales de Integración por Partes**

En esta parte consideremos el cálculo de las integrales, mediante ciertas técnicas, llamadas el método de los coeficientes indeterminados y se considera las siguientes integrales.

**Caso I.** Para las integrales de la forma:

$$\int P_n(x)e^{bx}dx$$

Dónde: $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, polinomio de grado $n$, para el cálculo de estas integrales se expresa así:

$$\int P_n(x)e^{bx}dx = Q_n(x)e^{bx} + C \text{ ..............................}(\alpha)$$

Donde $Q_n(x)$ es un polinomio de grado $n$ de coeficientes por calcular, es decir:

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ y de lo que se trata es precisamente de calcular sus coeficientes $b_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ los que se obtienen derivando $(\alpha)$ y luego se aplica la identidad de polinomios.

Observación: En general,

$$\int P_n(x)e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left[P(x) - \frac{P'(x)}{a} + \frac{P''(x)}{a^2} - \frac{P'''(x)}{a^3} + \ldots\right]$$

**Caso II.** Para las integrales de la forma:

$$\int P(x)\,\text{sen}\,(ax)dx, \int P(x)\cos(ax)dx$$

Donde $P(x)$ es un ``***Polinomio***'', entonces

$$\int P(x)\text{sen}\,axdx = -\frac{\cos ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^4(x)}{a^4} - \ldots\right] + \frac{\text{sen}\,ax}{a}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^3} + \frac{P^5(x)}{a^5} - \ldots\right]$$

$$\int P(x)\cos axdx = \frac{\text{sen}\,ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^4(x)}{a^4} - \ldots\right] + \frac{\cos ax}{a}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^3} + \frac{P^5(x)}{a^5} - \ldots\right]$$

Donde $P^k(x)$ representa la derivada k-ésima de $P(x)$.

## Integración de las Funciones Trigonométricas

En esta sección se resolvería integrales trigonométricas mediante ciertas técnicas, cuyos procedimientos delineados en los ejemplos deberían ser seguidos y asimilados por el estudiante en lugar de memorizar los resultados.

Nos limitaremos al estudio de cinco tipos fundamentales siguientes:

1. **Tipo I:** Para el cálculo de las integrales de la forma:

$$\int \text{sen}^n xdx; \int \cos^n xdx, n \geq 0, n\grave{o}Z$$

Se representan dos casos:

**Caso I.** Cuando $n$ es un número entero positivo par, se usan las identidades siguientes:

$$\text{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}; \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

**Caso II.** Cuando $n$ es un número entero positivo impar, a las integrales de este caso expresaremos en la forma:

$$\int \operatorname{sen}^n x dx = \int \operatorname{sen}^{n-1} x . \operatorname{sen} x dx; \int \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x . \cos x dx$$

**Observación:** En forma Práctica se puede calcular las siguientes integrales:

$$\int \operatorname{sen}(nx) dx = -\frac{\cos(nx)}{n} + C \; ; \quad \int \cos(nx) dx = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} + C$$

$$\int \operatorname{sen}^n(kx)\cos(kx) dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1}(kx)}{(n+1)k} + C \; ; \quad \int \cos^n(kx)\operatorname{sen}(kx) dx = -\frac{\cos^{n+1}(kx)}{(n+1)k} + C$$

2. **Tipo II:** Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m x . \cos^n x dx \quad m, n \geq 0$ se representan los siguientes casos.

**Caso I.** Existen dos formas:

Si $m$ es un entero positivo impar y $n$ cualquier número real, entonces la integral se expresa de la siguiente forma:

$$\int \operatorname{sen}^m x . \cos^n x dx = \int \operatorname{sen}^{m-1} x . \cos^n x \operatorname{sen} x dx$$

Luego se usa la identidad: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

Si $n$ es un entero positivo impar y $m$ cualquier número real, entonces la integral se expresa de la siguiente forma:

$$\int \operatorname{sen}^m x . \cos^n x dx = \int \operatorname{sen}^m x . \cos^{n-1} x \cos x dx$$

Luego se usa la identidad: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

**Caso II.** Si $m$ y $n$ son enteros positivos pares, se usan las identidades trigonométricas siguientes:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

3. **Tipo III:** Para el cálculo de las integrales de la forma:

$$\int \tan^n x dx \; ; \int \cot^n x dx$$

Se presentan dos casos:

Caso I. Si $n$ es un entero positivo par, las integrales dadas se expresan en la forma:

$$\int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x . \tan^2 x dx \; ; \int \cot^n x dx = \int \cot^{n-2} x . \cot^2 x dx$$

**Caso II.** Si $n$ es un entero positivo impar, las integrales dadas se expresan en la forma:

$$\int \tan^n x dx = \int \tan^{n-1} x . \tan x dx = \int \left[\tan^2 x\right]^{\frac{n-1}{2}} \tan x dx$$

$$\int \cot^n x dx = \int \cot^{n-1} x . \cot x dx = \int \left[\cot^2 x\right]^{\frac{n-1}{2}} \cot x dx$$

En ambos casos, se usa las identidades trigonométricas:

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$; $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

4. **Tipo IV:** Para el cálculo de las integrales de la forma:

$$\int \tan^m x . \sec^n x dx ; \int \cot^m x . \csc^n x dx \quad m, n \geq 0$$

Se presentan dos casos:

**Caso I.** Si $n$ es un entero positivo par y $m$ cualquier número real, entonces a las integrales se expresa en la siguiente forma:

$$\int \tan^m x . \sec^n x dx = \int \tan^m x . \sec^{n-2} x \sec^2 x dx$$

$$\int \cot^m x . \csc^n x dx = \int \cot^m x . \csc^{n-2} x \csc^2 x dx$$

**Caso II.** Si $m$ es un entero positivo impar y $n$ cualquier número real, entonces a las integrales se expresa en la siguiente forma:

$$\int \tan^m x . \sec^n x dx = \int \tan^{m-1} x . \sec^{n-1} x \tan x \sec x dx$$

$$\int \cot^m x . \csc^n x dx = \int \cot^{m-1} x . \csc^{n-1} x \cot x \csc x dx$$

En ambos casos se usa las identidades trigonométricas:

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$; $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

5. **Tipo V:** Se trata de las integrales de la forma:

$$\int \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx ; \int \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx ; \int \cos(mx)\cos(nx)dx \}$$

Para el cálculo de este tipo de integrales se usan las identidades trigonométricas:

$\operatorname{sen}(m+n)x = \operatorname{sen}(mx)\cos(nx) + \operatorname{sen}(nx)\cos(mx)$ ................................$(\alpha)$

$\operatorname{sen}(m-n)x = \operatorname{sen}(mx)\cos(nx) - \operatorname{sen}(nx)\cos(mx)$ ................................$(\beta)$

$\cos(m+n)x = \cos(mx)\cos(nx) - \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)$ ................................$(\gamma)$

$\cos(m-n)x = \cos(mx)\cos(nx) + \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)$ ................................$(\delta)$

Sumando $(\alpha)$ y $(\beta)$ se tiene:

$$\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(m+n)x+\operatorname{sen}(m-n)x\right]$$

Restando $(\delta)$ y $(\gamma)$ se tiene:

$$\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)=\frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right]$$

Sumando $(\gamma)$ y $(\delta)$ se tiene:

$$\cos(mx)\cos(nx)=\frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right]$$

**Observación:** Para todo $x \in R$

$$\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen}x$$

$$\cos(-x)=\cos x$$

**Integración por Sustitución Trigonométrica**

Sea $u=f(x)$ una función de $x$. En muchos casos es posible calcular una integral efectuando una sustitución trigonométrica, y estas integrales son de la forma:

$$\int R\left(u,\sqrt{u^2+a^2}\right)du\ ;\ \int R\left(u,\sqrt{a^2-u^2}\right)du\ ;\ \int R\left(u,\sqrt{u^2-a^2}\right)du$$

Donde $R$ es una función racional.

Ahora daremos un criterio para calcular estas integrales, para esto consideremos los siguientes casos:

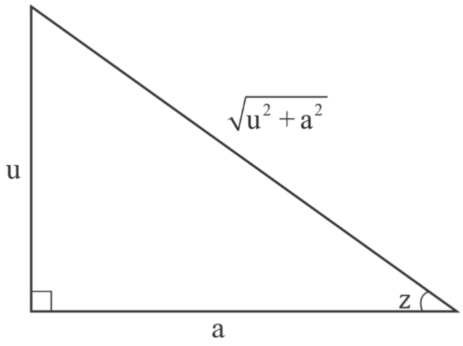
Caso I. Para la integral de la forma $\int R\left(u,\sqrt{u^2+a^2}\right)du$, $a>0$

Construimos un triángulo rectángulo.

Se toma la forma

Haciendo

$$\begin{cases}\tan z=\dfrac{u}{a}\\ u=a\tan z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=\arctan\left(\dfrac{u}{a}\right)\\ du=a\sec^2 zdz\end{cases}$$

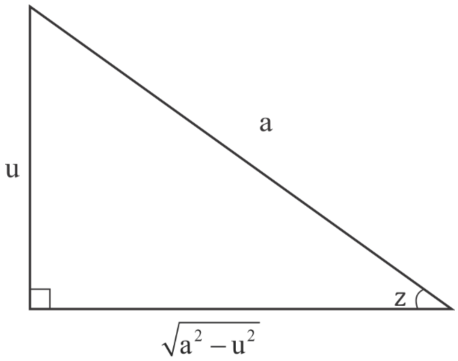


Las demás funciones se toman de acuerdo al integrando que se tenga.

**Caso II.** Para la integral de la forma $\int R\left(u,\sqrt{a^2-u^2}\right)du\,,\quad a>0$

Construimos un triángulo rectángulo.
Se toma la forma
Haciendo

$$\begin{cases} \text{sen}z=\dfrac{u}{a} \\ u=a\text{sen}\,z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=arc\text{sen}\left(\dfrac{u}{a}\right) \\ du=a\cos z dz \end{cases}$$

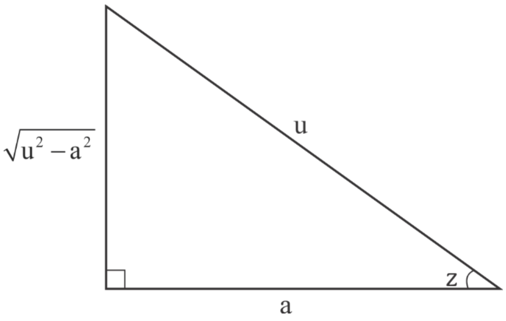


Las demás funciones se toman de acuerdo al integrando que se tenga.

**Caso III.** Para la integral de la forma $\int R\left(u,\sqrt{u^2-a^2}\right)du\,,\quad a>0$

Construimos un triángulo rectángulo.
Se toma la forma
Haciendo

$$\begin{cases} \sec z=\dfrac{u}{a} \\ u=a\sec z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\sec^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) \\ du=a\sec z\tan z dz \end{cases}$$



Las demás funciones se toman de acuerdo al integrando que se tenga.

**Integración de Funciones Racionales**

Consideremos dos funciones polinómicas:

$$P(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0 \text{ y } Q(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

Una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas, es decir:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Cuando el grado de la función polinómica $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$, a la función $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se denomina función racional propia, en caso contrario se denomina impropia. Si la función racional es impropia, al dividir el numerador entre el denominador, a la función racional se representa como la suma de una función polinómica y de una función racional propia, es decir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

Donde el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$; nuestro interés es la integración de las funciones racionales propias, es decir:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

Para el cálculo de estas integrales consideraremos los siguientes casos:

**Primer Caso.** Cuando se tienen integrales de la forma:

$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$, donde $a$, $b$ y $c$ son constantes.

Para calcular la presente integral se procede del siguiente modo:

Se completa cuadrados el denominador: $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$

se hace la sustitución $z=x+\frac{b}{2a}$, con la cual la integral se convierte en:

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{mz+n}{a\left(z^2+n\right)}dz=\frac{m}{a}\int\frac{zdz}{z^2+n}dx=\frac{n}{a}\int\frac{dz}{z^2+n}dx$$

El cálculo de estas dos integrales se realiza mediante las primeras fórmulas básicas de integración.

**Segundo Caso.** Cuando en la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, la función polinómica $Q(x)$ se descompone en factores todas lineales y distintas, es decir:

$$Q(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$$

A la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se expresa como una suma de fracciones simples:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left( \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \frac{A_3}{x-\alpha_3} + ... + \frac{A_n}{x-\alpha_n} \right) dx$$

Donde $A_1$, $A_2$, $A_3$, ... , $A_n$ son constantes que se van a determinar.

**Tercer Caso.** Cuando en la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, la función polinómica $Q(x)$ se descompone en factores lineales algunas repetidas, suponiendo que $x-a$, es el factor lineal que se repite \$p\$ veces, es decir:

$$Q(x) = a_n \underbrace{(x-a)(x-a)(x-a)...(x-a)}_{p-veces}(x-\alpha_{p+1})...(x-\alpha_n)$$

A la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se expresa como una suma de funciones simples.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left( \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + ... + \frac{A_p}{(x-a)^p} + ... + \frac{A_n}{x-\alpha_n} \right) dx$$

Donde $A_1$, $A_2$, $A_3$, ... , $A_p$ ,... , $A_n$ son constantes que se van a determinar.

**Cuarto Caso.** Cuando en la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, la función polinómica $Q(x)$ se descompone en factores lineales y cuadráticos irreducibles y ninguno se repite, es decir:

$$Q(x) = a_n(x^2+b_1x+c_1)(x^2+b_2x+c_2)(x^2+b_3x+c_3)(x-\alpha_4)...(x-\alpha_n)$$

a la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se expresa como una suma de funciones simples.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left( \frac{A_1x+B_1}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_2x+B_2}{x^2+b_2x+c_2} + \frac{A_3x+B_3}{x^2+b_3x+c_3} + \frac{A_4}{x-\alpha_4} + ... + \frac{A_n}{x-\alpha_n} \right) dx$$

Donde $A_1$, $A_2$, ... $A_n$, $B_1$, $B_2$, $B_3$, son constantes que se van a determinar.

**Quinto Caso.** Cuando en la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, la función polinómica $Q(x)$ se descompone en factores lineales y cuadráticos repetidos en donde los factores cuadráticos irreducible se repite, es decir:

$$Q(x) = a_n\left(x^2+bx+c\right)^2(x-\alpha_3)...(x-\alpha_n)$$

a la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se expresa como una suma de funciones simples.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int\left(\frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+bx+c\right)^2}+\frac{A_3}{x-\alpha_3}+...+\frac{A_n}{x-\alpha_n}\right)dx$$

Donde $A_1$, $A_2$, ... $A_n$, $B_1$, $B_2$ son constantes que se van a determinar.

**Problemas de Aplicación: La Integral Indefinida**

1) Calcular la integral: $\int x.(1-x)^5\,dx$

**Solución**

Donde:

$1-x^2=u$

$-2xdx=du$

$dx=\frac{du}{-2x}$

Luego reemplazando en la integral. $\int x.(1-x)^5\,dx$ Tenemos:

$$\int x.(1-x)^5\,dx = \int x.u^5.\frac{du}{-2x}$$

$$\int x.(1-x)^5\,dx = -\frac{1}{2}\int u^5du$$

$$\int x.(1-x)^5\,dx = -\frac{1}{2}.\frac{u^6}{6}+C$$

$$\int x.(1-x)^5\,dx = -\frac{1}{12}u^6+C$$

$$\int x.(1-x)^5\,dx = -\frac{1}{12}(1-x^2)^6+C$$

2) Calcular la integral: $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx$

**Solución**

Donde:

$x^3 = u$

$3x^2 dx = du$

$dx = \frac{1}{3x^2}du$

Luego reemplazando en la integral. $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx$ Tenemos:

$$\int \frac{x^2}{1+x^6}dx = \int \frac{x^2}{1+(x^3)^2}dx$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^6}dx = \int \frac{x^2}{1+u^2}.\frac{du}{3x^2}$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^6}dx = \frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^6}dx = \frac{1}{3}arc\tan u + C$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^6}dx = \frac{1}{3}arc\tan x^3 + C$$

3) Calcular la integral: $\int \frac{e^{arc\cot x}}{1+x^2}dx$

**Solución**

Donde:

$arc\cot x = u$

$\frac{1}{1+x^2}dx = du$

$dx = (1+x^2)du$

Luego reemplazando en la integral $\int \frac{e^{arc\cot x}}{1+x^2}dx$ tenemos:

$$\int \frac{e^{arc\cot x}}{1+x^2}dx = \int \frac{e^u}{1+x^2}(1+x^2)du$$

$$\int \frac{e^{arc\cot x}}{1+x^2}dx = \int e^u.du$$

$$\int \frac{e^{arc\cot x}}{1+x^2}dx = e^u + C$$

$$\int \frac{e^{arc\cot x}}{1+x^2}dx = e^{arc\cot x} + C$$

4) Calcular la integral: $\int \frac{\ln x}{x(1+(\ln x)^2)}dx$

**Solución**

Haciendo:

$$u = 1+(\ln x)^2$$

$$du = 2\ln x.\frac{1}{x}.dx$$

Sustituyendo a la integral $\int \frac{\ln x}{x(1+(\ln x)^2)}dx$, tenemos:

$$\int \frac{\ln x}{x(1+(\ln x)^2)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\ln x}{x}\frac{dx}{(1+(\ln x)^2)}$$

$$\int \frac{\ln x}{x(1+(\ln x)^2)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{\ln x}{x(1+(\ln x)^2)}dx = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$\int \frac{\ln x}{x(1+(\ln x)^2)}dx = \frac{1}{2}\ln|1+(\ln x)^2| + C$$

$$\int \frac{\ln x}{x(1+(\ln x)^2)}dx = \frac{1}{2}\ln(1+(\ln x)^2) + C$$

5) Calcular la integral: $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}dx$

**Solución**

Sea:

$$u = 1+x\sqrt{x}$$

$$du = \frac{3}{2}\sqrt{x}dx$$

$$\frac{2}{3}du = \sqrt{x}dx$$

Ahora reemplazando en la integral dada, se tiene:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}\int \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}\ln|u|+C, \text{ donde } u = 1+x\sqrt{x}$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}\ln|1+x\sqrt{x}|+C$$

6) Calcular la integral: $\int \frac{3dx}{x\sqrt{4\ln^2 x+9}}$

**Solución**

Sea: $\int \frac{3dx}{x\sqrt{4\ln^2 x+9}} = 3\int \frac{dx}{x\sqrt{(2\ln x)^2+3^2}}$ , haciendo cambio de variables.

$$u = 2\ln x$$

$$du = 2\frac{dx}{x}$$

$$\frac{du}{2} = \frac{dx}{x}$$

Reemplazando en la integral tenemos:

$$\int \frac{3dx}{x\sqrt{4\ln^2 x+9}} = 3\int \frac{dx}{x\sqrt{(2\ln x)^2+3^2}} = \frac{3}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+3^2}}$$

Aplicando la fórmula $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln|u+\sqrt{u^2+a^2}\,|+C$

$$\int \frac{3dx}{x\sqrt{4\ln^2 x+9}} = \frac{3}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+3^2}}$$

$$\int \frac{3dx}{x\sqrt{4\ln^2 x+9}} = \frac{3}{2}\ln|u+\sqrt{u^2+3^2}\,|+C, \text{ como:} u = 2\ln x$$

$$\int \frac{3dx}{x\sqrt{4\ln^2 x+9}} = \frac{3}{2}\ln|2\ln x+\sqrt{4\ln^2 x+9}\,|+C$$

**UNIDAD DIDÁCTICA:** Integral Definida

**Objetivo**: Ser capaz de reconocer las primitivas de algunas funciones. Conocer y ser capaz de aplicar la Regla de Barrow para el cálculo de algunas integrales **definidas**. Ser capaz de relacionar los problemas de cálculo de áreas con la **integral definida**. Ser capaz de interpretar matemáticamente un problema físico

Contenidos:

- ✓ Sumatorias.
- ✓ Propiedades de las sumatorias
- ✓ Calculo de área de una región plana por sumatorias
- ✓ Integral definida
- ✓ Integrales de Riemann
- ✓ Aplicación de la integral definida
- ✓ Volumen de un solido

**Aprendizaje esperado:**

- ✓ Comprende la integral definida.
- ✓ Identifica la integral definida y conoce sus propiedades para resolver ejercicios aplicativos.
- ✓ Aplica las integrales definidas para calcular áreas y volúmenes de un sólido.

**Metodología:** Aplicación de método heurístico

## La Integral Definida

### Sumatorias

### Definición

Consideremos $m$ y $n$ dos números enteros de tal manera que $m \leq n$, y $f$ una función definida para cada $i \in Z$ donde $m \leq i \leq n$, entonces

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \ldots + f(n)$$

Donde $i$ es el índice o variable, $m$ es el límite inferior y $n$ es el límite superior.

**Propiedades de la Sumatoria**

$\sum_{i=1}^{n} c = cn$, donde $c$ es una constante

$\sum_{i=m}^{n} c = (n-m+1)c$, donde $c$ es una constante

$\sum_{i=m}^{n} [cf(\mathrm{i}) \pm \mathrm{g(i)}] = c\sum_{i=m}^{n} f(\mathrm{i}) \pm \sum_{i=m}^{n} \mathrm{g(i)}$

$\sum_{i=a}^{b} f(i) = \sum_{i=a+c}^{b+c} f(i-c)$

$\sum_{i=a}^{b} f(i) = \sum_{i=a-c}^{b-c} f(i+c)$

$\sum_{i=1}^{n} [f(\mathrm{i}) - f(\mathrm{i}-1)] = f(\mathrm{n}) - f(0)$, (1ra. Regla telescópica)

$\sum_{i=1}^{n} [f(\mathrm{i}) - f(\mathrm{i}-1)] = f(\mathrm{n}) - f(\mathrm{c}-1)$, (1ra. Regla telescópica Generalizada)

$\sum_{i=1}^{n} [f(\mathrm{i}+1) - f(\mathrm{i}-1)] = f(\mathrm{n}+1) + f(\mathrm{n}) - f(1) - f(0)$, (2da. Regla telescópica)

$\sum_{i=1}^{n} [f(\mathrm{i}+1) - f(\mathrm{i}-1)] = f(\mathrm{n}+1) + f(\mathrm{n}) - f(\mathrm{c}) - f(\mathrm{c}-1)$, (2da. Regla telescópica Generalizada)

**Fórmulas de la Sumatoria**

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$$

### Partición de un Intervalo Cerrado

**Definición**

Sea [a,b] un intervalo cerrado con $a < b$, el conjunto finito de puntos $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\} \subset [a,b]$ es denominado una partición de [a,b] de tal manera que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$$

La longitud de cada sub-intervalo $[x_{i-1}, i]$ para $I = 1, 2, 3, ..., n$ denotaremos por:

$\Delta x_i = x_1 - x_{i-1}$ donde $i = 1, 2, 3, ..., n$. Se llama norma de $P$ al número $P = \max \Delta x_i$.

**Definición**

Si $P = \{x_i \,/\, i = 0, 1, 2, 3, ..., n\}$ y $P' = \{x_i \,/\, i = 0, 1, 2, 3, ..., n\}$ son dos particiones de [a,b] tales que $P \subset P'$ (es decir que cada punto de división $x_i$ de $P$ es también un punto de $P'$ $P'$) entonces a la partición de $P'$ se le llama ***refinamiento*** de la partición $P$.

### La Integral como Límite de Sumas

Decimos que $f : [a,b]$™ $R$ es una función integrable en [a,b], si existe un número $L$, que cumple la condición que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$|\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i - L| < \varepsilon$, para cada partición $P$ del intervalo [a,b], donde $|P| < \delta$ a esta definición lo representamos por:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i$$

A este número $L$ se llama integral definida (Riemann) de $f$ en [a,b] y está definido por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i$$

### Cálculo de la Integral Definida Usando Intervalos de Igual Longitud

En el cálculo de las integrales definidas, cuando se usan intervalos de igual longitud se tiene que:

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\Delta x$, de donde $x_i = a + \dfrac{b-a}{n} i$, $i = 0, 1, 2, ..., n$

Luego la integral definida se calcula mediante la expresión:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i$$

**Propiedades de la Integral Definida**

Si $f$ , $g$ son funciones integrables en [a,b] y $c$ una constante arbitraria, entonces:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

(Tex translation failed)

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ , donde $f$ es integrable en [a,c], [c,b], [a,b] y

$a \leq c \leq b$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,,\ b > a$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$ (Invariancia frente a una traslación)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f\left(\frac{x}{c}\right)dx\,,\quad c \neq 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = c\int_{\frac{a}{c}}^{\frac{b}{c}} f(cx)dx\,,\quad c \neq 0$$

Sí $f(x) \geq 0$ , $\forall x$ò$[a,b]$ entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Sí $f(x) \geq g(x)$ , $\forall x$ò$[a,b]$ entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Sí $f$ es una función continua en el intervalo [a,b], entonces $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

Sí $m$ y $M$ son los valores mínimos y máximos absolutos de $f$ en [a,b] respectivamente tal que $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$ entonces:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Sí $f$ es una función par y continua en el intervalo $[-a,a]$,

entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Sí $f$ es una función impar y continua en el intervalo $[-a,a]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

**Teorema del Valor Intermedio**

Sea $f$ una función definida y continua en cada punto de un intervalo [a,b]. Si $x_1$ y $x_2$ son dos puntos cualquiera de [a,b] tales que $x_1 \leq x_2$ y $f(x_1) \neq f(x_2)$, entonces la función $f$ toma todo los valores comprendidos entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ por lo menos una vez en el intervalo $< x_1, x_2 >$.

**Teorema del Valor Medio para Integrales**

Sea $f:[a,b] \rightarrow R$ una función continua. Entonces existe un número $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

**Demostración**

Como $f$ es una función continua en [a,b], entonces existen $\alpha$, $\beta \in [a,b]$ tal que $f(\alpha) = m$ y $f(\beta) = M$ son los valores mínimos y máximos absolutos respectivamente de $f$ en [a,b].

$$\Rightarrow m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$$\Rightarrow f(\alpha) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq f(\beta)$$

Como $f$ es una función continua en [a,b], por el teorema del valor intermedio existe

$c\in[a,b]$ tal que $f(c)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ ; por tanto $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$ .

**Primer Teorema Fundamental del Cálculo**

Sea $f$ una función continua en el intervalo [a,b]. Entonces la función $F$ definida por:

$F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ , $a\le x\le b$ es derivable en $[a,b]$ y $D_xF(x)=D_x\displaystyle\int_a^x f(t)dt=f(x)$ ,

$\forall x\in[a,b]$

**Demostración**

Como $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ es una función definida en [a,b], entonces:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\displaystyle\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\displaystyle\int_a^{x} f(t)dt+\int_x^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

Por el teorema del valor medio para integrales se tiene, para cada número no nulo

$x+h\in[a,b]$, $\exists\alpha\in[x,x+h]$ tal que $\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt=hf(\alpha)$ , de donde.

$f(\alpha)=\dfrac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$ , luego $F'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}=\lim\limits_{h\to 0} f(\alpha)=f(x)$

$$\therefore\ F'(x)=f(x).$$

**Segundo Teorema Fundamental del Cálculo**

Consideremos una función $f$ continua en el intervalo [a,b] y sea $F$ una función tal que:

$F'(x) = f(x)\ \ \forall x \in [a,b]$ Entonces: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

**Demostración**

Como $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$ entonces por el primer teorema fundamental del cálculo se tiene:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

Si: $x = a$ entonces $F(a) = \int_a^a f(t)dt + C = 0 + C\ \ \Rightarrow\ \ C = F(a)$ esto es aplicando la propiedad (5) de la integral definida que reemplazando en (1) se tiene:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$$

Si: $x = b$, reemplazamos en (2) obteniendo: $F(b) = \int_a^b f(t)dt + F(a)$ de donde se tiene:

$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ como la variable de integración $t$ es independiente se concluye:

$$\therefore\ \ \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,.$$

**Definición**

Una función $f$ se llama SECCIONALMENTE CONTINUA sobre [a,b], si $f$ es continua $\forall x$ò$[a,b]$ excepto un número finito de puntos en [a,b] y si en cada punto de discontinuidad los limites por la izquierda y por la derecha existen. En $x = a$ solamente se requiere que exista el limite por la derecha y $x = b$ por la izquierda.

**Proposición**

Si $f$ es SECCIONALMENTE CONTINUA sobre [a,b], entonces $f$ es integrable sobre [a,b] o sea $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + ... + \int_{c_k}^{b} f(x)dx$ .

**Un Límite Especial**

Sea $f$ una función continua sobre [a,b] y $c \in [a,b]$. Calcularemos el siguiente límite:

$$E = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(t)dt \, .$$

Para lo cual definimos para cada $x \in [a,b]$ la función $G(x) = \int_c^x f(t)dt$ , donde $G(c) = 0$ ,

$G'(x) = f(x)$ , $G'(c) = f(c)$ .

Luego $E$ expresamos como:

$$E = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[G(c+h) - G(c)] = G'(c) = f(c)$$

Por lo tanto,

$$E = f(c) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(t)dt$$

**Problemas de Aplicación: La Integral Definida**

1) Hallar el valor de la Sumatoria: $\sum_{i=14}^{50} [2i^2 + i - 1]$

**Solución**

$$\sum_{i=14}^{50} [2i^2 + i - 1] = 2\sum_{i=14}^{50} i^2 + \sum_{i=14}^{50} i - \sum_{i=14}^{50} 1$$

Utilizando las fórmulas de la sumatoria

$$\sum_{i=14}^{50} [2i^2 + i - 1] = 2\left[\frac{50(51)(101)}{6}\right] + \frac{50(51)}{2} - 50 - 2\left[\frac{13(14)(27)}{6}\right] - \frac{13(14)}{2} + 13$$

$$\sum_{i=14}^{50} [2i^2 + i - 1] = 85850 + 1275 - 50 - 1638 - 91 + 13$$

$$\sum_{i=14}^{50} [2i^2 + i - 1] = 85359$$

2) Hallar el valor de la Sumatoria: $\sum_{i=20}^{40}\frac{360}{\sqrt{10}^{2x-32}}\}$

**Solución**

Vemos que:

$$\sum_{i=20}^{40}\frac{360}{\sqrt{10}^{2x-32}}=\frac{360}{\sqrt{10}^{2x-32}}\sum_{i=20}^{40}1,\ \text{con}\ n_1=40\quad n_2=19$$

$$\sum_{i=20}^{40}\frac{360}{\sqrt{10}^{2x-32}}=\frac{360}{\sqrt{10}^{2x-32}}(40-19)$$

$$\sum_{i=20}^{40}\frac{360}{\sqrt{10}^{2x-32}}=\frac{360}{\sqrt{10}^{2x-32}}(21)$$

$$\sum_{i=20}^{40}\frac{360}{\sqrt{10}^{2x-32}}=\frac{7560}{\sqrt{10}^{2x-32}}$$

3) Hallar la Fórmula de la Sumatoria: $\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{(4i-3)(4i+1)}$

**Solución**

A la sumatoria dada expresamos así:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{(4i-3)(4i+1)}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{A}{4i-3}+\frac{B}{4i+1}\right]$$

Ahora calculando las constantes $A$ y $B$

$$\frac{4}{(4i-3)(4i+1)}=\frac{A}{4i-3}+\frac{B}{4i+1}$$

$$\frac{4}{(4i-3)(4i+1)}=\frac{A(4i+1)+B(4i-3)}{(4i-3)(4i+1)}$$

Ahora igualando los numeradores se tiene:

$$4=A(4i+1)+B(4i-3)$$

Luego por la identidad:

$$\begin{cases}A-3B=4\\4Ai+4Bi=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}$$

Si: $\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{(4i-3)(4i+1)}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{A}{4i-3}+\frac{B}{4i+1}\right]$

Mediante la regla Telescópica, para ello definimos:

$$f(i)=\frac{1}{4i+1}$$

$$f(i-1)=\frac{1}{4i-3}$$

$$f(n)=\frac{1}{4n+1}$$

$$f(0)=\frac{1}{4(0)+1}=1$$

En la fórmula:

(Tex translation failed)

Entonces

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{4i+1}-\frac{1}{4i-3}\right]=\frac{1}{4n+1}-1$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{4i-3}-\frac{1}{4i+1}\right]=1-\frac{1}{4n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{4i-3}-\frac{1}{4i+1}\right]=\frac{4n}{4n+1}$$

4) Hallar el valor de la Sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{99}\ln 2^{i}$$

**Solución**

Aplicando la propiedad de logaritmo natural, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{99}\ln 2^{i}=\sum_{i=1}^{99}i\ln 2$$

$$\sum_{i=1}^{99}\ln 2^{i}=\sum_{i=1}^{99}i\ln 2$$

$$\sum_{i=1}^{99}\ln 2^{i}=\left[\frac{99(99+1)}{2}\right]\ln 2$$

$$\sum_{i=1}^{99}\ln 2^{i}=99(50)\ln 2$$

$$\sum_{i=1}^{99}\ln 2^{i}=4950\ln 2$$

Encontrar el área exacta de la región indicada, expresar el área como el límite de una suma de Riemann con particiones iguales

5) Hallar el área de la región R acotada por la gráfica de $y = x+1$ al eje X y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

**Solución**

Sea

$$f(x) = y$$

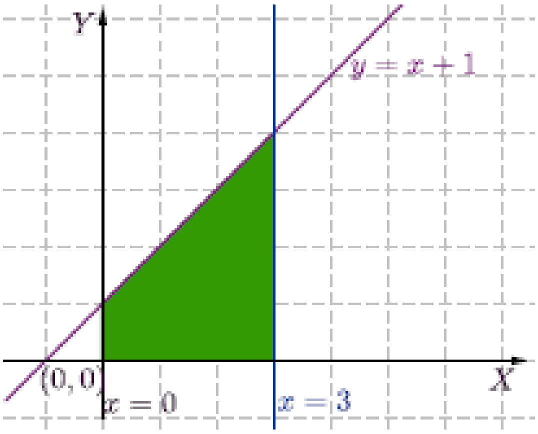
$$f(x) = x+1, \forall x \in [0,3]$$

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n} \Rightarrow \Delta x = \frac{3}{n}$$

$$c_i = a + i\Delta x$$

$$c_i = 0 + \frac{3i}{n}$$

$$c_i = \frac{3i}{n}$$



Como: $f(x) = x+1$

Entonces $f(c_i) = f(\frac{3i}{n}) = \frac{3i}{n} + 1$

Luego $A(R) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$

$$A(R) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{3i}{n} + 1\right]\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$A(R)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{9i}{n^2}+\frac{3}{n}\right]$$

$$A(R)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n^2}.\frac{n(n+1)}{2}+\frac{3n}{n}\right]$$

$$A(R)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9(n+1)}{2n}+3\right]$$

$$A(R)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+3\right]$$

$$A(R)=\frac{9}{2}+0+3$$

$$A(R)=\frac{15}{2}u^2.$$

6) Calcular la integral:} $\int_0^4(x^2+x-6)dx$

**Solución**

$\int_0^4(x^2+x-6)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x$, donde: $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{n}=\frac{4}{n}$;

$$c_i=a+i\Delta x=0+\frac{4i}{n}=\frac{4i}{n}$$

$$f(c_i)=\left(\frac{4i}{n}\right)^2+\frac{4i}{n}-6$$

$$f(c_i)=\frac{16i^2}{n^2}+\frac{4i}{n}-6$$

Ahora reemplazando en la integral.

$$\int_0^4(x^2+x-6)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x$$

$$\int_0^4(x^2+x-6)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{16i^2}{n^2}+\frac{4i}{n}-6\right]\left(\frac{4}{n}\right)$$

$$\int_0^4(x^2+x-6)dx=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{16n(n+1)(2n+1)}{6n^2}+\frac{4n(n+1)}{2n}-6n\right]\left(\frac{4}{n}\right)$$

$$\int_0^4(x^2+x-6)dx=4\lim_{n\to\infty}\left[\frac{16(n+1)(2n+1)}{6n^2}+\frac{4(n+1)}{2n}-6\right]$$

$$\int_0^4(x^2+x-6)dx=4\lim_{n\to\infty}\left[\frac{8}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+2\left(1+\frac{1}{n}\right)-6\right]$$

$$\int_0^4(x^2+x-6)dx=\frac{16}{3}u^2.$$

7) Calcular la integral:} $\int_{0}^{2}(3x^2-1)dx$

**Solución**

$$\int_{0}^{2}(3x^2-1)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x$$, donde: $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n}$;

$$c_i=a+i\Delta x=0+\frac{2i}{n}=\frac{2i}{n}\backslash\backslash$$

$$f(c_i)=3\left(\frac{2i}{n}\right)^2-1$$

$$f(c_i)=\frac{12i^2}{n^2}-1$$

Ahora reemplazando en la integral.

$$\int_{0}^{2}(3x^2-1)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x$$

$$\int_{0}^{2}(3x^2-1)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{12i^2}{n^2}-1\right]\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\int_{0}^{2}(3x^2-1)dx=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{12n(n+1)(2n+1)}{6n^2}-n\right]\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\int_{0}^{2}(3x^2-1)dx=2\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2(n+1)(2n+1)}{n^2}-1\right]$$

$$\int_{0}^{2}(3x^2-1)dx=2\lim_{n\to\infty}\left[2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)-1\right]$$

$$\int_{0}^{2}(3x^2-1)dx=2(4-1)$$

$$\int_{0}^{2}(3x^2-1)dx=6u^2$$

8) Calcular la integral:} $\int_{-2}^{2}(x^3+1)dx$

**Solución**

$$\int_{-2}^{2}(x^3+1)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x$$, donde:

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2-(-2)}{n}=\frac{2+2}{n}=\frac{4}{n};$$

$$c_i=a+i\Delta x=-2+\frac{4i}{n}=\frac{4i}{n}-2$$

$$f(c_i)=3\left(\frac{4i}{n}-2\right)^3+2$$

$$f(c_i)=\frac{64i^3}{n^3}-\frac{96i^2}{n^2}+\frac{48i}{n}-7$$

Ahora reemplazando en la integral.

$$\int_{-2}^{2}(x^3+1)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x$$

$$\int_{-2}^{2}(x^3+1)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{64i^3}{n^3}-\frac{96i^2}{n^2}+\frac{48i}{n}-7\right]\left(\frac{4}{n}\right)$$

$$\int_{-2}^{2}(x^3+1)dx=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{64n^2(n+1)^2}{4n^3}-\frac{96n(n+1)(2n+1)}{6n^2}+\frac{48n(n+1)}{2n}-7n\right]\left(\frac{4}{n}\right)$$

$$\int_{-2}^{2}(x^3+1)dx=4\lim_{n\to\infty}\left[\frac{64n^2(n+1)^2}{4n^4}-\frac{96(n+1)(2n+1)}{6n^2}+\frac{48(n+1)}{2n}-7\right]$$

$$\int_{-2}^{2}(x^3+1)dx=4\lim_{n\to\infty}\left[16\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-16\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+24\left(1+\frac{1}{n}\right))-7\right]$$

$$\int_{-2}^{2}(x^3+1)dx=4(16-32+24-7)$$

$$\int_{-2}^{2}(x^3+1)dx=4u^2.$$

9) Calcular la integral:} $\int_{-1}^{5}(4x^3-3x^2+1)dx$

**Solución**

Sea: $I=\int_{-1}^{5}(4x^3-3x^2+1)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x$ , donde:

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{5-(-1)}{n}=\frac{5+1}{n}=\frac{6}{n};$$

$$c_i=a+i\Delta x=-1+\frac{6i}{n}=\frac{6i}{n}-1$$

$$f(c_i)=4\left(\frac{6i}{n}-1\right)^3-3\left(\frac{6i}{n}-1\right)^2+1$$

$$f(c_i)=\frac{864i^3}{n^3}-\frac{540i^2}{n^2}+\frac{108i}{n}-6$$

Ahora reemplazando en la integral.

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x$$

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{864i^3}{n^3}-\frac{540i^2}{n^2}+\frac{108i}{n}-6\right]\left(\frac{6}{n}\right)$$

$$I=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{864n^2(n+1)^2}{4n^3}-\frac{540n(n+1)(2n+1)}{6n^2}+\frac{108n(n+1)}{2n}-6n\right]\left(\frac{6}{n}\right)$$

$$I=6\lim_{n\to\infty}\left[\frac{864}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{540}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{108}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-6\right]$$

$$I=6\left(\frac{864}{4}-\frac{540(2)}{6}+\frac{108}{2}-6\right)$$

$$I=504u^2.$$

10) Calcular $F'(x)$ siendo: $F(x)=\int_1^{2x}\cosh(2t^2+1)dt$

**Solución**

Aplicando el primer teorema fundamental del cálculo:

$F(x)=\int_1^{2x}\cosh(2t^2+1)dt,$ Derivando tenemos:

$$F'(x)=\left[\cosh(2(2x)^2+1)\right](2x)'-\left[\cosh(2(1)^2+1)\right](1)'$$

$$F'(x)=2\cosh(8x^2+1)$$

## Aplicaciones de la Integral Definida

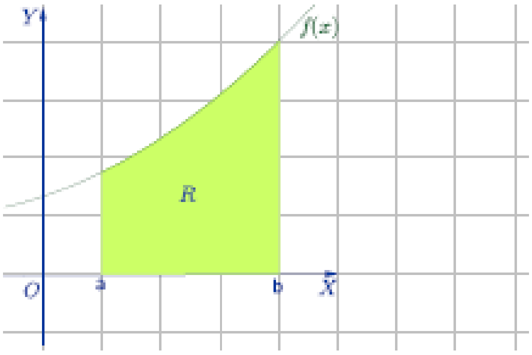
### Área de Regiones Planas

**Definición**

Consideremos una función $y=f(x)$ continua en [a,b] y además $f(x)\geq 0$, $\forall x \in [a,b]$.

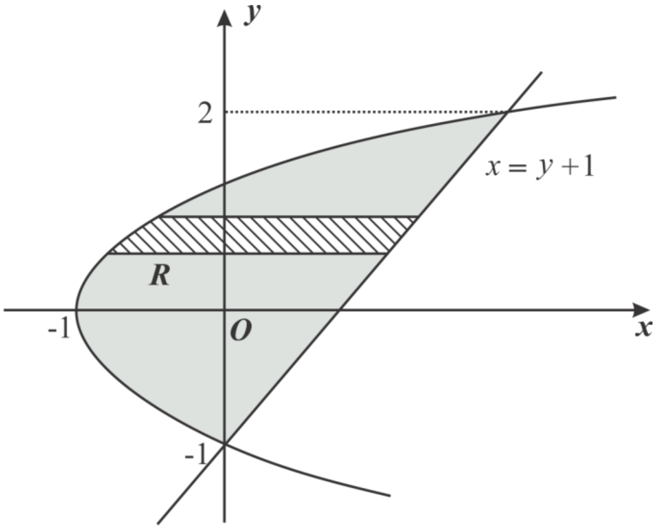
El área de la región $R$ limitada por la curva $y=f(x)$, el Eje $X$ y las rectas $x=a$ y $x=b$, está dado por la expresión:

$$A(R)=\int_a^b f(x)dx$$



1) Calcule el área de la figura limitada por las líneas cuyas ecuaciones son $y^2 = x+1$, $x - y - 1 = 0$.

**Solución Calculando** los puntos de intersección se tiene:



$$\begin{cases} y^2 = x+1 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2-1-y-1=0 \\ y^2-y-2=0 \end{cases}$$

$$(y-2)(y+1)=0 \Rightarrow y=-1, y=2$$

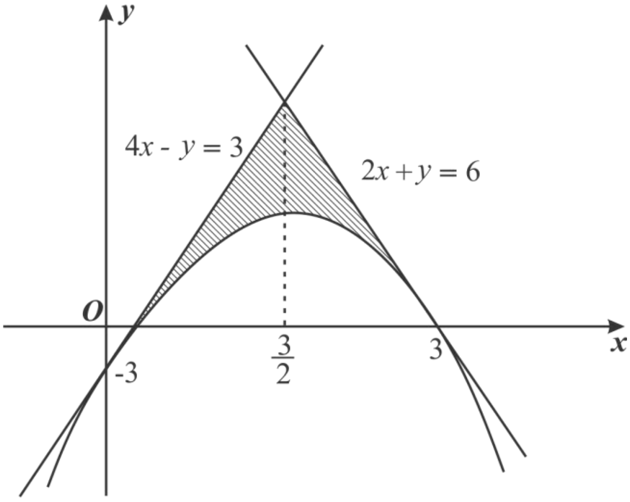
$$A(R)=\int_{-1}^{2}\left[(y+1)-(y^2-1)\right]dy \ \backslash\backslash A(R)=\int_{-1}^{2}\left[(-y^2+y+2)\right]dy$$

$$A(R)=\left(-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+2y\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$A(R)=\frac{9}{2}u^2$$

2) Hallar el área de la figura comprendida entre la parábola $y=-x^2+4x-3$ y las tangentes a ésta en los puntos $(0,-3)$ y $(3.0)$.

**Solución**



$$y=-x^2+4x-3=1-(x-2)^2$$
$$y-1=-(x-2)^2, V(1,2)$$
$$y=-x^2+4x-3 \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3}=(-2x+4)\big|_{x=3}=-2$$
$$L_1: y-0=-2(x-3) \text{ de donde } L_1: 2x+y=6$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=(-2x+4)\big|_{x=0}=4$$

$$L_2: y+3=4(x-0) \text{ de donde } L_2: 4x-y=3$$

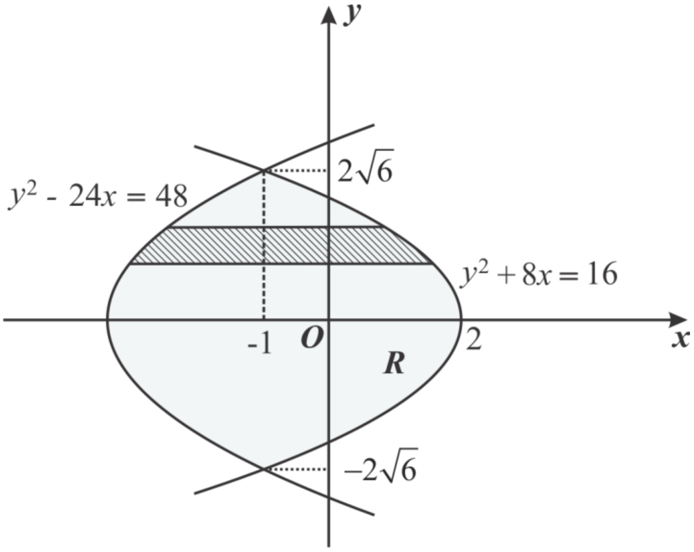
$$A(R)=\int_0^{3/2}\left[(4x-3)-(-x^2+4x-3)\right]dx+\int_{3/2}^{3}\left[(6-2x)-(-x^2+4x-3)\right]dx$$
$$A(R)=\int_0^{3/2}x^2\,dx+\int_{3/2}^{3}(x^2-6x+9)dx$$

$$A(R)=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{3/2}+\left.\left(\frac{x^3}{3}-3x+9x\right)\right|_{3/2}^{3}$$

$$A(R)=\frac{9}{4}+\frac{9}{8}-\frac{9}{4}$$

$$A(R)=\frac{9}{4} \qquad\qquad \therefore A(R)=\frac{9}{4}u^2$$

3) Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y^2+8x=16$, y $y^2-24x=48$



$$\begin{cases} y^2+8x=16 \\ y^2-24x=48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=-8(x-2) \\ y^2=24(x-2) \end{cases}$$

Parábola de $V(2,0)$ y parábola de $V(-2,0)$

$$\begin{cases} y^2+8x=16 \\ y^2-24x=48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{16-y^2}{8} \\ x=\dfrac{y^2-48}{24} \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2-48}{24}=\frac{16-y^2}{8}$$

$$y^2-48=48-3y^2 \Rightarrow y^2=24 \Rightarrow y=\pm 2\sqrt{6}$$

$$A(R)=\int_{-2\sqrt{6}}^{2\sqrt{6}}\left(\frac{16-y^2}{8}-\frac{y^2-48}{24}\right)dy$$

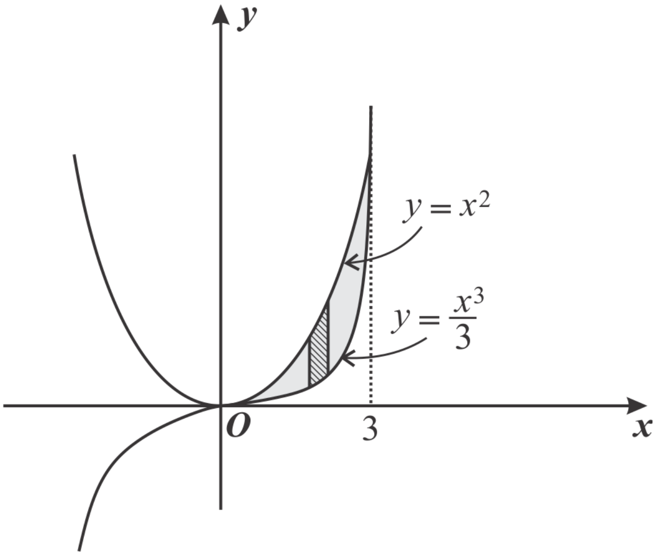
$$A(R)=\int_{-2\sqrt{6}}^{2\sqrt{6}}\left(4-\frac{y^2}{6}dy\right)$$

$$A(R)=\left(4y-\frac{y^3}{18}\right)\Bigg|_{-2\sqrt{6}}^{2\sqrt{6}}$$

$$A(R)=\frac{32}{3}\sqrt{6}\,u^2$$

4) Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y=x^2$, $y=\dfrac{x^3}{3}$.

**Solución**



$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=\dfrac{x^3}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^3}{3}=x^2 \Rightarrow x=0,\ x=3$$

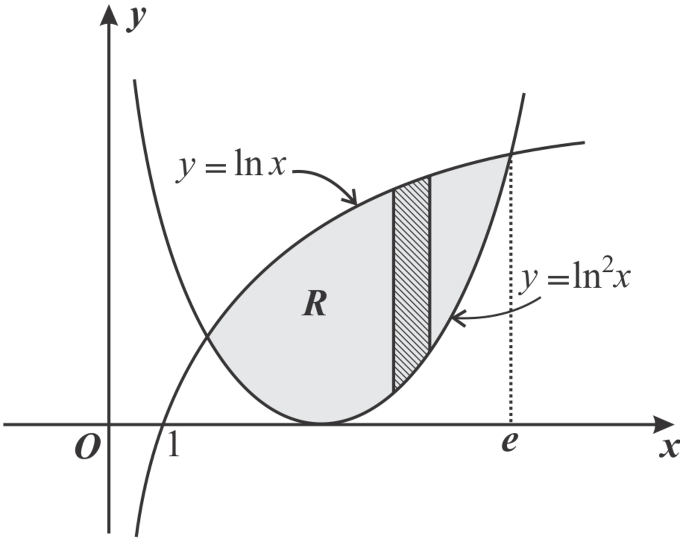
$$A(R)=\int_0^3\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)dx$$

$$A(R)=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{12}\right)\Bigg|_0^3$$

$$A(R)=9-\frac{27}{4} \qquad\qquad \therefore\ A(R)=\frac{9}{4}u^2$$

5) Calcular el área de la figura limitada por las líneas $y = \ln x$ e $y = \ln^2 x$.

**Solución**



$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = \ln^2 x \end{cases} \Rightarrow \ln^2 x = \ln x$$

$$\ln x(\ln x - 1) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \vee \ln x - 1 = 0$$

$x = e^0, x = e^1$ de donde $x = 1, x = e$

$$A(R) = \int_1^e \left(\ln x - \ln^2 x\right) dx$$

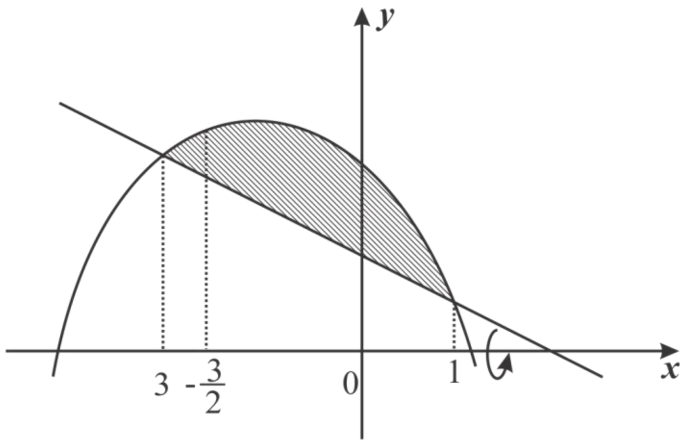
$$A(R) = \left(3x\ln x - x\ln^2 x - 3x\right)\Big|_1^e$$

$$A(R) = (3 - e)\,u^2$$

6) Encontrar el volumen cuando el área plana encerrada por $y = -x^2 - 3x + 6$, y, $x + y - 3 = 0$ gira alrededor de $y = 0$.

**Solución**

$$y = -x^2 - 3x + 6 \quad \Rightarrow \quad y - \frac{33}{4} = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \text{ parábola}$$



$$\begin{cases} y=-x^2-3x+6 \\ y=3-x \end{cases} \Rightarrow x^2-3x+6=3-x$$

$$x^2+2x-3=0 \Rightarrow (x+3)(x-1)=0$$

$$x=-3, x=1$$

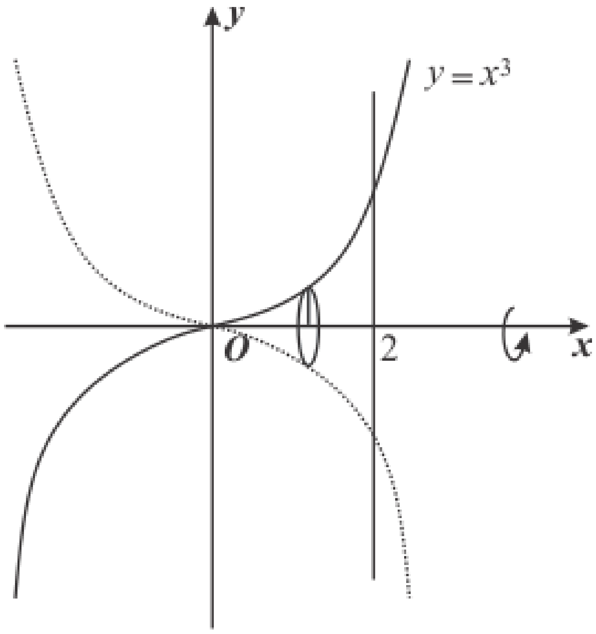
$$V=\Pi\int_{-3}^{1}\left[\left(-x^2-3x+6\right)^2-\left(3-x^2\right)\right]dx$$

$$V=\Pi\int_{-3}^{1}\left(x^4+6x^3-4x^2-30x+27\right)dx$$

$$V=\frac{1792}{15}\Pi u^3$$

7) Encontrar el volumen del sólido generado al rotar alrededor del eje $x$ la región acotada por la curva $y=x^3$ y las rectas $y=0$, $x=2$.

**Solución**



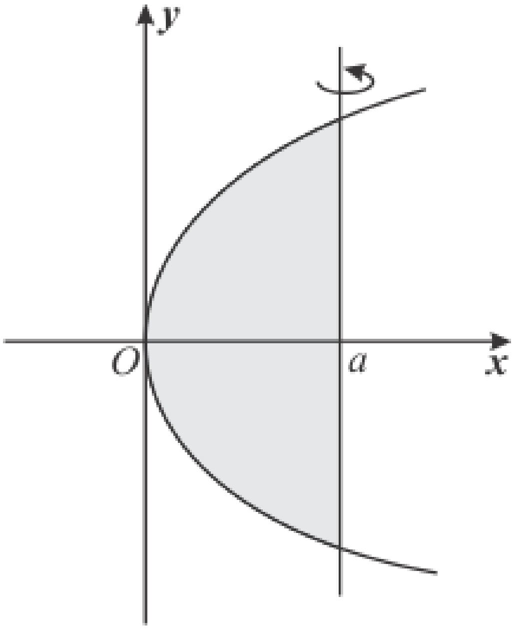
$$V = \Pi\int_0^2 y^2\,dx$$

$$V = \Pi\int_0^2 x^6\,dx$$

$$V = \frac{128}{7}\Pi\,u^3$$

8) Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor de la recta $x = a$, la parte de la parábola $y^2 = 4ax$, que se intercepta por la misma recta.

**Solución**



Aplicando el método de la corteza cilíndrica se tiene:

$$V = 2\left[2\Pi\int_0^a (a-x)y\right]dx$$

$$V = 4\Pi\int_0^a (a-x)\sqrt{4ax}\,dx$$

$$V = 8\Pi\sqrt{a}\int_0^a \left(ax^{1/2} - x^{3/2}\right)dx$$

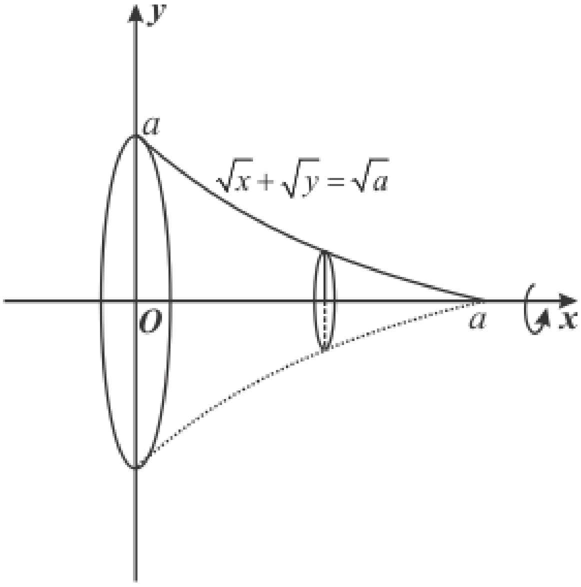
$$V = 8\Pi\sqrt{a}\left[\frac{2ax^{3/2}}{3} - \frac{2x^{5/2}}{5}\right]\Bigg|_0^a$$

$$V = 8\Pi\sqrt{a}\left[\frac{2a^{5/2}}{3} - \frac{2a^{5/2}}{5}\right]$$

$$V = \frac{32a^3\pi}{15}u^3$$

9) Hallar el volumen del sólido engendrado haciendo girar alrededor del eje $OX$, la superficie limitada por la curva $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, y la recta $x=0$, $y=0$.

**Solución**



$$V=\Pi\int_0^a y^2\,dx$$

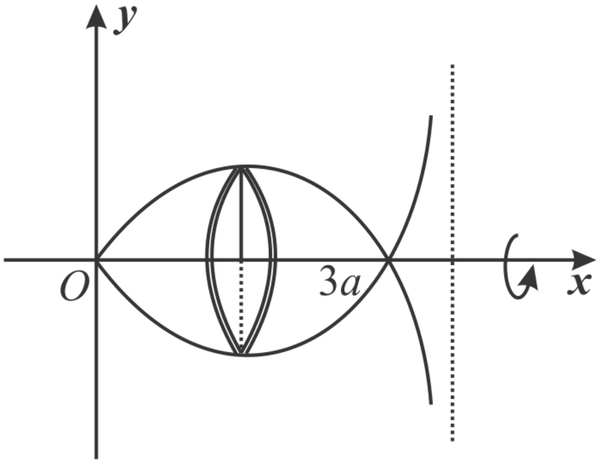
$$V=\Pi\int_0^a\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^4 dx$$

$$V=\Pi\int_0^a\left(a-2\sqrt{x}\sqrt{a}+x\right)^2 dx$$

$$V=\frac{\pi a^3}{15}u^3$$

10) Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje $x$, el lazo de la curva $(x-4a)y^2=ax(x-3a)$, $a>0$.

**Solución**



$(x-4a)y^2=ax(x-3a),\ a>0,$ entonces:

$y^2 = \dfrac{ax(x-3a)}{x-4a}$, de donde tenemos:

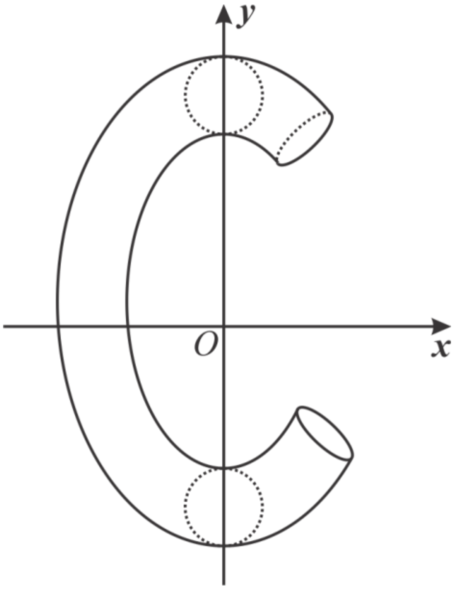
$$V = \int_0^{3a} (y^2)dx$$

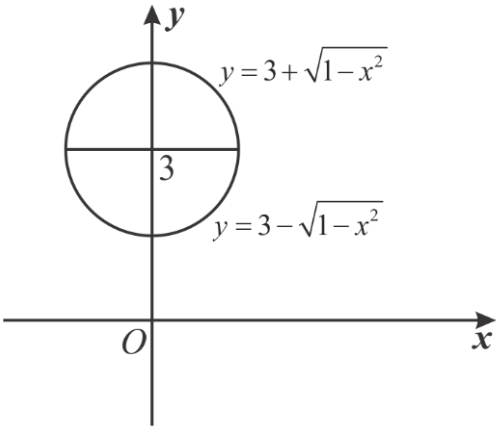
$$V = 2\Pi \int_0^{3a} \frac{ax(x-3a)}{x-4a} dx$$

$$V = \frac{15-16\ln 2a^2\pi}{2} u^3$$

11) Calcular el volumen del sólido que genera la circunferencia $x^2+(y-3)=1$ al girar alrededor del eje $x$.

**Solución**





De la ecuación de la circunferencia $x^2+(y-3)^2=1$ despejamos $y$, es decir:

$(y-3)^2 = 1-x^2$, de donde tenemos:

$y_1 = 3+\sqrt{1-x^2}$, $\quad y_2 = 3-\sqrt{1-x^2}$

$$V = 2\Pi \int_0^1 (y_1^2 - y_2^2)dx$$

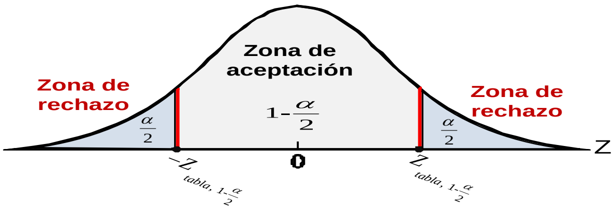
$$V = 2\Pi \int_0^1 \left[\left(3+\sqrt{1-x^2}\right)^2 - \left(3-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]dx$$

$$V = 2\Pi \int_0^1 12\sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$V = 24\Pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$V = 6\pi^2 u^3$$

**Anexo 7.** Tabla de la distribución normal z



| *Zo* | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 | *Zo* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,0** | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 | **0,0** |
| **0,1** | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 | **0,1** |
| **0,2** | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 | **0,2** |
| **0,3** | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 | **0,3** |
| **0,4** | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 | **0,4** |
| **0,5** | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 | **0,5** |
| **0,6** | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 | **0,6** |
| **0,7** | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 | **0,7** |
| **0,8** | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 | **0,8** |
| **0,9** | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 | **0,9** |
| **1,0** | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 | **1,0** |
| **1,1** | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 | **1,1** |
| **1,2** | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 | **1,2** |
| **1,3** | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 | **1,3** |
| **1,4** | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 | **1,4** |
| **1,5** | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 | **1,5** |
| **1,6** | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 | **1,6** |
| **1,7** | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 | **1,7** |
| **1,8** | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 | **1,8** |
| **1,9** | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 | **1,9** |
| **2,0** | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 | **2,0** |
| **2,1** | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 | **2,1** |
| **2,2** | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 | **2,2** |
| **2,3** | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 | **2,3** |
| **2,4** | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 | **2,4** |
| **2,5** | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 | **2,5** |
| **2,6** | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 | **2,6** |
| **2,7** | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 | **2,7** |
| **2,8** | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 | **2,8** |
| **2,9** | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 | **2,9** |
| **3,0** | 0,99865 | 0,99869 | 0,99874 | 0,99878 | 0,99882 | 0,99886 | 0,99889 | 0,99893 | 0,99896 | 0,99900 | **3,0** |
| **3,1** | 0,99903 | 0,99906 | 0,99910 | 0,99913 | 0,99916 | 0,99918 | 0,99921 | 0,99924 | 0,99926 | 0,99929 | **3,1** |
| **3,2** | 0,99931 | 0,99934 | 0,99936 | 0,99938 | 0,99940 | 0,99942 | 0,99944 | 0,99946 | 0,99948 | 0,99950 | **3,2** |
| **3,3** | 0,99952 | 0,99953 | 0,99955 | 0,99957 | 0,99958 | 0,99960 | 0,99961 | 0,99962 | 0,99964 | 0,99965 | **3,3** |
| **3,4** | 0,99966 | 0,99968 | 0,99969 | 0,99970 | 0,99971 | 0,99972 | 0,99973 | 0,99974 | 0,99975 | 0,99976 | **3,4** |
| **3,5** | 0,99977 | 0,99978 | 0,99978 | 0,99979 | 0,99980 | 0,99981 | 0,99981 | 0,99982 | 0,99983 | 0,99983 | **3,5** |
| **3,6** | 0,99984 | 0,99985 | 0,99985 | 0,99986 | 0,99986 | 0,99987 | 0,99987 | 0,99988 | 0,99988 | 0,99989 | **3,6** |
| **3,7** | 0,99989 | 0,99990 | 0,99990 | 0,99990 | 0,99991 | 0,99991 | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 | **3,7** |
| **3,8** | 0,99993 | 0,99993 | 0,99993 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99995 | 0,99995 | 0,99995 | **3,8** |
| **3,9** | 0,99995 | 0,99995 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99997 | 0,99997 | **3,9** |

| **1-a** | 90% | 92% | 94% | 95% | 96% | 97% | 98% | 99% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **a** | 10% | 8% | 6% | 5% | 4% | 3% | 2% | 1% |
| *Za/2* | 1,645 | 1,751 | 1,881 | 1,960 | 2,054 | 2,170 | 2,326 | 2,576 |
| ***Za*** | 1,282 | 1,405 | 1,555 | 1,645 | 1,751 | 1,881 | 2,054 | 2,326 |
| **1-a** | 90% | 92% | 94% | 95% | 96% | 97% | 98% | 99% |
| **a** | 10% | 8% | 6% | 5% | 4% | 3% | 2% | 1% |
| *Za/2* | 1,645 | 1,751 | 1,881 | 1,960 | 2,054 | 2,170 | 2,326 | 2,576 |
| ***Za*** | 1,282 | 1,405 | 1,555 | 1,645 | 1,751 | 1,881 | 2,054 | 2,326 |