UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL, ARQUITECTURA Y URBANISMO

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRUEBA GEOMÉTRICA DEL TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS Y SU APLICACIÓN AL GOOGLE

TESIS

Presentado Por:

EDSON QUISPE CALDERÓN

Para Optar el Titulo de:

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticos

Promoción 2014

Puno - Perú

2017

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"PRUEBA GEOMÉTRICA DEL TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS Y SU APLICACIÓN AL GOOGLE"

TESIS PRESENTADO POR EL BACHILLER

EDSON QUISPE CALDERÓN

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN

CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

APROBADO POR EL JURADO REVISOR CONFORMADO POR:

PRESIDENTE : ……………………………………
Mg. Celso Wilfredo Calsin Velásquez

PRIMER MIEMBRO : ……………………………………
Lic. Verónica Alicia Ibáñez Ulloa

SEGUNDO MIEMBRO : ……………………………………
Lic. Faustino Murillo Mamani

DIRECTOR DE TESIS : ……………………………………
Lic. Wilson Hilasaca Bizarro

ASESOR DE TESIS : ……………………………………
Lic. Derly Parí Mendoza

Área: Matemática Aplicada
Tema: Teorema de Perrón - Frobenius
Línea de Investigación: Matemática Aplicada

DEDICATORIA

Mi tesis se la dedico con todo mi amor y cariño a mí amada esposa MELINA APAZA por su sacrificio y esfuerzo, por ayudarme en los momentos difíciles que se me presentaron en el transcurso de la elaboración de la misma, por ser mi aliento y mi brazo derecho.

A mi amado hijo THIAGO QUISPE por ser mi fuente de motivación e inspiración para poder superarme cada día más y así poder luchar para que la vida nos depare un futuro mejor .

A mi amada madre ROSA CALDERON, mi querido padre ALFREDO QUISPE y hermana MARILUZ quienes con sus palabras de aliento no me dejaban decaer, pues son ejemplos a seguir y yo no tenía por qué quedarme atrás para así cumplir mis ideales.

A mis compañeros y amigos presentes y pasados, quienes sin esperar nada a cambio compartieron conocimientos, alegrías, tristezas pero sobre todo una muy linda experiencia.

Gracias a todo.

AGRADECIMIENTO

Primero y como más importante, agradezco a Dios por darme la oportunidad de crecer cada día más como persona y nunca desampararme.

Segundo, me gustaría agradecer a mi asesor de tesis Lic. DERLY PARI MENDOZA y director de tesis Lic. WILSON HILASACA BIZARRO por su esfuerzo y dedicación. Sus conocimientos, sus orientaciones, su manera de trabajar han sido fundamentales para la elaboración de esta tesis.

Ellos han inculcado en mí un sentido de seriedad, responsabilidad y rigor académico sin los cuales no hubiera sido posible la elaboración de la misma.

INDICE GENERAL

INDICE DE FIGURAS

RESUMEN

Las teorías de matrices son herramientas muy útiles para la vida cotidiana, desde la resolución de sistemas de ecuaciones hasta modelos matemáticos muy complejos que son utilizados en la economía y en la ingeniería. En la presente investigación se realiza una prueba geométrica del teorema de Perrón-Frobenius y se aplica este resultado al buscador Google. El teorema de Perrón-Frobenius afirma que una matriz con entradas reales no negativas tiene un único mayor valor propio real. Para la prueba geométrica del teorema de Perrón-Frobenius, se utiliza el teorema del punto fijo de Brouwer, y finalmente con la utilización de la teoría de matrices y grafos, se logra la aplicación del teorema de Perrón-Frobenius al Google.

PALABRAS CLAVES:

- Prueba Geométrica
- Aplicación al google

ABSTRACT

The theory of matrices are useful tools for everyday life, from solving systems of equations to very complex mathematical models that are used in economics and engineering. In the present investigation is done a geometric proof of Perron-Frobenius theorem and the result is applied to search Google. The Perron-Frobenius theorem asserts that a matrix with real nonnegatives inputs has a unique largest real eigenvalue. For the geometric proof of Perron-Frobenius theorem, the Brouwer fixed-point theorem is used. With the use of matrix theory and graph, it is achieved the application of Perron-Frobenius theorem to Google.

KEY WORDS:

- Geometric test
- Application to Google

INTRODUCCIÓN

La matemática tienen gran cantidad de aplicaciones en diversas áreas del conocimiento, y dentro de las matemáticas también existen diversas áreas de investigación, dentro de ellas se puede mencionar el álgebra lineal, teoría de grafos y topología; justamente estas áreas forman parte de este trabajo. En el presente trabajo de investigación titulado Prueba geométrica del teorema de Perrón-Frobenius y su aplicación al google, se logra demostrar el teorema de Perrón-Frobenius, utilizando el teorema del punto fijo de Brouwer y con ayuda de la teoría de matrices y teoría de grafos se logra aplicar este teorema al buscador de internet google.

En el capítulo uno, se mencionan el planteamiento y definición del problema, antecedentes, objetivos general y específicos.

En el capítulo dos se desarrolla el marco teórico, en la primera sección se definen las transformaciones lineales, de estas transformaciones los que tienen interés son los auto valores y auto vectores, y como cada transformación lineal tiene una matriz asociada, también es necesario conocer los auto valores y auto vectores de las matrices. En la sección dos, se introducen las matrices de permutación, esto con la idea de intercambiar filas y columnas en las matrices y las matrices no negativas son introducidas en la sección tres, este tipo de matrices son muy utilizadas en aplicaciones en ingenierías y en economía, en esta sección también se definen las matrices irreductibles; las matrices no negativas e irreductibles forman la parte más importante de la hipótesis del teorema de Perrón-Frobenius, que es uno de los objetivos del presente trabajo de investigación. La sección cuatro está dedicado una de las herramientas de aplicación muy utilizadas, se llama grafos, los grafos se representan mediante una matriz, que es llamada la matriz de adyacencia, estas matrices de adyacencia son matrices no negativas, ya que son formados por ceros y unos. Se finaliza el marco teórico con el teorema del punto fijo de Brouwer, para la demostración de este teorema se utilizan herramientas de topología general y topología algebraica, puesto que se utilizan conceptos de continuidad y de retracción, con este teorema se logra dar la prueba del teorema de Perrón-Frobenius, que es el objetivo del presente trabajo de investigación.

La exposición y análisis de resultados se encuentra en el capítulo tres, en donde se logra obtener el objetivo general del presente trabajo de investigación, que consiste en formular y demostrar el teorema de Perrón-Frobenius, para finalmente aplicar el teorema de Perrón-Frobenius al google.

Se sigue con el capítulo cuatro en donde se detalla la metodología utilizada en el trabajo. Finalmente se mencionan las conclusiones y recomendaciones del presente trabajo de investigación.

Se termina con las conclusiones y recomendaciones para los interesados en la investigación sobre la rigidez de la esfera.

CAPITULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 PLANTEAMIENTO Y DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

El desarrollo matemático está ligado siempre con el avance de la ciencia y la tecnología, es por ello que para desarrollar un algoritmo de búsqueda de internet como es el Google necesita de algoritmos matemáticos y más precisamente de la teoría de matrices, el Google es una página para organizar la información mundial y hacerla universalmente accesible y útil. Google utiliza una enorme base de datos y para presentar al usuario necesita ser ordenado, el orden que interesa para conseguir que las primeras páginas mostradas contengan información útil para el usuario, esto se logra con el Algoritmo PageRank con el que Google ordena los resultados de las búsquedas, para ello se utiliza la matemática ya que la base de datos estarán en matrices no negativas e irreducibles, para luego usar el teorema de Perrón-Frobenius y la prueba geométrica de este teorema.

1.1.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

La investigación que se llevará a cabo quedará definida bajo la siguiente interrogante: ¿Cuáles son las características de la prueba del teorema de Perrón-Frobenius y su aplicación al Google?

1.2 ANTECEDENTES

Se considera como antecedente los siguientes trabajos de investigación por la relación que tienen con el trabajo propuesto.

- ALBERTO BOROBIA AND UJU E R. TRIAS, 1992. A Geometric proof of the Perron- Forbenius theorem. En español quiere decir una prueba geométrica del Teorema de Perrón-Frobenius. Es una Revista Matemática de La universidad Complutense de Madrid Volumen 5, Número 1. El estudio de este paper es básicamente la demostración geométrica del clásico teorema de Perrón-Frobenius para una matriz no negativa mediante el uso del teorema de punto fijo de Brouwer y estudiando la dinámica de la acción de una matriz en subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

- ROSA BARBOLLA PALOMA SANZ, 1998. Algebra Lineal y teoría de matrices. Es un libro que nos proporciona demostraciones con matrices que tienen auto valores reales y existencia de auto vectores sobre el teorema de Perrón-Frobenius.

- PABLO FERNÁNDEZ GALLARDO, 2004. El secreto de google y el Algebra lineal. Es un artículo del Departamento de matemáticas de la Universidad autónoma de Madrid. Aquí se analiza algunos ingredientes matemáticos que fundamentan el Algoritmo (PAGERANK) con el que Google ordena los resultados de las búsquedas, una muy buena aplicación del algebra lineal, teoría de grafos y probabilidad. Dicho artículo será una herramienta fundamental para el desarrollar el estudio planteado.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GENERAL

- Mostrar las características de la prueba del teorema de Perrón-Frobenius y su aplicación al google.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analizar las matrices no negativas e irreductibles y sus principales características.
- Comprender la prueba geométrica del teorema de Perrón-Frobenius.
- Mostrar la aplicación del teorema de Perrón-Frobenius al Google.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

DEFINICION 2.1.-

Sean E un espacio vectorial sobre K, T un endomorfismo de E. Se denomina valor propio de T a todo escalar $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$ tal que existen vectores no nulos v de E que cumplen:

$$T(v) = \lambda v.$$

(Noriega Sánchez, 1986)

- ✓ **OBSERVACIÓN**

  La condición de que existan vectores no nulos es indispensable, pues de lo contrario todo escalar sería valor propio, porque $T(0) = 0 = \lambda 0$; y la definición no tendría interés.

DEFINICION 2.2.-

Sea E un espacio vectorial sobre K, T un endomorfismo de E y λ un valor propio de T. Se denomina vector propio asociado al valor propio λ, a todo vector v de E que satisface la ecuación.

$$T(v) = \lambda v$$

(Noriega Sánchez, 1986)

TEOREMA 2.3.-

Sean E un espacio vectorial de dimensión finita sobre K, T un endomorfismo de E. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $\lambda \in K$ es el valor propio de T.
2. Ker $(T-\lambda Id_E) \neq \{0\}$.
3. El endomorfismo $T-\lambda Id_E$ no es inyectivo.
4. El endomorfismo $T-\lambda Id_E$ no es inversible.

Para estudiar los valores propios de una matriz A, tenemos que estudiar los valores propios de la transformación que ella determina en K^n. El escalar λ es el valor propio si existen vectores de K^n, $X \in K^n$, no nulos tal que

$$AX = \lambda X .$$

Empleando la matriz identidad I_n, obtenemos:

$$\begin{aligned} AX = \lambda X \quad &\Leftrightarrow \quad AX = \lambda(I_n X) \\ &\Leftrightarrow \quad AX - \lambda(I_n X) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (A - \lambda I_n)X = 0 \end{aligned}$$

Por tanto

λ Es el valor propio de A

$\Leftrightarrow Ker(A-I_n) \neq \{0\}$

$\Leftrightarrow A-\lambda I_n$ No es inyectiva

$\Leftrightarrow A-\lambda I_n$ No es inversible

$\Leftrightarrow det(A-\lambda I_n) = 0$

Se tiene que buscar los valores propios de la matriz A entre las raíces de la ecuación

$$det(A-xI_n)=0.$$

DEFINICION 2.4.-

Sea A una matriz cuadrada de orden n con coeficientes en K. El polinomio $det(A-xI_n)$; que se denomina el polinomio característico de la matriz A. (Noriega Sánchez, 1986)

El polinomio característico de una matriz de orden n tiene grado n, y sus raíces, que están en K y son los valores propios de A. La ecuación $det(A-xI_n)=0$ se denomina ecuación característica.

DEFINICION 2.5.-

Dado λ un auto valor de A definimos su multiplicidad algebraica como la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico. La multiplicidad geométrica estará dada por la dimensión del auto espacio asociado a λ. (Noriega Sánchez, 1986)

La multiplicidad algebraica de un auto valor λ es siempre mayor o igual a la multiplicidad geométrica del mismo. Y que si la multiplicidad geométrica fuera $m \leq n$, entonces existen $v_1,\ldots,v_m$ auto vectores no nulos, linealmente independientes asociados a λ. Considerando $B=\{v_1,\ldots,v_m,w_1,\ldots,m_{n_m}\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ tenemos que la matriz C es equivalente a la matriz A, donde C está dada por

$$C=\begin{pmatrix} \lambda I_m & C_{1,2} \\ 0 & C_{2,2} \end{pmatrix}$$

Por tanto A y C tienen el mismo polinomio característico. Note que el polinomio característico de C está dado por $p(x)=(x\lambda)^m.det(xI_{n-m}-C_{2,2})$ y luego tiene multiplicidad algebraica por lo menos m.

PROPOSICION 2.6.-

Sean λ un auto valor de A y $B(\lambda)$ la matriz $n \times n$ dada por:

$$B(\lambda) = adj(\lambda I - A)$$

Entonces las columnas no nulas de $B(\lambda)$ son auto vectores de A asociados a λ.

- ✓ **DEMOSTRACIÓN**

  De hecho, por las propiedades de adjunta, tenemos que

$$\begin{aligned}(\lambda \mathrm{I} - A)\mathrm{B}(\lambda) &= (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})\mathrm{adj}(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) \\ &= \det(\lambda I - A)\mathrm{I}_n \\ &= p(\lambda)\mathrm{I}_n \\ &= 0\end{aligned}$$

  Ya que λ es una raíz del polinomio característico de p de A. Luego tenemos que cada columna no nula es un auto vector no nulo asociado a λ.

DEFINICION 2.7.-

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre K y $\mathrm{T}: V \to V$ una aplicación lineal. Se dice que un escalar $\lambda \in K$ es un auto valor o valor propio de T si existe un vector $v \in V, v \neq 0_V$ tal que

$$\mathrm{T}(v) = \lambda v$$

Al vector v se le denomina auto vector o vector propio de f asociado al auto valor λ. (Noriega Sánchez, 1986)

- ✓ **OBSERVACIÓN**

- El auto vector v asociado a un auto valor λ no es único, ya que si $\mathrm{T}(v) = \lambda v$, entonces para todo $\alpha \in K$ se verifica que $\mathrm{T}(\alpha v)\lambda(\alpha v)$ y, por tanto, αv es también un vector propio de T asociado a λ.

- Un vector $v \in V, v \neq 0_V$ no puede ser auto vector asociado a dos auto valores de T diferentes. En efecto, si existen $\lambda, \mu \in K$ tales que

$$\mathrm{T}(v) = \lambda v \quad T(v) = \mu v$$

Entonces

$$\mathrm{T}(v) - T(v) = 0_V = (\lambda - \mu) v$$

Y, en consecuencia, $\lambda = \mu$ pues $v \neq 0_v$

Toda transferencia lineal T de un K-espacio vectorial V de dimensión n en sí mismo respecto de una base $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de V lleva asociada una matriz $A \in M_n$ con elementos pertenecientes a K. En relación a esto se tiene el siguiente resultado.

PROPOSICION 2.8.-

Sea $f : V \to V$ una transferencia lineal con matriz asociada $A \in M_n$ respecto a la base $\mathcal{B}_V = \{u_1, \ldots, u_n\}$ del K-espacio vectorial V. Entonces se verifica que una condición necesaria y suficiente para que $\lambda \in K$ sea auto valor de f con auto vector asociado v, es que

$$Ax = \lambda x$$

Donde $x \in K^n$ son las coordenadas de v respecto de $\mathcal{B}_V$

Hablaremos de auto valores de matrices cuadradas de orden n pertenecientes a un cuerpo K cualquiera. Estas matrices estarán asociadas a transferencias lineales definidas del K espacio vectorial K^n en sí mismo. En este contexto el auto valor de una matriz tienen las siguientes propiedades.

2.2 PROPIEDADES DE LOS AUTOVALORES

Sean $A \in M_n$ y $B \in M_m$ cuyos auto valores son los escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ y $\mu_1, \ldots, \mu_m$, respectivamente. Estos auto valores pueden ser reales o complejos, iguales o distintos. Se verifica que:

1. Los auto valores de A' coinciden con los de la matriz A.
2. El número de auto valores nulos de una matriz A de rango $r < n$ es mayor o igual que $n - r$.
3. $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$
4. $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
5. Los auto valores de la matriz αA para cualquier $\alpha \in R$ (o C), $\alpha \neq 0$ son $\alpha \lambda_i$, con $i = 1, \ldots, n$.
6. Si $m = n$ entonces los auto valores de las matrices AB y BA son los mismos
7. Si A es no singular, entonces los auto valores de A^{-1} son $1/\lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$
8. Para cualquier número natural k no nulo, los autovalores de A^k son λ_i^k, siendo $i = 1, \ldots, n$.
9. Si A es una matriz de orden n con elementos pertenecientes a $\mathbb{R}$ tal que sus auto valores $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ son reales, entonces para todo, p número natural impar, los auto valores de $A^{1/p}$ son $\lambda^{1/p}, i = 1, \ldots, n$. Si p es par, esta propiedad se verifica siempre que $\lambda_1 \geq 0, i = 1 \ldots, n$.
10. Si $\lambda_i \neq -1, i = 1 \ldots, n$, entonces $I_n + A$ es invertible, siendo $1 + \lambda_i$ sus autovalores y $\dfrac{1}{1 + \lambda_i}$ los de su inversa.

2.3 PROPIEDADES DE LOS AUTOVECTORES.-

Sea $A \in M_n, a_{ij} \in K, i, j = 1, \ldots, n$ una matriz de orden n cuyos autovalores son $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$, con multiplicidades algebraicas $m_1, \ldots, m_r$, respectivamente, siendo $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$ Se verifica que:

1. Para cada $i = 1 \ldots, r$ el conjunto $V(\lambda_i) = \{v \in K^n : Av = \lambda_i v\}$ es un subespacio vectorial de K^n tal qué $dim[V(\lambda_i)] \leq m_i$. Además, si $m_{i_0} = 1$ entonces $dim[V(\lambda_{i_0})] = 1$.
2. Los autovectores correspondientes a autovalores distintos son linealmente independientes.
3. Si $K = C$ y la matriz A tiene como autovalor $\lambda \in C$ y su conjugado $\bar{\lambda}$, entonces el autovector v asociado a λ es el conjugado del autovector w asociado a $\bar{\lambda}$.

2.4 AUTOVALORES Y AUTOVECTORES DE ALGUNOS TIPOS DE MATRICES

2.4.1 MATRICES TRIANGULARES.-

Dada A de orden n triangular superior (respectivamente inferior), se verifica que los autovalores de A son los elementos de su diagonal principal, es decir, $a_{ij}, i = 1, \ldots, n$

2.4.2 MATRICES SIMÉTRICAS

Dada A una matriz simétrica cuyos elementos son números reales, se verifica que:

- Todos los autovalores de A son números reales.
- Dos autovalores distintos de A tienen asociados autovectores ortogonales.
- Para cada autovalor de A la dimensión del subespacio vectorial de los autovectores asociados coincide con su multiplicidad algebraica.

2.4.3 MATRICES IDEMPOTENTES , UNIPOTENTES Y NILPOTENTES.-

Dada un matriz A cuadrada de orden n se verifica que:

a) Si A es idempotente entonces

1. Sus autovalores son iguales a 0 o a 1.
2. $tr(A) = rang(A)$.
3. Si m_0 es la multiplicidad algebraica de $\lambda = 0$ y m_1 la de $\lambda = 1$, entonces la dimensión de los subespacios de autovectores $V(0)$ y $V(1)$ es m_0 y m_1, respectivamente.

b) Si A es unipotente entonces. Todos sus autovalores son iguales a 1 o -1

c) Si A es nilpotente entonces. Todos sus autovalores son nulos

2.5 MATRICES DE PERMUTACIÓN

Una permutación del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ es una lista de longitud n sin repetición formada por sus elementos; el conjunto de todas ellas se llama:

$perm(\{1,\ldots,n\}) = \{n-\text{listas sin repetición formadas con los símbolos } \{1,\ldots,n\}\}$
Con esto, hay n! de ellas. Para exhibir una permutación podemos escribir la lista correspondiente,

$$(2,7,5,1,\ldots,6) \qquad \text{permutación como lista}$$

O bien utilizar la siguiente notación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\ 2 & 7 & 5 & 1 & \ldots & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{permutación como aplicación biyectiva}$$

Que permite reconocer la imagen de cada elemento de $\{1,\ldots,n\}$ por la permutación. Es decir, se identifica la lista $(2,7,5,1,\ldots,6)$ con la aplicación biyectiva que lleva el 1 en 2, el 2 en 7, el 3 en 5, etc.

Otra manera de describir una permutación es con una matriz de ceros y unos. Si se tiene la permutación del conjunto $X = \{1,...,n\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Entonces se forma una matriz $n \times n$ con filas y columnas etiquetadas con $\{1,...,n\}$. En la primera columna se pone un 1 en la fila que indique a_1 (y así esta primera columna informa de la imagen del 1 con la permutación, a_1); en la segunda columna, se pone el 1 en la posición que indica a_2, etc. En el resto de las posiciones se sitúan ceros. (FRALEIGH, 1988)

- ✓ **EJEMPLO**

Sea el conjunto $X = \{1,2,3\}$ y se considera las permutaciones dadas por

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Siguiendo las indicaciones, se obtiene

$$g_1 \rightarrow \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$g_2 \rightarrow \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$g_3 \rightarrow \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Este procedimiento establece una aplicación biyectiva entre las permutaciones de $\{1,\ldots,n\}$ y el de las matrices $n \times n$ con ceros y unos con un único 1 por columna y un único 1 por fila.

Los elementos de las matrices de permutación son siempre 0 ó 1. Esta característica hace que según sea la distribución de los ceros y unos, se reordenan los elementos de una matriz A cuando se la multiplica por una matriz de permutación. Así, por ejemplo, gracias a este tipo de matrices es posible establecer la conmutatividad del producto de Kronecker.

DEFINICIÓN 2.9.-

Una matriz de permutación de orden mn que se denota por $P_{m,n}$, es una matriz cuadrada de orden mn, dividida en $n \times m$ bloques o cajas cada una de ellas de orden $m \times n$, de manera que el bloque $(i, j), i = 1,\ldots,n; j = 1,\ldots,m$ tiene todos sus elementos nulos salvo el que está situado en su j-ésima fila e i-ésima columna que es igual a la unidad.

- ✓ **EJEMPLO**

  1. Las matrices de permutación $P_{3,2}, P_{2,3}$ y $P_{2,2}$ son

$$P_{3,2} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$P_{2,3} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$P_{2,2} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Se tiene que

$$P_{2,2}A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \\ 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Es decir, $P_{2,2}$ intercambia las filas segunda y tercera de A.

3. Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si se la pos multiplica por $P_{3,2}$ resulta

$$BP_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & 8 & 2 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Esto es, $P_{3,2}$ modifica la posición de todas las columnas de B salvo la primera y la última.

PROPOSICIÓN 2.10.-

Las matrices de permutación verifican las siguientes propiedades:

1.- $P_{m,1} = P_{1,m} = I_m$

2.- $P^t_{m,n} = P_{n,m}$

3.- $P_{m,n}P_{n,m} = I_{nm}$

4.- La matriz $P_{m,n}$ es ortogonal.

2.6 MATRICES NO NEGATIVAS Y MATRICES IRREDUCTIBLES

El teorema de Perrón-Frobenius, es el resultado principal para las matrices no negativas.

DEFINICIÓN 2.11.-

Una matriz A, se dice no negativa si ningún elemento de A es negativo. (LANCASTER, 1985)

- Si todos los elementos de A son positivos, entonces A será referido como una matriz positiva.
- Se denota por $A \geq 0$ a las matrices no negativas y por $A > 0$ para las matrices positivas.

DEFINICION 2.12.-

Sea A una matriz $n \times n$, con $n \geq 2$. Se dice que A es reductible si existe una matriz de permutación P tal que:

$$P^t AP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

Donde A_{11}, A_{22} son matrices cuadradas de orden menor que n. Si no existe tal matriz de permutación P, entonces diremos que A es irreductible.

PROPOSICION 2.13.-

Si A es una matriz $n \times n$, con $n \geq 2$ es reductible, entonces para cualquier entero positivo p, la matriz A^p es reductible.

✓ **EJEMPLOS**

- Toda matriz positiva es irreductible.
- Toda matriz no negativa 3×3 que tiene sólo una entrada nula, es irreductible.
- Toda matriz no negativa $n \times n$ con $n \geq 2$ que tiene a lo más $n-2$ entradas nulas, es irreductible.

PROPOSICION 2.14.-

Si A es una matriz $n \times n$, no negativa e irreductible, y sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ tal que $Ax = 0$, entonces $x = 0$.

- ✓ **DEMOSTRACIÓN**

Suponga que $x_k > 0$ para algún k, entonces:

$$0 = (\mathrm{Ax})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$
$$= \geq a_{ik} x_k$$

Lo que muestra que $x_k \leq 0$, una contradicción.

LEMA 2.15.-

Sea A una matriz $n \times n$ no negativa e irreductible, entonces $(I + A)^{n-1} > 0$

- ✓ **DEMOSTRACIÓN**

Sea $y \in \mathbb{R}^n$ no nulo y $y \geq 0$, consideremos

$$z = (I + A)y = y + Ay$$

Note que $z \geq 0$ pues $A \geq 0$ y $y \geq 0$, además, z tiene por lo menos tantas coordenadas no nulas en cuanto a y. Si y no fuera positivo, se prueba que z tiene, por lo menos, una coordenada no nula a más del que y.

Se supone que z tiene tantas coordenadas no nulas en cuanto a y, sin pérdida de generalidad suponiendo que:

$$y = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad z = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donde } u, v > 0$$

Ya que la propiedad de una matriz es positiva e invariante por permutaciones. Observe que tanto u como y son vectores de $\mathbb{R}^m$ (sin coordenadas nulas), donde $m \geq 1$ es el número de coordenadas no nulas de y y 0 es el vector nulo de $\mathbb{R}^{n-m}$. Pensando que la matriz A formada por bloques de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Donde las matrices A_{11}, A_{12}, A_{21} y A_{22} tienen órdenes $m \times m, m \times (n-m), (n-m) \times m$ y $(n-m) \times (n-m)$ respectivamente. Por la definición de z, tenemos que:

$$\begin{aligned} z = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} n &= \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11}u + 0 \\ A_{21}u + 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}u + u \\ A_{21}u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego $A_{21}u = 0$. Mas como $u > 0$, entonces $A_{21} \geq 0$, entonces $A_{21} = 0$. Esto es una contradicción ya que A es irreductible.

Así, z tiene por lo menos una coordenada no nula a más del que y, si z no fuera positivo, aplicando el mismo argumento para z tenemos que $z_2 = (I + A)z = (I + A)^2$ y tiene por lo menos una coordenada no nula a más del que z y por lo menos 2 coordenadas no nulas a más del que y.

Repitiendo este argumento en el máximo $n-1$ veces, tenemos que para todo $y \geq 0$ no nulo, $z = (I + A)^{n-1} y$ tiene todas sus coordenadas positivas.

En particular, para $j=1,\ldots,n$ tomando $y=e_j$ el j-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, tenemos que:

$$(I-A)^{n-1}e_j > 0; \forall j=1,\ldots,n$$

Como $(I-A)^{n-1}e_j$ es la j-ésima columna de la matriz $(I+A)^{n+1}$, tenemos que $(I+A)^{n-1}$ tiene todas sus columnas positivas y por tanto $(I+A)^{n-1}$ es una matriz positiva como queríamos mostrar.

Varios corolarios pueden ser deducidos de este lema:

COROLARIO 2.16.-

Una matriz A, $n\times n$ no negativa e irreductible si, y solamente si $(I_n+A)^{n-1}>0.$

COROLARIO 2.17.-

Si A es una matriz $n\times n$ no negativa e irreductible, entonces todo auto vector no negativo de A debe ser positivo.

COROLARIO 2.18.-

Una matriz A, $n\times n$, no negativa e irreductible si, y solamente si, para cada (i, j) existe un entero k tal que la entrada de la matriz (i, j) de la matriz A^k sea positiva.

2.7 MATRICES Y GRAFOS

La teoría de grafos es un campo de las matemáticas cuyo desarrollo ha estado motivado siempre por sus aplicaciones. Así, desde sus inicios se utilizó para la resolución de juegos matemáticos, para el estudio de circuitos eléctricos y en diversas aplicaciones. En la actualidad la teoría de grafos sigue aplicándose dentro y fuera de las matemáticas.

Los grafos pueden ser considerados como diagramas o dibujos, o bien formalmente como un par de conjuntos. Geométricamente un grafo es un conjunto de puntos (vértices) en el espacio que están conectados por un conjunto de líneas (aristas).

DEFINICIÓN 2.19.-

Un grafo G consta de un conjunto V y un conjunto E de pares no ordenados de elementos distintos de V. El conjunto V se llama el conjunto de vértices siendo sus elementos los vértices. El conjunto E se llama el conjunto de aristas y sus elementos aristas. Se escribe $G=(V,E)$ para designar el grafo G con conjunto de vértices V y un conjunto de aristas E o bien dado un grafo G se denota por $V(G)$ el conjunto de vértices de G y por $E(G)$ el conjunto de sus aristas. (BUJALANCE, 1999)

- ✓ **EJEMPLO:**

  El grafo G representado en la figura 2.1 tiene por conjunto de vértices:

$$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_7\}$$

  Y como conjunto de aristas:

$$E=\{v_1v_2,v_2v_3,v_1v_3,v_1v_4,v_4v_7,v_7v_6,v_6v_5,v_5v_4,v_5v_7\}$$

Se denota por $\#V$ el número de vértices de un grafo (V,E) y por $\#E$ el número de aristas. Existen algunas variaciones de la idea de grafo que son muy útiles.

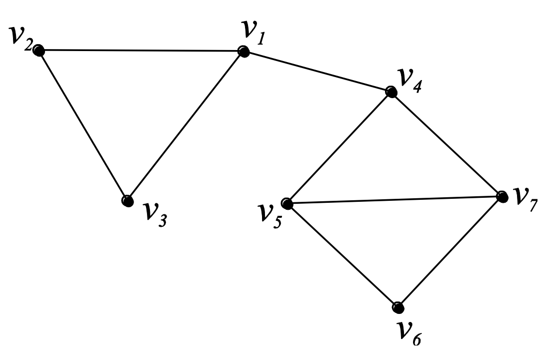

FIGURA 1: Grafo

DEFINICIÓN 2.20.-

Un multígrafo es un grafo con (posiblemente) varias aristas entre dos vértices, formalmente un multígrafo es el conjunto de aristas que puede contener algunas aristas distintas con el mismo par de extremos. (BUJALANCE, 1999)

- ✓ **EJEMPLO:**

  La figura 2.2 representa un multígrafo.

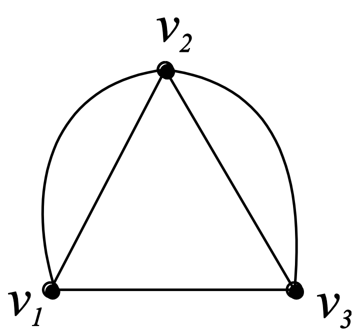

FIGURA 2: Multígrafo

DEFINICIÓN 2.21.-

Un pseudografo es al contrario de un grafo en donde están permitidas aristas cuyos extremos coinciden, tales aristas se denominan lazos.

- ✓ **EJEMPLO:**

  La figura 2.3 representa un pseudografo.

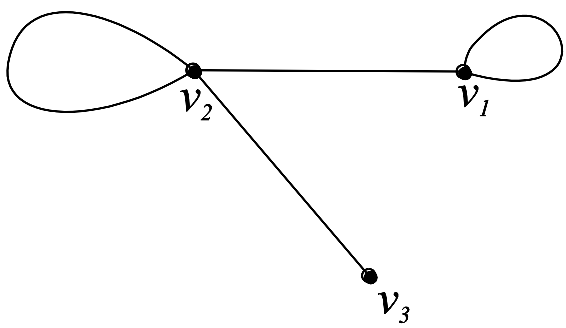

FIGURA 3: Pseudografo

DEFINICIÓN 2.22.-

Un dígrafo o (grafo dirigido) es un grafo donde a cada arista se le asigna un orden de sus extremos. El orden se indica en el dibujo del grafo con una flecha. Se llama origen al primer vértice de una arista y fin al segundo. (BUJALANCE, 1999)

- ✓ **EJEMPLO:**

  La figura 2.4 representa un dígrafo.

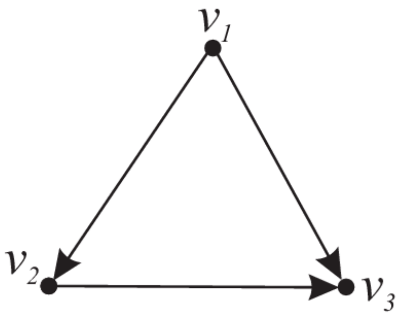

FIGURA 4: Dígrafo

En matemáticas se utiliza el término isomorfismo con mucha frecuencia, en la teoría de grafos se define el isomorfismo entre dos o más grafos como dos figuras aparentemente diferentes, en la siguiente definición se precisa la definición de isomorfía de grafos.

DEFINICIÓN 2.23.-

Sean $G=(V,E)$ y $G'=(V',E')$ dos grafos y sea $f:V\rightarrow V'$ una biyección entre los conjuntos de vértices tal que $uv\in E$ sí y sólo sí $f(u)f(v)\in E'$. La biyección f se denomina isomorfismo de G a G'. Se dice entonces que los grafos G y G' son isomorfos. (BUJALANCE, 1999)

- ✓ **EJEMPLO:** Sean los grafos G y G' de la figura 2.5

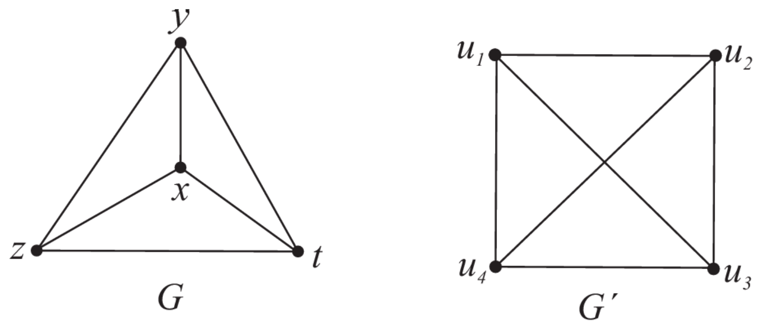

FIGURA 5: Grafos Isomorfos

El isomorfismo entre G y G' viene determinado por la siguiente biyección $f: V(G) \to V(G')$, $f(x) = u_1$, $f(y) = u_2$, $f(z) = u_3$, $f(t) = u_4$.Para demostrar que f es un isomorfismo se debe comprobar que dos vértices adyacentes en G se transforman por f en vértices adyacentes de G', y que las pre imágenes por f de dos vértices adyacentes en G' son dos vértices adyacentes en G. La definición de grado de un grafo es muy importante en muchas aplicaciones.

DEFINICIÓN 2.24.-

Sea G un grafo y u un vértice de G, se llama grado de u en G, denotado por $gr(u)$, al número de aristas de G que tienen al vértice u por extremo. (BUJALANCE, 1999)

El grado de un vértice es un concepto que depende únicamente de la estructura matemática del grafo y por tanto se conserva por isomorfismo.

PROPOSICIÓN 2.25.-

Sean G y G' dos grafos y f un isomorfismo entre G y G'. Si u es un vértice de G entonces $gr(u) = gr(f(u))$. En seguida se enuncia un teorema tradicional que se llama “el primer teorema de la teoría de grafos".

TEOREMA 2.26.-

Primer Teorema de la Teoría de Grafos

Sean $G = (V, E)$ un grafo, $V = \{v_1, \ldots, v_p\}$ el conjunto de vértices y $\# E$ el número de aristas.

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{p} gr(v_i) = 2\#E.$$

Por tanto todo grafo contiene un número par (o cero) de vértices de grado impar.

A continuación se define algunos tipos de grafos de gran uso sobre todo en aplicaciones.

- Un grafo se dice regular si todos sus vértices tienen el mismo grado. (BUJALANCE, 1999)

- Un grafo para el que cada par de vértices son los extremos de una arista se llama grafo completo. (BUJALANCE, 1999)

- Dos grafos completos con el mismo número de vértices son isomorfos.

En seguida se define un camino en un grafo, como una sucesión de vértices y aristas.

DEFINICION 2.27.-

Sea G un grafo o un multígrafo. Un camino en G es una sucesión (finita) en la que aparecen alternadamente vértices y aristas de G:

$$v_0, v_0v_1, v_1, v_1v_2,, v_2\ldots, v_{n-1}, v_{n-1}v_n, v_n$$

Donde cada arista tiene por extremos los vértices adyacentes en la sucesión.

A los vértices v_0 y v_n se les denomina extremos del camino. También se dice que el camino conecta v_0 con v_n o que va de v_0 a v_n. La longitud del camino es el número n de aristas que contiene. Un camino se dice que es cerrado si sus extremos coinciden, es decir $v_0 = v_n$. En un grafo (pero no en multígrafo) un camino puede ser especificado por la sucesión de los vértices: $(v_0, \ldots, v_n)$ .Un camino se dice que es simple si en la sucesión de vértices no hay ninguno repetido. Un ciclo es un camino cerrado donde los únicos vértices repetidos son el primero y el último, además, en el caso de caminos de longitud dos, sólo considerando ciclos a aquellos caminos cerrados en multígrafos que no repiten aristas. Un circuito es un camino cerrado que no repite aristas.

TEOREMA 2.28.-

En un grafo G si existe un camino que conecta dos vértices distintos x e y de G entonces existe un camino simple con extremos x e y.

DEFINICIÓN 2.29.-

Un grafo G es conexo si para cada par de vértices u, v existe un camino cuyos extremos son u y v. En caso contrario se dice que G es disco nexo. (BUJALANCE, 1999)

DEFINICIÓN 2.30.-

Sea G un grafo, un camino (circuito) euleriano es un camino (respectivamente circuito) que contiene todas las aristas apareciendo cada una de ellas exactamente una vez. Un grafo que admite un circuito euleriano se denomina grafo euleriano. (BUJALANCE, 1999)

Otro modo de entender que es un camino euleriano es un grafo G es un modo de dibujar el camino sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces la misma arista.

- ✓ **EJEMPLO:**

  El grafo de la figura 2.6 tiene un camino euleriano:

$$(u_3, u_2, u_6, u_3, u_4, u_6, u_5, u_2, u_1, u_5, u_4)$$

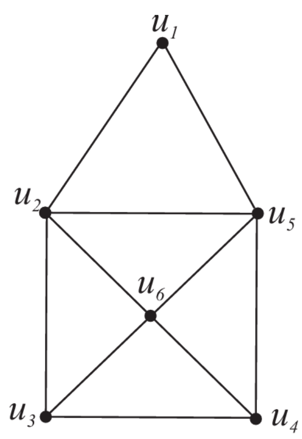

FIGURA 6: Grafo Euleriano

LEMA 2.31.-

Sea G un grafo. Si G es euleriano todo vértice de G tiene grado par.

LEMA 2.32.-

Sea G un grafo. Si G tiene un camino euleriano entonces o bien todo vértice de G tiene grado par o bien exactamente dos de los vértices tienen grado impar.

Ahora se va a representar una forma matricial de un grafo. Este modo de representación es muy útil.

DEFINICIÓN 2.33.-

Sea $G=(V,E)$ un grafo con $V=\{v_1,\ldots,v_p\}$. Se denomina matriz de adyacencia a la matriz $M=(m_{ij})$ de orden $p\times p$ cuyas entradas son unos o ceros siguiendo la siguiente ley:

$$
\begin{array}{lll}
m_{ij}=1 & \text{si} & v_iv_j\in E \\
m_{ij}=0 & \text{si} & v_iv_j\notin E
\end{array}
$$

(BUJALANCE, 1999)

Para el caso de dígrafos se define la matriz de adyacencia del siguiente modo:

DEFINICIÓN 2.34.-

Sea $G=(V,E)$ un dígrafo con $V=\{v_1,\ldots,v_p\}$. La matriz de adyacencia de G es la matriz $M=(m_{ij})$ de orden $p\times p$ y con entradas unos o ceros definida por:

$m_{ij} = 1$ si $v_i v_j \in E$ y la orientación de tal arista es $v_i \to v_j$, $m_{ij} = 0$ si $v_i v_j \notin E$ y la orientación de tal arista en G es $v_j \to v_i$. (BUJALANCE, 1999)

- ✓ **EJEMPLO:**

  Para el grafo de la figura 2.7 la matriz de adyacencia es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

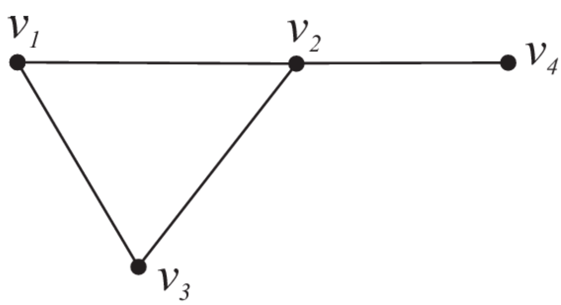

FIGURA 7: Grafo de la matriz de adyacencia

- ✓ **EJEMPLO:**

  Para el dígrafo de la figura 2.8 la matriz de adyacencia es:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

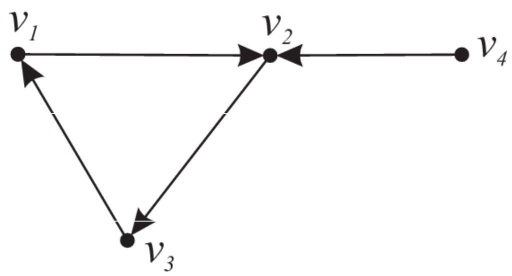

FIGURA 8: Dígrafo de la matriz de adyacencia

DEFINICIÓN 2.35.-

Un grafo G es fuertemente conexo si para cada par ordenado de vértices distintos i e j existe un camino en G uniendo i a j. (BUJALANCE, 1999)

El objetivo es relacionar el hecho de que una matriz no negativa sea irreductible con el hecho de que su grafo dirigido asociado sea fuertemente conexo.

Usando la siguiente notación: Si $A=(a_{ij})$ es una matriz cuadrada, entonces $a_{ij}^{(k)}$ denotará la entrada (i, j) de la matriz A^k.

TEOREMA 2.36.-

Si $A=(a_{ij})$ es una matriz $(0,1)$ y G(A) es el grafo dirigido asociado a A con vértices $1, 2, \ldots, n$ entonces el número de caminos distintos de longitud k uniendo i a j es igual a $a_{ij}^{(k)}$.

COROLARIO 2.37.-

Si $A=(a_{ij})$ es una matriz no negativa, entonces el grafo dirigido asociado a A tiene caminos de longitud k uniendo el vértice i al vértice j si, y solamente si, $a_{ij}^{(k)} > 0$

TEOREMA 2.38.-

Una matriz no negativa es irreductible si, y solamente si, su grafo dirigido asociado es fuertemente conexo.

✓ **DEMOSTRACIÓN**

Sea $A=(a_{ij})$ la matriz no negativa e irreductible, por el corolario 3, se tiene que A es irreductible si, solamente si, existe un entero k tal que la entrada (i,j) de la matriz A es positiva, es decir $a_{ij}^{(k)}>0$, luego por el corolario 4 se tiene que esta condición cumple si, y solamente si, el grafo dirigido $G(A)$ tiene un camino uniendo el vértice i al vértice j. Por lo tanto A será irreductible si, y solamente si, para cada i e j existe un camino en $G(A)$ uniendo i a j, o sea: si, y solamente si $G(A)$ es fuertemente conexo.

2.8 TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER

DEFINICION 2.39.-

Sea $X\neq\phi$ y se denota por $P(x)$ al conjunto potencia de X (es decir el conjunto formado por todos los subconjuntos de X). Se dice que $\tau\subset P(X)$ es una topología sobre X si y sólo si

i) $\phi, X\in\tau$

ii) $U_1,U_2\in\tau$ entonces $U_1\cap U_2\in\tau$

iii) $\{U_\lambda\}\subset\tau$ entonces la unión de los U_λ pertenecen a τ.

Si τ es una topología sobre X entonces los elementos de τ son llamados conjuntos τ -abiertos. Se dice que el par (X,τ) es un espacio topológico si y sólo si $X\neq\phi$ y $\tau\subset P(x)$ es una topología sobre X. (MUNKRES, 1975)

DEFINICION 2.40.-

Se dice que un subconjunto de A en un espacio topológico X es un retracto de X si existe una aplicación continua $\tau : X \longrightarrow A$ (llamada retracción) tal que $\tau(a) = a$ para todo $a \in A$. (MUNKRES, 1975)

DEFINICION 2.41.-

Se define la bola unitaria cerrada B^n en $\mathbb{R}^n$ por la ecuación

$$B^n = \{x/ \| x \| \leq 1\}$$

Donde

$$\| x \| = \| (x_1, \ldots, x_n) \| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$$

(MUNKRES, 1975)

La bola unitaria es conexo por partes; en efecto, dado cualquier par de puntos x e y de B^n, la línea recta $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ definido por

$$f(t) = (1-t)x + ty$$

Se encuentra en B^n. Porque si x e y en B^n y t en [0,1], se tiene

$$\| f(t) \| \leq (1-t) \| x \| + t \| y \| \leq 1$$

DEFINICION 2.42.-

Sea f una función de un conjunto A en sí mismo. Se dice que $x \in A$ es punto fijo de f si $f(x) = x$ (MUNKRES, 1975)

La idea intuitiva de este concepto es, que al aplicar una función a un conjunto, es que la función mueve a los puntos del conjunto, por ejemplo, la función $f(x) = x + 1$ provoca que los puntos se muevan una unidad a la derecha. Con esta idea de movimiento, un punto fijo es un punto que no se mueve, simplemente queda fijo donde está. Así, un punto fijo es invariante bajo la función, nunca cambia sin importar cuantas veces se la aplique.

- ✓ **EJEMPLO:**

Una función puede tener cualquier cantidad de puntos fijos. A continuación se da ejemplos de funciones con uno, dos, ninguno o una infinidad de puntos fijos.

Sea f una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, definida por:

1. $f(x) = -x$. esta función tiene sólo un punto fijo, el cero. Para encontrar todos los puntos fijos se debe encontrar todas las soluciones de la ecuación $f(x) = x$.
2. $f(x) = x^2$. En este caso hay dos puntos fijos, el cero y el uno, pues satisfacen $f(1) = 1^2 = 1$ y $f(0) = 0^2 = 0$, respectivamente.
3. $f(x) = x + 1$. No tiene puntos fijos, porque $x = x + 1$ no tiene solución en los reales.
4. $f(x) = x$. Un claro ejemplo de una infinidad de puntos fijos.

Nótese que para un punto fijo x_0 de f, se cumple que

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$$

En general se cumple $f^n(x_0) = x_0$, es decir, x_0 es invariante bajo f

- ✓ **EJEMPLO:**

Un punto fijo no depende sólo de la regla de correspondencia de la función, también depende del dominio. Considere la función $f(x) = x^2$, esta función no tiene puntos fijos si el dominio es el intervalo (0,1), a pesar de que tiene dos si se define en R.

Es bueno destacar que en este contexto, un punto se puede referir prácticamente a cualquier cosa, el punto es usando para hacer mención a los elementos de un conjunto, donde f es una función definida en el conjunto.

TEOREMA 2.43.- (Punto fijo de Brouwer)

Si $f : B^n \to B^n$ es continuo, entonces existe un punto $x \in B^n$ tal que $f(x) = x$. (MASSEY, 1977)

Antes de demostrar el teorema del punto fijo de Brouwer, es conveniente indicar por qué son interesantes teoremas del punto fijo, como lo es el teorema del punto fijo de Brouwer.

Sea un sistema de n ecuaciones con n incógnitas

$$\begin{aligned} g_1(x_1,\ldots,x_n) &= 0 \\ g_2(x_1,\ldots,x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ gn(x_1,\ldots,x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Donde las funciones reales g_i son continuas en las variables reales $x_1,\ldots,x_n$. Un problema importante consiste en saber cuándo tal sistema de ecuaciones tiene solución. Se transforma este problema en un problema del punto fijo de la siguiente manera: Para cada $i = 1,\ldots,n$, se tiene

$$h_i(x_1,\ldots,x_n) = g_i(x_1,\ldots,x_n) + x_i$$

Entonces, para cada punto $x = x(x_1,\ldots,x_n)$ se define

$$h(x) = (h_1(x),\ldots,h_n(x)).$$

La función h es continua y se aplica un cierto subconjunto del n -espacio euclídeo (que depende del dominio de definición de las funciones g_i) en el n -espacio euclídeo. Si se puede encontrar un subconjunto X del $n-$ espacio euclídeo homeomorfo a B^n , tal que h esté definida en X y $h(x) \subset X$, entonces, por el teorema del punto fijo de Brouwer se afirma que h tiene un punto fijo en X ; pero el punto fijo de la función h es una solución del sistema de ecuaciones.

- ✓ **<u>DEMOSTRACIÓN</u>**

La demostración, se hará, por contradicción.

Primeramente, se prueba, que para todo $n > 0$ existe una aplicación continua $f : B^n \to B^n$ sin puntos fijos, entonces se puede definir una retracción $r : B^n \to S^{n-1}$ donde S^{n-1} denota la esfera $(n-1)$ dimensional, es decir:

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n :| x |= 1\}.$$

En efecto: Utilizando la siguiente construcción elemental. Para cada punto $x \in B^n$, se tiene $r(x)$ como el único punto de intersección de S^{n-1} y la semirrecta que con origen en $f(x)$ pasa por el punto x. Para el caso $n = 2$, la interpretación geométrica, se muestra en la Figura 2.9.

Ahora utilizando notación vectorial, se puede escribir, la semirrecta formada por los puntos $y \in \mathbb{R}^n$, de la siguiente manera

$$y(x) = f(x) + t(x - f(x)), \ \ t > 0$$

Como la demostración es por contradicción, y f es una función continua sin puntos fijos, es decir $f(x) \neq x$. Luego, $y \in S^{n-1}$ si y sólo si,

$$y^2(x) = f^2(x) + 2f(x)(x - f(x))t + (x - f(x)^2 t^2 = 1$$

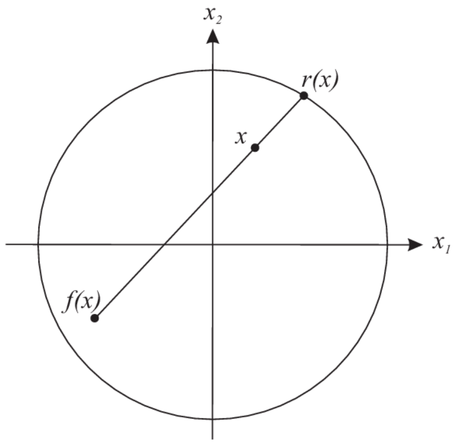

FIGURA 9: Demostración del teorema del punto fijo de Brouwer

De la cual se puede tener una ecuación cuadrática de variable t, como sigue

$$(x-f(x))^2t^2+2f(x)(x-f(x))t+f^2(x)-1=0$$

Y su solución estaría dada de la siguiente manera

$$\begin{aligned} t &= \frac{-2f(x)(x-f(x))+\sqrt{4f^2(x)(x-f(x))^2-4(x-f(x))^2(f^2(x)-1)}}{2(x-f(x))^2} \\ &= \frac{-f(x)(x-f(x))+\sqrt{(x-f(x))^2(f^2(x)-f^2(x)+1)}}{(x-f(x))^2} \\ &= \frac{-f(x)(x-f(x))+|x-f(x)|}{(x-f(x))^2} \end{aligned}$$

Luego, se tiene que, $r(x)=f(x)+t(x-f(x))$, está bien definida, es continua y fija a los puntos de S^{n-1}. Pero el campo vectorial y no puede apuntar directamente hacia el exterior en cualquier punto x de S^{n-1} pues eso significaría

$$f(x)-x=ax$$

Para algún número real positivo a, tal que $f(x)=(1+a)x$ quedaría fuera de la bola unitaria B^n. Llegando así a una contradicción.

CAPITULO III

EXPOSICIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

3.1 EL TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS

Las matrices en que todas sus entradas son no negativas, esto no es una propiedad excesivamente fuerte, sin embargo a principios del siglo XX hubo dos matemáticos que desarrollaron lo que se conoce como la teoría (que lleva su nombre) de Perrón-Frobenius.

Ambos alemanes, y no especialmente famosos, aunque sí que trabajaban con matemáticos más reconocidos, a Oskar Perrón por ejemplo, le dirigió su tesis sobre geometría Lindemann, y a Frobenius el mismísimo Weierstrass. Ambos estudiaron semestres en Gottingen y otras universidades alemanas, como era costumbre en la época, aunque Perrón se instaló en Munich y Frobenius en Berlín. Poco más que añadir sobre estos personajes históricos, aparte de que ambos trabajaron en campos muy diversos de la matemática. El teorema de Perrón-Frobenius, que convirtió en millonarios a Bring y Page, pues les proporcionaría la existencia del autovalor único que buscaban para construir su autovalor de los Page-Rank de todas sus páginas en las bases de datos.

Perrón publicó en 1907 un teorema que se acercaba a la solución deseada, pues aseguraba la existencia de un autovalor simple, donde su autovector asociado (el candidato a dar las importancias de cada página) es estrictamente positivo, y fácilmente reconocible.

La única inconveniencia es que las entradas de la matriz A no podían ser iguales a 0, cosa que por desgracia ocurre, pues no todas páginas enlazan o son enlazadas con el resto. Sin embargo poco más tarde Frobenius generalizó el teorema de Perrón para matrices no negativas. Es el conocido como teorema Perrón-Frobenius.

En este trabajo, A representa una matriz, un endomorfismo de R^n, que tiene entradas no negativas. Por otra parte, A es irreducible (indescomponible), es decir, A no puede ponerse en la forma:

$$\left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline P & N \end{array}\right) \qquad \ldots(*)$$

Con M y N matrices cuadradas por un reordenamiento de los miembros de la base canónica de R^n.

Una semirrecta en R^n (en la dirección de $v \in \mathbb{R}^n - 0$) será el conjunto $r[v] = \{\mu v / \mu > 0\}$. Se identifica la colección de semirrectas en R^n con S^{n-1}.

TEOREMA 3.1.- (Perrón – Frobenius)

Sea A una matriz $n \times n$ irreducible y no negativa. Entonces existe un valor propio positivo simple λ de A que está asociado a un vector propio positivo (i.e. todas sus coordenadas son positivas) y el cual tiene el mayor valor entre los módulos de los otros valores propios de A.

<u>3.2 PRUEBA EL TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS</u>

Para probar el teorema de Perrón-Frobenius se utiliza el teorema de punto fijo de Brouwer.

- ✓ **DEMOSTRACIÓN:**

i. A actúa en el conjunto $\mathbb{R}^+$ de semirrectas no negativas, es decir, semirrectas que emanan desde el origen y se encuentran en el cuadrante

$$C^+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$$

En efecto, A es irreductible, es decir, no puede ponerse en la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline P & N \end{array}\right)$$

Así, ninguna columna de A es un vector cero, además A es no negativo entonces ninguna semi recta de $\mathbb{R}^+$ puede ser enviado a cero, es decir, A actúa en el conjunto $\mathbb{R}^+$ de semirrectas no negativas.

ii. Ninguna semirrecta en $\partial\mathbb{R}^+$ queda invariante por A. En efecto, suponiendo que existe una semirrecta $r = r[v]$ que se encuentra ∂C^+ y queda invariante por A, para el cual, se tiene $A(r) = r$. Entonces, existe k, $0 < k < n$ tal que precisamente las primeras k coordenadas de v son ceros (después de un re-ordenamiento de bases si es necesario). Luego, como se ha supuesto que la semirrecta queda invariante por A, es decir, $A(r) = r$; donde $r = r[v]$ y las k primeras coordenadas de v son ceros, así, r tiende a cero como las k primeras coordenadas, en consecuencia $A(r)$ también tiene como las k primeras coordenadas igual a cero, esto significa que A tiene la forma (*) donde M es $k \times k$, por lo tanto, A no es irreductible, la cual es una contradicción, ya que A es irreductible.

iii. Ya que $A(R^+) \subseteq R^+$, sea $r : C^+ \to C^+$ definida por $r(x) = \dfrac{Ax}{|Ax|}$, y como A es no negativa, entonces Ax es no nulo, con lo cual se tiene que r es continua, así se puede aplicar el teorema de punto fijo de Brouwer, que afirma la existencia de un vector $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $r(\overline{x}) = \overline{x}$, así, $r(\overline{x}) = \dfrac{A\overline{x}}{|A\overline{x}|} = \overline{x}$ luego $A\overline{x} = |A\overline{x}|\,\overline{x}$.

Esto es, hay una semirrecta r invariante en R^+ que es positivo. Entonces el vector $\overline{x}$ es un auto vector no negativo de A y está asociado a un auto valor no negativo $\lambda = |A\overline{x}| > 0$.

Suponiendo que π es un plano invariante que contiene a r. A actúa en la circunferencia S^1 de las semirrectas que se encuentran en π. $\mathbb{R}^+ \cap S^1$ es un arco L que contiene a r y por (i) $A(L) \subseteq L$

(1) Los elementos de S^1 están en ∂C^+ y por (ii) S^1 no es puntualmente punto fijo en A.

(2) El conjunto de puntos fijos por la acción de A^2 en S^1 no hace consistir solamente en r y $-r$. Por otro lado la dinámica de la acción de A^2 sobre S^1 sería de la siguiente manera, (Figura: 3.1)

Y entonces $A^2(L)$ no será incluido en L, que esto no es posible.

De (1) se deduce la simplicidad geométrica de los auto valores λ correspondiente a r, y de (2) el algebraico uno. Por lo tanto, el auto valor λ correspondiente a r es simple, positivo y tiene asociado un auto vector positivo v_λ.

iv. Sólo queda demostrar que $\lambda \geq |\mu|$ para cualquier otro auto valor μ Argumentando por reducción al absurdo y, asumiendo que μ es tal que $\lambda < |\mu|$, se distinguen dos casos:

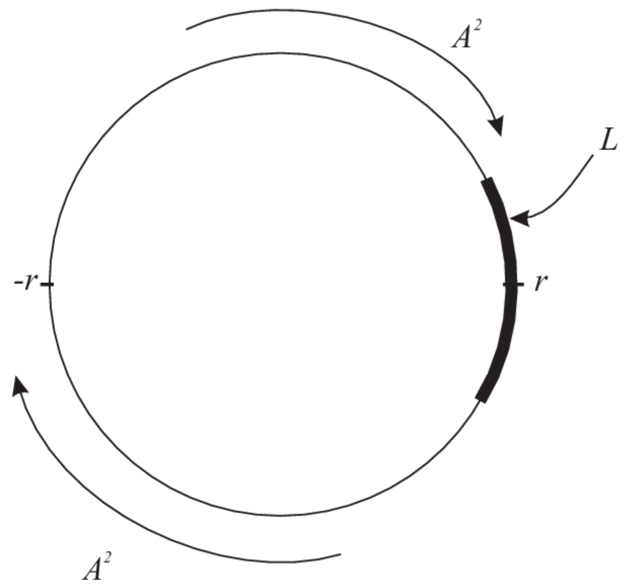

FIGURA 10: Demostración del teorema de Perrón-Frobenius

Se distinguen dos casos:

- **CASO 1.-** μ es real.

Sea v_μ un auto vector de un auto valor μ, $Av_\mu = \mu v_\mu$, tal que esta semirrecta $r_\mu \notin \mathbb{R}^+$. Entonces A^2 actúa en la circunferencia S^1 de las semirrectas situadas en el plano generado por v_λ y v_μ, y el conjunto $\{\pm r_\lambda, \pm r_\mu\}$. Puesto que $\lambda < |\mu|$, la acción dinámica de A^2 en S^1 tiene dos puntos de atracción, $\{\pm r_\mu\}$ y dos puntos de repulsión $\{\pm r_\lambda\}$. Entonces r_μ atrae a uno de los dos puntos de $\partial\mathbb{R}^+ \cup S^1$ fuera de $\mathbb{R}^+$, que esto no es posible.

- **CASO 2.-** μ es complejo.

Sea P un plano invariante correspondiente al auto valor μ. Entonces P no contiene ninguna semirrecta de $\mathbb{R}^+$. De lo contrario, el conjunto de semirrectas de $\mathbb{R}^+$ en P será un arco L en la circunferencia S^1 que consta de semirrectas situado en P

. Puesto que A es una rotación en S^1, $A(L)$ no será contenido en L lo que contradice que $A(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$. Ahora, considerando el 3-espacio E^3 generado por P y v_λ . Como $|\mu| > \lambda$, la dinámica de la acción de A en el E^3 muestra una línea de repulsión generado por v_λ , y un plano de atracción P. Esto implica que los rayos de $\mathbb{R}^+ \setminus r_\lambda$ en E^3 se aproximan a P tanto como todo lo que se quiere al ser aplicada repetidamente a A, y por lo tanto, se llega a la conclusión de que todos los rayos como hojas $\mathbb{R}^+$ después de una serie de aplicaciones de A que a su vez no es posible porque $A(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$ (una formal prueba de este es la siguiente: Sea $r[x]$ un rayo de E^3 en $\mathbb{R}^+ \setminus r_\lambda$ con $x = v_\lambda + w$ dónde $w \in P$ y $w \neq 0$. Entonces:

$$A^n\left(\frac{x}{|u|^n}\right) = \frac{a^n(v_\lambda) + A^n(w)}{|\mu|^n} = \frac{\lambda^n}{|\mu|^n} v_\lambda + \frac{\mu^n}{|\mu|^n} w.$$

Cuando $n \to \infty$ entonces $\frac{\lambda^n}{|\mu|^n} \to 0$, y por lo tanto el rayo $A^n(r[x])$ puede llegar a ser cerrado en P cómo queremos, porque el módulo de $\frac{\mu^n}{|\mu|^n} w \in P$ es constante.

3.3. APLICACIONES

3.3.1 EL GOOGLE

Larry Page (graduado en Informática) y Sergey Brin (graduado en matemáticas) ambos eran estudiantes de doctorado en informática y tenían un objetivo en común: conseguir información relevante a partir de una importante cantidad de datos. En enero de 1996 iniciaron su colaboración en un buscador llamado BackRub. Larry empezó a trabajar en la forma de conseguir un entorno para los servidores que funcionara con PCs de gama baja y que no necesitará de potentes máquinas para funcionar. Un año después, la tecnología utilizada por BackRub para analizar los links empezaba a ser conocida en todo el campus, obteniendo una gran reputación. Era la base sobre la que se construiría Google.

El nombre proviene de un juego de palabras con el término “googol", acuñado por Milton Sirotta, sobrino del matemático norteamericano Edward Kasner, para referirse al número representado por un 1 seguido de 100 ceros. El uso del término refleja la misión de la compañía de organizar la inmensa cantidad de información disponible en la web y en el mundo.

Durante los primeros meses de 1998, Larry y Sergey continuaron trabajando para perfeccionar la tecnología de búsqueda que habían desarrollado. Utilizaron sus dormitorios como centro de datos y oficinas. Con esta infraestructura iniciaron la búsqueda de inversores que les ayudaran a financiar su novedosa tecnología, superior a todas las existentes hasta la fecha. A pesar de la fiebre de las ``puntocom" en ese momento, Larry y Sergey tenían poco interés en montar una empresa propia cuyo negocio fuera el motor de búsqueda que habían desarrollado.

Entre estos posibles inversores, se encontraba David Filo, amigo de ambos y uno de los fundadores de Yahoo!. Filo les animó a que ellos mismos desarrollaran el proyecto, creando una empresa basada en el buscador cuando estuviera completamente desarrollado. Aunque el potencial que tenía era enorme, se encontraron con la negativa de muchos portales, que consideraban el hecho de tener un buen buscador como algo secundario en sus objetivos.

Así pues, tomaron la decisión de poner en marcha el proyecto y buscar capital para abandonar las habitaciones y acabar de pagar todo el material que habían comprado para los servidores. Hicieron un plan de empresa y fueron en busca de inversores. Su primera visita fue al amigo de un miembro de la facultad.

Andy Bechtolsheim, uno de los fundadores de Sun Microsystems, enseguida vio que Google tenía un potencial enorme. Sólo pudieron mostrarle una pequeña demo pero fue suficiente para que inmediatamente les diera un cheque por valor de 100.000 dólares, a nombre de Google Inc. Pero surgió un pequeño problema: no existía aún una empresa llamada Google Inc., Por lo tanto no podían cobrar ni ingresar el cheque. Un par de semanas más tarde decidieron buscar nuevos inversores entre familiares, amigos y conocidos para poner en marcha la compañía, el 7 de septiembre de 1998, Google Inc. ya disponía de oficinas propias en Menlo Park, California, todo un lujo comparado con la situación en la que habían estado hasta entonces.

Google.com, todavía en fase beta (a prueba), tenía unas 10,000 búsquedas cada día. La prensa empezaba a hablar del nuevo buscador y de su excelente funcionamiento.

En 1999 consiguieron 25 millones de dólares de dos importantes inversores: Sequoia Capital y Kleiner Perkins Caufield y Buyers. Las modestas oficinas ya eran pequeñas para todos los directivos y trabajadores de Google, así que se trasladaron a Googleplex, la actual sede central de Google en Mountain View, California.

Nuevos e importantes clientes iban llegando, como por ejemplo AOL/Netscape que escogió a Google como su servicio de buscador, haciendo que superase los 3 millones de búsquedas al día. Lo que empezó siendo un proyecto universitario ya era una gran empresa con un crecimiento impresionante.

El 21 de septiembre de 1999 desapareció definitivamente de Google.com la etiqueta que lo identificaba como una versión beta.

La sede de Google está en:

- Google Inc.
- 2400 Bay shore Parkway; Mountain View, Calif. 94043

- Telephone: 650.330.0100
- Fax: 650.618.1499
- Email: info@google.com
- Web: www.google.com

Google es una empresa privada. Tiene inversores como: Kleiner Perkins Caufield y Byers; Sequoia Capital; la Universidad de Stanford; Andy Bechtolsheim, cofundador de Sun Microsystems y actual vicepresidente de Cisco Systems; y Ram Shriram, quien ha sido presidente de Junglee y vicepresidente de Desarrollo de Negocios en Amazon.com.

La filosofía de Google permanece intacta desde su aparición: organizar la información mundial y hacerla universalmente accesible y útil. Google continúa creciendo para descubrir nuevas tecnologías de búsqueda que mejoren la vida de los usuarios.

Organigrama y personal (departamentos, número de trabajadores, etc).

La innovadora tecnología de búsqueda Google y su diseño de interfaz de usuario diferencian a Google de las máquinas de búsqueda de primera generación. Se basa en los hipertextos, analizando todo el contenido de cada web y la posición de todos los términos en cada página. Se da prioridad a los resultados de acuerdo con la proximidad de los términos de la búsqueda, favoreciendo los resultados en los que los términos de búsqueda están próximos entre sí, sin perder tiempo analizando resultados irrelevantes.

Google se basa en la tecnología PageRank, lo que asegura que los resultados más importantes se muestran primero. PageRank mide objetivamente la importancia de las páginas web y se calcula que resuelve una ecuación de 500 millones de variables y más de 2.000 millones de términos. Los complejos mecanismos automáticos de búsqueda de Google permiten prescindir de la interferencia humana. Está estructurado de manera que nadie puede comprar un lugar privilegiado en la lista ni alterar los resultados con fines comerciales (nadie puede comprar un PageRank más elevado, por ejemplo).

El Google dispone de más de 3.000 millones de páginas web. Aproximadamente realiza, unos 200 millones de búsquedas cada día. Google vende su tecnología de búsquedas (Google WebSearch y Google SiteSearch), incluyendo una suite repleta de funciones y posibilidades completamente automatizadas. Muchos portales y webs corporativas de grandes empresas de todo el mundo han elegido la tecnología de Google para sus necesidades de búsqueda. La publicidad es otra de sus fuentes de ingresos. Google ofrece a los anunciantes dos sistemas publicitarios: Premium Sponsorship (un vínculo de texto aparente aparece en la parte superior de la página de resultados de Google cuando la palabra clave o la frase que se haya comprado se incluye en las búsquedas de los usuarios) y AdWords (sistema de Coste por clic, totalmente personalizable, donde únicamente se paga cuando los usuarios hacen clic en el anuncio).

El Google es un buscador de páginas web y trata de los siguientes aspectos: problemas como la gestión de peticiones, el almacenamiento de la información, la búsqueda dentro de las gigantescas bases de datos, etc., son cuestiones sin duda de un alto contenido matemático, que forman parte del funcionamiento de cualquier buscador. Sin embargo aquí se trata la singularidad del buscador más importante del momento, sin lugar a dudas la página con más visitas en el mundo, y punto de referencia para cualquier usuario de Internet.

La primera gran novedad que introduce Google que le diferencia de los otros buscadores de la red. Es decir, una herramienta de software que permite leer (en este caso, pero también escribir) el contenido de una información incluyendo fragmentos de información y las conexiones entre estos fragmentos. Su base de datos se convierte entonces en un gran Hiperespacio que describe el número total de localizaciones y todas sus interconexiones. Esto le permite analizar con rapidez el contenido de todas las webs y así, poder recoger una mayor cantidad de páginas (o información) relacionadas con el tema buscado.

Sin embargo pensar en la fórmula cuánta más información aporte, mayor es el éxito de un buscador es un poco desafortunado, pues hay que tener en cuenta que se está tratando con millones de páginas web y que el usuario no dispone de una eternidad de tiempo para informarse.

Luego usar este sistema nos plantea un nuevo problema (y la gran novedad del buscador) que no es otro que ordenar los resultados, y sobre todo ¿Qué orden hay que poner, para conseguir que las primeras páginas mostradas contengan información útil para el usuario? Tratando de contestar a esa pregunta en lo que sigue de este trabajo. Que no es otra cosa que desnudar, o desvelar el secreto del Algoritmo PageRank con el que Google ordena los resultados de las búsquedas, y en el que reside la fuerza de este (palabras de Brin y Page: El corazón de nuestro software es PageRank. Provee la base para todas nuestras herramientas de búsqueda). Para ello se intenta modelizar el problema para plantearlo de forma esencialmente Matemática. Una vez hecho esto, se puede apelar a algún personaje de la Historia de este pensamiento, que como grandes genios que son, ya han pensado (y resuelto) problemas de este tipo aunque eso sí, sin salirse de la abstracción intrínseca de esta ciencia.

Las cuestiones importantes a la hora de diseñar un buscador en la red:

1. Computacionales:

- Cómo almacenarla información.
- Cómo actualizarla.
- Cómo manejar. Responder peticiones.
- Cómo buscar en la base de datos.

2. Teniendo los resultados de una búsqueda: ¿Cómo mostrar, en qué orden? Se necesita un criterio de ordenación, una asignación de importancia a cada sitio de la red:

$$\text{Sitios} \rightarrow P_1, \ldots, P_n$$

$$\text{Importancias\&} \rightarrow x_1, \ldots, x_n$$

El objetivo es mostrar los diez primeros resultados para tener la respuesta.

EL MODELO

Primer paso: descripción de la información, con un grafo dirigido G. Cada sitio de la red es un vértice, y hay una arista (dirigida) entre P_i y P_j si desde la página P_j hay un enlace a la página P_i .

Matricialmente.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccccc}\text{sitio } P_1 & \dots & \text{sitio}P_j & \dots & \text{sitio } P_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\end{array} & \\ \begin{array}{c}\text{sitio } P_1 \;\to \\ \vdots \\ \text{sitio } P_i \;\to \\ \vdots \\ \text{sitio } P_n \;\to\end{array} & \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & m_{ij} & \\ & & \end{array}\right) & \to \;\text{enlaces a la página } P_i \\ & \downarrow & \\ & \text{enlaces desde la página } P_j & \end{array}$$

Donde, las entradas m_{ij} de la matriz son:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si hay enlace } P_j \to P_i \\ 0 & \text{si no hay.} \end{cases}$$

Una primera idea para ordenar las páginas sería la de postular que la importancia de una página está relacionada con el número de páginas que tienen un enlace para ella, ya que esto significaría que el contenido de esta página sería recomendado por muchos participantes de la red.

Este modelo no traduce adecuadamente la siguiente situación: que una página P tenga pocas citaciones, pero esté ya citada de páginas relevantes como por ejemplo: desde www.microsoft.com o www.amazon.com y si simplemente se cuenta las páginas que citan P, la página tendría asignada un peso bajo, pero esto no parece razonable.

Así se debe mejorar nuestro modelo de manera de asignar un peso alto.

- Tanto páginas muy citadas
- Cuanto las páginas poco citadas, pero desde sitios importantes.

La segunda tentativa consistirá en decidir que el peso x_j de la página P_j será proporcional a la suma de las importancias de las páginas que poseen un enlace para P_j.

Usando matrices, se traduce esto de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Donde λ es la constante de proporcionalidad y A es la matriz dada anteriormente.

Por ejemplo, la página P_1 es citada desde las páginas P_2, P_{25} y P_{256}, mientras que P_2 sólo se cita desde P_1 y P_{256}, etc. La asignación $x_1, x_2, \ldots, x_n$ debe cumplir que

$$\begin{aligned} x_1 &= K(x_2 + x_{25} + x_{256}) \\ x_2 &= K(x_1 + x_{256}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = K \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} P_1 & P_2 & & & P_{25} & & & & P_{256} & & & \\ \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

El problema se ha trasformado en uno de auto valores y auto vectores:

$$Ax = \lambda x$$

Se busca x que sea auto vector de A, A es la matriz asociada al grafo. Pero que sus entradas sean no negativas, lo que se escribe como $x \geq 0$. Además, es conveniente que este auto vector de entradas no negativas fuera único.

3.3.2 <u>APLICACIÓN DEL TEOREMA DE PERRÓN-FROBENIUS AL GOOGLE</u>

Para aplicar el teorema de Perrón-Frobenius a la matriz de Google, esta deberá ser irreductible.

Otro problema es determinar el auto vector no negativo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ formado por las importancias de las páginas $P_1, \ldots, P_n$. El teorema de Perrón-Frobenius, dice que el auto vector buscado está asociado al auto valor positivo de módulo máximo. Esta es una parte computacional.

Sea A diagonalizable y que A solo tiene un auto vector de módulo máximo.

Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de autovectores, asociados a los autovalores $\lambda_1 \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ respectivamente, de manera que los autovalores correspondientes vayan en orden decreciente de módulo.

$$\lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

Observe que v_1 es el autovector buscado.

Comenzando con un vector $v_0 \geq 0$ cualquiera, pudiendo escribirlo como combinación lineal de los vectores de la base B. O sea, existen $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$v_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

Como los vectores v_i son autovectores de A, aplicando A a ambos lados de la última igualdad, se tiene que:

$$\begin{aligned} A(v_0) &= A(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n) \\ &= c_1 A(v_1) + c_2 A(v_2) + \cdots + c_n A(v_n) \\ &= c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + c_n \lambda_n v_n \end{aligned}$$

Aplicando A sucesivas veces, se tiene

$$A^k(v_0) = c_1 \lambda_1^k v_1 + c_2 \lambda_2^k v_2 + \cdots + c_n \lambda_n^k v_n \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Si $c_1 \neq 0$, entonces

$$\frac{A^k(v_0)}{\lambda_1^k} = c_1 v_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k v_2 + \cdots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k v_n \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Como $|\lambda_i/\lambda_1|<1$, puesto que λ_1 es el auto valor máximo, para $i=2,\ldots,n$, y aplicando límite a la última igualdad, cuando $k\to\infty$, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{A^k(v_0)}{\lambda_1^k} &= \lim_{k\to\infty}\left[c_1v_1+c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k v_2+\cdots+c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k v_n\right]\\ &= \lim_{k\to\infty}c_1v_1+\lim_{k\to\infty}c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k v_2+\cdots+\lim_{k\to\infty}c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k v_n\\ &= c_1v_1+0+0+\cdots+0\\ &= c_1v_1\end{aligned}$$

Y se obtiene v_1 de la igualdad anterior.

Se necesita que la matriz de Google sea irreductible, o equivalentemente, que el grafo sea fuertemente conexo, pero esto no siempre ocurre en general. Por ejemplo, páginas creadas recientemente no reciben enlaces de otras páginas. ¿Cómo resolver este problema?

El Google resuelve esto agregando una serie de probabilidades de transición (salida) a todos los vértices. Esto es considerando la matriz

$$A''=cA'+(1-c)\begin{pmatrix}p_1\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}(1,\ldots,1)$$

Donde $p_1,\ldots,p_n$ es una distribución de probabilidad, o sea $p_j\geq 0$, $\sum_{j=1}^{n}p_j=1$ y c es un parámetro entre 0 y 1. En el caso del Google c es el orden de 0,85.

La matriz A' es la matriz obtenida de A dividiendo cada columna no nula por la suma de los elementos de esa columna, o sea

$$A' = \begin{pmatrix} \dfrac{m_{1j}}{N_j} \\ \vdots \\ \dfrac{m_{ij}}{N_j} \\ \vdots \\ \dfrac{m_{nj}}{N_j} \end{pmatrix}$$

Donde $N_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}$ sí $N_j \neq 0$. Si una columna es nula, se sustituye sus entradas por $\dfrac{1}{n}$. Se observa que la matriz $A' > 0$ y que la suma de los elementos de cada columna es igual a 1. Matrices con esta propiedad son llamadas matrices estocásticas o de Markov.

Escogiendo $p_j = \dfrac{1}{n}$ para todo j y con esto la matriz A'' sería positiva y luego irreductible, o se puede escoger otras distribuciones de probabilidad y este grado de libertad permitiría hacer búsquedas personalizadas.

CAPITULO IV

ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación, según el criterio “propósito de la investigación", la investigación es de tipo básico. Toda investigación básica se caracteriza porque los resultados sirven para profundizar los conocimientos del tema de investigación. También incrementan los conocimientos que existen en el área. En la presente investigación, los resultados permiten conocer las principales características de las matrices no negativas e irreductibles y sus aplicaciones.

4.1 METODOLOGÍA

4.1.1 MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN

El método de investigación que se utilizará es Teoría Fundamentada porque se estudiará el teorema de Perrón-Frobenius, desarrollando así una mayor comprensión teórica sobre dicho estudio, para luego utilizar su aplicación al Google.

4.1.2 RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

Se harán lecturas de investigación analizando el contenido de la información tales como: libros especializados, artículos del tema y revistas electrónicas.

4.1.3 ADMINISTRACIÓN DE PROYECTO

- RECURSOS HUMANOS: Asesor y Autor
- RECURSOS MATERIALES: Libros, Trabajos de investigaciones ya existentes, Papers y computadora.
- FINANCIAMIENTO: Autofinanciado.

CONCLUSIONES

1. Se analizó la prueba geométrica del teorema de Perrón-Frobenius en la sección 3.2, y con ayuda de la representación matricial de los grafos se logra aplicar este resultado al google en la sección 3.3.2, con esta conclusión se logra el objetivo principal del presente trabajo de investigación.

2. Se estudió y analizó a las matrices no negativas e irreductibles en la sección 2.3 y en la sección 2.4 estas matrices se relacionaron con los grafos y se demostró un teorema muy importante que dice que una matriz no negativa es irreductible si, y solamente si, su grafo dirigido es fuertemente conexo.

3. En la sección 3.2 se realizó la prueba geométrica del teorema de Perrón Frobenius, esencialmente usando el teorema del punto fijo de Brouwer que también fue demostrado en la sección 2.5 teorema 2.46.

4. En la sección 3.3 se realizó la aplicación del teorema de Perrón-Frobenius al Google.

RECOMENDACIONES

1. La presente tesis constituye un aporte conceptual y práctico para efectuar una correcta aplicación del teorema al google, para que pueda ser utilizado como fuente de búsqueda y así facilitar el acceso de información al publico

2. A partir de la presente tesis, se debe realizar una investigación para poder contar con pruebas confiables y validadas (contenido, criterio, interpretación) en las capacidades de razonamiento e interpretación.

3. Es importante considerar la ampliación del contenido de la tesis, de tal manera que nos brinde un soporte al momento de aplicar el teorema al google.

BIBLIOGRAFÍA

BARBOLLA, R., & SANZ, P. (1992). *Algebra Lineal y Teoria de Matrices* . Madrid: Prentice Hall.

BOROJA, A., & TRIAS, U. (1992). *A Geometric Proof of the Perron- Frobenius Theorem. Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid* (Vol. 5). Madrid: Complutense.

BUJALANCE, E., BUJALANCE, J., COSTA, A., & MARTÍNEZ, E. (1999). *Elementos de Matematica Discreta.* Madrid.

FRALEIGH, J. (1988). *Álgebra Abstracta un Primer Curso.* México.

LAGES LIMA, E. (1998). *Álgebra Lineal.* Lima: Imca.

LAGES LIMA, E. (2005). *Elementos de la Topologia Geral.* Rio de Janeiro: Projeto Euclides- Rio de Janeiro IMPA.

LAGES LIMA, E. (2011). *Curso de Analise* (Vol. 2). Brasil: Projeto Euclides-Rio de Janeiro IMPA.

LANCASTER , P. (1985). *The Theory of Matrices.* USA: Academic Press.

MASSEY, W., & SPRINGER, V. (1977). *Algebraic Topology: An Introduction.*

MUNKRES, J. (1975). *Topology, Massachusetts Institute of technology* . Madrid: Prentice Hall.

NORIEGA SÁNCHEZ, T., & ARAZOZA RODRÍGUEZ, H. (1986). *Álgebra Tomo I.* La Habana: Pueblo y Educacion.