UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA
ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"EL LEMA DE URYSOHN Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES"

TESIS

PRESENTADO POR:

FRANCISCO QUISPE MACHACA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PUNO- PERÚ

2018

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"EL LEMA DE URYSOHN Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES"

TESIS PRESENTADO POR:

FRANCISCO QUISPE MACHACA

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 20 DE JUNIO DEL 2018

APROBADO POR EL JURADO REVISOR CONFORMADO POR:

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO COORDINACIÓN DE INVESTIGACIÓN PILAR - FICA -

PRESIDENTE: M. Sc. Juan Carlos Benavides Huanca

MSc. Juan Carlos Benavides H.
DOCENTE UNIVERSITARIO
COMAP - 526

PRIMER MIEMBRO: Lic. Fabiola Loayza Torreblanca

SEGUNDO MIEMBRO: Lic. Jesus Roberto Ticona Parisaca

DIRECTOR: Mg. Julio César Villalta Pacori

TEMA: Teorema (Lema de Urysohn)

ÁREA: Topología

LINEA DE INVESTIGACIÓN: Matemática Pura

Dedicatoria

A Dios.

Por haberme permitido llegar hasta este punto y haberme dado salud para lograr mis objetivos, además de su infinita bondad y amor.

A mi madre María.

Por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien, pero más que nada, por su amor.

Agradecimientos

En primer lugar deseo expresar mi agradecimiento al director de esta tesis, Mg. Julio César Villalta, por la dedicación y apoyo que ha brindado a este trabajo, por el respeto a mis sugerencias e ideas.

Asimismo, agradezco también a todos los profesores de la escuela profesional de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Nacional del Altiplano, por ser orientadores de mi vida profesional.

A mis padres y a mis hermanos, porque con ellos compartí una infancia feliz, que guardo en el recuerdo y es un aliento para seguir escribiendo sobre la infancia.

Índice General

Índice de Figuras

Resumen

En el presente trabajo de investigación, primeramente se prueba el Teorema de Urysohn (lema de Urysohn), en el cual indica que un espacio topológico es normal si, y sólo si, cualquier par de subconjuntos disjuntos y cerrados pueden ser separados por una función continua. Este lema se utiliza comúnmente para la construcción de funciones continuas con varias propiedades en espacios normales. Es ampliamente aplicable, ya que todos los espacios métricos y todos los espacios de Hausdorff compactos son normales. Una primera aplicación del Lema de Urysohn constituye el Teorema de Metrización de Urysohn. Otra aplicación es el Teorema de Extensión de Tietze. Finalmente, probamos un Teorema que estable la conexión entre el lema de Urysohn y el Teorema de extensión de Tietze.

Palabras clave: Lema de Urysohn, Teorema extensión deTietze, Espacios normales, Espacio topológico metrizable.

Abstract

In the present research work, the Theorem (Urysohn's lemma) is first shown, in which it indicates that a topological space is normal if, and only if, any pair of disjoint and closed subsets can be separated by a continuous function. This lemma is commonly used for the construction of continuous functions with several properties in normal spaces. It is widely applicable, since all metric spaces and all compact Hausdorff spaces are normal. A first application of the Urysoh'n Lemma, we consider the Urysoh'n Metrization Theorem. Another application is the Tietze Extension Theorem. Finally, we will prove a Theorem to establish the connection between the Urysoh'n lemma and Tietze's Extension Theorem.

Keywords: Urysohn's Lemma,Tietze's extension theorem, Normal spaces, Metrizable topological space.

Capítulo1

Introducción

La topología, es una de las ramas más jóvenes de las matemáticas, en contraste con el álgebra, la geometría y la teoría de números, cuyos orígenes se remontan a la antiguedad, sin embargo, la topología hace su gran aparición en el siglo XVII.

Este trabajo se realiza en base a la siguiente pregunta ¿Existe una función continua no constante de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ con valores reales?. Si $(X, \mathcal{T})$ es normal, la respuesta es sorprendente y es dada por un lema. Dicho lema lleva por nombre el lema de Urysohn, el cual indica que un espacio topológico es normal si, y sólo si, cualquier par de subconjuntos disjuntos y cerrados pueden ser separados por una función continua. Este lema se utiliza comúnmente para la construcción de funciones continuas con varias propiedades en espacios normales. Es ampliamente aplicable, ya que todos los espacios métricos y todos los espacios de Hausdorff compactos son normales.

Pocas veces, durante los estudios universitarios, tocamos dicho lema, pero cuando lo hacemos es para realizar pasos fundamentales en una demostración o teoría. Vamos a ofrecer tres aplicaciones de dicho lema.

1) La primera aplicación es un resultado topológico y nos dice cuando un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es metrizable, es decir, cuando podemos afirmar que existe una métrica en X de forma que la topología del correspondiente espacio métrico sea la misma que la que ya teníamos, es decir, $\mathcal{T}$. El resultado afirma que si el espacio satisface el segundo axioma de numerabilidad y es normal, entonces es metrizable.

2) Una segunda aplicación del lema de Urysohn, es el teorema de extensión de Tietze, el cual afirma que siendo $(X, \mathcal{T})$ un espacio normal, Y un subespacio cerrado de X y $f : Y \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(Y) \subset [a, b]$, entonces existe una función continua $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ con $\widetilde{f}(X) \subset [a, b]$ que extiende f.

3) Finalmente, una interesante consecuencia de lema de Urysohn y del teorema de extensión de Tiezte muestra que la normalidad es precisamente la condición para que estos dos resultados trabajen. Más precisamente este resultado indica que para un espacio T_1, $(X, \mathcal{T})$, las siguientes condiciones son equivalentes:

   (a) X es normal.

   (b) Para cualesquiera conjuntos cerrados y disjuntos $F, G \subset X$, existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(X) \subset [0, 1]$, $f|_F = 0$ y $f|_G = 1$.

   (c) Para cualesquiera conjuntos cerrados y disjuntos $F, G \subset X$, existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f|_F = 0$ y $f|_G = 1$.

   (d) Para cualquier subespacio cerrado Y de X y para cualquier función $f : Y \to \mathbb{R}$ con $f(Y) \subset [a, b]$, existe una función continua $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ con $\widetilde{f}(X) \subset [a, b]$ tal que $\widetilde{f}|_Y = f$.

   (e) Para cualquier subespacio cerrado Y de X y para cualquier función $f : Y \to \mathbb{R}$, existe una función continua $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{f}|_Y = f$.

1.1. Planteamiento del problema

En la actualidad, la Topología es una nueva rama de la matemática muy investigada, debido a la existencia de muchos problemas abiertos y aplicaciones interesantes. Los objetos de estudio, espacios topológicos, muestran una gran diversidad de problemas. Uno a menudo está interesado en funciones continuas, el concepto de función continua es básico para una gran parte de las matemáticas, el número de funciones continuas de un espacio topológico X con valores en un espacio $\mathbb{R}$ puede variar mucho, dependiendo de las topologías: todo es posible desde ”todas las funciones son continuas” hasta ”sólo las funciones constantes son continuas ”. La investigación propuesta está basada en la existencia de funciones continuas no constantes de un espacio topológico de X con valores reales.

1.2. Formulación del problema

La presente investigación se plantea, responder la siguiente interrogante: ¿Existe una función continua no constante de un espacio topológico normal X con valores reales?

1.3. Hipótesis de la investigación

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. En gerenal no existe una función continua de X en $\mathbb{R}$. Si X es un espacio normal obtenemos un resultado sorprendente (y sorprendentemente facil de probar) y es dado por el Lema de Urysohn.

1.4. Justificación del estudio

El Lema de Urysohn es uno de esos resultados que el alumno lo recibe más o menos indiferente a pesar de los esfuerzos por parte del profesor en insistir de su importancia, pocas veces, durante la licenciatura, saldrá dicho Lema, pero cuando aparezca será para hacer pasos fundamentales en una demostración o teoría, por ejemplo una caracterización de los espacios normales.

1.5. Objetivos de la investigación

1.5.1. Objetivo general

Establecer la prueba del Teorema (Lema de Urysohn)

1.5.2. Objetivos específicos

- Aplicar el Teorema (Lema de Urysohn) para demostrar cuando un espacio topológico es metrizable.
- Aplicar el Teorema (Lema de Urysohn) para establecer y probar el teorema de extensión

de Tietze

- Aplicar el Teorema (Lema de Urysohn) para establecer la conexión entre el lema de Urysohn y el Teorema de extensión de Tietze.

Capítulo2

Revisión de literatura

En este capítulo presentaremos un resumen de los resultados básicos necesarios para el desarrolo de los capítulos siguientes, abordaremos algunos conceptos a cerca de los espacios normados, espacios métricos, convergencia y continuidad en espacios métricos, espacios métricos completos, espacios topológicos, base de una topología, continuidad y convegencia de redes, axiomas de separación. Tales conceptos son imprescindibles para el entendimiento de la demostración de los resultados que son consecuencias del Teorema (lema) de Urysohn.

2.1. Espacios Métricos

2.1.1. Espacios Vectoriales

Definición 2.1 (Espacio Vectorial). Un conjunto V, no vacio, se llama ESPACIO VECTORIAL sobre un campo $\mathbb{F}$ si está provisto de dos operaciones: suma $(+)$ y producto $(\cdot)$, definidos de la manera siguiente:

$$+ : V \times V \to V \qquad\qquad \cdot : \mathbb{F} \times V \to V$$
$$(x, y) \to x + y \qquad\qquad (\alpha, x) \to \alpha x$$

tales que para todo $x, y, z \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, dichas operaciones satisfacen los axiomas siguientes:

A1. $(x + y) + z = x + (y + z)$

A2. $x + y = y + x$

A3. Existe $0! \in V$ tal que $x + 0 = x$.

A4. Para cada $x \in V$, existe único $-x \in V$ tal que $x + (-x) = 0$.

P1. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

P2. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

P3. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

P4. Existe $1 \in \mathbb{F}$ tal que $1 \cdot x = x$

Los elementos de V se llaman VECTORES y los elementos de $\mathbb{F}$ se llaman ESCALARES. (Norman B. Haaser, 1978, Pág. 61)

Ejemplo 2.1 (Espacio $\mathbb{R}^n$). Sea $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$. Se definen sobre $\mathbb{R}^n$ la suma y producto por escalares mediante:

$$x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n), \quad \alpha x = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n)$$

donde $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial.

Ejemplo 2.2. Sea V el conjunto de todas las funciones de un conjunto no vacio X en un campo $\mathbb{F}$. Para todo par de funciones $f, g \in V$ y todo escalar $\alpha \in \mathbb{F}$, sean $f + g$ y kf las funciones en V con valores en $\mathbb{F}$ definidas por:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{y} \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in X.$$

Entonces V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$.

Definición 2.2 (Subespacio Vectorial). Sea $W \neq \varnothing$ un subconjunto de un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{F}$. Se dice que W es un subespacio vectorial de V, si W es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ con respecto a las operaciones de V: suma de vectores y producto por un escalar.
(Lipschutz, 1992, Pág.170)

Teorema 2.1. *Sea W es un subconjunto de un espacio vectorial V. Entonces W es un subespacio vectorial de V si se cumple:*

(a) $0 \in W$.

(b) Para todo par de vectores $u, v \in W$, la suma $u + v \in W$.

(c) Para todo $u \in W$ y para todo $\alpha \in \mathbb{F}$, la multiplicación $\alpha u \in W$.

Demostración. Para la prueba ver (Lipschutz, 1992, Pág. 194) $\square$

Ejemplo 2.3. Sea $X \neq \varnothing$ un conjunto. El conjunto de las funciones acotadas de X en $\mathbb{R}$ es un subespacio del espacio vectorial:

$$F(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es una función}\}.$$

Ejemplo 2.4. Sean U y W subespacios de un espacio vectorial V. Entonces la intersección $U \cap W$ es también un subespacio de V.

2.1.2. Espacios Normados

Definición 2.3 (Espacios Normados). Sea E un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Una norma en E es una función $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ tal que:

(N1) $\|x\| \geqslant 0$ para todo $x \in E$, con $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ y $x \in E$

(N3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in E$

Un espacio vectorial normando es un par $(E, \| \ \|)$ donde E es un espacio vectorial y $\| \ \|$ es una norma en E.
(Lima, 1976, Pág.23)

Ejemplo 2.5. Sea X cualquier conjunto no vacio. Sea $B(X, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones acotadas con valores reales. Entonces

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(t)| : t \in X\}$$

define una norma en $B(X, \mathbb{R})$.

Ejemplo 2.6 (Espacio $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{F})$). Sea $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{F})$ el espacio de todas las funciones continuas definidas en el intervalo $[0,1]$ con valores en $\mathbb{F}$. La función definida en E por:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\}$$

es un norma en E.

2.1.3. Espacios Métricos

Definición 2.4 (Espacios Métricos). Sea X un conjunto. Una métrica sobre X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

(M1) $d(x,y) \geqslant 0$ para todo $x, y \in X$ y $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in X$

(M3) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ para todo $x, y, z \in X$

Un espacio métrico es un par (X, d), donde X es un conjunto y d es una métrica en X. Si la métrica es obvia o irrelevante para un estudio particular, el espacio métrico (X, d) se escribirá por X.
(Runde, 2005, Pág.23)

Ejemplo 2.7 (El espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$). $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidiana es un espacio métrico. Sea $X = \mathbb{R}^n$ y

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

(M1) $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \geqslant 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, y $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

En efecto,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2} \\ d(x,y) &= d(y,x), \forall x,y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

(M3) $d(x,z) \leqslant d(x,y)+d(y,z)$ para todo $x,y,z \in \mathbb{R}^n$.

En efecto, sean los números reales $u_1,u_2,\cdots,u_n$ y $v_1,v_2,\cdots,v_n$ satisfacen la desigualdad de Cauchy siguiente:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}u_iv_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}{u_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}{v_i}^2\right). \tag{2.1}$$

De la desigualdad (2.1) y haciendo $a_i=x_i-y_i$ y $b_i=y_i-z_i$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2 &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}{b_i}^2\right) \\ 2\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right) &\leqslant 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{b_i}^2} \\ \sum_{i=1}^{n}{a_i}^2+\sum_{i=1}^{n}{b_i}^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right) &\leqslant \sum_{i=1}^{n}{a_i}^2+\sum_{i=1}^{n}{b_i}^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{b_i}^2} \\ \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 &\leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{b_i}^2}\right)^2 \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} &\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{b_i}^2} \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2} &\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2} \\ d(x,z) &\leqslant d(x,y)+d(y,z) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.8 (Subespacios Métricos). Sea (X,d) un espacio métrico y sea Y un subconjunto de X. Entonces la restricción de d a $Y\times Y$ ($d|_{Y\times Y}: Y\times Y \to \mathbb{R}$) transforma a Y en un espacio métrico.

El espacio métrico $(Y, d|_{Y\times Y})$ es llamado subespacio métrico de X, la métrica de Y se dice inducida por la de X.

(Waldmann, 2014, Pág.7)

Ejemplo 2.9 (Metrica inducida por la Norma). Si $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $x, y \in E$, definimos $d : E \times E \to \mathbb{R}$ tal que $d(x, y) = \|x - y\|$, entonces (E, d) es un espacio métrico.

Ejemplo 2.10 (Espacio $B(S, Y)$). Sean $S \neq \varnothing$ un conjunto y (Y, d) un espacio métrico. La función $f : S \to Y$ se dice que es acotada si

$$\sup_{x,y \in S} d(f(x), f(y)) < \infty$$

El conjunto $B(S, Y) = \{f : S \to Y : f \text{ es acotada}\}$ es un espacio métrico con la métrica definida por

$$D(f, g) = \sup_{x \in S} d(f(x), g(x)) \quad (f, g \in B(S, Y)).$$

Ejemplo 2.11. Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos $\widetilde{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que

$$\widetilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad (x, y \in X),$$

entonces $(X, \widetilde{d})$ es también un espacio métrico.

Ejemplo 2.12 (Espacio Métrico Discreto). Sean X un conjunto y la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y, \end{cases}$$

entonces (X, d) es un espacio métrico. La métrica d es llamada la métrica discreta.

2.1.4. Conjuntos Abiertos y Cerrados

Definición 2.5 (Bola Abierta). Sean (X, d) un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $r > 0$. La bola abierta de centro x_0 y radio r se define por:

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

(Runde, 2005, Pág.28)

Proposición 2.2. *Dados dos puntos distintos x, y en un espacio métrico X, entonces existen en X dos bolas abiertas disjuntas con centros x y y respectivamente.*
(Lima, 1976, Pág.27)

Demostración. Sea r tal que $0 < r \leqslant \frac{d(x,y)}{2}$ el radio de las bolas. Supongamos que $B_r(x) \cap B_r(y) \neq \varnothing$. Luego, existe $z \in X$ tal que

$$z \in B_r(x) \cap B_r(y) \Rightarrow z \in B_r(x) \wedge z \in B_r(y).$$

Por consiguiente,

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) < r + r = 2r \leqslant d(x, y)$$

es una contradicción. Por lo tanto $B_r(x) \cap B_r(y) = \varnothing$. □

Ejemplo 2.13 (Bola Abierta en Espacio Discreto). Sean (X, d) un espacio métrico discreto, $x_0 \in X$ y $r > 0$. Entonces

$$B_r(x_0) = \begin{cases} \{x_0\} & , r < 1, \\ X & , r \geqslant 1, \end{cases}$$

Definición 2.6 (Conjunto Abierto). Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $U \subset X$ se dice abierto si, para cada $x \in U$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset U$.
(Runde, 2005, Pág.28)

Ejemplo 2.14. Sean (X, d) es un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $r > 0$. Entonces $U = B_r(x_0)$

es un conjunto abierto.

$$B_r(x_0) \text{ es abierto } \Leftrightarrow \forall x \in B_r(x_0), \exists \epsilon > 0 / B_\epsilon(x) \subset B_r(x_0)$$

Para todo $x \in B_r(x_0)$, tenemos $d(x, x_0) < r \Rightarrow \epsilon := r - d(x, x_0) > 0$. Sea $y \in B_\epsilon(x)$,

$$\begin{aligned} d(y, x_o) &\leqslant d(y, x) + d(x, x_0) \\ &< \epsilon + d(x, x_0) \\ &= r - d(x, x_0) + d(x, x_0) \\ d(y, x_o) &< r \end{aligned}$$

Luego $B_\epsilon(x) \subset B_r(x_0)$. Por lo tanto, la bola abierta es un conjunto abierto.

Proposición 2.3. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces*

(a) $\varnothing$ *y X son abiertos;*

(b) Si $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X, entonces $\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$ es abierto;

(c) Si U_1 y U_2 son subconjuntos abiertos de X, entonces $U_1 \cap U_2$ es abierto.

(Runde, 2005, Pág.29)

Demostración. (a) X es abierto $\Leftrightarrow \forall x \in X, \exists \epsilon > 0 / B_\epsilon(x) \subset X$ (Por definición de bola abierta). Por lo tanto X es abierto.

Supongamos que $\varnothing \subset X$ no es abierto $\Rightarrow \exists x \in \varnothing, \forall \epsilon > 0 / B_\epsilon(x) \not\subset \varnothing$, lo cual es una contracción. Por lo tanto $\varnothing$ es abierto.

(b) Sea $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos abiertos de X y sea $x \in \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$.

$$\begin{aligned} x \in \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\} &\Rightarrow \exists U_0 \in \mathcal{U} \text{ tal que } x \in U_0 \text{ (como } U_0 \text{ es abierto)} \\ &\Rightarrow \exists \epsilon > 0 / B_\epsilon(x) \subset U_0 \subset \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$ es abierto.

(c) Sean $U_1, U_2 \subset X$ abiertos y sea $x \in U_1 \cap U_2$.

Si $x \in U_1 \cap U_2$, entonces $x \in U_1$ y $x \in U_2$

$$\begin{aligned} U_1 \text{ abierto} &\Rightarrow \forall x \in U_1, \exists \epsilon_1 > 0 / B_{\epsilon_1}(x) \subset U_1 \\ U_2 \text{ abierto} &\Rightarrow \forall x \in U_2, \exists \epsilon_2 > 0 / B_{\epsilon_2}(x) \subset U_1 \end{aligned}$$

Sea $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$

$$B_\epsilon(x) \subset B_{\epsilon_1}(x) \subset U_1 \wedge B_\epsilon(x) \subset B_{\epsilon_2}(x) \subset U_2 \Rightarrow B_\epsilon(x) \subset U_1 \cap U_2$$

Por lo tanto, $U_1 \cap U_2$ es abierto.

□

Ejemplo 2.15. Sea (X,d) un espacio métrico. Un subconjunto $U \subset X$ es abierto si, y sólo si, U es la unión de bolas abiertas.

En efecto, es claro que si U es la unión de bolas abiertas, entonces U es abierto. Recíprocamente, si U es abierto

$$\begin{aligned} U \text{ abierto} &\Longrightarrow \forall x \in U, \exists \epsilon_x > 0 / \ \{x\} \subset B_{\epsilon_x}(x) \subset U \\ &\Longrightarrow U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} B_{\epsilon_x}(x) \subset U \\ &\Longrightarrow U = \bigcup_{x \in U} B_{\epsilon_x}(x). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.16. Sean (X, d) un espacio métrico discreto y $S \subset X$. Entonces

$$S = \bigcup_{x \in S} \{x\} = \bigcup_{x \in S} B_1(x)$$

es abierto; es decir, todos los subconjuntos de X son abiertos.

Definición 2.7 (Entorno). Sean (X, d) un espacio métrico y $x \in X$. Un subconjunto N de X es llamado un entorno de x si existe un abierto U de X tal que $x \in U \subset N$. La colección de todos los entornos de x es denotado por $\mathcal{N}_x$.

(Runde, 2005, Pág.29)

Proposición 2.4. *Sean (X, d) un espacio métrico y $x \in X$. Entonces:*

(a) Un subconjunto N de X pertenece a $\mathcal{N}_x$ si y sólo si existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset N$;

(b) Si $N \in \mathcal{N}_x$ y $N \subset M$, entonces $M \in \mathcal{N}_x$;

(c) Si $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_x$, entonces $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}_x$.

Además, un subconjunto U de X es abierto si, y soló si, $U \in \mathcal{N}_y$ para todo $y \in U$. (Runde, 2005, Pág.29)

Demostración. (a) $X \supset N \in \mathcal{N}_x \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 / B_\epsilon(x) \subset N$

Supongamos que $N \subset X$, tal que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset N$. Ya que $B_\epsilon(x)$ es abierto tal que $x \in B_\epsilon(x) \subset N$, luego existe $U = B_\epsilon(x)$ abierto tal que $x \in U \subset N$. Por lo tanto $N \in \mathcal{N}_x$

Supongamos que $N \in \mathcal{N}_x$

$$\begin{aligned} N \in \mathcal{N}_x &\Rightarrow \exists\, U \subset X \text{ abierto tal que } x \in U \subset N \text{ (Como } U \text{ es abierto)} \\ &\Rightarrow \forall x \in U, \exists\, \epsilon > 0 \text{ tal que } B_\epsilon(x) \subset U \subset N \end{aligned}$$

Por lo tanto $\exists\, \epsilon > 0 / B_\epsilon(x) \subset N$

(b) $N \in \mathcal{N}_x \wedge N \subset M \Rightarrow M \in \mathcal{N}_x$

$$\begin{aligned} N \in \mathcal{N}_x &\Rightarrow \exists\, U \text{ abierto tal que } x \in U \subset N \\ &\Rightarrow \exists\, U \text{ abierto tal que } x \in U \subset N \subset M \\ &\Rightarrow \exists\, U \text{ abierto tal que } x \in U \subset M \\ &\Rightarrow M \in \mathcal{N}_x \end{aligned}$$

(c) Si $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_x$, entonces $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}_x$

$$\begin{aligned} N_1 \in \mathcal{N}_x &\Rightarrow \exists\, U_1 \text{ abierto tal que } x \in U_1 \subset N_1 \\ N_2 \in \mathcal{N}_x &\Rightarrow \exists\, U_2 \text{ abierto tal que } x \in U_2 \subset N_2 \\ &\Rightarrow \exists\, U_1 \cap U_2 \text{ abierto tal que } x \in U_1 \cap U_2 \subset N_1 \cap N_2 \\ &\Rightarrow N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}_x \end{aligned}$$

Además, un subconjunto U de X es abierto si y soló si $U \in \mathcal{N}_y$ para todo $y \in U$ $\square$

Definición 2.8 (Conjunto Cerrado). Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto F de X es llamado cerrado si $X \backslash F$ es abierto.
(Runde, 2005, Pág.30)

Definición 2.9 (Bola cerrada). Sean (X, d) un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $r > 0$. La bola cerrada de centro x_0 y radio r se define por:

$$B_r\left[x_0\right] = \left\{x \in X : d(x, x_0) \leqslant r\right\}.$$

(Runde, 2005, Pág.30)

Ejemplo 2.17. Si (X, d) es un espacio métrico, toda bola cerrada $B_r[x_0]$ es un subconjunto cerrado de X.

$$X \backslash B_r\left[x_0\right] \text{ es abierto } \Leftrightarrow \forall x \in X \backslash B_r\left[x_0\right], \exists\, \epsilon > 0 / B_\epsilon(x) \subset X \backslash B_r\left[x_0\right]$$

Sea $x \in X \backslash B_r\left[x_0\right] \Rightarrow d(x, x_0) > r$. Sea $\epsilon := d(x, x_0) - r > 0$

$$\begin{aligned}
y \in B_\epsilon(x) &\Rightarrow d(x, y) < \epsilon \wedge d(x, x_0) \leqslant d(x, y) + d(y, x_0) \\
&\Rightarrow -d(x, y) > -\epsilon \wedge d(y, x_0) \geqslant d(x, x_0) - d(x, y) \\
&\Rightarrow d(y, x_0) \geqslant d(x, x_0) - d(x, y) > d(x, x_0) - \epsilon = d(x, x_0) - d(x, x_0) + r \\
&\Rightarrow d(y, x_0) > r \\
&\Rightarrow y \in X \backslash B_r\left[x_0\right].
\end{aligned}$$

De ello se sigue que $X \backslash B_r\left[x_0\right]$ es abierto, por consiguiente $B_r[x_0]$ es cerrado.

Ejemplo 2.18. Si (X, d) es espacio métrico discreto, entonces todo subconjunto U de X es abierto y cerrado.

Proposición 2.5. *Sea (X, d) un espacio metrico. Entonces,*

(a) $\varnothing$ y X son cerrados;

(b) *Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X, entonces $\bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\}$ es cerrado;*

(c) *Si F_1 y F_2 son subconjuntos cerrados de X, entonces $F_1 \cup F_2$ es cerrado.*

(Runde, 2005, Pág.30)

Demostración. (a) $\varnothing$ es cerrado, puesto que X es abierto.

X es cerrado, puesto que $\varnothing$ es abierto.

(b) Sabemos que $X \backslash \bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\} = \bigcup\{X \backslash F : F \in \mathcal{F}\}$, es claro que $X \backslash F$ es abierto puesto que $F \in \mathcal{F}$ es cerrado, entonces $X \backslash \bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\}$ es abierto. Por lo tanto, $\bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\}$ es cerrado.

(c) Sabemos que $X \backslash (F_1 \cup F_2) = (X \backslash F_1) \cap (X \backslash F_2)$, es claro que $X \backslash F_1$ y $X \backslash F_2$ son abiertos puesto que F_1 y F_2 son cerrados respectivamente, entonces $X \backslash (F_1 \cup F_2)$ es abierto. Por lo tanto, $F_1 \cup F_2$ es cerrado.

□

Definición 2.10 (Clausura). Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $S \subset X$, la clausura de S se define por:

$$\overline{S} = \bigcap \{F : F \subset X \text{ cerrado y } S \subset F\}.$$

(Runde, 2005, Pág.30)

Observación. De la Proposición 2.5 (b) es inmediato que la clausura de un conjunto es un conjunto cerrado.

Proposición 2.6. *Sean (X, d) un espacio métrico y $S \subset X$. Entonces*

$$\begin{aligned} \overline{S} &= \{x \in X : N \cap S \neq \varnothing \text{ para todo } N \in \mathcal{N}_x\} \\ &= \{x \in X : B_\epsilon(x) \cap S \neq \varnothing \text{ para todo } \epsilon > 0\}. \end{aligned}$$

(Runde, 2005, Pág.31)

Demostración. Cada bola abierta es un entorno de su centro y cualquier entorno de un punto contiene una bola abierta centrada en ese punto; por lo tanto,

$$\{x \in X : N \cap S \neq \varnothing \text{ para todo } N \in \mathcal{N}_x\} = \{x \in X : B_\epsilon(x) \cap S \neq \varnothing \text{ para todo } \epsilon > 0\}.$$

Denotamos $\mathrm{cl}(s) = \{x \in X : N \cap S \neq \varnothing \text{ para todo } N \in \mathcal{N}_x\}$

i) Sea $x \in \overline{S}$ y $N \in \mathcal{N}_x \Rightarrow x \in \overline{S}$ y $\exists\, U \subset X$ abierto tal que $x \in U \subset N$

Supongamos que $N \cap S = \varnothing \quad \Rightarrow \quad U \cap S = \varnothing$

$\Rightarrow \quad S \subset X \backslash U.$

$\Rightarrow \quad \overline{S} \subset X \backslash U,$ Ya que $X \backslash U$ es cerrado.

$\Rightarrow \quad x \in X \backslash U$ es una contradicción puesto que $x \in U$.

Por lo tanto $\overline{S} \subset \mathrm{cl}(S)$

ii) Sea $x \in \mathrm{cl}(S)$

Supongamos que $x \notin \overline{S} \quad \Rightarrow \quad U = X \backslash \overline{S}$ es un abierto conteniendo x

$\Rightarrow \quad x \in X \backslash \overline{S} = U \in \mathcal{N}_x$

$\Rightarrow \quad U \cap S = \varnothing$ es una contradicción ya que $N \cap S \neq \varnothing$.

Por lo tanto $\mathrm{cl}(S) \subset \overline{S}$.

□

Observación. Si (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$, entonces

$$X = \overline{X}, A \subset \overline{A} \text{ y } A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}.$$

Además, A es cerrado si, y sólo si, $A = \overline{A}$.

(Lima, 1983, Pág.73)

Ejemplo 2.19. Cualquier intervalo abierto en $\mathbb{R}$ contiene números racionales. Por lo tanto, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.20. Sea (X, d) un espacio métrico. Es claro que $\overline{B_r(x_0)} \subset B_r[x_0]$ para todo $x_0 \in X$ y $r > 0$. En general, la igualdad no se cumple. Si (X, d) es discreto y tiene más de un elemento, tenemos para cualquier $x_0 \in X$ que

$$\overline{B_1(x_0)} = \overline{\{x_0\}} = \{x_0\} \subsetneq X = B_1[x_0].$$

Definición 2.11 (Denso y Separable). Sea (X, d) un espacio métrico.

a) Un subconjunto D de X se dice denso en X si $\overline{D} = X$.

b) Si X tiene un subconjunto denso numerable, entonces X es llamado separable.

(Runde, 2005, Pág.31)

Ejemplo 2.21. $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. En particular, $\mathbb{R}$ es separable.

2.1.5. Convergencia y Continuidad

Definición 2.12 (Convergencia de Sucesiones). Sea (X, d) un espacio métrico. La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$en X se dice convergente a $x \in X$ si, para cada $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ para todo $n \geqslant n_\epsilon$. Entonces decimos que x es el límite de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y escribimos $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ o $x_n \to x$.
(Runde, 2005, Pág.35)

Simbólicamente

$$\boxed{x = \lim_{n\to\infty} x_n \iff \forall\epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}/n \geqslant n_\epsilon \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon}$$

Observación. (a) La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un espacio métrico converge a x si, y sólo si, para cada $N \in \mathcal{N}_x$, existe $n_N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in N$ para todo $n \geqslant n_N$.

(b) Afirmar que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ en un espacio métrico X, equivale a decir que toda bola abierta de centro x (o todo entorno N de x) contiene x_n para todo valor de n, con excepción de un número finito de ellos.

Definición 2.13 (Sucesión Acotada). Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un espacio métrico X se dice acotada si el conjunto de términos de la sucesión es acotada, es decir, debe existir $c > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leqslant c$ para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$.
(Lima, 1983, Pág.116)

Proposición 2.7. *Toda sucesión convergente es acotada.*
(Lima, 1983, Pág.118)

Demostración. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ en un espacio métrico X. Escogemos $\epsilon = 1$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n_\epsilon \Rightarrow x_n \in B_1(x).$$

Por lo tanto el conjunto de los términos de la sucesión está contenido en:

$$\{x_1, \cdots, x_{n_\epsilon - 1}\} \cup B_1(x),$$

luego la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada. □

Proposición 2.8 (Subsucesión Convergente). *Si $x_n \to x$, entonces toda subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para x.*
(Lima, 1983, Pág.119)

Demostración. Sea $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$.

$$x_n \to x \Longrightarrow \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / \; n \geqslant n_\epsilon \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon.$$

Luego existe también $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_\epsilon} \geqslant n_\epsilon$. De ahí sigue que

$$k \geqslant k_\epsilon \Rightarrow n_k \geqslant n_{k_\epsilon} \geqslant n_\epsilon \Rightarrow d(x_{n_k}, x) < \epsilon.$$

Por lo tanto $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. □

Ejemplo 2.22. Sea (X, d) un espacio métrico discreto, y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X que converge a $x \in X$. Entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < 1$ para $n \geqslant n_1$; es decir, $x_n = x$ para $n \geqslant n_1$. por lo tanto, toda sucesión convergente en un espacio métrico discreto es eventualmente constante.

Definición 2.14 (Convergencia Puntual). Se dice que una sucesión de funciones $f_n : M \to X$ (definidas en un conjunto arbitrario M y tomando valores en un espacio métrico X) converge puntualmente a la función $f : M \to X$ en M si, para cada $x \in M$, la sucesión $(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots)$ tiene límite $f(x) \in X$. Esto es, para cada $x \in M$, se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
(Lima, 1983, Pág.129)

Observación. Esto significa que, dados arbitrariamente $x \in M$ y $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ (dependiendo de x y ϵ) tal que $n \geqslant n_\epsilon \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$.

Ejemplo 2.23. La sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a la función idénticamente nula. En efecto, para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo, se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$. Más detalladamente: dados $x \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$, tomemos $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n_\epsilon > \dfrac{|x|}{\epsilon}$.

$$\begin{aligned} n \geqslant n_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad n \geqslant n_\epsilon > \frac{|x|}{\epsilon} \\ &\Rightarrow \quad \left|\frac{x}{n}\right| < \epsilon \end{aligned}$$

Note que, manteniendo $\epsilon > 0$ fijo, no se puede determinar un número natural n_ϵ que sea satisfactorio para todos los puntos $x \in \mathbb{R}$.

Definición 2.15 (Convergencia Uniforme). Sea M un conjunto arbitrario, sea X un espacio métrico. Se dice que una sucesión de funciones $f_n : M \to X$ converge uniformemente a la función $f : M \to X$ en M si, para todo número real $\epsilon > 0$ dado, es posible obtener $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ (dependiendo apenas de ϵ) tal que $n \geqslant n_\epsilon \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$, para todo $x \in M$.
(Lima, 1983, Pág.129)

Ejemplo 2.24. La sucesión de funciones $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ converge uniformemente para la función idénticamente nula en cualquier subconjunto limitado $M \subset \mathbb{R}$. En efecto, si

$|x| \leqslant c$ para todo $x \in M$, entonces, dado $\epsilon > 0$, basta tomar $n_\epsilon > \dfrac{c}{\epsilon}$.

$$\begin{aligned} n \geqslant n_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad n \geqslant n_\epsilon > \frac{c}{\epsilon} \\ &\Rightarrow \quad \epsilon > \frac{c}{n} \geqslant \frac{|x|}{n} \\ &\Rightarrow \quad \left|\frac{x}{n}\right| < \epsilon \end{aligned}$$

para cualesquiera $x \in M$. Por otro lado, la sucesión de funciones $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}$. En efecto, si tomamos $\epsilon = 1$, por ejemplo, sea cual fuera n_ϵ escogido, podemos hallar $n \geqslant n_\epsilon$ y $x \in \mathbb{R}$ tales que $\left|\dfrac{x}{n}\right| > 1$. Basta tomar $n \geqslant n_\epsilon$ y después $x > n$. Esto muestra que la convergencia $x/n \to 0$ no es uniforme en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.25. Sea $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{F})$ con la métrica inducida por $\|\cdot\|_\infty$ (Ejemplo 2.6). La sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ en $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{F})$ converge a $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{F})$ con respecto a la métrica inducida si y sólo si converge uniformemente a f en $[0,1]$.

$$\begin{aligned} & \text{Supongamos que } (f_n)_{n=1}^\infty \text{ converge a } f \\ \Rightarrow\quad & \forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / \ n \geqslant n_\epsilon \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty < \epsilon \\ \Rightarrow\quad & \forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / \ n \geqslant n_\epsilon \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty < \epsilon, \forall t \in [0,1] \\ \Rightarrow\quad & (f_n)_{n=1}^\infty \text{ converge a } f \text{ uniformemente en } [0,1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Supongamos ahora que } f_n \to f \text{ uniformemente en } [0,1] \\ \Longrightarrow\quad & \forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / \ n \geqslant n_\epsilon \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall t \in [0,1] \end{aligned}$$

en consecuencia $\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(t) - f(t)| : t \in [0,1]\} \leqslant \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Por lo tanto tenemos la convergencia con respecto a $\|\cdot\|_\infty$

Proposición 2.9. *Sean (X, d) un espacio métrico, $(x_n)_{n=1}^\infty$ un sucesión en X y sea $x, x' \in X$ tales que $(x_n)_{n=1}^\infty$ converge a x y x'. Entonces x y x' son iguales. Es decir, el límite de una sucesión convergente es único.*

(Runde, 2005, Pág.35)

Demostración. Supongamos que $x \neq x'$, de modo que $\epsilon = \dfrac{d(x,x')}{2} > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} x_n \to x &\quad\Leftrightarrow\quad \exists\, n_1 \in \mathbb{N}/n \geqslant n_1 \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon \\ x_n \to x' &\quad\Leftrightarrow\quad \exists\, n_2 \in \mathbb{N}/n \geqslant n_2 \Rightarrow d(x_n, x') < \epsilon \end{aligned}$$

Sea $n = \text{máx}\,\{n_1, n_2\}$, entonces

$$d(x,x') \leqslant d(x,x_n) + d(x_n,x') < \epsilon + \epsilon = d(x,x'),$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x = x'$. $\square$

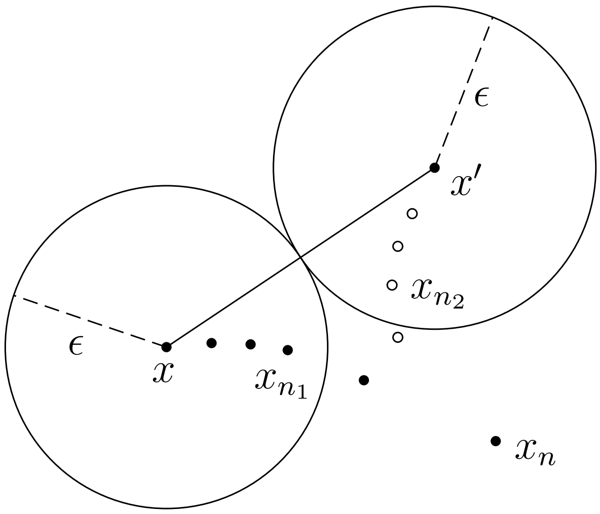

Figura 2.1: Unicidad del Límite

Proposición 2.10. *Sea (X,d) un espacio métrico y sea $S \subset X$. Entonces $\overline{S}$ es el conjunto de puntos de X que son el límite de una sucesión en S.*
(Runde, 2005, Pág.36)

Demostración. $*$ Sea $x \in X$ el límite de una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en S y sea $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} x_n \to x &\quad\Rightarrow\quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}/n \geqslant n_\epsilon \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon \\ &\quad\Rightarrow\quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}/n \geqslant n_\epsilon \Rightarrow x_n \in B_\epsilon(x). \end{aligned}$$

Luego $x_n \in B_\epsilon(x) \wedge x_n \in S \Rightarrow B_\epsilon(x) \cap S \neq \varnothing, \forall \epsilon > 0$. Por lo tanto $x \in \overline{S}$.

* Sea $x \in \overline{S}$,

$$\begin{aligned} x \in \overline{S} &\Rightarrow B_\epsilon(x) \cap S \neq \varnothing, \forall \epsilon > 0 \\ &\Rightarrow B_{\frac{1}{n}}(x) \cap S \neq \varnothing, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in S$ con $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Luego, es claro que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x.

□

Corolario 2.11. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces $F \subset X$ es cerrado si, y sólo si, toda sucesión en F que converge en X tiene su límite en F.*
(Runde, 2005, Pág.36)

Definición 2.16 (Continuidad). Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos y sea $x_0 \in X$. Entonces $f : X \to Y$ se dice que es continua en x_0 si para cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X que converge a x_0, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
(Runde, 2005, Pág.36)

Ejemplo 2.26. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases},$$

es discontinua en el punto $x_0 = 0$

Teorema 2.12. *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos y sea $x_0 \in X$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes para $f : X \to Y$.*

(a) f es continua en x_0.

(b) Para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \text{ y } d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

(c) Para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0)))$.

(d) Para cada $N \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$, implica $f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_{x_0}$

(Runde, 2005, Pág.37)

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$: Demostraremos que $\sim (b) \Rightarrow \sim (a)$; es decir, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe x_δ con $d_X(x_\delta, x_0) < \delta$ y $d_Y(f(x_\delta), f(x_0)) \geqslant \epsilon_0$. Para $n \in \mathbb{N}$. Sea $x'_n = x_{\frac{1}{n}}$, de modo que $d_X(x'_n, x_0) < \frac{1}{n}$ y por lo tanto $x_n{}' \to x_0$. Ya que $d_Y(f(x_n{}'), f(x_0)) \geqslant \epsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n{}') \nrightarrow f(x_0)$. como se requiere para que f sea continua en x_0.

$(b) \Rightarrow (c)$: Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon &\implies x \in B_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in B_\epsilon(f(x_0)) \\ &\implies x \in B_\delta(x_0) \Rightarrow x \in f^{-1}\left(B_\epsilon(f(x_0))\right) \\ &\implies B_\delta(x_0) \subset f^{-1}\left(B_\epsilon(f(x_0))\right) \end{aligned}$$

$(c) \Rightarrow (d)$: Sea $N \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$. Por lo tanto existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B_\epsilon(f(x_0)) \subset N \Rightarrow f^{-1}\left(B_\epsilon(f(x_0))\right) \subset f^{-1}(N).$$

Por (c) existe $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(x_0) \subset f^{-1}\left(B_\epsilon(f(x_0))\right) \subset f^{-1}(N)$$

Esto implica $f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_{x_0}$.

$(d) \Rightarrow (a)$: Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $x_n \to x_0$. Sea $N \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$ de modo que $f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_{x_0}$. Ya que $x_n \to x_0$, existe n_N tal que $x_n \in f^{-1}(N)$ para $n \leqslant n_N$; es decir, $f(x_n) \in N$ para $n \leqslant n_N$. Ya que $N \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$ fue arbitrario, se tiene $f(x_n) \to f(x_0)$. □

Definición 2.17 (Continuidad en su Dominio). Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Entonces la función $f : X \to Y$ se dice ser continua si es continua en cada punto de X. (Runde, 2005, Pág.37)

Ejemplo 2.27. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Afirmamos que

$$|d(x,y) - d(x_0,y_0)| \leqslant d(x,x_0) + d(y,y_0) \quad (x,x_0,y,y_0 \in X). \tag{2.2}$$

a) Fijemos $x, x_0, y, y_0 \in X$, entonces

$$d(x,y) \leqslant d(x,x_0) + d(x_0,y_0) + d(y_0,y) \tag{2.3}$$
$$d(x,y) - d(x_0,y_0) \leqslant d(x,x_0) + d(y_0,y) \tag{2.4}$$

Por otro lado,

$$d(x_0,y_0) \leqslant d(x_0,x) + d(x,y) + d(y,y_0) \tag{2.5}$$
$$d(x_0,y_0) - d(x,y) \leqslant d(x,x_0) + d(y_0,y) \tag{2.6}$$
$$-(d(x,x_0) + d(y_0,y)) \leqslant d(x,y) - d(x_0,y_0) \tag{2.7}$$

De las desigualdades (2.4) y (2.7) obtenemos $|d(x,y) - d(x_0,y_0)| \leqslant d(x,x_0)+d(y,y_0)$

b) El producto cartesiano X^2 es un espacio métrico con la métrica

$$\tilde{d}((x,y),(x',y')) = d(x,x') + d(y,y')$$

La desigualdad (2.2) proporciona inmediatamente que la función distancia $d : X^2 \to \mathbb{R}$ es continua, si X^2 está dotado con la métrica $\tilde{d}$.
En efecto, sea $(x_0, y_0) \in X^2$ arbitrario y sea $\epsilon > 0$, existe $\epsilon = \delta$ tal que

$$\tilde{d}((x,y),(x_0,y_0)) < \delta \Rightarrow |d(x,y) - d(x_0,y_0)| \leqslant d(x,x_0) + d(y,y_0) < \delta = \epsilon.$$

Por lo tanto d es continua.

Corolario 2.13. *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios metricos. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes para $f : X \to Y$.*

(a) f es continua.

(b) $f^{-1}(U)$ es abierto en X para cada subconjunto abierto U de Y.

(c) $f^{-1}(F)$ *es cerrado en* X *para cada subconjunto cerrado* F *de* Y.

(Runde, 2005, Pág.38)

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$:

$$\begin{aligned} \text{Sea } U \subset Y \text{ abierto} &\Rightarrow U \in \mathcal{N}_y, \forall y \in U \\ &\Rightarrow U \in \mathcal{N}_{f(x)}, \forall f(x) \in U \\ &\Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{N}_x, \forall x \in f^{-1}(U) \\ &\Rightarrow f^{-1}(U) \text{ es abierto.} \end{aligned}$$

$(b) \Rightarrow (c)$:

$$\begin{aligned} \text{Sea } F \subset Y \text{ cerrado} &\Rightarrow Y \backslash F \text{ es abierto} \\ &\Rightarrow f^{-1}(Y \backslash F) \text{ es abierto} \\ &\Rightarrow f^{-1}(Y \backslash F) = X \backslash f^{-1}(F) \text{ es abierto} \\ &\Rightarrow f^{-1}(F) \text{ es cerrado.} \end{aligned}$$

$(c) \Rightarrow (b)$:

$$\begin{aligned} \text{Sea } U \subset Y \text{ abierto} &\Rightarrow Y \backslash U \text{ es cerrado} \\ &\Rightarrow f^{-1}(Y \backslash U) \text{ es cerrado} \\ &\Rightarrow f^{-1}(Y \backslash U) = X \backslash f^{-1}(U) \text{ es cerrado} \\ &\Rightarrow f^{-1}(U) \text{ es abierto.} \end{aligned}$$

$(b) \Rightarrow (a)$: Sean $x \in X$, $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} B_\epsilon(f(x)) \text{ abierto} &\Rightarrow f^{-1}(B_\epsilon(f(x))) \text{ es abierto} \\ &\Rightarrow \exists \delta > 0 / B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x))) \\ &\Rightarrow f \text{ es continua.} \end{aligned}$$

$\square$

Definición 2.18 (Distancia punto a conjunto). Sean (X, d) un espacio métrico y $\varnothing \neq S \subset X$. Entonces la distancia de $x \in X$ a S se define:

$$\operatorname{dist}(x, S) = \text{ínf}\,\{d(x, y) : y \in S\}\,.$$

(Lima, 1983, Pág.17)

Proposición 2.14. *Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a, b \in X$ y un subconjunto no vacio $S \subset X$, entonces:*

$$|\operatorname{dist}(a, S) - \operatorname{dist}(b, S)| \leqslant d(a, b)$$

(Lima, 1983, Pág.18)

Demostración. Para todo $x \in S$, tenemos

$$\operatorname{dist}(a, S) \leqslant d(a, x) \leqslant d(a, b) + d(b, x) \Rightarrow \operatorname{dist}(a, S) - d(a, b) \leqslant d(b, x),$$

luego

$$\operatorname{dist}(a, S) - d(a, b) \leqslant \operatorname{dist}(b, S) \Rightarrow \operatorname{dist}(a, S) - \operatorname{dist}(b, S) \leqslant d(a, b). \qquad \text{(i)}$$

Intercambiando a por b

$$\operatorname{dist}(b, S) - \operatorname{dist}(b, a) \leqslant d(a, S) \Rightarrow -d(a, b) \leqslant \operatorname{dist}(a, S) - \operatorname{dist}(b, S). \qquad \text{(ii)}$$

Por lo tanto de (i) y (ii): $|\operatorname{dist}(a, S) - \operatorname{dist}(b, S)| \leqslant d(a, b)$. $\square$

Definición 2.19 (Diamétro de un Conjunto). Sea (X, d) un espacio métrico. El diamétro de un subconjunto $S \neq \varnothing$ de X se define por:

$$\operatorname{diam}(S) = \sup\,\{d(x, y) : x, y \in S\}\,.$$

(Lima, 1983, Pág.12)

Ejemplo 2.28. Sea (X, d) un espacio métrico. Toda bola $B_r(a)$ es un conjunto acotado y su diamétro no excede a $2r$.

Ejemplo 2.29. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\varnothing \neq S \subset X$. La función $X \to \mathbb{R}$ dada por

$$x \to \operatorname{dist}(x, S)$$

es continua

Ejemplo 2.30. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos tal que (X, d_X) es discreto, y sea $f : X \to Y$ arbitrario. Entonces f es continua.

Ejemplo 2.31. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{si } x \leqslant 3 \\ \frac{1}{2}(x + 5), & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

Ya que $f^{-1}(\langle 1, 3\rangle) = \langle 2, 3]$, f no es continua.

Definición 2.20 (Métricas Equivalentes). Sea X un conjunto. Dos métricas d_1 y d_2 en X se dice que son equivalentes si la función identidad sobre X de (X, d_1) en (X, d_2) y de (X, d_2) en (X, d_1) son continuas.
(Runde, 2005, Pág.38)

Observación. En vista al Corolario 2.13, dos métricas d_1 y d_2 en el conjunto X son equivalentes si, y sólo si, proporcionan el mismo conjunto abierto (o, equivalentemente, el mismo conjunto cerrado).

Ejemplo 2.32. La métrica euclidiana en $\mathbb{R}^n$ y la métrica discreta no son equivalentes.

Ejemplo 2.33. Para $j = 1, \cdots, n$, sean (X_j, d_j) espacios métricos. Sea $X := X_1 \times \cdots \times X_n$, y para $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in X$, se define

$$D_1(x, y) = \sum_{j=1}^{n} d_j(x_j, y_j) \quad \text{y} \quad D_\infty(x, y) = \max_{j=1,\cdots,n} d_j(x_j, y_j).$$

Entonces D_1 y D_∞ son métricas en X que satisfacen

$$D_\infty(x, y) \leqslant D_1(x, y) \leqslant nD_\infty(x, y) \quad (x, y \in X).$$

Consecuentemente, D_1 y D_∞ son equivalentes.

Ejemplo 2.34. Sea (X, d) cualquier espacio métrico y sea $\widetilde{d}$ la métrica definida en el Ejemplo 2.11. Afirmamos que d y $\widetilde{d}$ son equivalentes. Probaremos ello:

a) $id : (X, d) \to (X, \widetilde{d})$ es continua. En efecto, sea $x_0 \in X$ y sea $\epsilon > 0$. Existe $\delta = \epsilon$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \widetilde{d}(x, x_0) = \frac{d(x, x_0)}{1 + d(x, x_0)} \leqslant d(x, x_0) < \delta = \epsilon$$

b) $id : (X, \widetilde{d}) \to (X, d)$ es continua. En efecto, sea $x_0 \in X$ y sea $\epsilon > 0$. Existe $\delta = \dfrac{\epsilon}{1+\epsilon} > 0$ tal que

$$\widetilde{d}(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} < \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \quad \Rightarrow d(x, y) < \epsilon$$

2.1.6. Completitud

Definición 2.21 (Sucesión de Cauchy). Sea (X, d) un espacio métrico. La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X, es una sucesión de Cauchy si, para cada $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon > 0$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para todo $n, m \geqslant n_\epsilon$.
(Runde, 2005, Pág.41)
Simbólicamente

$$\boxed{(x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ en } X \text{ es una sucesión de Cauchy} \iff \forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / n, m \geqslant n_\epsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon.}$$

Proposición 2.15. *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente en X. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy.*
(Runde, 2005, Pág.41)

Demostración. Sea $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ y sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $n_\epsilon > 0$ tal que $d(x_n, x) < \dfrac{\epsilon}{2}$ para todo $n \geqslant n_\epsilon$. Consecuentemente, tenemos

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad (n, m \geqslant n_\epsilon),$$

de modo que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. $\square$

Observación. En $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidiana: toda sucesión de Cauchy es convergente. Para espacios métricos en general, este resultado recíproco no se cumple. Por ejemplo la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ es Cauchy en el espacio métrico $\langle 0, 1]$ con la métrica usual, pero no tiene límite en el espacio $\langle 0, 1]$.

Proposición 2.16. *Toda sucesión de Cauchy es acotada.*
(Lima, 1983, Pág.162)

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en un espacio métrico (X, d). Dado $\epsilon = 1$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geqslant n_\epsilon \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Luego el conjunto $\{x_{n_\epsilon}, x_{n_\epsilon+1}, \cdots\}$ es acotado. De ello se sigue que

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} = \{x_1, \cdots, x_{n_\epsilon-1}\} \cup \{x_{n_\epsilon}, x_{n_\epsilon+1}, \cdots\}$$

es acotado. $\square$

Proposición 2.17. *Una sucesión de Cauchy que tiene una subsucesión convergente es convergente (y tiene el mismo limite que la subsucesión).*
(Lima, 1983, Pág.162)

Demostración. Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en un espacio métrico X y una subsucesión que converge a un punto $x \in X$. Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. En efecto, dado $\epsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geqslant p \Rightarrow d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Existe también $q \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geqslant q \Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $n_\epsilon = \max\{p, q\}$. Para todo $n \geqslant n_\epsilon$ existe $n_k \geqslant n_\epsilon$ entonces

$$d(x_n, x) \geqslant d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. $\square$

Definición 2.22 (Espacio Completo). Un espacio métrico (X, d) es llamado completo si toda sucesión de Cauchy en X converge.
(Runde, 2005, Pág.41)

Definición 2.23 (Espacio de Banach). Un espacio vectorial normado que es completo con respecto a la métrica inducida por la norma es llamado espacio de Banach.
(Folland, 1999, Pág.152)

Ejemplo 2.35. El espacio métrico $\mathbb{R}^n$ es completo.

Ejemplo 2.36. En un espacio métrico discreto, toda sucesión de Cauchy es eventualmente constante y por consiguiente convergente. Por lo tanto, un espacio métrico discreto es completo.

Ejemplo 2.37. Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto. y sea (Y, d) un espacio métrico completo. Entonces el espacio métrico $(B(S, Y), D)$ del Ejemplo 2.10 es completo. Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $B(S, Y)$. Sea $\epsilon > 0$

$$(f_n)_{n=1}^{\infty} \text{ es Cauchy} \Longrightarrow \exists n_\epsilon > 0 / \ n, m \geqslant n_\epsilon \Rightarrow D(f_n, f_m) < \epsilon.$$

Para $x \in S$, tenemos

$$n, m \geqslant n_\epsilon \Rightarrow d(f_n(x), f_m(x)) \leqslant D(f_n, f_m) < \epsilon$$

Consecuentemente, $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en Y para cada $x \in S$. Ya que Y es completo, esta sucesión es convergente para cada $x \in S$, por lo tanto definimos $f : S \to Y$ por:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \quad (x \in S).$$

Afirmamos que $f \in B(S, Y)$, y es el límite de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ con respeto a la métrica de D. Para ver esto, sea $x \in S$ y note que del Ejemplo 2.27.

$$|d(f_n(x), f_m(x)) - d(f_n(x), f(x))| \leqslant d(f_n(x), f_n(x)) + d(f_m(x), f(x)) \to 0,$$

luego

$$\lim_{m\to\infty} d(f_n(x), f_m(x)) = d(f_n(x), f(x)), \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

De ello se sigue para $n \geqslant n_\epsilon$ que

$$d(f_n(x), f(x)) = \lim_{m\to\infty} d(f_n(x), f_m(x)) \leqslant \lim_{m\to\infty} \sup D(f_n, f_m) \leqslant \epsilon \ \ (x \in S).$$

Sea $n \geqslant n_\epsilon$ y sea $C = \sup_{x,y\in S} d(f_n(x), f_n(y))$, el cual es finito por la definición de $B(S,Y)$. De la anterior desigualdad, obtenemos para $x, y \in S$ arbitrarios

$$d(f(x), f(y)) \leqslant d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y)) \leqslant 2\epsilon + C.$$

Por lo tanto, $f \in B(S,Y)$. Ya que $n \geqslant n_\epsilon \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leqslant \epsilon$ para todo $x \in S$, obtenemos:

$$n \geqslant n_\epsilon \Rightarrow D(f_n, f) = \sup_{x\in S} d(f_n(x), f(x)) \leqslant \epsilon$$

Se concluye que $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ en $(B(S,Y), D)$.

Proposición 2.18. *Sea (X,d) un espacio métrico y sea Y un subespacio de X.*

(a) Si X es completo y Y es cerrado en X, entonces Y es completo.

(b) Si Y es completo, entonces es cerrado en X.

(Runde, 2005, Pág.42)

Demostración. (a) Sea X completo y Y cerrado en X

$$\begin{aligned}
\text{Sea } (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ una sucesión de Cauchy en } Y &\Rightarrow (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ una sucesión de Cauchy en } X\\
&\Rightarrow x_n \to x,\ x \in X\\
&\Rightarrow x_n \to x,\ x \in Y \text{ puesto que } Y \text{ es cerrado en } X\\
&\Rightarrow Y \text{ es completo}
\end{aligned}$$

(b) Sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Y que converge a $y \in X$. Ya que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge en X, es una sucesión de Cauchy en X y por lo tanto en Y.

$$\begin{aligned} Y \text{ es completo} \quad &\Rightarrow \quad \exists y' \in Y \text{ con } \lim_{n\to\infty} y_n = y' \in Y \subset X \\ &\Rightarrow \quad y' = y \in Y \text{ por unicidad del límite} \\ &\Rightarrow \quad Y \text{ es cerrado en } X. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.38. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Definimos

$$C(X,Y) = \{f : X \to Y : f \text{ es continua }\}$$

y

$$C_b(X,Y)S = B(X,Y) \cap C(X,Y).$$

Claramente, $C_b(X,Y)$ es un subespacio del espacio métrico $(B(X,Y), D)$. Afirmamos que $C_b(X,Y)$ es cerrado en $B(X,Y)$ y por lo tanto completo si (Y, d_Y) es completo. Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C_b(X,Y)$ que converge a $f \in B(X,Y)$. Afirmamos que f es continua. Para ver esto, fijemos $x_o \in X$. Mostraremos que f es continua en x_0. Sea $\epsilon > 0$.

$$f_n \to f \in B(X,Y) \Longrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}/n \geqslant n_\epsilon \Rightarrow D(f_n, f) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Fijemos $n \geqslant n_\epsilon$. Ya que f_n es continua en x_0, el conjunto $N = f_n^{-1}(B_{\frac{\epsilon}{3}}(f_n(x_0)))$ es un entorno de x_0. Sea $x \in N$, y note que

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) \quad &\leqslant \quad d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f(x_0)) \\ &\leqslant \quad D(f_n, f) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + D(f_n, f) \\ &< \quad \frac{2\epsilon}{3} + d(f_n(x), f_n(x_0)), \text{ porque } n \geqslant n_\epsilon \\ d(f(x), f(x_0)) \quad &< \quad \epsilon \text{ por que } x \in N. \end{aligned}$$

Luego $f(x) \in B_\epsilon(f(x_0)) \Rightarrow x \in f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0)))$. Se sigue que $N \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0)))$, de modo que $f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0))) \in \mathcal{N}_{x_0}$. Ya que $\epsilon > 0$ fue arbitrario, f es continua en x_0.

2.1.7. Compacidad

Definición 2.24 (Cubrimiento Abierto). Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $S \subset X$. Un cubrimiento abierto de S es una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos abiertos de X tal que $S \subset \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$.
(Runde, 2005, Pág.52)

Ejemplo 2.39. Sea el intervalo $\langle 0, 1\rangle$ un subespacio del espacio métrico $\mathbb{R}$. Entonces la colección $\mathcal{U} = \{U_n\}$ tal que $U_n = \left\langle \frac{1}{n}, 1\right\rangle, n = 1, 2, \cdots$, es un cubrimiento de $\langle 0, 1\rangle$.

Definición 2.25 (Espacio Compacto). Un subconjunto K de un espacio métrico (X, d) es compacto si, para cada cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de K, existen $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ tal que

$$K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n.$$

(Runde, 2005, Pág.52)

Ejemplo 2.40. Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $S \subset X$ finito. Entonces S es compacto.
En efecto, sea $U = \{x_1, \cdots, x_n\}$ y sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de S

$$\begin{aligned} S \subset \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\} \quad &\Rightarrow \quad \forall j = 1, \cdots, n, \exists U_j \in \mathcal{U}/x_j \in U_j \\ &\Rightarrow \quad S \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, S es compacto.

Ejemplo 2.41. Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $\varnothing \neq K \subset X$ compacto. Fijemos $x_0 \in K$. Ya que $\{B_r(x_0) : r > 0\}$ es un cubrimiento abierto de K, existen $r_1, \cdots, r_n > 0$ tal que

$$K \subset B_{r_1}(x_0) \cup \cdots \cup B_{r_n}(x_0).$$

Si $R := \max\{r_1, \cdots, r_n\}$, observamos que $K \subset B_R(x_0)$, de modo que $\operatorname{diam}(K) \leqslant 2R < \infty$. Esto significa, por ejemplo, que cualquier subconjunto no acotado de $\mathbb{R}^n$ (o más generalmente, cualquier espacio normado) no puede ser compacto. En particular, el único espacio compacto normado es $\{0\}$.

Ejemplo 2.42. Sea un espacio métrico $X = \langle 0, 1\rangle$ con la métrica usual. Entonces la colección $\mathcal{U} = \{U_n\}$ tal que $U_n = \left\langle \frac{1}{n}, 1\right\rangle$ y $n = 1, 2, \cdots$, es un cubrimiento abierto de $\langle 0, 1\rangle$ que no tiene un subcubrimiento finito. Por lo tanto $X = \langle 0, 1\rangle$ no es compacto.

Proposición 2.19. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Entonces X es acotado.* *(Lima, 1983, Pág.212)*

Demostración. Sea $x \in X$ y sea $\{B_1(x) : x \in X\}$ un cubrimiento abierto de X, entonces existen $x_1, \cdots, x_n$ tal que

$$X = B_1(x_1) \cup \cdots \cup B_1(x_n)$$

Luego X es acotado. □

Proposición 2.20. *Sea (X, d) un espacio métrico y sea Y un subespacio de X.*

(a) Si X es compacto y Y es cerrado en X, entonces Y es compacto.

(b) Si Y es compacto, entonces es cerrado en X.

(Runde, 2005, Pág.53)

Demostración. (a) Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto para Y. Ya que Y es cerrado en X, la familia $\mathcal{U} \cup \{X\backslash Y\}$ es un cubrimiento abierto de X. Ya que X es compacto, tiene un subcubrimiento finito, es decir, existen $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ tal que

$$\begin{aligned} X = U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup X\backslash Y \quad &\Rightarrow \quad X \cap Y = (U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup X\backslash Y) \cap Y \\ &\Rightarrow \quad Y = (U_1 \cup \cdots \cup U_n) \cap Y \\ &\Rightarrow \quad Y \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n \end{aligned}$$

Luego Y es compacto.

(b) Sea $x \in X\backslash Y$. Para cada $y \in Y$, existen $\epsilon_y, \delta_y > 0$ tal que $B_{\epsilon_y}(x) \cap B_{\delta_y}(y) = \varnothing$. Ya que $\left\{B_{\delta_y}(y) : y \in Y\right\}$ es un cubrimiento abierto de Y, existen $y_1, \cdots, y_n \in Y$ tal que

$$Y \subset B_{\delta_{y_1}}(y_1) \cup \cdots \cup B_{\delta y_n}(y_n).$$

Escogemos $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_{y_1}, \cdots, \epsilon_{y_n}\}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} B_\epsilon(x) \cap Y \subset B_\epsilon(x) \cap \left(B_{\delta_{y_1}}(y_1) \cup \cdots \cup B_{\delta y_n}(y_n)\right) &\Rightarrow B_\epsilon(x) \cap Y \subset \varnothing \\ &\Rightarrow B_\epsilon(x) \cap Y = \varnothing \\ &\Rightarrow B_\epsilon(x) \subset X \backslash Y \\ &\Rightarrow X \backslash Y \text{ es abierto.} \end{aligned}$$

Luego Y es cerrado en X.

$\square$

Proposición 2.21. *Sean (K, d_K) un espacio métrico compacto, (Y, d_Y) cualquier espacio métrico y sea $f : K \to Y$ continua. Entonces $f(K)$ es compacto.*
(Runde, 2005, Pág.53)

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de $f(K)$.

$$\begin{aligned} f(K) \subset \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\} &\Rightarrow K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}\left(\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}\right) \\ &\Rightarrow K \subset \bigcup\left\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\right\} \\ &\Rightarrow \text{ existen } U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U} / K = f^{-1}(U_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_n) \\ &\Rightarrow f(K) = f\left(f^{-1}(U_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_n)\right) \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n \\ &\Rightarrow f(K) \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n. \end{aligned}$$

Luego $f(K)$ es compacto. $\square$

Corolario 2.22. *Sean (K, d_K) un espacio métrico compacto, y (Y, d_Y) cualquier espacio métrico. Entonces toda función continua $f : K \to Y$ es cerrada, es decir, $F \subset K$ cerrado $\Rightarrow f(F) \subset Y$ es cerrado.*
(Lima, 1983, Pág.213)

Demostración. En efecto,

$$F \subset K \text{ cerrado } \Rightarrow F \text{ compacto } \Rightarrow f(F) \text{ compacto } \Rightarrow f(F) \text{ cerrado en } Y.$$

$\square$

Corolario 2.23. *Sea (K, d) un espacio métrico compacto no vacio y sea $f : K \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f tiene un mínimo y un máximo en K.*

(Runde, 2005, Pág.53)

Demostración. Sea $M := \sup f(K)$. Ya que $f(K)$ es compacto, $f(K)$ está acotado, de modo que $M < \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in f(K)$ tal que $y_n > M - \frac{1}{n}$; está claro que $\lim_{n\to\infty} y_n = M$. Ya que $f(K)$ es cerrado en $\mathbb{R}$, $M \in f(K)$. Por lo tanto, existe $x_0 \in K$ tal que $f(x_0) = M$. De modo análogo se muestra que f tiene mínimo. $\square$

Lema 2.24. *Sea (K, d) un espacio métrico compacto. Entonces toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente.*

(Runde, 2005, Pág.54)

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en K. Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no tiene una subsucesión convergente. Esto significa que, para cada $x \in K$ (no puede ser límite de ninguna subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$!) existe $\epsilon_x > 0$ tal que $B_{\epsilon_x}(x)$ contiene sólo un número finito de términos de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$; es decir, existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant n_x \Rightarrow x_n \notin B_{\epsilon_x}(x)$.

Ya que $\{B_{\epsilon_x}(x) : x \in K\}$ es un cubrimiento abierto para K, existen $x'_1, \cdots, x'_m \in K$ con

$$K = B_{\epsilon_{x'_1}}(x'_1) \cup \cdots \cup B_{\epsilon_{x'_m}}(x'_m).$$

Además

$$\begin{aligned}
x'_1 \in K &\implies \exists n_{x'_1} \in \mathbb{N} /\, n \geqslant n_{x'_1} \Rightarrow x_n \notin B_{\epsilon_{x'_1}}(x'_1)\\
x'_2 \in K &\implies \exists n_{x'_2} \in \mathbb{N} /\, n \geqslant n_{x'_2} \Rightarrow x_n \notin B_{\epsilon_{x'_2}}(x'_2)\\
&\vdots\\
x'_m \in K &\implies \exists n_{x'_m} \in \mathbb{N} /\, n \geqslant n_{x'_m} \Rightarrow x_n \notin B_{\epsilon_{x'_m}}(x'_n)
\end{aligned}$$

Para $n \geqslant \max\left\{n_{x'_1}, \cdots, n_{x'_m}\right\}$, esto significa que

$$x_n \notin B_{\epsilon_{x'_1}}(x'_1) \cup \cdots \cup B_{\epsilon_{x'_m}}(x'_m) = K,$$

Esto es un absurdo, por lo tanto $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posee una subsucesión convergente. $\square$

Proposición 2.25. *Sea (K, d) un espacio métrico compacto. Entonces K es completo y separable.*

Demostración. Para la prueba, (Runde, 2005) □

Corolario 2.26 (Teorema de Heine-Borel). *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$. Entonces K es compacto si, y solo si, es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$*

Demostración. Para la prueba, ver (Runde, 2005) □

2.2. Teória Topológica de Conjuntos

2.2.1. Espacios Topológicos

Definición 2.26 (Espacio Topológico). Sea X un conjunto. Una topología sobre X es un subconjunto $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(X)$ tal que:

(a) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$;

(b) Si $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ arbitrario, entonces $\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{T}$

(c) Si $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

Los conjuntos en $\mathcal{T}$ son llamados abiertos. Un espacio topológico es un par $(X, \mathcal{T})$, formado por un conjunto X y una topología $\mathcal{T}$ sobre X; algunas veces, si la topología es obvio o irrelevante, escribiremos simplemente X.
(Runde, 2005, Pág.61)

Ejemplo 2.43. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{T}$ denota la colección de todos los subconjuntos de X que son abiertos en el sentido de la Definición 2.6. Por la Proposición 2.3, $\mathcal{T}$ es en efecto una topología. Es claro que $\mathcal{T}$ no depende en particular de la métrica d, pero sólo en el sentido de equivalencia.

Definición 2.27. Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es metrizable si existe una distancia d definida sobre X, tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.
(Runde, 2005, Pág.62)

Ejemplo 2.44 (**Topología Discreta**)**.** Sean X cualquier conjunto, y $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Entonces $\mathcal{T}$ es llamada la topología discreta sobre el conjunto X. El espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se llama espacio topológico discreto.

Ejemplo 2.45 (**Topología Indiscreta**)**.** Sean X cualquier conjunto, y $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$. Entonces $\mathcal{T}$ es llamada la topología indiscreta (caótica) y $(X, \mathcal{T})$ se dice que es un espacio indiscreto (caótico).

Ejemplo 2.46 (**Topología Cofinita**)**.** Sea X cualquier conjunto, y sea $\mathcal{T}$ de elementos $\varnothing$ y todos los subconjuntos de X con complemento finito.

Ejemplo 2.47. Sea X cualquier conjunto, y sea $\mathcal{T}$ de elementros $\varnothing$ y todos los subconjuntos de X con complemento numerable.

Ejemplo 2.48 (**Topología Relativa**)**.** Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $Y \subset X$. La topología relativa en Y (o topología heredada de X) es la colección

$$\mathcal{T}|_Y = \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}\}$$

de subconjuntos de Y. Es claro que es una topología sobre Y. El espacio $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ es llamado subespacio de X.

Ejemplo 2.49 (**Topología de Sierpinski**)**.** Sea $X = \{0, 1\}$ un conjunto. Construimos todas las posibles topologías.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 &= \{\varnothing, X\} \\
\mathcal{T}_2 &= \{\varnothing, X, \{0\}\} \\
\mathcal{T}_3 &= \{\varnothing, X, \{1\}\} \\
\mathcal{T}_4 &= \{\varnothing, X, \{0\}, \{1\}\}.
\end{aligned}$$

$\mathcal{T}_2$ se conoce como la topología de **Sierpinski**.

Ejemplo 2.50. Sean $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un espacio topológico, X un conjunto no vacío y f una función de X en Y. Entonces $\mathcal{T}_X = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{T}_Y\}$ es una topología sobre X.

Definición 2.28 (**Espacio Hausdorff**)**.** Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es llamado Hausdorff si, para cualquier $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \varnothing$. (Runde, 2005, Pág.62)

Ejemplo 2.51. Si (X, d) es un espacio métrico, entonces (X, d) es Hausdorff.

Ejemplo 2.52. Si X cualquier conjunto con más de un elemento, entonces X con la topología caótica no es de Hausdorff (y por lo tanto no es metrizable).

Ejemplo 2.53. Sea X un conjunto infinito con la topología del Ejemplo 2.46, y sea $x, y \in X$ tal que $x \neq y$. Supongamos que X es Hausdorff. Entonces existen subconjuntos abiertos U y V de X tal que $x \in U$, $y \in V$, y $U \cap V = \varnothing$. Luego $X = (X \backslash U) \cup (X \backslash V)$ es finito, lo cual es una contradicción.

Ejemplo 2.54. Sea X cualquier conjunto no numerable con la topología del Ejemplo 2.47. Entonces X no es un espacio de Hausdoff.

Definición 2.29 (Conjunto Cerrado). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un subconjunto F de X es llamado cerrado si $X \backslash F$ es abierto.
(Runde, 2005, Pág.63)

Proposición 2.27. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces:*

(a) $\varnothing$ y X son cerrados.

(b) Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X, entonces $\bigcap \{F : F \in \mathcal{F}\}$ es cerrado.

(c) Si F_1 y F_2 son subconjuntos cerrados de X, entonces $F_1 \cup F_2$ es cerrado.

Demostración. Para la prueba ver (Lima, 1976) □

Ejemplo 2.55. Si $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es un espacio topológico con la topología usual, entonces todo subconjunto finito de $\mathbb{R}$ es cerrado.

Ejemplo 2.56. Si $(X, \mathcal{T})$ con la topología discreta, entonces todo subconjunto de X es abierto y cerrado. Si $(X, \mathcal{T})$ con la topología caótica, los únicos cerrados son X y $\varnothing$.

Definición 2.30 (Entorno). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $x \in X$. Un subconjunto N de X es llamado un entorno de x si existe un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U \subset N$. La colección de todos los entornos de x es denotado por N_x.
(Runde, 2005, Pág.64)

Proposición 2.28. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $x \in X$. Entonces:*

(a) Un subconjunto U de X es abierto si y solό si $U \in \mathcal{N}_x$ para todo $x \in U$

(b) Si $N \in \mathcal{N}_x$ y $M \supset N$, entonces $M \in \mathcal{N}_x$.

(c) Si $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_x$, entonces $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}_x$.

(d) Si $N \in \mathcal{N}_x$, entonces $x \in N$.

(e) Para cada $N \in \mathcal{N}_x$ existe $U \in \mathcal{N}_x$ tal que $U \subset N$ y $U \in \mathcal{N}_y$ para todo $y \in U$.

Demostración. Para la prueba ver (Waldmann, 2014) □

Teorema 2.29. *Sea X un conjunto. Para cada $x \in X$, existe $\emptyset \neq \mathfrak{N}_x \subset \mathfrak{P}(X)$ tal que:*

a) Si $N \in \mathfrak{N}_x$, entonces $x \in N$;

b) Si $N \in \mathfrak{N}_x$ y $M \supset N$, entonces $M \in \mathfrak{N}_x$;

c) Si $N_1, N_2 \in \mathfrak{N}_x$, entonces $N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{N}_x$;

d) Para cada $N \in \mathfrak{N}_x$ existe $U \in \mathfrak{N}_x$ tal que $U \subset N$ y $U \in \mathfrak{N}_y$ para todo $y \in U$.

Sea $\mathcal{T}$ la colección de todos los subconjuntos U de X tal que $U \in \mathfrak{N}_y$ para cada $y \in U$; es decir,

$$\mathcal{T} = \{U \subset X : U \in \mathfrak{N}_y, \forall y \in U\}.$$

Entonces $\mathcal{T}$ es la única topología sobre X tal que $\mathfrak{N}_x = \mathcal{N}_x$ para cada $x \in X$. (Runde, 2005)

Demostración. i) Trivialmente $\emptyset$, y X estan en $\mathcal{T}$. Sea $y \in X$, de ahí sigue que existe por $\mathfrak{N}_y$, luego

$$U \in \mathfrak{N}_y \text{ y } U \subset X \Rightarrow X \in \mathfrak{N}_y \Rightarrow X \in \mathcal{T}$$

ii) Si $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$, entonces $\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{T}$. En efecto, sea $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ y sea $y \in \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$.

$$\begin{aligned} y \in \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\} &\Rightarrow \exists U_0 \in \mathcal{U} \subset \mathcal{T} / \ y \in U_0 \\ &\Rightarrow U_0 \in \mathfrak{N}_y \text{ con } y \in U_0 \end{aligned}$$

Luego tenemos:

$$U_0 \in \mathfrak{N}_y \wedge U_0 \subset \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\} \Rightarrow \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\} \in \mathfrak{N}_y.$$

Ya que $y \in \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$ fue arbitrario, por lo tanto $\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{T}$.

iii) Si $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. En efecto, sean $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ y sea $y \in U_1 \cap U_2$; es decir,

$$\begin{aligned} U_1, U_2 \in \mathcal{T} &\Rightarrow U_1, U_2 \in \mathfrak{N}_y \\ &\Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{N}_y, \forall y \in U_1 \cap U_2 \\ &\Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}. \end{aligned}$$

Se concluye que $\mathcal{T}$ es una topología, de modo que tiene sentido hablar de $\mathcal{N}_x$ para $x \in X$. (Note que no se uso (d).)

iv) Sea $x \in X$ y sea $N \in \mathfrak{N}_x$. Por (d),

$$\begin{aligned} N \in \mathfrak{N}_x &\Rightarrow \exists U \in \mathfrak{N}_x / U \subset N \text{ y } U \in \mathfrak{N}_y \text{ Para todo } y \in U (\text{se observa que } U \in \mathcal{T}) \\ &\Rightarrow U \in \mathcal{T} / x \in U \subset N \\ &\Rightarrow N \in \mathcal{N}_x \end{aligned}$$

Inversamente, sea $N \in \mathcal{N}_x$.

$$\begin{aligned} N \in \mathcal{N}_x &\Rightarrow \exists U \in \mathcal{T} / x \in U \subset N \\ &\Rightarrow U \in \mathfrak{N}_y, \forall y \in U / x \in U \subset N \\ &\Rightarrow N \in \mathfrak{N}_y. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{N}_x = \mathfrak{N}_x$ para todo $x \in X$. De la Proposición 2.28, es claro que $\mathcal{T}$ está determinada de manera unica por esta propiedad.

$\square$

Definición 2.31 (Clausura de un conjunto). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Para cada $S \subset X$, la clausura de S se define por:

$$\overline{S} = \bigcap \{F : F \subset X \text{ cerrado y } S \subset F\}.$$

(Runde, 2005, Pág.66)

Proposición 2.30. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea A, B subconjuntos de X. Entonces*

(a) $X = \overline{X}$

(b) $A \subset \overline{A}$

(c) Si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$

(d) A es cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$

(Waldmann, 2014, Pág.19)

Proposición 2.31. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $S \subset X$. Entonces*

$$\overline{S} = \{x \in X : N \cap S \neq \varnothing \text{ para todo } N \in \mathcal{N}_x\}.$$

(Runde, 2005, Pág.67)

Definición 2.32 (Denso)**.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces $D \subset X$ se dice que es denso en X si $\overline{D} = X$.
(Runde, 2005, Pág.68)

Definición 2.33 (Separable)**.** Un espacio topologico es llamado separable si tiene un subconjunto denso contable.
(Runde, 2005, Pág.69)

2.2.2. Base de una Topología

Definición 2.34 (Base - Subbase). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces:

(a) Una base para $\mathcal{T}$ es una colección $\mathcal{B}$ de conjuntos abiertos tal que cada conjunto abierto es una unión de conjuntos en $\mathcal{B}$.

(b) Una subbase para $\mathcal{T}$ es una colección $\mathcal{S}$ de conjuntos abiertos tal que la colección de todas las intersecciones finitas de conjuntos en $\mathcal{S}$ es una base para $\mathcal{T}$.

(Runde, 2005, Pág.69)

Si $\mathcal{B}$ es una base de una topología $\mathcal{T}$ sobre X, entonces un subconjunto U de X está en $\mathcal{T}$ si, y sólo si, es una unión de elementos de $\mathcal{B}$. Por lo que $\mathcal{B}$ genera la topología $\mathcal{T}$ en el sentido siguiente: si sabemos cuáles conjuntos son los elementos de $\mathcal{B}$ entonces podemos determinar los elementos de $\mathcal{T}$, ellos son todos los conjuntos que son uniones de elementos de $\mathcal{B}$.

Definición 2.35 (Segundo numerable). Un espacio topologíco $(X, \mathcal{T})$ es llamado segundo numerable si $\mathcal{T}$ tiene una base numerable.
(Runde, 2005, Pág.112)

Ejemplo 2.57 (Base para (X, d)). Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces por el Ejemplo 2.15

$$\mathcal{B} = \{B_r(x) : x \in X, r > 0\}$$

es una base para la topología inducida por d.

Ejemplo 2.58 (Base para $\mathbb{R}$). Sea $\mathbb{R}$ un espacio métrico. Entonces

$$\mathcal{B} = \{\langle a, b\rangle : a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$$

es una base para la topologia usual de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.59. Sea $(X, \mathcal{T})$ con la topología discreta. Entonces

$$\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$$

es una base para $\mathcal{T}$.

Ejemplo 2.60 (Subbase para $\mathbb{R}$). Sea $\mathbb{R}$ un espacio métrico. Entonces

$$S = \{\langle -\infty, a\rangle, \langle b, +\infty\rangle : a, b \in \mathbb{R}\}$$

es una subbase para la topología usual de $\mathbb{R}$.

Proposición 2.32. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $Y \subset X$. Si $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{T}$, entonces $\mathcal{B}_Y = \{Y \cap B : B \in \mathcal{B}\}$ es una base para $\mathcal{T}|_Y$.*
(Gerard Buskes, 1997, Pág.200)

Demostración. Sea $U' \in \mathcal{T}|_Y$

$$\begin{aligned} U' \in \mathcal{T}|_Y &\Rightarrow U' = Y \cap U,\ U \in \mathcal{T} \\ &\Rightarrow U' = Y \cap \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\} \\ &\Rightarrow U' = \bigcup \{Y \cap B : B \in \mathcal{B}\} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{B}_Y$ es una base para $\mathcal{T}|_Y$. □

Ejemplo 2.61. Consideremos el subconjunto $Y = [0, 1]$ de la recta real $\mathbb{R}$, con la topología relativa. La topología relativa tiene como base $\mathcal{B}_Y = \{Y \cap \langle a, b\rangle : \langle a, b\rangle \in \mathcal{B}\}$, donde $\mathcal{B} = \{\langle a, b\rangle : a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$ es una base para la topología usual de $\mathbb{R}$.

$$\langle a, b\rangle \cap Y = \begin{cases} \langle a, b\rangle; & \text{si } a \text{ y } b \text{ están en } Y \\ [0, b\rangle; & \text{si solamente } b \text{ está en } Y \\ \langle a, 1]; & \text{si solamente } a \text{ está en } Y \\ Y \text{ ó } \varnothing; & \text{si ni } a \text{ ni } b \text{ están en } Y. \end{cases}$$

(Munkres, 2000, Pág. 102)

Proposición 2.33. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $Y \subset X$. Si $\mathcal{S}$ es una subbase para $\mathcal{T}$, entonces $\mathcal{S}_Y = \{Y \cap S : S \in \mathcal{S}\}$ es una subbase para $\mathcal{T}|_Y$.*
(Gerard Buskes, 1997, Pág.200)

Demostración. Sea $Y \cap U \in \mathcal{T}|_Y$ con $U \in \mathcal{T}$. Ya que $\mathcal{S}$ es una subbase para $\mathcal{T}$, todas intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ determinan un base $\mathcal{B}$ para $\mathcal{T}$

$$\begin{aligned}
Y \cap U &= Y \cap \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\} \\
&= \bigcup \{Y \cap B : B \in \mathcal{B}\} \\
&= \bigcup \left\{ Y \cap \bigcap_{i=1}^{n} S_i : S_i \in \mathcal{S} \right\} \\
&= \bigcup \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} (Y \cap S_i) : S_i \in \mathcal{S} \right\}
\end{aligned}$$

Luego es $U \cap Y$ es la unión de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}_Y$ y por lo tanto $\mathcal{S}_Y$ es una subbase para $\mathcal{T}|_Y$. □

Ejemplo 2.62. Consideremos el subconjunto $Y = [0, 1]$ de la recta real $\mathbb{R}$, en la topología relativa. La topología subespacio tiene como subbase $\mathcal{S}_Y = \{Y \cap S : S \in \mathcal{S}\}$, donde $\mathcal{S} = \{\langle -\infty, a\rangle, \langle b, +\infty\rangle : a, b \in \mathbb{R}\}$ es una subbase de la topología usual de $\mathbb{R}$.

$$Y \cap S = \begin{cases} [0, a\rangle\,; \ \text{si } a \text{ está en } Y \\ \langle b, 1]\,; \ \text{si } b \text{ está en } Y \\ \emptyset; \ \text{si } a < 0 \text{ ó } b > 1 \\ [0, 1]\,; \ \text{si } a > 1 \text{ ó } b < 0. \end{cases}$$

Proposición 2.34. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{T}$ si, y sólo si, para cada abierto $U \in \mathcal{T}$ y para cada $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.*
(Lima, 1976, Pág.69)

Demostración. a) Sea $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{T}$, y sean $U \in \mathcal{T}$ y $x \in U$.

$$U \in \mathcal{T} \Rightarrow U = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\}.$$

Luego tenemos

$$x \in U \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}/x \in B \subset U$$

b) Sea $U \in \mathcal{T}$ y sea $x \in U$. Existe $B \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B \subset U \Rightarrow \{x\} \subset B \subset U \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\} \subset U,$$

de ello se sigue que $U = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\}$.

□

Proposición 2.35. *Sea $\mathcal{B}$ una base de una topología $\mathcal{T}$ sobre un conjunto X. Entonces un subconjunto U de X es abierto si y sólo si para cada $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$. (Morris, 2011, Pág.49)*

Proposición 2.36. *Sea X un conjunto no vacio y sea $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de X. Entonces $\mathcal{B}$ es una base de una topología sobre X si, sólo si, cumple las siguientes condiciones:*

(a) $X = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\}$

(b) Para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, si $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$. (Esta condición se cumple, en particular, cuando $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$.)

(Lima, 1976, Pág.70)

Demostración.

i) $(\Longrightarrow)$ Sea $\mathcal{B}$ una base de una topología $\mathcal{T}$ sobre X, entonces

$$X \in \mathcal{T} \Rightarrow X = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\}.$$

También, sean $B_1, B_1 \in \mathcal{B}$ y sea $x \in B_1 \cap B_2$.

$$B_1, B_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\} \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} / x \in B \subset B_1 \cap B_2.$$

ii) $(\Longleftarrow)$ Sea $\mathcal{B}$ una colección de subconjunto de X que satisface (a) y (b). Para de demostrar la condición necesaria debe existir una topología $\mathcal{T}$ que tiene como base $\mathcal{B}$, tal que todo abierto de está topología se puede escribir como la unión arbitraria de elementos de $\mathcal{B}$. Definimos

$$\mathcal{T} = \left\{U \subset X : U = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\}\right\}$$

Claramente $\varnothing \in \mathcal{T}$, y de (1) $X \in \mathcal{T}$. Por otra parte, si $\mathcal{U} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup \{U : U \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{T}$. En efecto, sean $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ y sea $U \in \mathcal{U}$, de ello se sigue

$$U \in \mathcal{U} \Rightarrow U \in \mathcal{T} \Rightarrow U = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\},$$

se observa que $\bigcup \{U : U \in \mathcal{U}\}$ es la unión de elementos de $\mathcal{U}$, además U es la unión de elementos de $\mathcal{B}$, de ello $\bigcup \{U : U \in \mathcal{U}\}$ es la unión de elementos de $\mathcal{B}$. Por lo tanto $\bigcup \{U : U \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{T}$. De otra parte, si $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. En efecto, sean $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$

$$U_1 = \bigcup \{B_\lambda : B_\lambda \in \mathcal{B}\}, U_2 = \bigcup \{B_\beta : B_\beta \in \mathcal{B}\} \Rightarrow U_1 \cap U_2 = \bigcup \{B_\lambda \cap B_\beta : B_\lambda, B_\beta \in \mathcal{B}\}$$

Luego $U_1 \cap U_2 = \bigcup \{B_\lambda \cap B_\beta : B_\lambda \cap B_\beta \in \mathcal{B}\} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. Finalmente $\mathcal{T}$ es una topología, que tiene como base $\mathcal{B}$. □

Ejemplo 2.63. Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de intervalos semi-abiertos de la recta real $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{B} = \{[a, b\rangle : a < b\}$$

La recta real $\mathbb{R}$ es la unión de los elementos de $\mathcal{B}$,

$$x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow x \in [x, b\rangle \quad \Rightarrow x \in \bigcup \{[x, b\rangle : x < b, b \in \mathbb{R}\}.$$

Sean $B_1 = [a_1, b_1\rangle$ y $B_2 = [a_2, b_2\rangle$ elementos de $\mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, podemos escoger $B = [a, b\rangle$ tal que

$$x \in B \subset B_1 \cap B_2$$

donde $a = \text{máx}\{a_1, a_2\}$ y $B = \text{mín}\{b_1, b_2\}$, luego la intersección de dos intervalos semi-abiertos cualesquiera, es vacia o es otro intervalo semi-abierto, Así la colección de todas las uniones de conjuntos de $\mathcal{B}$ es una topología de $\mathbb{R}$, es decir, $\mathcal{B}$ es una base de una topología $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}$. Esta topología $\mathcal{T}$ es la topología de Sorgenfrey.

2.2.3. Continuidad y Convergencia de Redes

Definición 2.36. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X se dice que converge a $x \in X$ si, para cada $N \in \mathcal{N}_x$, existe $n_N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in N$ para todo $n \geqslant n_N$. (Runde, 2005, Pág.72)

Esta definición es correcta, pero si uno intenta probar resultados análogos a la convergencia de sucesiónes en espacios métricos, aparecen problemas. Por Ejemplo, la Proposición 2.10, no es cierto en espacios topológicos en general

Ejemplo 2.64. Sea X un conjunto no numerable con la topológia del Ejemplo 2.47, es decir, los conjuntos abiertos son $\varnothing$ y aquellos con complemento numerable. Fijemos un punto $x_0 \in X$.

$$x_0 \in X \Rightarrow \{x_0\} \notin \mathcal{T} \Rightarrow X \backslash \{x_0\} \text{ no es cerrado,}$$

de manera que $\overline{X \backslash \{x_0\}} = X$. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $X \backslash \{x_0\}$, y sea

$$U = X \backslash \{x_1, x_2, \cdots\}.$$

Debido a la naturaleza de nuestra topología, U es abierto y por lo tanto es un entorno de x_0. Además, $x_n \notin U$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por definición, de modo que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no puede converger a x_0.

Observación. Entonces, ¿cómo vamos a definir la continuidad en espacios topológicos arbitrarios?. Por su puesto, podriamos intentar por medio de sucesiones como para espacios métricos, pero en vista del Ejemplo 2.64, podemos encontrarnos con dificultades inesperadas. De las cuatro condiciones equivalentes del Teorema 2.12, la cuarta no hace ninguna referencia explícita a una métrica. Usaremos esto para la definición de continuidad.

Definición 2.37 (Continuidad). Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. Entonces $f : X \to Y$ se dice que es continua en $x_0 \in X$ si $f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_{x_0}$ para cada $N \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$. Si f es continua en todo punto de X, simplemente llamaremos f continua.
(Runde, 2005, Pág.72)

Observación. La definición anterior tambien equivale a f es continua en $x_0 \in X$ si, sólo si, para cada $N \in \mathcal{N}_{f(x)}$ existe $U \in \mathcal{N}_x$ tal que $f(U) \subset N$.

Proposición 2.37. *Sean* $(X, \mathcal{T}_X)$ *y* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *espacios topológicos. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes para* $f : X \to Y$.

(a) f *es continua.*

(b) $f^{-1}(U)$ *es abierto en* X *para cada subconjunto abierto* U *de* Y.

(c) $f^{-1}(F)$ *es cerrado en* X *para cada subconjunto cerrado* F *de* Y.

(Runde, 2005, Pág.72)

Ejemplo 2.65 (Continuidad en un Espacio Discreto). Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos tal que X es discreto. Entonces toda función $f : X \to Y$ es continua.

Ejemplo 2.66 (Continuidad de una Función Constante). Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. Entonces toda función $f : X \to Y$ constante, es continua.

Ejemplo 2.67 (Continuidad de una Función Compuesta). Sean $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ y $(Z, \mathcal{T}_Z)$ espacios topológicos, y sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas. Entonces $g \circ f : X \to Z$ es continua.

Ejemplo 2.68. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico indiscreto, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un espacio de Hausdorff y $f : X \to Y$ continua. Entonces f es constante.
En efecto, supongamos que f no es constante, entonces existen $x, y \in X$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

$$(Y, \mathcal{T}_Y) \text{ Hausdorff } \Rightarrow \exists U, V \in \mathcal{T}_Y / f(x) \in U, f(y) \in V \text{ y } U \cap V = \varnothing.$$

Ya que f es continua, $f^{-1}(U)$ es abierto en X y no vacio por que contiene x.

$$x \in f^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1}(U) = X \quad (\text{Único abierto no vacio en } X \text{ es } X).$$

Además

$$y \in X = f^{-1}(U) \Rightarrow f(y) \in U,$$

es una contradicción puesto que $f(y) \in U$, $f(y) \in V$ y $U \cap V \neq \varnothing$. (Si Y es también un espacio topológico indiscreto, toda función de X a Y es continua.)

Proposición 2.38. *Sean $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Sea $\mathcal{B}$ una base para $\mathcal{T}_Y$. Entonces f es continua si, y sólo si, $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$ para todo $B \in \mathcal{B}$. (Runde, 2005, Pág.78)*

Demostración. a) Si f es continua, entonces $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$ para todo $B \in \mathcal{B}$. En efecto, sea $B \in \mathcal{B}$,

$$B \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T}_Y \Rightarrow B \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X.$$

b) Si $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$ para todo $B \in \mathcal{B}$, entonces f es continua. En efecto, sea $U \in \mathcal{T}_Y$

$$U \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow U = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\},$$

luego

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\}\right) = \bigcup \left\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\right\} \in \mathcal{T}_X.$$

□

Proposición 2.39. *Sean $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Sea $\mathcal{S}$ una subbase para $\mathcal{T}_Y$. Entonces f es continua si, y sólo si, $f^{-1}(S) \in \mathcal{T}_X$ para todo $S \in \mathcal{S}$.*
(Runde, 2005, Pág.78)

Demostración. a) Si f es continua, entonces $f^{-1}(S) \in \mathcal{T}_X$ para todo $S \in \mathcal{S}$. En efecto, sea $S \in \mathcal{S}$,

$$S \in \mathcal{S} \subset \mathcal{T}_Y \Rightarrow S \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow f^{-1}(S) \in \mathcal{T}_X.$$

b) Si $f^{-1}(S) \in \mathcal{T}_X$ para todo $S \in \mathcal{S}$, entonces f es continua. En efecto, sea $U \in \mathcal{T}_Y$. Ya que $\mathcal{S}$ es una subbase para $\mathcal{T}$, la colección de todas la intersecciones finitas de conjuntos de $\mathcal{S}$ es una base $\mathcal{B}$ para $\mathcal{T}$.

$$U \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow U = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\},$$

luego

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= f^{-1}\left(\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}\right) \\ &= \bigcup\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\} \\ &= \bigcup\left\{f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i\right) : S_i \in \mathcal{S}\right\} \\ &= \bigcup\left\{\bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(S_i) : S_i \in \mathcal{S}\right\} \in \mathcal{T}_X \end{aligned}$$

□

Definición 2.38 (Topologías Comparables)**.** Sea X un conjunto no vacio, y sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ topologías sobre X. Diremos que $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son comparables si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ ó $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. Si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, se dice que $\mathcal{T}_1$ es más gruesa que $\mathcal{T}_2$ o, equivalentemente, que $\mathcal{T}_2$ es más fina que $\mathcal{T}_1$.
Claramente, $\mathcal{T}_1$ es más fina que $\mathcal{T}_2$ si, y sólo si, $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ es continua.
(Runde, 2005, Pág.73)

Proposición 2.40. *Sean X un conjunto y $((Y_i, \mathcal{T}_i))_{i\in\mathbb{I}}$ una familia de espacios topológicos, y sea $f_i : X \to Y_i$ una función para cada $i \in \mathbb{I}$. Entonces existe una topología más gruesa sobre X tal que cada una de las funciones f_i es continua. La colección $\{f_i^{-1}(U) : i \in \mathbb{I}, U \in \mathcal{T}_i\}$ es una subbase para está topología.*
(Runde, 2005, Pág.73)

Demostración. Sea $\mathcal{S} = \{f_i^{-1}(U) : i \in \mathbb{I}, U \in \mathcal{T}_i\}$ y sea $\mathcal{T}$ la colección de todas las uniones de intersecciones finitas de conjuntos de $\mathcal{S}$. Entonces $\mathcal{T}$ es un topología sobre X teniendo $\mathcal{S}$ como una subbase ($\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$) y cada $f_i : (X, \mathcal{T}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ es una función continua por la Proposición 2.37
Sea $\mathcal{T}'$ cualquier topología sobre X tal que $f_i : (X, \mathcal{T}') \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ es continua para cada $i \in \mathbb{I}$. Por la Proposición 2.37, es claro que $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}'$ y por lo tanto $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$; esto es, $\mathcal{T}$ es más gruesa que $\mathcal{T}'$. □

Ejemplo 2.69. Sean X_1 y X_2 espacios topológicos. Formamos el producto Cartesiano $X_1 \times X_2$, el conjunto de todos los pares ordenados $x = (x_1, x_2)$ con $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$.

Tenemos las proyecciones de coordenadas $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ y $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$, tales que

$$\pi_1(x) := x_1, \quad \pi_2(x) := x_2 \quad (x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2)$$

La topología más gruesa sobre $X_1 \times X_2$ tal que cada una de las funciones coordenadas es continua, es conocida como topología del producto.

Definición 2.39 (Conjunto Ordenado). Un orden en un conjunto no vacio S es una relación $\mathcal{R}$ en S con las siguientes propiedades:

(a) $(x, x) \in \mathcal{R}$ para todo $x \in S$;

(b) Si (x, y), $(y, z) \in \mathcal{R}$, entonces $(x, z) \in \mathcal{R}$;

(c) Si (x, y), $(y, x) \in \mathcal{R}$, entonces $x = y$.

En lugar de $(x, y) \in \mathcal{R}$, escribiremos $x \preceq y$, y usaremos el símbolo $\preceq$ para denotar el orden de $\mathcal{R}$. Un conjunto S con un orden $\preceq$ es llamado ordenado; si para cualquier $x, y \in S$, cumple sólo uno de $x \preceq y$ o $y \preceq x$, diremos que S es totalmente ordenado. (Runde, 2005, Pág.18)

Ejemplo 2.70 ($\mathbb{R}$ Totalmente Ordenado). Los números reales con su orden usual es un conjunto totalmente ordenando.

Ejemplo 2.71 ($\mathfrak{B}(S)$ Ordenado). Sea S cualquier conjunto. Para $A, B \subset S$ definimos

$$A \preceq B \Longleftrightarrow A \subset B$$

Luego $\mathcal{P}(S)$ es un conjunto ordenado pero no es totalmente ordenado si S tiene más que un elemento.

Definición 2.40 (Conjunto Dirigido). Un conjunto ordenado $\mathbb{A}$ es llamado dirigido si, para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$, existe $\gamma \in \mathbb{A}$ tal que $\alpha \preceq \gamma$ y $\beta \preceq \gamma$.
(Runde, 2005, Pág.73)

Ejemplo 2.72. El conjunto de los números naturales es dirigido con respecto a la relación $\leqslant$ usual.

Ejemplo 2.73. Los conjuntos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son dirigidos con respecto a la relación $\leqslant$ usual.

Ejemplo 2.74. Sea S cualquier conjunto. Entonces $\mathcal{P}(S)$, ordenado por la inclusión, es dirigido.

Ejemplo 2.75. El conjunto $\mathcal{N}_x$ (de todos los entornos de un punto x) en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, es dirigido con respecto a la inclusión inversa; es decir,

$$U \preceq V \Longleftrightarrow V \subset U. \ (U, V \in \mathcal{N}_x)$$

Ejemplo 2.76. Si $(\mathbb{A}, \preceq)$ y $(\mathbb{B}, \preceq)$ dos conjuntos dirigidos, entonces $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ es dirigido con respecto a la relación

$$(\alpha, \beta) \preceq (\alpha', \beta') \Longleftrightarrow \alpha \preceq \alpha' \text{ y } \beta \preceq \beta'.$$

Llamaremos dirección canonica sobre el producto cartesiano $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$.

Definición 2.41 (Red)**.** Una red o generalización de una sucesión en un conjunto S es una función de un conjunto dirigido sobre S.
(Runde, 2005, Pág.73)

Si $\mathbb{A}$ es un conjunto dirigido que sirve como dominio de alguna red, utilizamos la notación $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ para una red en S; si no hay ambiguedad sobre $\mathbb{A}$, escribiremos simplemente $(x_\alpha)_\alpha$. Es claro que una sucesión es un caso particular de una red.

Ejemplo 2.77. Sea $a < b$ números reales. Una *partición* $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ es un subconjunto finito de puntos $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\} \subset [a, b]$ tal que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Nosotros escribiremos

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\} \tag{2.8}$$

La colección $\mathbb{P}$ de todas las particiones de $[a, b]$ es un un conjunto ordenado; dado $\mathcal{P}$ como en (2.8) y

$$\mathcal{Q} = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = b\},$$

definimos

$$\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q} \Longleftrightarrow \{t_0, t_1, \cdots, t_n\} \subset \{s_0, s_1, \cdots, s_m\}.$$

Claramente, esto hace que $\mathbb{P}$ sea un conjunto dirigido. Para $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ como en $(*)$, una etiqueta asociada con $\mathcal{P}$ es un n-tupla $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_n)$ con $\mathcal{E}_j \in [t_{j-1}, t_j]$ para $j = 1, \cdots, n$. Dado $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$, una etiqueta asociada $\mathcal{E}$, y una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, la *suma de Riemann* se define por

$$R(f; \mathcal{P}, \mathcal{E}) = \sum_{j=1}^{n} f(\mathcal{E}_j)(t_j - t_{j-1})$$

Si, para cada $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$, fijamos una etiqueta $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$, las sumas de Riemann $(R(f; \mathcal{P}, \mathcal{E}_{\mathcal{P}}))_{\mathcal{P}\in\mathbb{P}}$ forma una red en $\mathbb{R}$.

Es claro ahora la Definición 2.36 puede extenderse a las redes en general.

Definición 2.42 (Convergencia de Redes). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Una red $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ en X se dice que converge a $x \in X$ si, para cada $N \in \mathcal{N}_x$, existe $\alpha_N \in \mathbb{A}$ con $x_\alpha \in N$ para todo $\alpha \in \mathbb{A}$ tal que $\alpha_N \preceq \alpha$. Entonces dieremos que x es el límite de $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ y escribiremos $x = \lim\limits_{\alpha} x_\alpha$ o $x_\alpha \to x$.
(Runde, 2005, Pág.74)

Observación. La notación $\lim\limits_{\alpha} x_\alpha = x$ tiene que ser manejado con mucha precaución, el límite de una red en espacios topológicos en general no es único; un ejemplo facil, aunque extremo, es un espacio topológico caótico con más de un punto; toda red converge a todo punto. Escribir $\lim\limits_{\alpha} x_\alpha = x$ por lo tanto no significa que x es el límite de la red $(x_\alpha)_\alpha$, sino que x es uno de los posibles límites de la red.

Ejemplo 2.78. Sea $\mathbb{A}$ la colección de todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. Definimos la relación $\succeq$ en $\mathbb{A}$ por

$$U \succeq V \Leftrightarrow U \subset V$$

Supongamos que $(x_U)_{U\in\mathbb{A}}$ es una red en $\mathbb{R}$ con $x_U \in U$ para todo U. Entonces x_U converge a $\sqrt{2}$.

Ejemplo 2.79. Sea $(X, \mathcal{T})$ con la topología de **Sierpinski**; es decir, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{0\}\}$. Entonces la red $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ tal que $x_\alpha = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{A}$ converge a los puntos 0 y 1.

Proposición 2.41. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $S \subset X$. Entonces $\overline{S}$ es el* *conjunto de puntos de X que son límite de una red en S.*

(Runde, 2005, Pág.76)

Demostración. a) Sea $x \in \overline{S}$. El conjunto $\mathcal{N}_x$ es dirigido por la inclusión inversa. Por la Proposición 2.31, para cada $N \in \mathcal{N}_x$, existe un elemento $x_N \in N \cap S$. Entonces $(x_N)_{N \in \mathcal{N}_x}$ es un red en S tal que $x = \lim_N x_N$.

b) Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ una red en S tal que $x = \lim_\alpha x_\alpha$, supongamos que $x \in U = X \backslash \overline{S}$ $(U \in \mathcal{N}_x)$. Entonces existe $\alpha_U \in \mathbb{A}$ con $x_\alpha \in U \subset X \backslash S$ para todo $\alpha \in \mathbb{A}$ tal que $\alpha_U \preceq \alpha$, esto es una contradicción puesto que $x_\alpha \in S$.

□

Corolario 2.42. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces $F \subset X$ es cerrado si, y sólo si, cada red en F que converge en X tiene su límite en F.*

Proposición 2.43. *Las siguientes proposiciones son equivalentes para un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$.*

(a) X es Hausdorff.

(b) Toda red convergente en X tiene un único límite.

(Runde, 2005, Pág.76), (Gerard Buskes, 1997, Pág.211)

Demostración. i) Si X es Hausdorff, entonces toda red convergente en X tiene un único límite. Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ un red en X tales que existen $x, x' \in X$ con $x_\alpha \to x$ y $x_\alpha \to x'$ pero $x \neq x'$. Entonces existen $N \in \mathcal{N}_x$ y $M \in \mathcal{N}_{x'}$ tal que $N \cap M = \varnothing$.

$$\begin{aligned} x_\alpha \to x \quad &\Rightarrow \quad \exists \alpha_N \in \mathbb{A} / \ \alpha \geq \alpha_N \Rightarrow x_\alpha \in N. \\ x_\alpha \to x' \quad &\Rightarrow \quad \exists \alpha_M \in \mathbb{A} / \ \alpha \geq \alpha_M \Rightarrow x_\alpha \in M. \end{aligned}$$

Ya que $\mathbb{A}$ es dirigido, existe $\alpha \in \mathbb{A}$ con $\alpha_N \preceq \alpha$ y $\alpha_M \preceq \alpha$. Por lo tanto $x_\alpha \in N \cap M$ debe contener para tales α, lo cual es una contradicción porque $N \cap M = \varnothing$.

ii) Si toda red convergente en X tiene un único límite, entonces X es Hausdorff. Supongamos que X no es Haudorff. Entonces existen $x, y \in X$ con $x \neq y$ tal que $N \cap M \neq \varnothing$ para todo $N \in \mathcal{N}_x$ y $M \in \mathcal{N}_y$.

El conjunto $\mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_y$ es dirigido por:

$$(N_1, M_1) \preceq (N_2, M_2) :\Longleftrightarrow N_2 \subset N_1 \text{ y } M_2 \subset M_1 \ ((N_1, M_1), (N_2, M_2) \in \mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_y).$$

Para todo $(N, M) \in \mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_y$, existe $x_{(N,M)} \in N \cap M$. Entonces $\left(x_{(N,M)}\right)_{(N,M) \in \mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_y}$ es una red en X.

A) Sea $N_0 \in \mathcal{N}_x$. Entonces existe $(N_0, X) \in \mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_y$ y

$$\begin{aligned} (N_0, X) \preceq (N, M) \ &\Rightarrow \ N \subset N_0 \wedge M \subset X \\ &\Rightarrow \ x_{(N,M)} \in N \subset N_0 \end{aligned}$$

B) Sea $M_0 \in \mathcal{N}_y$. Entonces existe $(X, M_0) \in \mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_y$ y

$$\begin{aligned} (X, M_0) \preceq (N, M) \ &\Rightarrow \ N \subset X \wedge M \subset M_0 \\ &\Rightarrow \ x_{(N,M)} \in M \subset M_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $x_{(N,M)} \to x$ y $x_{(N,M)} \to y$. Por lo tanto, tenemos una red con al menos dos límites.

□

Teorema 2.44. *Sean $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos y $x_0 \in X$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes para la función $f : X \to Y$.*

(a) f es continua en x_0

(b) Si para cada red $(x_\alpha)_\alpha$ en X con $\lim\limits_{\alpha} x_\alpha = x_0$, $\lim\limits_{\alpha} f(x_\alpha) = f(x_0)$.

(Runde, 2005, Pág.77), (Waldmann, 2014, Pág.62)

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$: Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ una red en X con $\lim_\alpha x_\alpha = x_0$, y sea $N \in$

$\mathcal{N}_{f(x_0)}$.

$$f \text{ continua en } x_0 \Longrightarrow N \in \mathcal{N}_{f(x_0)} \Rightarrow f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_{x_0}.$$

Consecuentemente tenemos por convergencia

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha} x_\alpha = x_0 \quad &\Longrightarrow \quad \exists \alpha_{f^{-1}(N)} \in \mathbb{A} / \ \alpha \succeq \alpha_{f^{-1}(N)} \Rightarrow x_\alpha \in f^{-1}(N) \\ &\Longrightarrow \quad \exists \alpha_{f^{-1}(N)} \in \mathbb{A} / \ \alpha \succeq \alpha_{f^{-1}(N)} \Rightarrow f(x_\alpha) \in N. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim_\alpha f(x_\alpha) = f(x_0)$.

$(b) \Longrightarrow (a)$: Sea $N \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$, y supongamos por contradicción que $f^{-1}(N) \notin \mathcal{N}_{x_0}$.

$$f^{-1}(N) \notin \mathcal{N}_{x_0} \Rightarrow \forall U \in \mathcal{T}_X / \ x_0 \in U \not\subset f^{-1}(N).$$

Sea $\mathcal{U}_{x_0}$ denota la colección de todos los subconjuntos abiertos de X conteniendo x_0. Entonces $\mathcal{U}_{x_0}$ es un subconjunto dirigido de $\mathcal{N}_{x_0}$ (con respecto a la inclusión inversa de conjuntos). Por nuestra suposición escogemos

$$x_U \in U \backslash f^{-1}(N) \text{ para cada } U \in \mathcal{U}_{x_0}.$$

Es claro que $\lim_U x_U = x_0$. Sin embargo, ya que $f(x_U) \notin N$ para todo $U \in \mathcal{U}_{x_0}$, $f(x_U) \nrightarrow f(x_0)$, el cual es una contradicción. $\square$

2.2.4. Compacidad

Definición 2.43 (Cubrimiento). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $S \subset X$. Un cubrimiento abierto para S es una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos abiertos de X tal que $S \subset \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$.
(Runde, 2005, Pág.79)

Definición 2.44 (Conjunto Compacto). Un subconjunto K de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es llamado compacto si, para cada cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de K, existen $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ tal que $K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$.
(Runde, 2005, Pág.79)

Ejemplo 2.80. Sea $(X, \mathcal{T})$ con la topología indiscreta. Entonces todo $A \subset X$ es compacto.

Ejemplo 2.81. Sea $(X, \mathcal{T})$ con la topología discreta. Entonces X es compacto si, y sólo si, es finito.

Definición 2.45 (Intersección Finita). Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ tiene la propiedad de la interseción finita si, para cualquier colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos cerrados de X tal que $\bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\} = \varnothing$, existen $F_1, \cdots, F_n \in \mathcal{F}$ tal que $F_1 \cap \cdots \cap F_n = \varnothing$. (Runde, 2005, Pág.79)

Proposición 2.45. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

(a) X es compacto.

(b) X tiene la propiedad de intersección finita.

(Runde, 2005, Pág.79)

Proposición 2.46. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea Y un subespacio de X.*

(a) Si X es compacto y Y es cerrado en X, entonces Y es compacto.

(b) Si X es Hausdorff y Y es compacto, entonces Y es cerrado en X.

(Runde, 2005, Pág.80)

Demostración. (a) Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto para Y. Ya que Y es cerrado en X, la familia $\mathcal{U} \cup \{X \backslash Y\}$ es un cubrimiento abierto de X. Ya que X es compacto, existe un subcubrimiento finito; es decir, existen $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ tal que

$$\begin{aligned} X = U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup X \backslash Y \quad &\Rightarrow \quad X \cap Y = (U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup X \backslash Y) \cap Y \\ &\Rightarrow \quad Y = (U_1 \cup \cdots \cup U_n) \cap Y \\ &\Rightarrow \quad Y \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n \end{aligned}$$

Por lo tanto, Y es compacto.

(b) Sea $x \in X \backslash Y$. Para cada $y \in Y$, existen subconjuntos abiertos U_y, V_y de X tales que

$$x \in U_y, \quad y \in V_y \text{ y } U_y \cap V_y = \varnothing.$$

Ya que $\{V_y : y \in Y\}$ es un cubrimiento abierto de Y, existen $y_1, \cdots, y_n \in Y$ tal que

$$Y \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}.$$

Escogiendo $U := U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$, luego obtenemos que

$$U \cap Y \subset U \cap (V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}) = \varnothing \Rightarrow U \subset X \backslash Y,$$

de modo que $X \backslash Y$ es un entorno de x. Ya que $x \in X \backslash Y$ fue arbitrario, $X \backslash Y$ es abierto. Por lo tanto Y es cerrado en X.

□

Proposición 2.47. *Sean $(K, \mathcal{T}_K)$ un espacio topológico compacto, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ cualquier espacio topológico y sea $f : K \to Y$ continua. Entonces $f(K)$ es compacto.*

Demostración. Para la prueba, ver (Runde, 2005) □

Corolario 2.48. *Sea $(K, \mathcal{T}_K)$ un espacio topológico compacto no vacio y sea $f : K \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f alcanza sus valores extremos en K.*

Demostración. Para la prueba, ver (Runde, 2005) □

Definición 2.46 (Homeomorfimo). Sean $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. Un homeomorfismo entre X e Y es una función biyectiva $f : X \to Y$ tal que f y f^{-1} son continuas. Si existe un homeomorfismo entre X y Y, los dos espacios son llamados homeomorfos.
(Runde, 2005, Pág.80)

Teorema 2.49. *Sean $(K, \mathcal{T}_K)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos tales que K es compacto, Y es de Hausdorff, y sea $f : K \to Y$ biyectiva y continua. Entonces f es un homeomorfismo. (Runde, 2005, Pág.81)*

Demostración. Verificaremos la Proposición 2.37(c) para $g = f^{-1}$. Sea $F \subset K$ cerrado. Ya que f es biyectiva, la imagen inversa de F sobre g es $f(F)$.
Ya que K es compacto, por la Proposición 2.46(a), F es compacto. consecuentemente, $f(F)$ es compacto en Y por la Proposición 2.47 y por lo tanto cerrado en Y (por que Y es Hausdorff) por Proposición 2.46(b). Esto prueba la Proposición 2.37(c) para $g = f^{-1}$ y por lo tanto se tiene la continuidad de f^{-1}. □

2.2.5. Topología Producto

Definición 2.47. Sea $\mathcal{S}$ una colección no vacia de conjuntos. Entonces el producto Cartesiano $\prod \{S : S \in \mathcal{S}\}$ se define como la colección de todas las funciones $f : \mathcal{S} \to \bigcup \{S : S \in \mathcal{S}\}$ tal que $f(S) \in S$ para todo $S \in \mathcal{S}$.

Si $\mathcal{S} = (S_i)_{i \in \mathbb{I}}$ una familia de conjuntos indexada. El producto cartesiano de esta familia indexada, denotado por $\prod_{i \in \mathbb{I}} S_i$, es el conjunto de todas las funciones

$$f : \mathbb{I} \to \bigcup \{S_i : i \in \mathbb{I}\}$$

tal que $f(i) \in S_i$ para cada $i \in \mathbb{I}$, el cual denotaremos por $f = (f(i))_{i \in \mathbb{I}}$.
(Runde, 2005, Pág.18)

Definición 2.48. Sea $((X_i, \mathcal{T}_i))_{i \in \mathbb{I}}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \prod_{i \in \mathbb{I}} X_i$. Entonces la topología producto en X es la topología más gruesa $\mathcal{T}$ en X haciendo a las proyecciones de coordenadas

$$\pi_i : X \to X_i, \quad f \mapsto f(i) \quad (i \in \mathbb{I})$$

continuas. Llamaremos a $(X, \mathcal{T})$ el producto topológico de $((X_i, \mathcal{T}_i))_{i \in \mathbb{I}}$.
(Runde, 2005, Pág.83)

Por la Proposición 2.40, el producto topológico existe, y los conjuntos abiertos son uniones de conjuntos de la forma

$$\pi_{i_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_n),$$

donde $i_1, \cdots, i_n \in \mathbb{I}$ y $U_j \in \mathcal{T}_{i_j}$ para $j = 1, \cdots, n$.

Ejemplo 2.82. Sea $((X_i, \mathcal{T}_i))_{i\in\{1,2\}}$ espacios topológicos y sea $X = X_1 \times X_2$. Entonces la topología producto sobre $X_1 \times X_2$ es la topología $\mathcal{T}$ más gruesa sobre $X_1 \times X_2$ haciendo las proyeccciones de coodenadas $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ y $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$, tales que

$$\pi_1(x) := x_1, \quad \pi_2(x) := x_2 \quad (x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2)$$

continuas. Una subbase $\mathcal{S}$ para el producto topológico sobre $X_1 \times X_2$ es formada por el conjunto $\pi_1^{-1}(U) \ \ (U \subset X_1$ abierto) y $\pi_2^{-1}(V) \ \ (V \subset X_2$ abierto), es decir, el conjunto $U \times X_2 \ \ (U \subset X_1$ abierto) y $X_1 \times V \ \ (V \subset X_2$ abierto). Note que:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \left\{\pi_1^{-1}(U), \pi_2^{-1}(V) : U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2\right\} \text{ y} \\ \mathcal{B} &= \{U \times V : U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2\} \end{aligned}$$

son subbase y base para la topología producto sobre $X_1 \times X_2$.

Proposición 2.50. *Sean $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y), (Z, \mathcal{T}_Z)$ espacios topológicos, el espacio topológico producto $(Y \times Z, \mathcal{T})$, $f_1 : X \to Y$, $f_2 : X \to Z$ y definimos:*

$$f : X \to Y \times Z, \quad x \mapsto (f_1(x), f_2(x)).$$

Entonces f es continua si, y sólo si, f_1 y f_2 son continuas.
(Vilches, s.f., Pág.54)

Demostración. Sean $\pi_1 : Y \times Z \to Y$ y $\pi_2 : Y \times Z \to Z$ las proyecciones de coordenadas sobre el primer factor y segundo factor respectivamente. Obsérvese que

$$f_1 = \pi_1 \circ f \ \text{ y } \ f_2 = \pi_2 \circ f$$

Si f es continua, entonces $f_1 = \pi_1 \circ f$ y $f_2 = \pi_2 \circ f$ son continuas. Recíprocamente, supongamos que f_1 y f_2 son continuas. Sea $U \times V$ un elemento básico de la topología $Y \times Z$, entonces

$$f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V);$$

luego, f es continua. □

Proposición 2.51. *Sean* $(X, \mathcal{T}_X)$ *un espacio topológico y* $(E, \|\ \ \|)$ *un espacio vectorial normado sobre* $\mathbb{R}$*. Dadas las funciones* $f, g : X \to E$*, podemos definir una nueva función por:*

$$f + g : X \to E, \ \ x \mapsto f(x) + g(x).$$

Si f *y* g *son continuas, entonces* $f + g$ *es continua.*
(Vilches, s.f., Pág.54)

Demostración. La función $h : X \to E \times E$ definida por:

$$h(x) = (f(x), g(x))$$

es continua, y

$$S : E \times E \to E, \ \ (x_1, y_1) \mapsto x_1 + y_1$$

es una función continua. Entonces $f + g = S \circ h$ es continua. □

Proposición 2.52. *Sean* $(X, \mathcal{T}_X)$ *un espacio topológico y* $(E, \|\ \ \|)$ *un espacio vectorial normado sobre* $\mathbb{R}$*, sean* $\alpha : X \to \mathbb{R}$ *y* $f : X \to E$ *funciones. Definimos una nueva función por:*

$$\alpha f : X \to E, \ \ x \mapsto \alpha(x) f(x).$$

Si f *y* α *son continua, entonces* αf *es continua.*
(Vilches, s.f., Pág.54)

Demostración. La función $h : X \to \mathbb{R} \times E$ tal que $h(x) = (\alpha(x), f(x))$ es continua, y $m : \mathbb{R} \times E \to E$ tal que $m(\lambda, x_1) = \lambda x_1$ es una función continua. Entonces $\alpha f = m \circ h$ es continua. □

2.2.6. Axiomas de Separación

Definición 2.49 (Espacio T_0). Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es llamado un espacio T_0 o espacio de Kolmogorov si, para cualquier $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe un conjunto abierto $U \subset X$ tales que ($x \in U$ y $y \notin U$) o ($y \in U$ y $x \notin U$).
(Runde, 2005, Pág.100)

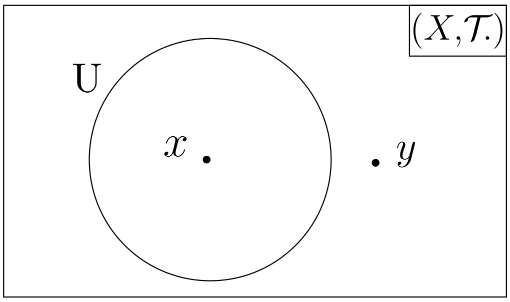

Figura 2.2: Espacio T_0

Ejemplo 2.83. Sea X cualquier conjunto con al menos dos elementos con la topología indiscreta. Entonces X no es un espacio T_0.

Ejemplo 2.84. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico con la topología discreta. Entonces X es un espacio T_0.

Ejemplo 2.85. Sea $X = \{0, 1\}$ un conjunto y $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{0\}, \{0, 1\}\}$ una topología para X. Entonces X es un espacio T_0.

Definición 2.50 (Espacio T_1). Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es llamado un espacio T_1 si, para cualquier $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen conjuntos abiertos $U, V \subset X$ tales que $x \in U$, $y \notin U$ e $y \in V$, $x \notin V$.
(Runde, 2005, Pág.100)

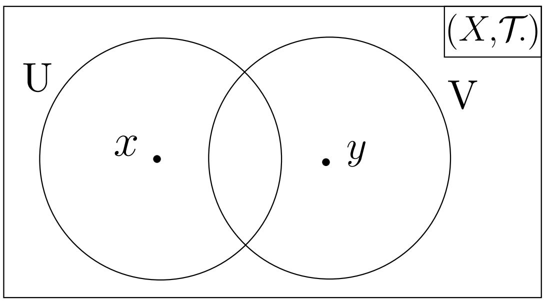

Figura 2.3: Espacio T_1

Observación. Obviamente, todo espacio T_1 es un espacio T_0, y todo espacio de $Hausdorff$ es un espacio T_1.

Ejemplo 2.86. Sea $X = \{0,1\}$ un conjunto y $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{0\}, \{0,1\}\}$ una topología para X. El espacio $(X,\mathcal{T})$ no es un espacio T_1

Proposición 2.53. *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces X es un espacio T_1 si, y sólo si, $\{x\}$ es cerrado para cada $x \in X$.*
(Runde, 2005, Pág.101)

Demostración. a) Supongamos que X es un espacio T_1, y sea $x \in X$. Para cualquier $y \in X$ con $y \neq x$, entonces existe un subconjunto abierto U_y de X tal que $y \in U_y$ pero $x \notin U_y$. Por consiguiente

$$X\setminus\{x\} = \bigcup \{U_y : y \in X, x \neq y\}$$

es abierto, de modo que $\{x\}$ es cerrado para cada $x \in X$.

b) Reciprocamente, supongamos que todos los conjuntos unitarios de X son cerrados, y sean $x, y \in X$ tal que $x \neq y$. Entonces existen conjuntos abierto $U = X\setminus\{y\}$ y $V = X\setminus\{x\}$ de X tales que $x \in U = X\setminus\{y\}$ pero $y \notin U = X\setminus\{y\}$, y $y \in V = X\setminus\{x\}$ pero $y \notin V = X\setminus\{x\}$. Por lo tanto X es un espacio T_1.

$\square$

Ejemplo 2.87. Sea X cualquier conjunto, y sea $\mathcal{T}$ la topología que consiste de $\varnothing$ y todos los subconjuntos de X que tienen complemento finito. Entonces, trivialmente, todos los subconjuntos unitarios de X son cerrados, de modo que X es un espacio T_1 por la Proposición 2.53. Sin embargo, si X es un conjunto infinito que posee la topología cofinita, entonces cualquier par de subconjuntos abiertos no vacios U, V de X siempre se intersecan, porque si ocurriera que $U \cap V = \varnothing$ entonces

$$X = X\setminus\varnothing = X\setminus(U \cap V) = (X\setminus U) \cup (X\setminus V).$$

Por la definición de la topología cofinita, los subconjuntos $X\setminus U$ y $X\setminus V$ son finitos. En consecuencia, el espacio $(X,\mathcal{T})$ no es de Hausdorff.

Espacios Hausdorff a veces son llamados espacios T_2, y algunos autores denota los axiomas de separación con la etiqueta de la forma T_t donde t es un número entero no negativo (y como máximo cinco).

Nuestro siguiente axioma de separación tiene un sabor algo diferente; no está definido en términos de la topología, sino a través de funciones continuas.

Dados (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios metricos, usaremos el símbolo $C_b(X, Y)$ para denotar las funciones continuas en $B(X, Y)$. Seguimos usando la misma notación si X es un espacio topológico.

Definición 2.51 (Completamente regular). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio T_1. Entonces X es llamado completamente regular si y sólo si, para cada $x \in X$ y para cada cerrado $F \subset X$ con $x \notin F$, existe $f \in C_b(X, \mathbb{R})$ tal que $f(X) \subset [0, 1]$, $f(x) = 1$ y $f|_F = 0$.
(Runde, 2005, Pág.101)

Ejemplo 2.88. Sea (X, d) un espacio métrico, sea $x_0 \in X$ y sea $F \subset X$ cerrado tal que $x_0 \notin F$. Para evitar la trivialidad, supongamos que $F \neq \varnothing$. Definimos

$$g : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{dist}(x, F).$$

Entonces g es continua con $g|_F = 0$ y $g(x_0) \neq 0$. Definimos $f : X \to \mathbb{R}$ por :

$$f(x) = \text{mín}\left\{\frac{g(x)}{g(x_0)}, 1\right\} \quad (x \in X).$$

Entonces $f(X) \subset [0, 1]$, $f(x_0) = 1$ y $f|_F = 0$, de modo que X es completamente regular.

Ejemplo 2.89. La recta Sorgenfrey es $\mathbb{R}$ con la topología Sorgenfrey, es decir, la colección de todas las uniones de intervalos semi-abiertos $[a, b\rangle$ con $a < b$. La topología Sorgenfrey es más fina que la topología canonica porque

$$\langle a, b\rangle = \bigcup\{[c, b\rangle : a < c < b\}$$

es Sorgenfrey abierto para cualquier $a < b$. Sea $a \in \mathbb{R}$; entonces la semirrecta

$$[a, +\infty\rangle = \bigcup\{[a, b\rangle : b \in \mathbb{R}, b > a\}$$

es Sorgenfrey abierto, y ya que es cerrado con respecto a la topología canónica sobre $\mathbb{R}$, es también Sorgenfrey cerrado

$$\langle -\infty, a\rangle = X \backslash \bigcup \{[a, b\rangle : b \in \mathbb{R}, b > a\}.$$

Consecuentemente, cuando $a < b$, el intervalo semi-abierto

$$[a, b\rangle = [a + \infty\rangle \backslash [b, +\infty\rangle = \langle -\infty, a\rangle \cup [b, +\infty\rangle$$

es Sorgenfrey cerrado y abierto. Sea $F \subset \mathbb{R}$ un Sorgenfrey cerrado y sea $x \in \mathbb{R}\backslash F$. Por definición de la topología Sorgenfrey, existen $a < b$ tal que $x \in [a, b\rangle \subset \mathbb{R}\backslash F$. Sea f la función característica de $[a, b\rangle$. Ya que $[a, b\rangle$ es Sorgenfrey cerrado y abierto, f es continua (y claramente satisface $f(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$, $f(x) = 1$ y $f|_F = 0$). Consecuentemente, la recta Sorgenfrey es completamente regular.

Ejemplo 2.90. Todo subespacio de un espacio completamente regular es también completamente regular.

Proposición 2.54. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio completamente regular , $x \in X$ y $F \subset X$ cerrado tal que $x \notin F$. Entonces existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $F \subset V$ y $U \cap V = \varnothing$. En particular X es de Hausdorff.*
(Runde, 2005, Pág.103)

Demostración. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) = 1$ y $f|_F = 0$. Sean

$$U = \left\{ y \in X : f(y) > \frac{1}{2} \right\}, \quad V = \left\{ y \in X : f(y) < \frac{1}{2} \right\}.$$

De ello se sigue que U y V son abiertos, tales que $x \in U$, $F \subset X$ y $U \cap V = \varnothing$. $\square$

Definición 2.52 (Espacio Normal). Un espacio T_1 $(X, \mathcal{T})$ es llamado normal si, para cualquier par de conjuntos cerrados $F, G \subset X$ con $F \cap G = \varnothing$, existen conjuntos abiertos $U, V \subset X$ tales que $F \subset U, G \subset V$ y $U \cap V = \varnothing$.
(Runde, 2005, Pág.103)

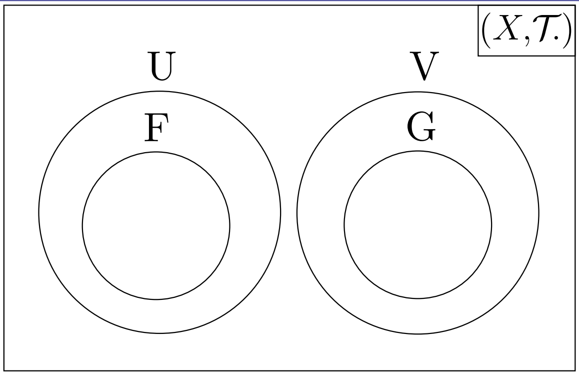

Figura 2.4: Espacio Normal

Ejemplo 2.91. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $F, G \subset X$ cerrados y disjuntos (y no vacios, para evitar la trivialidad). Entonces

$$f : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{dist}(x, F) - \operatorname{dist}(x, G)$$

es continua. Sean

$$U = \{x \in X : f(x) < 0\}, \;\; V = \{x \in X : f(x) > 0\}.$$

Entonces U y V son abiertos tales que $F \subset U$, $G \subset V$ y $U \cap V = \varnothing$. Por lo tanto, X es normal.

Ejemplo 2.92. Sea $(K, \mathcal{T})$ un espacio compacto Hausdorff, y sean $F, G \subset K$ cerrados y disjuntos (y no vacios, para evitar la trivialidad). Fijemos $x \in F$. Para $y \in G$, existen $U_y, V_y \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U_y$, $y \in V_y$ y $U_y \cap V_y = \varnothing$. Obviamente, $\{V_y : y \in G\}$ es un cubrimiento abierto para G, y ya que G (es un subespacio cerrado de un espacio compacto) es compacto, existen $y_1, \cdots, y_n \in G$ tal que

$$G \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}.$$

Sean

$$U_x = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}, \;\; V_x = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}.$$

Entonces U_x y V_x son abiertos tales que $x \in U_x$, $G \subset V_x$ y $U_x \cap V_x = \varnothing$. Claramente

$\{U_x : x \in F\}$ es un cubrimiento para F, y por lo tanto, existen $x_1, \cdots, x_m \in F$ tal que

$$F \subset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}.$$

Sean

$$U = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}, \quad V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_m}.$$

Obtenemos subconjuntos abiertos de X tales que $F \subset U$, $G \subset V$ y $U \cap V = \varnothing$. Por lo tanto, K es normal. Todos los espacos normales son trivialmente de Hausdorff.

2.3. Lema de Urysohn

Lema 2.55. *Sean $(X, \mathcal{T})$ normal, $F \subset X$ cerrado y $U \subset X$ abierto tal que $F \subset U$. Entonces existe un abierto V de X tal que*

$$F \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

(Runde, 2005, Pág.107)

Demostración. Ya que $F, X \backslash U$ son cerrados y disjuntos, existen $V, W \subset X$ tal que

$$F \subset V, \ X \backslash U \subset W, \ \ V \cap W = \varnothing.$$

$$\begin{aligned} V \cap W = \varnothing \quad &\Rightarrow \quad V \subset X \backslash W \\ &\Rightarrow \quad \overline{V} \subset \overline{X \backslash W} \\ &\Rightarrow \quad \overline{V} \subset X \backslash W \subset X \backslash (X \backslash U) = U \\ &\Rightarrow \quad F \subset V \subset \overline{V} \subset U. \end{aligned}$$

□

Lema 2.56. *Sea D el conjunto de números racionales diádicos en $\langle 0,1\rangle$, es decir,*

$$D = \left\{ \frac{m}{2^n} : n \in \mathbb{N}, \;\; m \in \{1, 2, \cdots, 2^n - 1\} \right\}.$$

Entonces en cada intervalo abierto $\langle a, b\rangle \subset [0,1]$ existe un número diádico.

Demostración. Sea $\langle a, b\rangle \subset [0,1]$ tal que $a < b$. Por la propiedad de Arquimedes, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} n(b-a) > 1 \quad &\Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{n} < b - a \\ &\Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < b - a \\ &\Rightarrow \quad 1 < 2^n b - 2^n a \end{aligned}$$

Ya que la distancia entre $2^n b$ y $2^n a$ es mayor que 1 y $a, b \in [0,1]$, existe $m \in \{1, \cdots, 2^n - 1\}$ tal que

$$2^n b < m < 2^n a \quad \Rightarrow \quad a < \frac{m}{2^n} < b.$$

□

Teorema 2.57 (Lema de Urysohn). *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico normal, y sean F, G subconjuntos cerrados y disjuntos de X. Entonces existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que*

$$f(X) \subset [0,1]\,, \;\; f|_F = 0 \text{ y } f|_G = 1.$$

Sug. (Runde, 2005, Pág.109-110) y (Munkres, 2000, Pág.237-240)

Demostración. Ya que $X \backslash G$ es abierto que contiene a F, existe un conjunto abierto $U_{\frac{1}{2}} \subset X$ tal que

$$F \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{2}} \subset X \backslash G.$$

Por consiguiente, existen subconjuntos abiertos $U_{\frac{1}{4}}$ y $U_{\frac{3}{4}}$ de X tal que

$$F \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{4}} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U}_{\frac{3}{4}} \subset X \backslash G.$$

En consecuencia, existen subconjuntos abiertos $U_{\frac{1}{8}}$, $U_{\frac{3}{8}}$, $U_{\frac{5}{8}}$ y $U_{\frac{7}{8}}$ tal que

$$F \subset U_{\frac{1}{8}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{8}} \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{4}} \subset U_{\frac{3}{8}} \subset \overline{U}_{\frac{3}{8}} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_{\frac{5}{8}} \subset \overline{U}_{\frac{5}{8}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U}_{\frac{3}{4}} \subset U_{\frac{7}{8}} \subset \overline{U}_{\frac{7}{8}} \subset X \backslash G.$$

Continuando de esta manera, existe un conjunto abierto U_r para cada número diádico $r \in \langle 0, 1 \rangle$, tal que para cualesquiera $s, t \in D$, con $s < t$, donde D es el conjunto de los racionales diádicos, tenemos que

$$F \subset U_s \subset \overline{U}_s \subset U_t \subset \overline{U}_t \subset X \backslash G.$$

Definimos la función $f : X \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} \sup \{t \in D : x \notin U_t\}, & x \notin \bigcap_{t \in D} U_t \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.9}$$

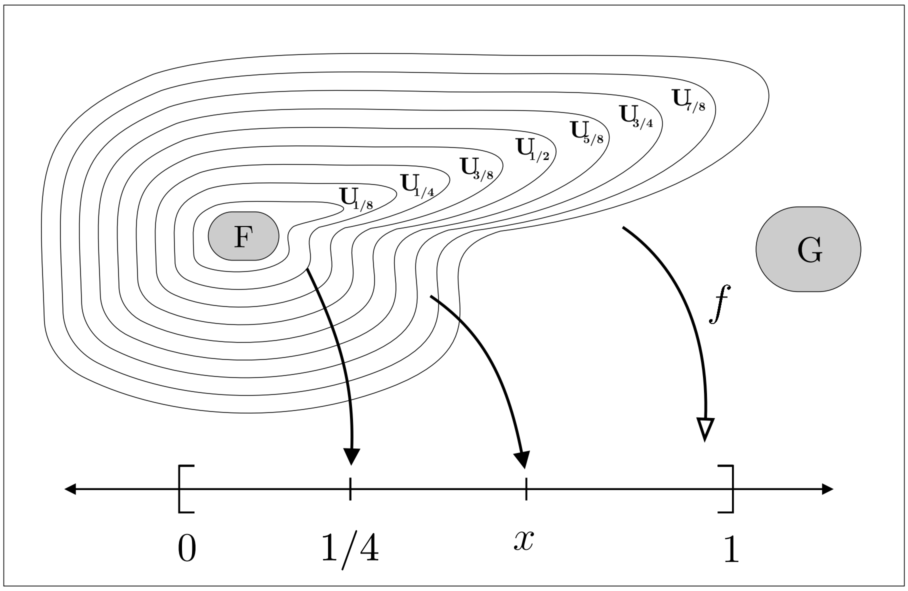

Figura 2.5: Ilustración de la función f(2.9)

Es claro que $f(X) \subset [0, 1]$, $f|_F = 0$ y $f|_G = 1$. Finalmente mostraremos que f

es continua. Ya que $\mathcal{S}|_{[0,1]} = \{[0,a\rangle, \langle b,1], \varnothing, [0,1] : a,b \in [0,1]\}$ es una base para la topología relativa de $[0,1]$, es suficiente mostrar que $f^{-1}([0,a\rangle)$ y $f^{-1}(\langle a,1])$ son abiertos para cada $a \in [0,1]$.

Sea $a \in \langle 0,1]$. De la definición de f se sigue que $f(x) < a$ si, y sólo si, existe $t \in D$, $t < a$, con $x \in U_t$

$$\begin{aligned} f(x) < a &\iff \exists t \in D, f(x) < t < a \\ &\iff \exists t \in D, \sup\{t' : x \notin U_{t'}\} < t < a \\ &\iff \exists t \in D, t < a, \text{ con } x \in U_t. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} f^{-1}([0,a\rangle) &= \{x \in X : f(x) \in [0,a\rangle\} \\ &= \{x \in X : f(x) < a\} \\ &= \{x \in X : \exists t \in D, t < a, \text{ con } x \in U_t\} \\ &= \bigcup_{t<a} U_t. \end{aligned}$$

es abierto. Además, $f(x) > a$ si, y sólo si, existe $t \in D$, $t > a$,con $x \notin \overline{U}_t$

$$\begin{aligned} f(x) > a &\iff \exists t \in D, f(x) > t > a \\ &\iff \exists t \in D, \sup\{t' : x \notin U_{t'}\} > t > a \\ &\iff \exists t \in D, t > a, \text{ con } x \notin \overline{U}_t \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\langle a,1]) &= \{x \in X : f(x) > a\} \\ &= \left\{x \in X : \exists t \in D, t > a, \text{ con } x \notin \overline{U}_t\right\} \\ &= \bigcup_{t>a} X \backslash \overline{U}_t. \end{aligned}$$

es abierto. De ello sigue que f es continua. □

Corolario 2.58. *Sean* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico normal,* F, G *subconjunto cerrados* *y disjuntos de X, y $a < b$. Entonces existe un función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que*

$$f(X) \subset [a,b]\,,\; f|_F = a \;\; y \;\; f|_G = b.$$

Sug. (Runde, 2005, Pág.111)

Demostración. a) Por lema de Urysohn, existe una función continua $g : X \to [0,1]$ con $g|_F = 0$ y $g|_G = 1$.

b) Sea el gráfico,

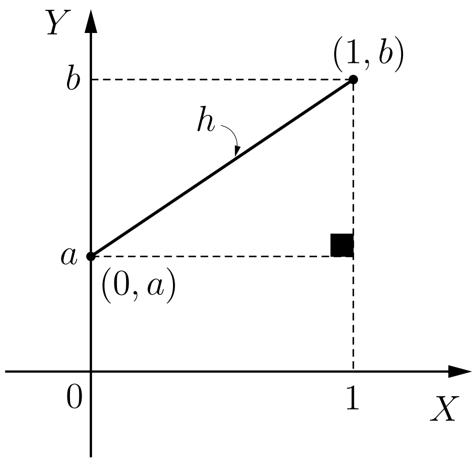

Figura 2.6: Ecuación de la recta

la ecuación de la recta es

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = h(x) = (b-a)x + a.$$

Es claro que h es un homeomorfimo entre $[0,1]$ y $[a,b]$.

c) Definimos la función compuesta $f = h \circ g : X \to [a,b]$ tal que

$$\begin{aligned} f(x) = (h\circ g)(x) &\Rightarrow f(x) = h(g(x)) \\ &\Rightarrow f(x) = (b-a)g(x) + a. \end{aligned}$$

Esta función verifica los resultados del Corolario.

□

Capítulo3

Materiales y Métodos

3.1. Materiales

Los recursos materiales necesarios de acuerdo al tiempo se tiene resumido en la siguiente tabla:

Actividades	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D	E	A	M	J
Revisión de la bibliografía	x	x	x											
Redacción del proyecto				x										
Presentación del proyecto					x									
Revisión y aprobación del proyecto					x									
Redacción del borrador						x	x	x	x	x	x	x	x	
Sustentación														x

3.2. Presupuesto

Los recursos utilizados para el desarrollo de este proyecto de investigacióon se ha estimado aproximadamente de la siguiente manera.

Descripción	Unidades	Costo unitario (S/.)	Cantidad	Costo Total (S/.)
Bibliografía	Uno	30.00	10	300.00
Papel bond	Millar	20.00	4	80.00
Fotocopias	Uno	0.10	1000	100.00
Memoria USB	8 GB	30.00	1	30.00
Impresión	Uno	0.10	1000	100.00
Uso de internet	Horas	1.00	400	400.00
Otros				400.00
Costo total				1410.00

3.3. Métodos

En esta investigación se utiliza el método descriptivo, deductivo e inductivo; puesto que se basa en la interpretación y aplicación del lema de Urysohn.

Capítulo4

Resultados y Discusión

En este capítulo obtenemos los resultados fundamentales que se derivan del Teorema de Urysohn (Lema de Urysohn)

Estos son:

- El Teorema de Metrización de Urysohn
- El Teorema de extensión de Tietze
- El Corolario de conexión entre el lema de Urysohn y el Teorema de extensión de Tietze.

4.1. Metrización de Urysohn

Lema 4.1. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $\mathcal{B}$ una base para $\mathcal{T}$, y supongamos que, para cada $U \in \mathcal{B}$ y cada $x \in U$, existe una función continua $f_{U,x} : X \to \mathbb{R}$ tal que $f_{U,x}(x) = 1$ y $f_{U,x}|_{X \setminus U} = 0$. Entonces $\mathcal{T}$ es la topología más gruesa sobre X tal que todas las funciones en $\{f_{U,x} : U \in \mathcal{B}, x \in U\}$ son continuas.*
(Runde, 2005, Pág.112)

Demostración. Sea $\mathcal{T}'$ denota la topología más gruesa sobre X tal que todas las funciones en $\{f_{U,x} : U \in \mathcal{B}, x \in U\}$ son continuas. Luego $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, supongamos que $\mathcal{T} \not\subset \mathcal{T}'$ es decir, existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $U \notin \mathcal{T}'$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $U \in \mathcal{B}$.

$$\text{Si } U \notin \mathcal{T}', \text{ entonces } X \setminus U \text{ no es cerrado con respecto a } \mathcal{T}'$$

Consecuentemente, existe $x \notin X \setminus U$ que está en la clausura de $X \setminus U$ con respecto a $\mathcal{T}'$, es decir, $x \in \overline{X \setminus U}$ con respecto a $\mathcal{T}'$. Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ una red en $X \setminus U$ tal que $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}'} x$. De ello se sigue que

$$1 = f_{U,x}(x) = \lim_{\alpha} f_{U,x}(x_\alpha) = 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. $\square$

Teorema 4.2 (**Teorema de Metrización de Urysohn**). *Sea $(X, \mathcal{T})$ normal, segundo numerable. Entonces X es metrizable.*

Sug.(Runde, 2005, Pág.112-113)

Demostración. Sea $\{U_1, U_2, U_3, \cdots\} \subset \mathcal{T}$ una base numerable para $\mathcal{T}$, y sea

$$\mathbb{A} = \left\{(n, m) \in \mathbb{N}^2 : \overline{U}_n \subset U_m\right\}.$$

Afirmamos que para cada $m \in \mathbb{N}$ y para cada $x \in U_m$, existe $n \in \mathbb{N}$ con $x \in U_n \subset \overline{U}_n \subset U_m$ (de modo particular, $(n, m) \in \mathbb{A}$). En efecto, sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $x \in U_m$

$$\begin{aligned}
\{x\} \subset U_m \quad &\Rightarrow \quad \exists U \in \mathcal{T} \;/\; \{x\} \subset U \subset \overline{U} \subset U_m \\
&\Rightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} \;/\; \{x\} \subset U_n \subset U \subset \overline{U} \subset U_m \; (\overline{U}_n \subset \overline{U}) \\
&\Rightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} \;/\; \{x\} \subset U_n \subset \overline{U}_n \subset \overline{U} \subset U_m \\
&\Rightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} \;/\; x \in U_n \subset \overline{U}_n \subset U_m
\end{aligned}$$

Por el lema de Urysohn, para cada $(n, m) \in \mathbb{A}$, existe una función continua $f_{n,m} : X \to \mathbb{R}$ con

$$f_{n,m}(X) \subset [0, 1]\,, \; f_{n,m}|_{\overline{U}_n} = 1 \text{ y } f_{n,m}|_{X \setminus U_m} = 0.$$

Definamos $d : X \times X \to \mathbb{R}$ por:

$$d(x, y) = \sum_{(n,m) \in \mathbb{A}} \frac{1}{2^{n+m}} \left|f_{n,m}(x) - f_{n,m}(y)\right| \quad (x, y \in X).$$

Afirmamos que d es una métrica sobre X

M1) $d(x, y) \geqslant 0, \forall x, y \in X$ con $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$

Es claro que $d(x, y) \geqslant 0$ a partir de la definición. Mostraremos que $d(x, y) \leftrightarrow x = y$.

i) Si $x = y$, entonces $d(x, y) = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned}
x = y \quad &\Rightarrow \quad d(x, y) = \sum_{(n,m) \in \mathbb{A}} \frac{1}{2^{n+m}} \left|f_{n,m}(x) - f_{n,m}(x)\right| \\
&\Rightarrow \quad d(x, y) = 0
\end{aligned}$$

ii) Si $x \neq y$, entonces $d(x, y) \neq 0$. En efecto, sean $x, y \in X$ tal que $x \neq y$. Ya que X es de Hausdorff,

$$\begin{aligned}
\exists m \in \mathbb{N} \,/\, x \in U_m,\ y \notin U_m &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}/x \in U_n \subset \overline{U}_n \subset U_m \\
&\Rightarrow (n,m) \in \mathbb{A}.
\end{aligned}$$

Ya que $f_{n,m}|_{\overline{U}_n} = 1$ y $f_{n,m}|_{X\setminus U_m} = 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
d(x,y) &= \sum_{(n,m)\in\mathbb{A}} \frac{1}{2^{n+m}} |f_{n,m}(x) - f_{n,m}(y)| \\
&= \sum_{(n,m)\in\mathbb{A}} \frac{1}{2^{n+m}} |1-0| \\
&\geqslant \frac{1}{2^{n+m}} \\
&> 0
\end{aligned}$$

M2) $d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in X$. En efecto,

$$\begin{aligned}
d(x,y) &= \sum_{(n,m)\in\mathbb{A}} \frac{1}{2^{n+m}} |f_{n,m}(x) - f_{n,m}(y)| \\
&= \sum_{(n,m)\in\mathbb{A}} \frac{1}{2^{n+m}} |f_{n,m}(y) - f_{n,m}(x)| \\
&= d(y,x)
\end{aligned}$$

M3) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z), \forall x, y, z \in X$. En efecto,

$$\begin{aligned}
d(x,z) &= \sum_{(n,m)\in\mathbb{A}} \frac{1}{2^{n+m}} |f_{n,m}(x) - f_{n,m}(y) + f_{n,m}(y) - f_{n,m}(z)| \\
&\leqslant \sum_{(n,m)\in\mathbb{A}} \frac{1}{2^{n+m}} (|f_{n,m}(x) - f_{n,m}(y)| + |f_{n,m}(y) - f_{n,m}(z)|) \\
&= d(x,y) + d(y,z)
\end{aligned}$$

Afirmamos que $\mathrm{id} : (X,\mathcal{T}) \to (X,d)$ es continua. Sea (x_α) una red en $(X,\mathcal{T})$ tal que $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, puesto que $f_{n,m} : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ es continua

$$\begin{aligned} x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} x &\Rightarrow f_{n,m}(x_\alpha) \overset{\mathcal{T}_{usual}}{\longrightarrow} f_{n,m}(x) \\ &\Rightarrow |f_{n,m}(x_\alpha) - f_{n,m}(x)| \to 0 \\ &\Rightarrow \sum_{(n,m)\in\mathbb{A}} |f_{n,m}(x_\alpha) - f_{n,m}(x)| \to 0 \\ &\Rightarrow d(x_\alpha, x) \to 0 \\ &\Rightarrow x_\alpha \xrightarrow{d} x \end{aligned}$$

de modo que la topología inducida por d es más gruesa que $\mathcal{T}$. Por otro lado, cada $f_{n,m} : (X, d) \to \mathbb{R}$ con $(n, m) \in \mathbb{A}$ es continua. Sea (x_α) una red en (X, d) tal que

$$\begin{aligned} x_\alpha \xrightarrow{d} x &\Rightarrow d(x_\alpha, x) \to 0 \\ &\Rightarrow \sum_{(n,m)\in\mathbb{A}} |f_{n,m}(x_\alpha) - f_{n,m}(x)| \to 0 \\ &\Rightarrow |f_{n,m}(x_\alpha) - f_{n,m}(x)| \to 0 \\ &\Rightarrow f_{n,m}(x_\alpha) \to f_{n,m}(x) \end{aligned}$$

y por Lema 4.1, concluimos que $\mathcal{T}$ es la topología más gruesa que la topología de (X, d). □

4.2. Extensión de Tietze

Lema 4.3. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces $C_b(X, \mathbb{R})$, con la norma $\|f\|_\infty$ definida por*

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

es un espacio de Banach

(Runde, 2005, Pág.113) y (Folland, 1999, Pág.121)

Demostración. Si $f \in B(X, \mathbb{R})$, definimos la norma uniforme de f por:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

La función $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$ es una métrica sobre $B(X, \mathbb{R})$. $B(X, \mathbb{R})$ es completo con la métrica uniforme. Afirmamos que $C_b(X, \mathbb{R})$ es cerrado en $B(X, \mathbb{R})$. En efecto, sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C_b(X, \mathbb{R})$ que converge a $f \in B(X, \mathbb{R})$. Dado $\epsilon > 0$

$$f_n \to f \Rightarrow \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}/\ n \geqslant n_\epsilon \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}.$$

Dado $n \geqslant n_\epsilon$ y $x_0 \in X$, ya que f_n es continua en x_0, existe $U \in \mathcal{N}_{x_0}$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \ \ (\text{ para } x \in U).$$

En consecuencia,

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Luego, f es continua y $C_b(X, \mathbb{R})$ es cerrado en $B(X, \mathbb{R})$. Por lo tanto, $C_b(X, \mathbb{R})$ es un espacio de Banach. □

Teorema 4.4 (Teorema de Extensión de Tietze). *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio normal, Y un subespacio cerrado de X y $f : Y \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(Y) \subset [a, b]$. Entonces existe una función continua $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ con $\widetilde{f}(X) \subset [a, b]$ que extiende f.*
Sug. (Runde, 2005, Pág.113-114)

Demostración. La afirmación se cumple si $a = b$, así que supongamos que $a < b$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $a = -1$ y $b = 1$.

1) Sea $f_0 = f : Y \to \mathbb{R}$ tal que $f_0(Y) \subset [-1, 1]$, y sean

$$F_0 = \left\{x \in Y : f_0(x) \leqslant -\frac{1}{3}\right\} \ \text{ y } \ G_0 := \left\{x \in Y : f_0(x) \geqslant \frac{1}{3}\right\}.$$

Se verifica que F_0 y G_0 son cerrados y disjuntos. Por Corolario 2.58, existe una función continua

$$g_0 : X \to \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \ \text{tal que} \ \ g_0|_{F_0} = -\frac{1}{3} \text{ y } g_0|_{G_0} = \frac{1}{3}.$$

2) Sea $f_1 = f_0 - g_0|_Y : Y \to \mathbb{R}$. Entonces $f_1(Y) \subset [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$. Sean

$$F_1 = \left\{x \in Y : f_1(x) \leqslant -\frac{1}{3}\frac{2}{3}\right\} \ \text{ y } \ G_1 = \left\{x \in Y : f_1(x) \geqslant \frac{1}{3}\frac{2}{3}\right\}.$$

Se verifica que F_1 y G_1 son cerrados y disjuntos. Por Corolario 2.58, existe una función continua

$$g_1 : X \to \left[-\frac{1}{3}\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\frac{2}{3} \right] \text{ tal que } \quad g_1|_{F_1} = -\frac{1}{3}\frac{2}{3} \text{ y } g_1|_{G_1} = \frac{1}{3}\frac{2}{3}.$$

3) Sea $f_2 = f_1 - g_1|_Y : Y \to \mathbb{R}$. Entonces $f_2(Y) \subset [-\frac{2}{3}\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\frac{2}{3}]$. Sean

$$F_2 = \left\{ x \in Y : f_2(x) \leqslant -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \right\} \text{ y } G_2 = \left\{ x \in Y : f_2(x) \geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \right\}.$$

Se verifica que F_2 y G_2 son cerrados y disjuntos. Por Corolario 2.58, existe una función continua

$$g_2 : X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \right] \text{ tal que } \quad g_1|_{F_1} = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{ y } g_1|_{G_1} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Continuando de esta manera, obtenemos funciones continuas $f_0, f_1, f_2, \cdots$ sobre Y y $g_0, g_1, g_2, \cdots$ sobre X tal que

$$f_n(Y) \subset \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n, \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] \text{ y } g_n(X) \subset \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \right] \text{ para } n \in \mathbb{N}_0$$

Además, tenemos

$$f_n = f_0 - (g_0 + g_1 + \cdots g_{n-1})|_Y \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Sea $\epsilon > 0$. Ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_\infty \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1 < \infty$$

existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{m} \|g_k\|_\infty - \sum_{k=0}^{n} \|g_k\|_\infty \right| &< \epsilon \ (m > n > n_\epsilon) \\ \| \sum_{k=n+1}^{m} g_k\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \|g_k\|_\infty &< \epsilon \ (m > n > n_\epsilon) \\ \| \sum_{k=n+1}^{m} g_k\|_\infty &< \epsilon \ (m > n > n_\epsilon) \\ \| \sum_{k=0}^{m} g_k - \sum_{k=0}^{n} g_k\|_\infty &< \epsilon \ (m > n > n_\epsilon). \end{aligned}$$

Consecuentemente $(\sum_{k=0}^{n} g_k)_{n=1}^{\infty}$ es un sucesión de Cauchy en el espacio de Banach $C_b(X, \mathbb{R})$ y por lo tanto converge a la función $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \mathbb{R}$. Para $x \in X$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} g_k = \widetilde{f} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} g_k(x) = \widetilde{f}(x)$$

Por consiguiente,

$$\left|\widetilde{f}(x)\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} g_k(x)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |g_k(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|g_k\|_\infty \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1.$$

Además, para $y \in Y$,

$$\left|f(x) - \widetilde{f}(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} g_k(x)\right| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leqslant \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Por lo tanto, $\widetilde{f}|_Y = f$. □

4.3. Conexión entre el Lema de Urysohn y el Teorema de Extesión de Tietze

El siguiente corolario establece la conexión entre el lema de Urysohn y el Teorema de extensión de Tietze.

Corolario 4.5. *Las siguientes proposiciones son equivalentes para un espacio $(X, \mathcal{T})$ que es T_1.*

(a) *X es normal.*

(b) *Para cualesquiera cerrados y disjuntos $F, G \subset X$, existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(X) \subset [0, 1]$, $f|_F = 0$ y $f|_G = 1$.*

(c) *Para cualesquiera cerrados y disjuntos $F, G \subset X$, existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f|_F = 0$ y $f|_G = 1$.*

(d) *Para cualquier subespacio cerrado Y de X y para cualquier función $f : Y \to \mathbb{R}$ con $f(Y) \subset [a, b]$, existe una función continua $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ con $\widetilde{f}(X) \subset [a, b]$ tal que $\widetilde{f}|_Y = f$.*

(e) *Para cualquier subespacio cerrado Y de X y para cualquier función $f : Y \to \mathbb{R}$, existe una función continua $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{f}|_Y = f$.*

Sug. (Runde, 2005, Pág.114-115)

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$ por lema de Urysohn, y $(b) \Longrightarrow (c)$ es inmeditato.

$(c) \Longrightarrow (a)$: Sean $F, G \subset X$ cerrados y disjuntos, y f una función como en (c). Sean

$$U = \left\{ x \in X : f(x) < \frac{1}{2} \right\} \text{ y } V = \left\{ x \in X : f(x) > \frac{1}{2} \right\}.$$

Entonces U y V son abiertos y disjuntos tal que $F \subset U$ y $G \subset V$.

$(d) \Longrightarrow (e)$: Sean $Y \subset X$ cerrado y $f : Y \to \mathbb{R}$ continua.

i) Sea $g = \arctan \circ f : Y \to \mathbb{R}$ continua con $g(Y) \subset \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, entonces existe una función continua $\widetilde{g} : X \to \mathbb{R}$ con $\widetilde{g}(X) \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ tal que $\widetilde{g}|_Y = g$.

   Podriamos simplemente establecer $\widetilde{f} = \tan \circ \widetilde{g}$. El problema con esta definición es que a pesar de que g no alcanza los valores de $-\frac{\pi}{2}$ ó $\frac{\pi}{2}$, no podemos descartar por (d) que estos valores no se encuentren en el rango de $\widetilde{g}$, de modo que $\widetilde{f} = \tan \circ \widetilde{g}$ no se pueda definir en todo X. Para evitar esta dificultad, invocaremos a (d) por segunda vez.

ii) Sea $F = \widetilde{g}^{-1}\left(\left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\} \right)$. Entonces F es cerrado y tiene una intersección vacia con Y.

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(Y) = g(Y) \subset \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \quad & \Rightarrow \quad Y \subset \widetilde{g}^{-1}\left(\widetilde{g}(Y) \right) \subset \widetilde{g}^{-1}\left(\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \right) \\ & \Rightarrow \quad Y \subset \widetilde{g}^{-1}\left(\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \right) \\ & \Rightarrow \quad F \cap Y = \varnothing. \end{aligned}$$

   Definamos:

$$h : F \cup Y \to \mathbb{R} \text{ tal que } \; h|_F = 0, \; h|_Y = 1.$$

   Entonces h es continua porque F y Y son cerrados y abiertos en $F \cup Y$, entonces existe una fucíón continua $\widetilde{h} : X \to \mathbb{R}$ con $\widetilde{h}(X) \subset [0, 1]$ tal que $\widetilde{h}|_Y = h$

iii) Resulta que $\widetilde{h}\widetilde{g} : X \to \mathbb{R}$ es una extensión continua de g alcanzando todos sus valores en $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{h}\widetilde{g} \right)(x) &= \widetilde{h}(x)\widetilde{g}(x) \quad (x \in Y) \\ &= h(x)g(x) \\ &= 1.g(x) \end{aligned}$$

Consecuentemente, $\widetilde{f} = \tan \circ \left(\widetilde{h}\widetilde{g}\right) : X \to \mathbb{R}$ es una extensión continua de f.

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(x) &= \left(\tan \circ \left(\widetilde{h}\widetilde{g}\right)\right)(x) \quad (x \in Y) \\
&= \tan\left(\widetilde{h}(x)\widetilde{g}(x)\right) \\
&= \tan(g(x)) \\
&= \tan(\arctan(f(x)) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

$(e) \implies (c)$: Sean $F, G \subset X$ cerrados y disjuntos. Sea $Y = F \cup G$ y definimos $f : Y \to \mathbb{R}$ mediante $f|_F = 0$ y $f|_G = 1$. Entonces f es continua y por lo tanto tiene una extensión continua $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{f}|_Y = f$.

$$\begin{aligned}
x \in F : \ \widetilde{f}(x) = f(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \widetilde{f}|_F = 0 \\
x \in G : \ \widetilde{f}(x) = f(x) = 1 \quad &\Rightarrow \quad \widetilde{f}|_G = 1
\end{aligned}$$

Esta extensión satisface (c). $\square$

Capítulo5

Conclusiones

- El Lema de Urysohn es un Teorema ”profundo”, porque su demostración implica una idea realmente original, que las pruebas anteriores, referente a los conceptos previos de la topología, no lo hacen.

  El Lema de Urysohn nos asegura la existencia de ciertas funciones continuas con valores reales sobre un espacio normal X: en un espacio topológico normal X, dos cerrados disjuntos se pueden separar por aplicaciones continuas de X en $[0, 1]$ de forma que en un cerrado vale 0 y en el otro 1.

- El Lema de Urysohn es la herramienta básica usada al probar el Teorema de metrización de Urysohn: todo espacio normal, segundo numerable es metrizable.

- El Lema de Urysohn es la herramienta básica usada al probar el Teorema de extensión de Tietze: caracteriza los espacios topológicos normales en los que es posible extender al espacio total una función continua definida en un cerrado.

- El Lema de Urysohn y Teorema de Extensión de Tietze es la herramienta básica usada al probar la conexión entre el lema de Urysohn y el Teorema de extensión de Tietze: la normalidad es precisamente la condición que hace que estos dos resultados esten conectados.

Capítulo6

Recomendaciones

1. Se sugiere continuar con el estudio de estos 3 resultados fundamentales de los espacios Nomales y considerar las diversas aplicaciones que estos tienen, por ejemplo, el Teorema de extensión de Tietze sirve para demostrar el Teorema del punto fijo de Brouwer.

2. Se deja como trabajo a futuro, el estudio de las particiones de la unidad como otras de las aplicaciones del teorema (lema de Urysohn), de igual forma un estudio más riguroso del Teorema de Metrización de Urysohn puesto que se vio sólo su demostración.

Referencias

Folland, G. B. (1999). *Real aalysis: Modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons, Inc.

Gerard Buskes, A. V. R. (1997). *Topological spaces: From distance to nieghborhood*. Springer.

Lima, E. L. (1976). *Elementos de topologia geral*. IMPA.

Lima, E. L. (1983). *Espacios métricos*. IMPA.

Lipschutz, S. (1992). *Álgebra lineal*. Mc GRAW-HILL.

Morris, S. A. (2011). *Topology without tears*.

Munkres, J. (2000). *Topología*. PRINTED IN SPAIN.

Norman B. Haaser, J. A. S. (1978). *Análisis real*. Litton Educational Publishing, Inc.

Runde, V. (2005). *A taste of topology*. Springer.

Vilches, M. A. (s.f.). *Topologia geral*. IME-UERJ.

Waldmann, S. (2014). *Topology: An introduction*. Springer.