UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

CARRERA PROFESIONAL DE FÍSICO MATEMÁTICAS

TEOREMA DE REDUCCIÓN SIMPLÉTICA DE MARSDEN, WEINSTEIN Y MEYER

TESIS

presentado por

ALEX YOUN ARO HUANACUNI

Para optar el título profesional de:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PUNO-PERÚ

2017

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

TESIS

TEOREMA DE REDUCCIÓN SIMPLÉTICA DE MARSDEN, WEINSTEIN Y MEYER

PRESENTADA POR

BACH. ALEX YOUN ARO HUANACUNI

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO COORDINACIÓN DE INVESTIGACIÓN PILAR - FICA -

APROBADA POR:

PRESIDENTE: ____________________

Prof. Lic. Fabiola Loayza Torreblanca

PRIMER MIEMBRO: ____________________

Prof. Lic. Américo Bolívar Espinoza

SEGUNDO MIEMBRO: ____________________

Prof. Lic. Derly Pari Mendoza

DIRECTOR/ASESOR: ____________________

Prof. Mg. Julio Cesar Villalta Pacori

Área: Matemática

Tema: Geometría Simplética

Linea de Investigación: Matemática pura

Este trabajo es dedicado a mis padres y en especial a mi hermano menor Agustin Jhon, que es mi inspiración para seguir estudiando la matemática.

Agradecimientos

Agradezco primero a dios por guiarme siempre en todo. También quiero agradecer a mis padres Agustin y Robela por el apoyo condicional y por haberme dado una educación.

Gracias a mi familia, compañeros de estudios, amigos en especial a Santiago y Carlos por el apoyo moral y humano en todo momento.

Por su orientación y asesoramiento de la tesis quiero agradecer al profesor Mg. Julio Cesar Villalta Pacori y también quiero agradecer por sus comentarios y sugerencias a los miembros de jurado: Lic. Fabiola Loayza Torreblanca, Lic. Américo Bolívar Espinoza, y Lic. Derly Pari Mendoza. Finalmente, a todos docentes que fueron parte de mi formación profesional.

Índice general

Índice de figuras

Resumen

En el presente trabajo, se introducen: la teoría de grupo de Lie, el álgebra de Lie y la geometría simplética. Para obtener el resultado del teorema de reducción de Marsden, Weinstein y Meyer, se definió una aplicación de momento $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, para acciones Hamiltonianas de grupos de Lie G en una variedad simplética (M, ω); consideré una acción suave y propia de un grupo G en una variedad simplética (M, ω), y el subgrupo de Lie $G_\eta = \{g \in G : Ad_g^* \eta = \eta\}$ actúa libremente en el conjunto de nivel $\mu^{-1}(\eta)$ con $\eta \in \mathfrak{g}^*$, un valor regular. Demostré que la reducción simplética $M_\eta^{red} = \mu^{-1}(\eta)/G_\eta$, admite una estructura simplética y cuya forma simplética ω_η es caracterizada por $\pi_\eta^* \omega_\eta = i_\eta^* \omega$, donde $\pi_\eta : \mu^{-1}(\eta) \longrightarrow \mu^{-1}(\eta)/G_\eta$ es la aplicación proyección y $i_\eta : \mu^{-1}(\eta) \hookrightarrow M$ la inclusión. Finalmente, muestro algunos ejemplos de reducción y un resultado para acciones que conmutan en la variedad simplética.

Palabra clave: Simplética, aplicación de momento, reducción simplética.

Abstract

In the present work, we introduction the theories of Lie groups, Lie algebras and simplectic geometry. To have the result, it is given in an application of moment $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ for Hamiltonian actions of Lie group actions G in a manifolds simplectic (M, ω); Consider smooth action and proper of a Lie group in a simplectic manifolds and the subgroup of Lie $\{g \in G : Ad_g^* \eta = \eta\}$, acts freely on the level set $\mu^{-1}(\eta)$ with $\eta \in \mathfrak{g}^*$ a regular value. Simplectic reduction is demonstrated admits a simplectic structure and whose form simplectic ω_η is characterized by $\pi_\eta^* \omega_\eta = i_\eta^* \omega$ where $\pi_\eta : \mu^{-1}(\eta) \longrightarrow \mu^{-1}(\eta)/G_\eta$ is projection application and $i_\eta : \mu^{-1}(\eta) \hookrightarrow M$ the inclution. Finally, I show some examples of reduction and a result for actions commuting over simplectic manifolds.

Keywords: Simplectic, application moment, simplectic reduction. newpage

Introducción

El objetivo de este trabajo es formular y demostrar el teorema de reducción simplética de Marsden, Weinstein, Meyer. La reducción simplética requiere, una acción Hamiltoniana de un grupo de Lie, en una variedad simplética que define la aplicación de momento para la variedad simplética. Luego, usando dicha aplicación dividí en conjuntos de nivel del valor regular, y consideré una acción de un subgrupo adecuado, para definir en seguida un espacio cociente del conjunto nivel de valor regular sobre el subgrupo mencionado. Este cociente define el espacio de órbitas, que tiene algunas propiedades y considerando que el subgrupo actúa suavemente, libremente, y propiamente en el conjunto de nivel, para obtener una estructura simplética en el espacio cociente. Antes de la división en conjuntos de nivel, se sabe que la variedad simplética es estructurada con una forma diferencial de grado 2, no-degenerada y se pasa esa propiedad al espacio cociente construido por el conjunto de nivel, dicha operación fue promovida por Cartan, [1922].

Smale, [1970] identificó un adecuado subgrupo que tiene relación con la aplicación del momento, en el contexto especial de fibrado cotangente. Dicho trabajo que realizó Smale, inspiro a Meyer, para formular la construcción simplética, y la versión fue formalizada por Marsden y Weinstein, con el uso explícito de las propiedades de la aplicación del momento.

En el capítulos 1, se tiene la revisión de la literatura, en ella se menciona el planteamiento del problema, los antecedentes de la investigación, objetivos y el marco teórico, para el desarrollo de esta tesis.

En el capítulo 2, se menciona los materiales usados durante la investigación y también la métodologia.

En el capítulo 3, presento los resultados y discusión: En la primera sección, será introducida la noción de grupos de Lie y álgebras de Lie y sus ejemplos respectivos. También se establecerá las condiciones para que un espacio de órbita, admita una estructura suave. En la segunda sección, introduciré la definición de variedad simplética e ilustro algunos ejemplos. Después, discutiré la acción simplética y la acción Hamiltoniana. En seguida, mostraré algunas aplicaciones de momento. En la sección tres, expongo la reducción mediante la aplicación del momento $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, considerando $\eta \in \mathfrak{g}^*$ valor regular y el cociente $M_\eta^{red} = \mu^{-1}(\eta)/G_\eta$. Pruebo bajo ciertas condiciones, el espacio cociente M_η^{red} admite una estructura simplética, tal resultado fue descubierto por Marsden, Weinstein y Meyer, luego se verá algunos ejemplos y una aplicación para acciones que conmutan.

Finalmente, en los capítulos 4 y 5, presento las conclusiones y las recomendaciones respectivamente.

Capítulo 1

Revisión de Literatura

En este capítulo, presento el planteamiento del problema, los antecedentes de la investigación. Luego, los objetivos y el marco teórico.

1.1. Planteamiento del problema

En la actualidad, la geometría simplética es una nueva rama de la matemática muy investigada, debido a la existencia de muchos problemas abiertos y aplicaciones interesantes. La investigación propuesta está basada en los artículos de Marsden, Weinstein y Meyer sobre reducción simplética; en la presente investigación analizare propiedades geométricas para una acción de un grupo de Lie que actúa suavemente, libremente y propiamente en una variedad real suave.

Por otro lado, se define un nuevo tipo de estructura geométrica en una variedad suave, que es la estructura simplética que tiene similitud a una métrica Riemaniana, pero que tiene propiedades diferentes. En la estructura simplética un grupo de Lie que actúa de manera Hamiltoniana define la aplicación del momento asociada al grupo de Lie. Por ejemplo, para la acción de $\mathbb{C} - \{0\}$ en $\mathbb{C}^n$, dada por $t.(z_1, ..., z_n) = (t.z_1, ..., t.z_n)$, se tiene dos tipos de órbitas: lineas perforadas representadas por los vectores no nulos de $\mathbb{C}^n$ y una órbita inestable en el origen, que consta de un solo punto. El espacio de órbitas es: $\mathbb{C}^n/(\mathbb{C} - \{0\}) = \mathbb{CP}^{n-1} \sqcup \{\text{punto}\}$,

el cociente topológico restricto a la topología usual en $\mathbb{CP}^{n-1}$, se observa que existe un solo conjunto abierto denominado espacio total, que contiene al conjunto $\{\text{punto}\}$ en la topología cociente, entonces el cociente $\mathbb{C}^n/(\mathbb{C}-\{0\})$ no es de Haussdorff y menos una variedad simplética. Sin embargo es suficiente retirar el origen de $\mathbb{C}^n$, para obtener un espacio de órbita $\mathbb{CP}^{n-1}$ Hausdorff. También existe una descripción compacta de espacio de órbitas tomando vectores unitarios: $\mathbb{CP}^{n-1} = S^{2n-1}/S^1$.
Considero la forma simplética estándar $\omega = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\bar{z}_k$ en $\mathbb{C}^n$, con la acción de S^1 sobre $\mathbb{C}^n$, $t.(z_1, ..., z_n) = (t.z_1, ..., t.z_n)$; la acción es Hamiltoniana con aplicación del momento $\mu : \mathbb{C}^n \longrightarrow (i\mathbb{R})^* \cong \mathbb{R}$, dada por $\mu(z) = -|z|/2 + C$ (C es una constante), en el sentido que satisface $d\mu = \boldsymbol{i}_{\xi^{\mathbb{C}^n}}\omega$, donde $\xi^{\mathbb{C}^n}$ es el campo vectorial definida por el generador infinitesimal. Si C es igual a $1/2$ entonces el conjunto de nivel $\mu^{-1}(0) = S^{2n-1}$, es la esfera unitaria; el espacio de órbitas del conjunto de nivel de la aplicación del momento es sorprendentemente $\mathbb{CP}^{n-1}$, esto motiva a reducir la variedad simplética mediante la aplicación del momento, dividiendo en conjuntos de nivel por la acción de un subgrupo adecuado.
Para formalizar el problema, para un grupo de Lie G que actúa suavemente sobre una variedad simplética (M, ω). Dicha acción simplética $\psi : G \longrightarrow Diff(M)$, es Hamiltoniana si la aplicación del momento μ satisface $d\mu^{\xi} = \boldsymbol{i}_{\xi^M}\omega$ y $\mu(g.p) = Ad_g^*\mu(p)$. Considerando a (M, ω, G, μ) G-variedad Hamiltoniana que consta de: una variedad simplética (M, ω), una acción de un grupo de Lie G y con aplicación de momento $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$. En general, el cociente topológico $\mu^{-1}(\eta)/G_\eta$ no es una variedad ni mucho menos es, una variedad simplética. Si $\mu^{-1}(\eta)/G_\eta$ fuese una variedad, puede ser que tenga dimensión impar en $\mathbb{R}$ y por eso, no hay razón para dar una estructura simplética. Para obtener un cociente que posee una estructura simplética necesitamos garantizar primero, que el cociente sea una variedad suave de dimensión par y luego, caracterizar con una forma de grado 2, cerrada y no-degenerada.

1.1.1. Descripción del problema

Para (M, ω, G, μ), G-variedad Hamiltoniana con una acción propia de G y la aplicación del momento μ equivariante con respecto a la acción coadjunta. Supongamos que $\eta \in \mathfrak{g}^*$, es valor regular de μ y que la acción de $G_\eta = \{g \in G : Ad_g^* \eta = \eta\}$, inducida en $\mu^{-1}(\eta)$ es libre. Entonces denotaré la reducción por:

$$M_\eta^{red} := \mu^{-1}(\eta)/G_\eta.$$

Este investigación queda definida con la siguiente interrogante:
¿El espacio topológico M_η^{red} será una única estructura de variedad suave tal que la aplicación $\pi_\eta : \mu^{-1}(\eta) \longrightarrow M_\eta^{red}$ es una submersión suave, y con una única forma simplética ω_η satisfaciendo $\pi_\eta^* \omega_\eta = i_\eta^* \omega$?, donde i_η denota la aplicación de inclusión natural.

1.2. Antecedentes de la investigación

Considero como antecedentes de la investigación los siguientes trabajos:

JERROLD MARSDEN AND ALAN WEINSTEIN, 1972. Reduction of symplectic manifolds with symmetry, university of california, Berkeley, U.S.A.
El artículo reporta una unificación para la construcción de variedades simpléticas de sistemas con simetrías y también muestra un ejemplo especial de estructura simplética en órbita que fue obtenido por Kostant, bajo la representación coadjunta de un grupo de Lie.

J. BUTTERFIELD, 2005. On Symplectic Reduction in Classical Mechanics, All Souls College Oxford OX14AL.
El principal propósito de este artículo, es exposición de la teoría moderna de reducción simplética en mecánica Hamiltoniana de dimensión finita. Esta teoría generaliza la conección entre simetría continua y cantidad conservada.

SHENGDA HU, 2009. Hamiltonian Symmetries and Reduction in generalized geometry, University of Houston.
Reduce en la categoría de geometría compleja generalizada, definiendo y construyendo extensiones naturales de geometría simplética.

JOHN LUDOVIC PIRL, 2009-2010. The Momentum Map, Symplectic Reduction and an Introduction to Brownian Motion. Master's Thesis, Advisor: Tudor Ratiu.
En su tesis presenta la reducción simplética a través de aplicación de momento y construye de manera explicita de una forma simplética sobre órbitas de la acción coadjunta de grupo de Lie, y concluye con una introdución de la noción de Brownian.

VICTORIA HOSKINS, Simplectic Quotients: moment maps, Symplectic Reduction and the Marsden-Weinstein-Meyer theorem.
El principal resultado de esta nota, es la construcción de cocientes por grupos en geometría diferencial, cocientes simpléticos, teorema de reducción regular y universalización de la reducción simplética.

JUDITH M. ARMS, RICHARD H. CUSHMAN, AND MARK J. GOTAY, 1989. A Universal Reduction Procedure for Hamiltonian Group Actions pag. 33, The Geometry of Hamiltonian Systems, Proceedings of a Workshop Held June 5-16.
Da un método universal para inducir una estructura de Poisson en un espacio reducido singular de la estructura de Poisson, en el espacio de la órbita para la acción de un grupo de Lie. Además, analiza en los casos en que la reducción de Marsden-Weinstein es bien definida, para la acción apropiada, y la preimagen de una órbita coadjunta bajo la aplicación de momento es cerrada, y muestra que la reducción universal y la reducción de Marsden-Weinstein coinciden. Como ejemplo, construye explícitamente los espacios reducidos y sus álgebras de Poisson para el péndulo

esférico.

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo general

Analizar y demostrar el teorema de reducción simplética de Marsden, Weinstein, y Meyer.

1.3.2. Objetivo específico

a) Demostrar el teorema de la variedad cociente para una acción suave, libre y propiamente de un grupo de Lie.

b) Demostrar algunos ejemplos de aplicación del momento.

c) Construir una forma simplética de grado 2, en la reducción simplética.

1.4. Marco teórico

A lo largo de esta sección se tiene definiciones, demostraciones de teoremas, proposiciones y corolarios que serán de utilidad para el desarrollo del trabajo.

1.4.1. Definición de variedad y algunos resultados

Definición 1.1. Un espacio topológico es un conjunto X, junto con una colección τ de subconjuntos de X, llamados conjuntos abiertos tales que,

i) $\emptyset, X \in \tau$;

ii) si $U_\lambda \in \tau$, $\lambda \in \Lambda$, entonces $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \tau$.

iii) si $U_i \in \tau$, $1 \leq i \leq n$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$.

El par (X, τ), es llamado espacio topológico y a veces por simplicidad solo denotaremos por X.

Sea X un espacio topólogico, Y un conjunto y $\pi : X \longrightarrow Y$ una aplicación sobreyectiva. La *topología cociente* en Y, *determinado por* π, es definida por: un subconjunto $U \subset Y$ es abierto si, y solo si, $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X.

Definición 1.2. Sean X y Y espacios topólogicos. Una aplicación $\pi : X \longrightarrow Y$, es llamado *aplicación de cociente* si, es sobreyectiva, continua y Y tiene una topología cociente.

Si $\sim$ es una relación de equivalencia en X, entonces para cada $x \in X$, la clase de equivalencia de x denotado por $[x]$, es el conjunto de todos los puntos $y \in X$, tal que $y \sim x$. El conjunto de clases de equivalencia determina una partición de X, o sea, una colección de subconjuntos disjuntos no vacíos cuya unión es X. Supongamos que X es un espacio topólogico y $\sim$ una relación de equivalencia en X. Denote por $X/\sim$, el conjunto de clases de equivalencia en X y sea $\pi : X \longrightarrow X/\sim$, la proyección natural que envía cada punto para su clase equivalencia. Agregándole, la topología cociente determinado por π, el espacio $X/\sim$, es llamado el *espacio cociente*.

Definición 1.3. Sea G un grupo y X un conjunto. Una acción a la izquierda de G en X, es una aplicación $\psi : G \times X \longrightarrow X$, que satisface dos condiciones:

(a) Si $\mathbf{1}$ es el elemento neutro de G, entonces

$$\psi(\mathbf{1}, p) = p, \text{ para todo } p \in X.$$

(b) Si $g_1, g_2 \in G$, entonces

$$\psi(g_1, \psi(g_2, p)) = \psi(g_1.g_2, p), \text{ para todo } p \in X.$$

Frecuentemente, escribimos $\psi(g, p) = g.p$.

Observación: La acción de un grupo G, en un conjunto X implica que la aplicación $G \longrightarrow S(X)$, $g \longmapsto \psi_g$, es un homomorfismo de grupos, donde $S(X)$ es el grupo de las biyecciones de X, con operación dada por la composición de aplicaciones. Recíprocamente, cualquier tal homomorfismo determina una acción definida por $\psi(g,p) = g.p$.

Definición 1.4. Sea G un grupo topológico y X un espacio topológico. Una acción de G en X, es continua si, la aplicación $\psi : G \times X \longrightarrow X$, $\psi(g,x) = g.x$, es continua.

Definición 1.5. Sea una acción $\psi : G \times X \longrightarrow X$, de un grupo G en un conjunto X.

a) Para cada $p \in X$, la *órbita* en p bajo la acción es el conjunto:

$$G.p = \{g.p : g \in G\}.$$

b) La acción es transitiva si, para todo $p, q \in X$, existe un $g \in G$ tal que $p = g.q$.

c) Para cada $p \in X$, el grupo isotropico (estabilizador) en p, es el conjunto:

$$G_p = \{g \in G : g.p = p\}.$$

d) La acción es libre si, $G_p = \{\mathbf{1}\}$, para todo $p \in X$.

Definición 1.6. Un espacio topológico (X, τ), es dicho espacio de Hausdorff si, para todo $p, q \in X$, $p \neq q$ existen $U, V \in \tau$, con $U \cap V = \emptyset$ tales que $p \in U$ y $q \in V$.

Definición 1.7. Sea (X, τ) un espacio topólogico. Una base es una colección $\mathcal{B} = \{U_\lambda : U_\lambda \in \tau,\ \lambda \in \Lambda\}$, tales que para todo $U \in \tau$, existe $\Lambda' \subset \Lambda$ tal que $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda$.

Sea X un espacio topológico y $p \in X$. Una *base en un punto* p, es una coleción $\mathcal{B}_p = \{U : U$ es una vecindad de $p\}$, tal que para todo vecindad V en p, existe $U \in \mathcal{B}_p$ tal que $U \subset V$.

Definición 1.8. Se dice que un espacio topológico (X, τ), es:

i) *Primero numerable*, si todo punto de X tiene una base de vecindades numerable.

ii) *Segundo numerable*, si (X, τ) tiene una base numerable.

Los axiomas de numerabilidad son propiedades topológicas. El axioma ii), implica i) y también los axiomas i) y ii) son propiedades hereditarias para cualquier subespacio.

Definición 1.9. Sean X y Y espacios topológicos. Una aplicación $F : X \longrightarrow Y$, es propia si, para todo conjunto compacto $K \subset Y$, la preimagen $F^{-1}(K)$ es compacto.

Definición 1.10. Sean G grupo topológico y X un espacio topológico. Una acción $\psi : G \times X \longrightarrow X$, es propia si, la aplicación $\Psi : G \times X \longrightarrow X \times X$ es una aplicación propia.

Definición 1.11. Supongamos que M, es un espacio topológico. Diremos que M, es una variedad topológica de dimensión n, si tiene las siguientes propiedades:

i) M es un espacio de Hausdorff.

ii) M es segundo numerable.

iii) M es localmente Euclidiano de dimensión n: cada punto de M, existe una vecindad que es homeomorfismo a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.12. Sea M una variedad topológica de dimensión n. Un carta coordenada en M, es un par (U, φ), donde U es un subconjunto abierto de M y $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$, es un homeomorfismo de U, para un subconjunto abierto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.
Por la definición de una variedad topológica, cada punto $p \in M$ está contenida en el dominio de alguna carta (U, φ). Si $\varphi(p) = 0$, diremos que la carta está *centrado en* p.

La aplicación φ, es llamado una aplicación coordenada local y las funciones componentes $(x^1, ..., x^n)$ de φ, definida por $\varphi(p) = (x^1(p), ..., x^n(p))$ son llamados coordenadas locales en U. Algunas veces denotamos la carta (U, φ) por $(U, (x^1, ..., x^n))$ o $(U, (x^i))$.
La definición de variedad (topológica) dada es suficiente para estudiar propiedades topológicas de variedades, tales como compacidad, conexidad, simplemente conexo,

y el problema de clasificación de variedades por homeomorfismo. Sin embargo, en toda teoría de variedad topológica no hay mensión sobre cálculo. Hay una razón para esto: no obstante, podemos intentar dar sentido a la derivada de una función sobre una variedad, que sean invariantes por homeomorfismo, pero no siempre es invariantes por el homeomorfismo. Por ejemplo, la aplicación $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\varphi(u, v) = (u^3, v^3)$ es un homeomorfismo y defina la función suave $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, por $F(x, y) = x$, obtenemos $F \circ \varphi^{-1}$, no es suave en el origen.

Para que tenga sentido las derivadas de funciones que asigna valores reales a puntos de la variedad, necesitamos introducir un nuevo tipo de variedad llamada variedad suave. Será una variedad topológica con alguna estructura adicional a su topológia, que nos permitirá determinar que las aplicaciones definidas en una variedad sean suaves.

La definición será basada en el cálculo de aplicaciones entre espacios Euclidianos, antes recordemos algunas definiciones básicas de tales aplicaciones. Si U y V son subconjunto abiertos de espacios Euclidianos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente, entonces una función $F : U \longrightarrow V$, es dicho *suave* (o C^∞, o *infinitamente diferenciable*), si cada uno de sus funciones componentes tienen derivadas parciales continuas de todos las ordenes. Si en adicción F es biyectiva y F^{-1} suave, entonces F, es llamado *difeomorfismo*.

Para observar que la estructura adicional en una variedad topológica sea apropiado para exigir que las aplicaciones sean suaves, considere una variedad topológica M, arbitrario de dimensión n. Cada punto de M, está contenida en el dominio de una aplicación (carta) coordenada $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Una definición plausible de una aplicación suave en M, es dada por: $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, es suave si, la función compuesta $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$, es suave en el sentido del cálculo en $\mathbb{R}^n$. Pero tendrá sentido solamente si esa propiedad es independiente de elección de carta coordenada. Para garantizar esta independencia, restringiremos nuestra atención a cartas suaves. Como la suavidad no es una propiedad invariante por homeomorfismo, entonces la manera para definir esto es considerar la colección de todas las cartas como un nuevo tipo de estructura en M.

Definición 1.13. Sea M una variedad topológica de dimensión n. Si (U,φ) y (V,ψ) son cartas coordenadas en M tal que $U\cap V\neq\emptyset$, entonces la aplicación compuesta $\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\longrightarrow\psi(U\cap V)$, es llamado *aplicación de transición* de φ a ψ.

Definición 1.14. Sea M una variedad topológica de dimensión n. Diremos que las cartas (U,φ) y (V,ψ) son compatibles si,

i) o bien $U\cap V=\emptyset$,

ii) o bien, las aplicaciones de transición

$$\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\psi(U\cap V)\subset\mathbb{R}^n$$

y

$$\varphi\circ\psi^{-1}:\psi(U\cap V)\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\varphi(U\cap V)\subset\mathbb{R}^n$$

son suaves.

Definición 1.15. Una colección de cartas $\mathcal{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$, se llama atlas suave si

i) $M=\bigcup\limits_{\alpha}U_\alpha$,

ii) las cartas son compatibles dos a dos.

Definición 1.16. Sea M una variedad topológica. Una estructura suave en M, es un atlas suave maximal.

Definición 1.17. Una variedad suave, es un par $(M,\mathcal{A})$, donde M es una variedad topológica y $\mathcal{A}$, es una estructura suave.

Definición 1.18. Sea M y N variedades suaves de dimensión m y n respectivamente. Decimos que una aplicación $F:M\longrightarrow N$, es suave en un punto $p\in M$ si, existen cartas coordenadas (U,φ) en M y (V,ψ) en N, con $p\in U$ y $F(U)\subset V$ tales que $\psi\circ F\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\longrightarrow\psi(V)$, es suave en el punto $\varphi(p)\in\mathbb{R}^m$.

Definición 1.19. Sea G un grupo, y sean M y N variedades suaves con acciones $\psi : G \times M \longrightarrow M$ y $\theta : G \times N \longrightarrow N$ suaves. Un aplicación $F : M \longrightarrow N$ es dicho equivariante con respecto a las acciones ψ y θ si, para cada $g \in G$ satisface:

$$F(g.p) = g.F(p).$$

Equivalentemente, si ψ y θ son acciones en M y N, respectivamente entonces F es equivariante si, el siguiente diagrama conmuta para cada $g \in G$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\psi_g"'] & N \arrow[d, "\theta_g"] \\ M \arrow[r, "F"'] & N \end{tikzcd}$$

Definición 1.20. Sea M una variedad suave. El fibrado tangente de M, es la unión disjunta de todos los espacios tangentes de M:

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM.$$

Definición 1.21. Sea $\pi : M \longrightarrow N$, una aplicación continua. Una sección de π, es una aplicación continua inversa a la derecha de π. Es decir, una aplicación continua $\sigma : N \longrightarrow M$ tal que $\pi \circ \sigma = Id_N$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, shift right, "\pi"'] \\ N \arrow[u, bend right, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

Una *sección local* de $\pi : M \longrightarrow N$, es una aplicación continua $\sigma : U \longrightarrow M$, definida en algún subconjunto abierto $U \subset N$ y satisfaciendo $\pi \circ \sigma = Id_U$.

Definición 1.22. Sea M una variedad suave. Un campo vectorial en M, es una sección de la aplicación $\pi : TM \longrightarrow M$. Es decir, un campo vectorial es una aplicación continua $X : M \longrightarrow TM$, $p \longmapsto X_p \in T_pM$, con la propiedad:

$$\pi \circ X = Id_M.$$

Definición 1.23. Un campo vectorial débil en una variedad suave M, es una aplicación $X : M \longrightarrow TM$, (no necesariamente continua) que satisface $\pi \circ X = Id_M$.

Suponga que M es una variedad suave. Si $X : M \longrightarrow TM$, es un campo vectorial débil y $(U, (x^i))$ cualquier carta coordenada suave para M, entonces X_p es escrito:

$$X_p = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p,$$

donde $X^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$, son funciones componentes de X.

Proposición 1.24. *Sea M una variedad suave y sea $X : M \longrightarrow TM$ un campo vectorial débil. Si $(U, (x^i))$ es cualquier carta coordenada suave en M, entonces $X\big|_U$ es suave si, solamente si, sus funciones componentes son suaves con respecto a esta carta.*

Demostración. Sea $\big(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi} = (x^i, v^i)\big)$ una carta coordenada en $\pi^{-1}(U) \subset TM$, asociada a la carta $(U, \varphi = (x^i))$. La representación coordenada de X en U es dada por: para todo $x = (x^1, .., x^n) \in U$,

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(x) &= \tilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}(x) \\
&= \tilde{\varphi}\big(\varphi^{-1}(x), X^i(\varphi^{-1}(x))\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi^{-1}(x)}\big) \\
&= (x^1, ..., x^n, \tilde{X}^1(x), ..., \tilde{X}^n(x))
\end{aligned}$$

La componente X^i es suave en U si, y solo si, $\tilde{X}^i$ es suave, y eso equivale a la suavidad de X. $\square$

Sea M un espacio topológico y sea U un abierto en M. El *soporte* de una función continua $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, es la clausura del conjunto $\{p \in M : f(p) \neq 0\}$. Una *función bump* en p, con soporte en U, es una función continua ρ que es igual a 1 en una vecindad de p con, $Supp(\rho) = \overline{\{p \in M : \rho(p) \neq 0\}} \subset U$.

Proposición 1.25. *Sea M una variedad suave y sea $X : M \longrightarrow TM$, un campo vectorial débil. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *X es suave.*

b) *Para todo $f \in C^\infty(M)$, la función Xf es suave en M.*

c) *Para cualquier subconjunto abierto* $U \subset M$, *la función* Xf *es suave en* U, *para todo* $f \in C^\infty(U)$.

Demostración. Para probar $(a) \Longrightarrow (b)$, supongamos que X es suave y sea $f \in C^\infty(M)$. Para todo $p \in M$, escoge una carta suave $(U,(x^i))$ en p. Entonces para todo $q \in U$,

$$Xf(q) = X^i(q)\frac{\partial}{\partial x^i}f(q).$$

Como X^i es suave en U (proposición 1.24), entonces Xf es suave en U. Por lo tanto, Xf es suave en M.

Para probar $(b) \Longrightarrow (c)$, supongamos que U es un conjunto abierto arbitrario en M y sea $f \in C^\infty(U)$. Para todo $p \in U$, existe una función bump ρ, suave con soporte en U tal que $\rho = 1$, en una vecindad V en p y $Supp(\rho) = \overline{\{x \in M : \rho(x) \neq 0\}} \subset U$; defina

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \rho(x)f(x) & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{si } x \notin U \end{cases}$$

Claramente, $\tilde{f}$ es suave en U. Si $x \notin U$, entonces $x \notin Supp(\rho)$. Se sabe que $Supp(\rho)$ es cerrado, o sea, su complemento es abierto. Es decir, existe una vecindad W en x tal que $W \subset Supp(\rho)^C$. En consecuencia, para todo $y \in W$, $\rho(y) = 0$. Así, $\tilde{f}$ es suave en $x \notin U$ y por tanto, $\tilde{f}$ es suave en M con la propiedad $\tilde{f}\Big|_V = f\Big|_V$.

Por hipótesis, $X\tilde{f}$ es suave en M entonces $X\tilde{f}\Big|_V = Xf\Big|_V$, es suave en una vecindad V en p. Como p es arbitrario en U, resulta que Xf es suave en U.

Finalmente, para probar $(c) \Longrightarrow (a)$. Sea $(U,(x^i))$ una carta arbitraria suave en $U \subset M$. La función $x^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$, satisface

$$Xx^i = X^j\frac{\partial}{\partial x^j}x^i = X^i$$

Por hipótesis, Xx^i es suave entonces la función componente X^i es suave. En conclusión, X es suave. $\square$

Definición 1.26. Sea M una variedad suave. Para cada $p \in M$, se define el espacio cotangente en p, denotado por T_p^*M que viene ser el espacio dual a T_pM:

$$T_p^*M = \big(T_pM\big)^*.$$

Los elementos de T_p^*M, son llamados covectores tangentes en p, o simplemente covectores en p.

Definición 1.27. Para cualquier variedad suave M, la unión disjunta

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M,$$

es llamado el *fibrado cotangente* de M. El fibrado cotangente T^*M tiene una aplicación proyección natural $\pi : T^*M \longrightarrow M$, que envía $\alpha \in T_p^*M$ para $p \in M$.

Teorema 1.28. *Sea $\psi : G \times M \longrightarrow M$, $\psi(g,p) = g.p$ una acción. La acción ψ, induce una acción $\tilde{\psi}$ en el fibrado cotangente T^*M.*

Demostración. Defina

$$\begin{array}{lllll} \tilde{\psi} & G \times T^*M & \longrightarrow & T^*M & \\ & (g, \alpha_q) & \longmapsto & \tilde{\psi}(g, \alpha_q) & = (\psi_{g^{-1}})^*_{*g.q}(\alpha_q). \end{array}$$

Demostremos que $\tilde{\psi}$ define una acción en T^*M: sea $X \in T_{hg.q}M$,

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(h, \tilde{\psi}(g, \alpha_q))(X) &= \tilde{\psi}\big(h, (\psi_{g^{-1}})^*_{*g.q}(\alpha_q)\big)(X) \\ &= \big(\psi_{h^{-1}}\big)^*_{*hg.q}\big((\psi_{g^{-1}})^*_{*g.q}(\alpha_q)\big)(X) \\ &= \big(\psi_{g^{-1}}\big)^*_{*g.q}(\alpha_q)\big((\psi_{h^{-1}})_{*hg.q}(X)\big) \\ &= \alpha_q\big((\psi_{g^{-1}} \circ \psi_{h^{-1}})_{*hg.q}(X)\big) \\ &= \alpha_q\Big(\big(\psi_{(hg)^{-1}}\big)_{*hg.q}(X)\Big) \\ &= \Big(\psi_{(hg)^{-1}}\Big)^*_{*hg.q}\alpha_q(X) \\ &= \tilde{\psi}(hg, \alpha_q)(X) \end{aligned}$$

Consecuentemente, $\tilde{\psi}(h, \tilde{\psi}(g, \alpha_q)) = \tilde{\psi}(hg, \alpha_q)$ y $\tilde{\psi}(1, \alpha_q) = \alpha_q$. □

Definición 1.29. Sea M una variedad suave. Un campo vectorial dependiente del tiempo en M, es una aplicación continua $V : J \times M \longrightarrow TM$, donde $J \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto tal que $V(t,p) \in T_pM$, para todo $(t,p) \in J \times M$. Esto significa, para cada $t \in J$, la aplicación $V_t : M \longrightarrow TM$, definida por $V_t(p) = V(t,p)$ es un campo vectorial en M.

Teorema 1.30 (**Teorema fundamental de flujos dependiente de tiempo**). *Sean M una variedad suave, $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $V : J \times M \longrightarrow TM$, un campo vectorial suave dependiente del tiempo en M. Entonces, existe un subconjunto abierto $\mathcal{E} \subset J \times J \times M$ y una aplicación suave $\psi : \mathcal{E} \longrightarrow M$, llamado el flujo dependiente del tiempo de V, con las siguientes propiedades:*

(a) *$\forall t_0 \in J$, $p \in M$, $\mathcal{E}^{(t_0,p)} = \{t \in J : (t, t_0, p) \in \mathcal{E}\}$ es un intervalo abierto que contiene t_0 y la curva suave $\psi^{(t_0,p)} : \mathcal{E}^{(t_0,p)} \longrightarrow M$, definida por $\psi^{(t_0,p)}(t) = \psi(t, t_0, p)$, es la única curva integral maximal de V, con $\psi^{(t_0,p)}(t_0) = p$.*

(b) *Si $t_1 \in \mathcal{E}^{(t_0,p)}$ y $q = \psi^{(t_0,p)}(t_1)$, entonces $\mathcal{E}^{(t_1,q)} = \mathcal{E}^{(t_0,p)}$ y $\psi^{(t_1,q)} = \psi^{(t_0,p)}$.*

(c) *$\forall (t_1, t_0) \in J \times J$, $M_{t_1,t_0} = \{p \in M : (t_1, t_0, p) \in \mathcal{E}\}$, es un conjunto abierto en M, y la aplicación $\psi_{t_1,t_0} : M_{t_1,t_0} \longrightarrow M$, definida por $\psi_{t_1,t_0}(p) = \psi(t_1, t_0, p)$, es un difeomorfismo de M_{t_1,t_0} para M_{t_0,t_1}, con inversa ψ_{t_0,t_1}.*

(d) *Si $p \in M_{t_1,t_0}$ y $\psi_{t_1,t_0}(p) \in M_{t_2,t_1}$, entonces $p \in M_{t_2,t_0}$ y*

$$\psi_{t_2,t_1} \circ \psi_{t_1,t_0}(p) = \psi_{t_2,t_0}(p).$$

Demostración. Para la prueba, ver [7]. □

Teorema 1.31 (**Teorema de la función inversa para variedades**). *Supongamos que M y N son variedades suaves, y $F : M \longrightarrow N$ una aplicación suave. Si $p \in M$ tal que dF_p, es un isomorfismo entonces, existen vecindades conexas U_0 de p y V_0 de $F(p)$ tal que $F\Big|_{U_0} : U_0 \longrightarrow V_0$, es un difeomorfismo.*

Demostración. De hecho, que dF_p es biyectiva implica que M y N tienen la misma dimensión, o sea, $dimM = dimN = n$. Escoja cartas suaves (U, φ) centrada en $p \in M$ y (V, ψ) centrada en $F(p) \in N$ con $F(U) \subset V$. Entonces la representación coordenada de F es:

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n,$$

con $\hat{F}(p) = 0$.

Como φ y ψ son difeomorfismos entonces $d(\hat{F})_0 = d\psi_{F(p)} \circ dF_p \circ d(\varphi^{-1})_0$ es no singular. Por el teorema de la función inversa I.1, existen vecindades conexas $\hat{U}_0 \subset \varphi(U)$ y $\hat{V}_0 \subset \psi(V)$ conteniendo 0 tal que $\hat{F}\Big|_{\hat{U}_0} : \hat{U}_0 \longrightarrow \hat{V}_0$, es un difeomorfismo. Entonces $U_0 = \varphi^{-1}(\hat{U}_0)$ y $V_0 = \psi^{-1}(\hat{V}_0)$ son vecindades conexas en p y $F(p)$ respectivamente, y $F\Big|_{U_0} = \psi^{-1} \circ \hat{F}\Big|_{\hat{U}_0} \circ \varphi : U_0 \longrightarrow V_0$, es un difeomorfismo. $\square$

Definición 1.32. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Un k-“slice”de U, es cualquier subconjunto de la forma

$$S = \{(x^1, ..., x^n) \in U : x^{k+1} = c^{k+1}, ..., x^n = c^n\},$$

para algunas constantes $c^{k+1}, ..., c^n$.

Definición 1.33. Sea M una variedad suave de dimensión n y sea (U, φ) una carta suave en M. Si S es un subconjunto de U tal que $\varphi(S)$ es k-“slice”de $\varphi(U)$, entonces se dice simplemente que S es k-“slice”de U.

Definición 1.34. Una aplicación suave $F : M \longrightarrow N$, entre variedades suave es dicho,

a) submersión suave si, dF_p es sobreyectiva para todo $p \in M$ (o equivalentemente, si $rankF = dimN$);

b) inmersión suave si, dF_p es inyectiva para todo $p \in M$ (o equivalentemente, si $rankF = dimM$).

Definición 1.35. Sean M y N variedades suaves. $F : M \longrightarrow N$ es una aplicación incrustada suave (“embedding”) si,

a) F es inmersión suave, y

b) F es un homeomorfismo sobre su imagen $F(M) \subset N$ con el subespacio topológico.

Definición 1.36. Sea M una variedad suave. Un subconjunto $S \subset M$, es una subvariedad incrustada de M si,

a) S es una variedad topológica con subespacio topológico;

b) S tiene una estructura suave tal que la aplicación inclusión $i : S \hookrightarrow M$, es una aplicación incrustada suave.

Algunos matemáticos le llaman subvariedad regular, a la subvariedad incrustada.

Definición 1.37. Sea M una variedad suave de dimensión n. Un subconjunto $S \subset M$, satisface la condición local de k-"slice", si para cada punto $p \in S$, existe una carta suave (U, φ) de p en M tal que $U \cap S$ es solo k-"slice"de U.
Si $(U, \varphi) = (U, (x^1, ..., x^n))$ entonces $U \cap S$ es k-"slice"significa que:

$$\varphi(U \cap S) = \{(x^1, ..., x^k, x^{k+1}, ..., x^n) \in \varphi(U) : x^{k+1} = c^{k+1}, ..., x^n = c^n\}.$$

Definición 1.38. Sea M una variedad suave de dimensión $n+k$ y sea G un grupo. Una carta (U, φ) en M, con funciones coordenadas $(x^1, ..., x^k, y^1, ..., y^n)$, es una *carta adaptada* para una acción de G si,

i) $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$;

ii) Cada órbita intercepta a U, en un conjunto vacío, o en una única "slice"de la forma $\{(x, y) : y^1 = c^1, ..., y^n = c^n\}$.

Teorema 1.39. *Sea M una variedad suave de dimensión n. Si $S \subset M$, es una subvariedad incrustada de dimensión k, entonces S, satisface la condición local de k-"slice". Recíprocamente, si $S \subset M$ es un subconjunto que satisface la condición*

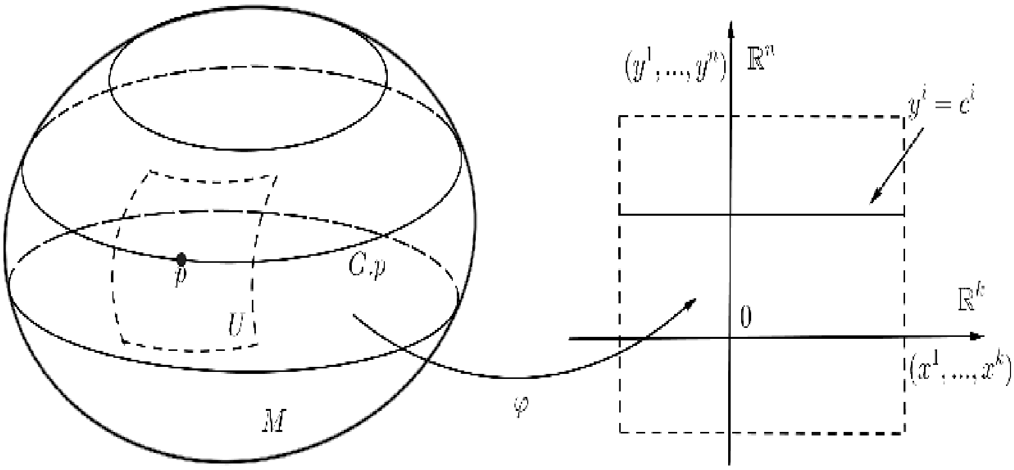

Figura 1.1: Carta adaptada

local de k-"slice", entonces S es una subvariedad topológica de dimensión k con subespacio topológico y tiene una estructura suave que es una subvariedad incrustada de M.

Demostración. La prueba observe [7]. □

Teorema 1.40 (**Teorema de rango**). *Supongamos que M y N son variedades suaves de dimensión m y n, respectivamente y $F : M \longrightarrow N$, es una aplicación suave con rango constante r. Entonces para cada $p \in M$, existen cartas suaves (U, φ) para M centrada en p y (V, ψ) para N centrada en $F(p)$ tales que $F(U) \subset V$ y F tiene una representación coordenada de la forma,*

$$\hat{F}(x^1, ..., x^r, x^{r+1} ..., x^m) = (x^1, ..., x^r, 0, ..., 0). \tag{1.1}$$

En particular, si F es una submersión entonces,

$$\hat{F}(x^1, ..., x^n, x^{n+1}, ..., x^m) = (x^1, ..., x^n), \tag{1.2}$$

y si F, es una inmersión suave entonces

$$\hat{F}(x^1, ..., x^m) = (x^1, ..., x^m, 0, ..., 0). \tag{1.3}$$

Demostración. Considere cartas suaves (U, φ) centrada en $p \in M$ y (V, ψ) centrada en $F(p)$ con $F(U) \subset V$, entonces la representación coordenada de F es:

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$$

tiene rango constante r. Aplicando el teorema I.3, en $\hat{F}$ se obtiene el resultado. $\square$

Definición 1.41. Sea $F : M \longrightarrow N$ una aplicación suave entre variedades suaves.

a) Un punto $p \in M$, es llamado un punto regular de F si, dF_p es sobreyectiva.

b) Un punto $q \in N$, es llamado un valor regular de F si, todo $p \in F^{-1}(q)$ es punto regular.

c) Un punto $p \in M$ que no es regular de F, es llamado un punto critico de F. La correspondiente valor $F(p)$, es dicho el valor critico.

Para la aplicación $F : M \longrightarrow N$, se define el conjunto de nivel de $c \in N$:

$$F^{-1}(c) = \{p \in M : F(p) = c\}.$$

La imagen inversa $F^{-1}(c)$ de un valor regular c, es llamado un conjunto de nivel regular.

Teorema 1.42 (Teorema de conjunto de nivel regular). *Sea $F : N \longrightarrow M$, una aplicación suave entre variedades suaves, con $dimN = n$ y $dimM = m$. Entonces un conjunto de nivel regular $F^{-1}(c)$, no vacío es una subvariedad incrustada de N, de dimesión igual a $n - m$.*

Demostración. Vea [7] y [5]. $\square$

Proposición 1.43. *Suponga que M, es una variedad suave y $S \subset M$ una subvariedad incrustada. Si $F : M \longrightarrow N$, una aplicación suave tal que S, es el conjunto de nivel regular de F, entonces $T_pS = KerdF_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$, para todo $p \in S$.*

Demostración . Considere $i : S \hookrightarrow M$ y identificando $T_pS = i_{*p}(T_pS)$. Como $F \circ i$ es constante en S, resulta que

$$dF_p \circ di_p : T_pS \longrightarrow T_{F(p)}N,$$

es cero. Entonces $Imdi_p \subset KerdF_p$.

Por otro lado, dF_p es sobreyectiva por hipótesis, esto implica

$$\begin{aligned} dimKerdF_p &= dimT_pM - dimT_{F(p)}N \\ &= dimT_pS \\ &= dimImdi_p, \end{aligned}$$

de aquí, $Imdi_p = KerdF_p$ □

Teorema 1.44. *Suponga que $F : N \longrightarrow M$, es suave y la imagen $F(N)$ esta contenido en un subconjunto S de M. Si S es una subvariedad incrustada de M, entonces la aplicación inducida $\tilde{F} : N \longrightarrow S$, es suave.*

Demostración. Sea $p \in N$. Denote las dimensiones de N, M y S por n, m y k, respectivamente. Por hipótesis, $F(p) \in S \subset M$. Como S es una subvariedad incrustada de M, entonces existe una carta coordenada $(V, \psi) = (V, (y^1, ..., y^m))$ en $F(p) \in M$, tal que $S \cap V$, es un k-"slice", con aplicación coordenada $\psi\Big|_{S\cap V} : S \cap V \longrightarrow \mathbb{R}^k$ dada por

$$\psi\Big|_{S\cap V} = (y^1, ..., y^k).$$

Por continuidad de F, para V abierto, existe una carta suave $(U, \varphi) = (U, (x^1, ..., x^n))$ en $p \in N$ tal que $F(U) \subset V$. Entonces $F(U) \subset V \cap S$, de modo que en $\varphi(U)$, tenemos

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x^1, ..., x^n) = (y^1, ..., y^k, 0, ..., 0)$$

y

$$\psi\Big|_{S\cap V} \circ \tilde{F} \circ \varphi^{-1}(x^1, ..., x^n) = (y^1, ..., y^k),$$

lo que muestra que $\tilde{F}$, es suave en U. □

Definición 1.45. Sea M una variedad suave. Una subvariedad inmersada de dimensión k de M, es un subconjunto $S \subset M$ dotada con una variedad topológica (no necesariamente con el subespacio topológico), junto con una estructura suave tal que la aplicación inclusión $i : S \hookrightarrow M$, es una inmersión suave.

Claramente, toda subvariedad incrustada es una subvariedad inmersada. Para una inmersión inyectiva $F : N \longrightarrow M$, podemos dar al conjunto imagen $F(N) \subset M$, una única variedad topológica y estructura suave tal que $F : N \longrightarrow F(N)$, sea un difeomorfismo: simplemente declarando que un conjunto $U \subset F(N)$ es abierto si, y solo si, $F^{-1}(U) \subset N$ es abierto y tome las aplicaciones coordenadas suave en $F(N)$, a las aplicaciones de la forma $(U, \varphi \circ F^{-1})$, donde φ es una aplicación coordenada suave en N. Con esta estructura de variedad suave, $i : F(N) \hookrightarrow M$ es una inmersión suave, porque i es igual a la composición de un difeomorfismo y una inmersión suave inyectiva:

$$\begin{tikzcd} F(N) \arrow[r, "F^{-1}"] \arrow[rr, bend left, "i"] & N \arrow[r, "F"] & M \end{tikzcd}$$

Definición 1.46. Sean M una variedad suave y $S \subset M$ una subvariedad inmersada. Se dice que S, es una subvariedad incrustada débil en M si, para toda aplicación suave $F : N \longrightarrow M$, con $F(N) \subset S$, induce una aplicación suave $\tilde{F} : N \longrightarrow S$.

1.4.2. Formas diferenciales

Definición 1.47. Sea V espacio vectorial real. Un k-tensor alternada ω, es una aplicación

$$\omega : \underbrace{V \times ... \times V}_{k} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que es multilineal (es decir, k-lineal) y tiene la propiedad adicional, $\omega(v_1, ..., v_k) = 0$ si, $\{v_1, ..., v_k\} \subset V$ es linealmente dependiente.

Sean ω k-tensor y η l-tensor en un espacio vectorial V. Su producto tensorial es, $\omega \otimes \eta$ $(k + l)$-tensor definida por

$$\omega \otimes \eta(v_1, ..., v_{k+l}) = \omega(v_1, ..., v_k)\eta(v_{k+1}, ..., v_{k+l}).$$

Se define una proyección $Alt : T^k(V^*) \longrightarrow \Lambda^k(V^*)$, llamado alternación por:

$$Alt\alpha = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k} sgn\sigma\alpha^{\sigma},$$

donde S_k es el grupo simétrico de k elementos. Explicitamente, significa

$$\big(Alt\alpha\big)(v_1, ..., v_k) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k} sgn\sigma\alpha\big(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}\big).$$

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Dadas $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ y $\eta \in \Lambda^l(V^*)$, se define su producto exterior

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\omega \otimes \eta),$$

que es $(k+l)$-covector (o tensor).

Definición 1.48. Sea V un espacio vectorial de dimensión n con base $\{E_1, ..., E_n\}$ y supongamos que $\{\varepsilon^1, ..., \varepsilon^n\}$ su base dual. Se define $\varepsilon^I : V \times ... \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, k-tensor en V por

$$\varepsilon^I(v_1, ..., v_k) = Det\begin{pmatrix} \varepsilon^{i_1}(v_1) & \dots & \varepsilon^{i_1}(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon^{i_k}(v_1) & \dots & \varepsilon^{i_k}(v_k) \end{pmatrix}$$

donde $I = (i_1, ..., i_k)$, es el multi-indice de longitud k tal que $1 \leq i_1, ..., i_k \leq n$. Claramente, ε^I es k-tensor alternada.

Proposición 1.49 (Base en $\Lambda^k(V^*)$). *Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Si $\{\varepsilon^1, ..., \varepsilon^n\}$ es una base en V^*, entonces para cada entero positivo $k \leq n$, la colección de tensores*

$$\{\varepsilon^I : I = (i_1, ..., i_k), 1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n\},$$

es una base para $\Lambda^k(V^*)$. Además,

$$dim\Lambda^k(V^*) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Demostración. Vea [7]. □

Lema 1.50. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $\{\varepsilon^1, ..., \varepsilon^n\}$ una base de V^*. Para todo multi-indices $I = (i_1, ..., i_k)$ y $J = (j_1, ..., j_l)$, satisface*

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ},$$

donde $IJ = (i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_l)$, es obtenido por concatenación de I y J.

Demostración. Como $\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J$ y ε^{IJ} son multilineales, es suficiente demostrar:

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(E_{p_1}, ..., E_{p_{k+l}}) = \varepsilon^{IJ}(E_{p_1}, ..., E_{p_{k+l}}) \tag{1.4}$$

para todo secuencia $(E_{p_1}, ..., E_{p_{k+l}})$, de vectores de la base de V. Considere varios casos como:

Caso 1: $P = (p_1, ..., p_{k+l})$ tiene indice repetido. Sin perdida de generalidad supone $p_1 = p_2$, entonces $\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(E_{p_1}, E_{p_1}, ..., E_{p_{k+l}}) = 0$ y $\varepsilon^{IJ}(E_{p_1}, E_{p_1}, ..., E_{p_{k+l}}) = 0$, o sea, satisface los ambos lados de (1.4).

Caso 2: P contiene un indice que no está en I o J. Entonces $\varepsilon^{IJ}(E_{p_1}, ..., E_{p_{k+l}}) = 0$ y por otro lado,

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(E_{p_1}, ..., E_{p_{k+l}}) = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\varepsilon^I \otimes \varepsilon^J)(E_{p_1}, ..., E_{p_{k+l}}) = 0.$$

Caso 3: $P = IJ$ y P no tiene indices repetidos. En este caso, para $P = (i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_l) = (p_1, ..., p_{k+l})$, el lado derecho es

$$\varepsilon^{IJ}(E_{i_1}, ..., E_{i_k}, E_{j_1}, ..., E_{j_l}) = 1$$

y por definición,

$$\begin{aligned} \varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(E_{p_1}, ..., E_{p_{k+l}}) &= \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt\big(\varepsilon^I \otimes \varepsilon^J\big)(E_{p_1}, ..., E_{p_{k+l}}) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (sgn\sigma)\varepsilon^I(E_{p_{\sigma(1)}}, ..., E_{p_{\sigma(k)}})\varepsilon^J(E_{p_{\sigma(k+1)}}, ..., E_{p_{\sigma(k+l)}}) \end{aligned}$$

La permutación σ es la composición de τ y η:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & ... & k & k+1 & ... & k+l \\ \sigma(1) & ... & \sigma(k) & k+1 & ... & k+l \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} 1 & ... & k & k+1 & ... & k+l \\ 1 & ... & k & \sigma(k+1) & ... & \sigma(k+l) \end{pmatrix}$$

y como $sgn(\tau\eta) = sgn\tau sgn\eta$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(E_{p_1}, ..., E_{p_{k+l}}) &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\tau\in S_k, \eta\in S_l} (sgn\tau)(sgn\eta)\varepsilon^I(E_{p_{\tau(1)}}, ..., E_{p_{\tau(k)}}) \times \\
&\quad \varepsilon^J(E_{p_{\eta(k+1)}}, ..., E_{p_{\eta(k+l)}}) \\
&= \left(\frac{1}{k!} \sum_{\tau\in S_k} (sgn\tau)\varepsilon^I(E_{p_{\tau(1)}}, ..., E_{p_{\tau(k)}})\right) \times \\
&\quad \left(\frac{1}{l!} \sum_{\eta\in S_l} (sgn\eta)\varepsilon^J(E_{p_{\eta(k+1)}}, ..., E_{p_{\eta(k+l)}})\right) \\
&= Alt(\varepsilon^I)(E_{p_1}, ..., E_{p_k})Alt(\varepsilon^J)(E_{p_{k+1}}, ..., E_{p_{k+l}}) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Caso 4: P es una permutación de IJ sin indices repetidos. En este caso, para $P = (p_{\sigma(1)}, ..., p_{\sigma(k+l)})$ se tiene

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{IJ}(E_{p_{\sigma(1)}}, ..., E_{p_{\sigma(k+l)}}) &= sgn\sigma\varepsilon^{IJ}(E_{p_1}, ..., E_{p_{k+l}}) \\
&= sgn\sigma\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(E_{p_1}, ..., E_{p_{k+l}}) \\
&= \varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(E_{p_{\sigma(1)}}, ..., E_{p_{\sigma(k+l)}}).
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 1.51. *Supongamos que ω, ω', η, y α son tensores covariantes alternadas en un espacio vectorial V, de dimensión finita.*

a) Bilinealidad: para $a, a' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(a\omega + a'\omega') \wedge \eta &= a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega' \wedge \eta). \\
\eta \wedge (a\omega + a'\omega') &= a(\eta \wedge \omega) + a'(\eta \wedge \omega').
\end{aligned}$$

b) Asociativa:

$$\omega \wedge (\eta \wedge \alpha) = (\omega \wedge \eta) \wedge \alpha.$$

c) Anticonmutativa: para $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ y $\eta \in \Lambda^l(V^*)$,

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \omega. \tag{1.5}$$

d) *Si* $\{\varepsilon^1, ..., \varepsilon^n\}$, *es cualquier base de* V^* *y* $I = (i_1, ..., i_k)$ *es cualquier multi-indice, entonces*

$$\varepsilon^{i_1} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_k} \quad = \quad \varepsilon^I. \tag{1.6}$$

e) *Para todos los covectores* $\omega^1, ..., \omega^k$ *y* $v_1, ..., v_k$ *vectores, tenemos*

$$\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^k(v_1, ..., v_k) \quad = \quad Det\big(\omega^j(v_i)\big). \tag{1.7}$$

Demostración. Se sigue inmediatamente del lema 1.50.

□

Definición 1.52. Sea M una variedad suave. Se define

$$T^k\big(T^*M\big) = \bigsqcup_{p\in M} T^k\big(T_p^*M\big),$$

llamado el fibrado de k-tensores covariantes en M.

Análogamente, se define el fibrado de k-tensores contravariantes:

$$T^k\big(TM\big) = \bigsqcup_{p\in M} T^k\big(T_pM\big),$$

El espacio de secciones de estos fibrados tensoriales $\Gamma\big(T^k(T^*M)\big)$, $\Gamma\big(T^k(TM)\big)$, son espacios vectoriales de dimensión infinita sobre $\mathbb{R}$. Denote el espacio de campos k-tensores covariante por

$$\mathcal{T}^k(M) = \Gamma\big(T^k(T^*M)\big).$$

El subconjunto de tensores alternadas en $T^k(T^*M)$, es denotado por Λ^kT^*M y definida por

$$\Lambda^kT^*M = \bigsqcup_{p\in M} \Lambda^k(T_p^*M).$$

Definición 1.53. Sea M variedad suave y X un campo vectorial suave en M, y ψ es el flujo de X. Para todo, campo vectorial suave Y en M, se define el campo vectorial débil $\mathcal{L}_XY$ en M por:

$$\big(\mathcal{L}_XY\big)_p = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{d\big(\psi_{-t}\big)_{\psi_t(p)}\big(Y_{\psi_t(p)}\big) - Y_p}{t},$$

siempre que, el limite existe.

Definición 1.54. Sea $A \in T^k(M)$. Se define la derivada de Lie de A, con respecto a X, denotado por $\mathcal{L}_X A$, mediante

$$\left(\mathcal{L}_X A\right)_p = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left(\psi_t^* A\right)_p = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{d\left(\psi_t\right)_p^* \left(A_{\psi_t(p)}\right) - A_p}{t} \tag{1.8}$$

siempre que, el limite existe.

Proposición 1.55. *Supongamos que X y Y, son campos vectoriales suave, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Si σ y τ son campos tensoriales covariantes suaves. Entonces*

(a) $\mathcal{L}_X f = Xf$.

(b) $\mathcal{L}_X\left(\sigma \otimes \tau\right) = \mathcal{L}_X \sigma \otimes \tau + \sigma \otimes \mathcal{L}_X \tau$.

(c) $\mathcal{L}_X\left(f\sigma\right) = \left(\mathcal{L}_X f\right)\sigma + f\left(\mathcal{L}_X \sigma\right)$.

(d) *Si $X_1, ..., X_k$ son campos vectoriales suaves y A un campo k-tensorial suave, entonces*

$$\mathcal{L}_X\left(A(X_1, ..., X_k)\right) = \left(\mathcal{L}_X A\right)(X_1, ..., X_k) + A(\mathcal{L}_X X_1, ..., X_k) + ... + A(X_1, ..., \mathcal{L}_X X_k).$$

Demostración. Observe [7] y [5]. □

Definición 1.56. Una forma diferencial de grado k, o simplemente un k-forma en una variedad suave M, es una aplicación

$$\begin{array}{rccc} \omega : & M & \longrightarrow & \Lambda^k T^* M \\ & p & \longrightarrow & \omega_p \in \Lambda^k T_p^* M \end{array}$$

Denote el espacio vectorial de k-formas suaves por:

$$\Omega^k(M) = \Gamma\left(\Lambda^k T^* M\right).$$

El producto exterior de dos formas diferenciales es definida puntualmente:

$$\left(\omega \wedge \eta\right)_p = \omega_p \wedge \eta_p.$$

Si f es un 0-forma y η es un k-forma, entonces $f \wedge \eta$ es interpretado por producto ordinario $f\eta$. Se define

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M).$$

Entonces $(\Omega^*(M), \wedge)$, es una álgebra graduado anticonmutativa y asociativa.

Sea $(U, (x^i))$ carta coordenada suave arbitraria en $p \in M$, con funciones coordenadas $x^1, ..., x^n : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces para cada punto $p \in M$, el conjunto

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$$

forma una base para el espacio vectorial T_pM. Para encontrar una base del espacio vectorial dual T_p^*M, considere cada función suave $x^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ y cuyo diferencial $dx_p^i : T_pM \longrightarrow T_{x^i(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ es un elemento de T_p^*M. Entonces

$$dx_p^i\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\Big) = \delta_{ij}.$$

Por lo tanto, $\{dx_p^1, ..., dx_p^n\}$ define una base en T_p^*M.
Usando proposición 1.51 d) y 1.49, para $\omega \in \Omega^k(M)$ en una carta coordenada suave $(U, (x^i))$, tiene la expresión local:

$$\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} \omega_{(i_1,...,i_k)}(p) dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k},$$

o simplemente,

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^I,$$

donde $I = (i_1, ..., i_k)$ con $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$. Diremos que ω es suave en U, si cada coeficiente ω_I es suave en U.
En términos formas diferenciales, el resultado de la proposición 1.51 e), se obtiene:

$$dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}\Big(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\Big) = Det\Big(dx^{i_s}\big(\frac{\partial}{\partial x^{j_t}}\big)\Big)_{1 \leq s,t \leq k}.$$

Definición 1.57. Sea $F : M \longrightarrow N$, una aplicación suave y $\omega \in \Omega^k(N)$. El pullback F^* de ω, denotado por $F^*\omega$, es una forma diferencial en M definida por:

$$\big(F^*\omega\big)_p(v_1, ..., v_k) \quad = \quad \omega_{F(p)}\big(dF_p(v_1), ..., dF_p(v_k)\big),$$

donde $v_1, ..., v_k \in T_pM$.

Lema 1.58. *Supongamos que $F : M \longrightarrow N$ es una aplicación suave. Entonces:*

a) $F^* : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M)$, *lineal sobre* $\mathbb{R}$.

b) $F^*\big(\omega \wedge \eta\big) = F^*\omega \wedge F^*\eta$.

c) *En cualquier carta coordenada suave,*

$$F^*\Big(\sum_I \omega_I dy^{i_1} \wedge ... \wedge dy^{i_k}\Big) = \sum_I \big(\omega_I \circ F\big) d\big(y^{i_1} \circ F\big) \wedge ... \wedge d\big(y^{i_k} \circ F\big).$$

Demostración. a) Sean $\omega, \eta \in \Omega^k(N)$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\Big(F^*\big(a\omega + b\eta\big)\Big)_p(v_1, ..., v_k) &= a\omega_{F(p)}\big(dF_p(v_1), ..., dF_p(v_k)\big) + b\eta_{F(p)}\big(dF_p(v_1), ..., dF_p(v_k)\big) \\
&= a\big(F^*\omega\big)_p(v_1, ..., v_k) + b\big(F^*\eta\big)_p(v_1, ..., v_k) \\
&= \big(aF^*\omega + bF^*\eta\big)_p(v_1, ..., v_k).
\end{aligned}$$

b) Para $\omega \in \Omega^k(N)$ y $\eta \in \Omega^l(N)$

$$\begin{aligned}
\Big(F^*(\omega \wedge \eta)\Big)_p(v_1, ..., v_{k+l}) &= \big(\omega \wedge \eta\big)_{F(p)}\big(dF_p(v_1), ..., dF_p(v_{k+l})\big) \\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\omega_{F(p)} \otimes \eta_{F(p)})\big(dF_p(v_1), ..., dF_p(v_{k+l})\big) \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn\sigma \omega_{F(p)}\big(dF_p(v_{\sigma(1)}), ..., dF_p(v_{\sigma(k)})\big) \times \\
&\quad \eta_{F(p)}\big(dF_p(v_{\sigma(k+1)}), ..., dF_p(v_{\sigma(k+l)})\big) \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn\sigma \big(F^*\omega\big)_p(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) \times \\
&\quad \big(F^*\eta\big)_p(v_{\sigma(k+1)}, ..., v_{\sigma(k+l)}) \\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt\Big(\big(F^*\omega\big)_p \otimes \big(F^*\eta\big)_p\Big)(v_1, ..., v_{k+l}) \\
&= \big(F^*\omega \wedge F^*\eta\big)_p(v_1, ..., v_{k+l}).
\end{aligned}$$

c) Usando b), obtenemos

$$\begin{aligned}
F^*\Big(\sum_I \omega_I dy^{i_1} \wedge ... \wedge dy^{i_k}\Big) &= \sum_I F^*\omega_I \big(F^*dy^{i_1} \wedge ... \wedge F^*dy^{i_k}\big) \\
&= \sum_I (\omega_I \circ F) d(y^{i_1} \circ F) \wedge ... \wedge d(y^{i_k} \circ F).
\end{aligned}$$

□

Definición 1.59. Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in \Omega^k(M)$. Se define una aplicación lineal $\boldsymbol{i}_X : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M)$, llamado contracción por X como sigue:

$$\Big(\boldsymbol{i}_X\omega\Big)_p(X_1, ..., X_{k-1}) = \omega_p(X(p), X_1(p), ..., X_{k-1}(p)),$$

para cada $p \in M$, y $X_1, ..., X_{k-1} \in \mathfrak{X}(M)$.

Lema 1.60. *Sea M una variedad suave y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces*

a) $\boldsymbol{i}_X \circ \boldsymbol{i}_X = 0$.

b) *Si $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\eta \in \Omega^l(M)$, entonces*

$$\boldsymbol{i}_X(\omega \wedge \eta) = \big(\boldsymbol{i}_X\omega\big) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \big(\boldsymbol{i}_X\eta\big).$$

Demostración. Ver [7] y [5]. □

1.4.3. Derivada exterior

Definimos un operador diferencial natural en k-formas, llamada derivada exterior.

Para $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, defina la derivada exterior de 0-forma $f \in C^\infty(U)$ como su diferencial:

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \in \Omega^1(U).$$

Definición 1.61. Si $\omega = \sum_I \omega_I dx^I \in \Omega^k(U)$, entonces su derivada exterior $d\omega$, es definida por:

$$d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I = \sum_I \Big(\sum_j \frac{\partial \omega_I}{\partial x^j} dx^j\Big) \wedge dx^I \in \Omega^{k+1}(U).$$

Con mas detalle, esto significa:

$$d\Big(\sum_I \omega_I dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}\Big) = \sum_I \sum_j \frac{\partial \omega_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}.$$

Observe para $\omega = \sum_j \omega_j dx^j$,

$$
\begin{aligned}
d\Big(\sum_j \omega_j dx^j\Big) &= \sum_j d\omega_j \wedge dx^j \\
&= \sum_{j,i} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j \\
&= \sum_{i<j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j + \sum_{i>j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j \\
&= \sum_{i<j} \Big(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}\Big) dx^i \wedge dx^j .
\end{aligned}
$$

Para transferir esta definición para variedades, necesitamos verificar las siguiente propiedades.

Proposición 1.62 (Propiedades de la derivada exterior en $\mathbb{R}^n$).

a) $d : \Omega^k(U) \longrightarrow \Omega^{k+1}(U)$, *es lineal sobre* $\mathbb{R}$.

b) *Si* $\omega \in \Omega^k(U)$ *y* $\eta \in \Omega^l(U)$, *entonces*

$$d\big(\omega \wedge \eta\big) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \tag{1.9}$$

c) $d \circ d = 0$.

d) *d conmuta con pullback: si* $U \subset \mathbb{R}^n$ *abierto y* $V \subset \mathbb{R}^m$ *abierto, y* $F : U \longrightarrow V$ *es una aplicación suave y sea* $\omega \in \Omega^k(V)$, *entonces*

$$F^*\big(d\omega\big) = d\big(F^*\omega\big). \tag{1.10}$$

Demostración. a) Es consecuencia inmediata de la definición de d.

Para probar b), por linealidad de d es suficiente considerar $\omega = udx^I \in \Omega^k(U)$ y $\eta = vdx^J \in \Omega^l(U)$, para $u, v \in C^\infty(U)$. Si $I = (i_1, ..., i_k)$ tiene indices repetidos entonces $d\big(udx^I\big) = 0 = du \wedge dx^I$. Si I, no tiene indice repetidos considere una permutación σ tal que $I' = I_\sigma$, es multi-indice creciente entonces

$$d\big(udx^I\big) = sgn\sigma d\big(udx^{I'}\big) = sgn\sigma\big(du \wedge dx^{I'}\big) = du \wedge dx^I.$$

Usando esto, calculemos

$$\begin{aligned} d\big(\omega \wedge \eta\big) &= d\big(udx^I \wedge vdx^J\big) \\ &= d\big(uvdx^I \wedge dx^J\big) \\ &= \big(vdu + udv\big) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \big(du \wedge dx^I\big) \wedge \big(vdx^J\big) + (-1)^k \big(udx^I\big) \wedge \big(dv \wedge dx^J\big) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta, \end{aligned}$$

donde el $(-1)^k$ viene de $dv \wedge dx^I = (-1)^k dx^I \wedge dv$.

Para probar c), justifiquemos un caso especial para 0-forma $f \in C^\infty(U)$:

$$\begin{aligned} d\big(df\big) &= d\Big(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j\Big) \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i<j} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\Big) dx^i \wedge dx^j \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para el caso general,

$$\begin{aligned} d\big(d\omega\big) &= d\Big(\sum_I d\omega_I \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}\Big) \\ &= \sum_I d\big(d\omega_I\big) \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} + \sum_I d\omega_I \wedge d\big(dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}\big) \\ &= \sum_I \sum_{s=1}^{k} (-1)^{s-1} d\omega_I \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge d\big(dx^{i_s}\big) \wedge ... \wedge dx^{i_k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente, para probar d) es suficiente considerar $\omega = udx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} \in \Omega^k(V)$,

Para el lado, izquierdo se tiene:

$$\begin{aligned} F^*\big(d\omega\big) &= F^*\big(du \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}\big) \\ &= d\big(u \circ F\big) \wedge d\big(x^{i_1} \circ F\big) \wedge ... \wedge d\big(x^{i_k} \circ F\big) \end{aligned}$$

y el derecho es:

$$\begin{aligned} d\big(F^*\omega\big) &= d\Big(F^*\big(udx^{i_1}\wedge ...\wedge dx^{i_k}\big)\Big) \\ &= d\Big((u\circ F)d(x^{i_1}\circ F)\wedge ...\wedge d(x^{i_k}\circ F)\Big) \\ &= d(u\circ F)\wedge d(x^{i_1}\circ F)\wedge ...\wedge d(x^{i_k}\circ F). \end{aligned}$$

□

Estos resultados nos permite trasladar la definición de la derivada exterior de $\mathbb{R}^n$ para variedades.

Teorema 1.63 (Existencia y unicidad de la derivada exterior). *Suponga que M es una variedad suave. Entonces existe un único operador $d:\Omega^k(M)\longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$, para cada k, llamado la derivada exterior satisfaciendo las siguientes propiedades:*

i) *d es lineal sobre $\mathbb{R}$.*

ii) *Si $\omega\in\Omega^k(M)$ y $\eta\in\Omega^l(M)$ entonces*

$$d(\omega\wedge\eta) = d\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge d\eta.$$

iii) $d\circ d = 0.$

iv) *Para cada $f\in\Omega^0(M)=C^\infty(M)$, df (es la diferencial de f) dada por:*

$$df(X) = Xf.$$

Demostración. Suponga que $\omega\in\Omega^k(M)$. Para carta suave (U,φ), defina:

$$d\omega = \varphi^* d\varphi^{-1*}\omega. \tag{1.11}$$

Para verificar que (1.11), está bien definida note que para toda carta suave (V,ψ), la aplicación $\varphi\circ\psi^{-1}:\psi(U\cap V)\longrightarrow\varphi(U\cap V)$, es un difeomorfismo en $\psi(U\cup V)\subset\mathbb{R}^n$. Por la proposición 1.62 d), implica que

$$\big(\varphi\circ\psi^{-1}\big)^*d\big(\varphi^{-1*}\omega\big) = d\Big(\big(\varphi\circ\psi^{-1}\big)^*\varphi^{-1*}\omega\Big) = d\psi^{-1*}\omega.$$

Como $\left(\psi^{-1}\right)^{*} \circ \varphi^{*} = \left(\varphi \circ \psi^{-1}\right)^{*}$, entonces

$$\varphi^{*} d\varphi^{-1*}\omega = \psi^{*} d\psi^{-1*}\omega.$$

Por consiguiente, $d\omega$ está bien definida.

Satisface inmediatamente, la propiedad i) porque pullback y d (en $\mathbb{R}^n$) son lineales.

Para ii), sean $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\eta \in \Omega^l(M)$. Obtenemos,

$$\begin{aligned} d\big(\omega \wedge \eta\big) &= \varphi^{*} d\varphi^{-1*}(\omega \wedge \eta) \\ &= \varphi^{*} d\big(\varphi^{-1*}\omega \wedge \varphi^{-1*}\eta\big) \\ &= \varphi^{*}\big(d\varphi^{-1*}\omega \wedge \varphi^{-1*}\eta + (-1)^k \varphi^{-1*}\omega \wedge d\varphi^{-1*}\eta\big) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

Para verificar iii),

$$d \circ d(\omega) = d\big(\varphi^{*}(d\varphi^{-1*}\omega)\big) = 0.$$

Finalmente, para $X_p = X^i(p)\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ tenemos

$$\begin{aligned} df_p(X_p) &= \Big(\varphi^{*} d(f \circ \varphi^{-1})\Big)_p (X_p) \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\Big|_{\varphi(p)} (dx^j)_{\varphi(p)} \Big(X^i(p)\varphi_{*p}\big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\big)\Big) \\ &= \sum_{i,j} X^i(p) \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\Big|_{\varphi(p)} (dx^j)_{\varphi(p)} \big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{\varphi(p)}\big) \\ &= \sum_{i} X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}) \\ &= \sum_{i} X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f \\ &= X_p f. \end{aligned}$$

La unicidad: sea $d' : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$ una derivada exterior arbitraria que satisface i) al iv), demostremos que $d' = d$.

En efecto, sea $\omega \in \Omega^k(M)$ y $p \in M$ arbitrario. Escoja una carta $\big(U, (x^1, ..., x^n)\big)$ en p y considere $\omega = \sum_I \omega_I dx^I$, en U. Extendiendo las funciones ω_I , $x^1, ..., x^n$

definidas en U para funciones $\tilde{\omega}_I, \tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^n$ en M, y que coincide con $\omega, x^1, ..., x^n$, en una vecindad de V, en p. Defina

$$\tilde{\omega} = \sum_I \tilde{\omega}_I d\tilde{x}^I \in \Omega^k(M).$$

Entonces $\omega\Big|_V = \tilde{\omega}\Big|_V$. Verifiquemos que d', es local:

$$\omega\Big|_V = \tilde{\omega}\Big|_V \Longrightarrow d'\omega\Big|_V = d'\tilde{\omega}\Big|_V$$

De hecho, sea $\eta = \omega - \tilde{\omega}$ entonces $\eta\Big|_V = 0$. Sea p un punto arbitrario en V. Es suficiente demostrar $d'\eta_p = 0$.

Escoja una función bump suave ρ, en p con soporte en V. En particular, $\rho = 1$ en una vecindad de p en V. Entonces $\rho\eta = 0$, en M. Por la propiedad ii),

$$0 = d'\rho_p \wedge \eta_p + \rho(p) d'\eta_p.$$

Como $\eta_p = 0$ y $\rho(p) = 1$, resulta que $d'\eta_p = 0$. El punto p es arbitrario en V entonces $d'\omega\Big|_V = d'\tilde{\omega}\Big|_V$.

Así,

$$\begin{aligned} \big(d'\omega\big)_p &= \big(d'\tilde{\omega}\big)_p \\ &= \Big(\sum_I d'\tilde{\omega}_I \wedge d\tilde{x}^I\Big) \\ &= \Big(\sum_I d\omega_I \wedge dx^I\Big), \ \tilde{\omega}_I = \omega_I \text{ y } \tilde{x}^I = x^I \text{ en } V \\ &= \big(d\omega\big)_p \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d = d'$.

□

Proposición 1.64. *Si $F : M \longrightarrow N$ es una aplicación suave, entonces la aplicación pullback $F^* : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M)$ conmuta con d: para todo $\omega \in \Omega^k(N)$,*

$$F^*\big(d\omega\big) = d\big(F^*\omega\big). \tag{1.12}$$

Demostración. Sea (U,φ) y (V,ψ) son cartas suaves para M y N, respectivamente. Entonces en $U\cap F^{-1}(V)$:

$$\begin{aligned}
F^*\big(d\omega\big) &= F^*\Big(\psi^*\big(d\psi^{-1*}\omega\big)\Big)\\
&= \varphi^*\circ\big(\psi\circ F\circ\varphi^{-1}\big)^* d\big(\psi^{-1*}\omega\big)\\
&= \varphi^* d\Big(\big(\psi\circ F\circ\varphi^{-1}\big)^*\psi^{-1*}\omega\Big)\\
&= \varphi^* d\big((F\circ\varphi^{-1})^*\omega\big)\\
&= \varphi^* d\big(\varphi^{-1*}(F^*\omega)\big)\\
&= d\big(F^*\omega\big).
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.65 (Derivada exterior de un 1-forma). *Para todo 1-forma ω, suave y campos vectoriales suaves X y Y se cumple:*

$$d\omega(X,Y) = X\big(\omega(Y)\big) - Y\big(\omega(X)\big) - \omega\big([X,Y]\big) \tag{1.13}$$

Demostración. Considere $\omega = udv$, con u,v suaves y, X y Y campos vectoriales suaves. Entonces el lado izquierdo de (1.13) es igual a,

$$\begin{aligned}
d\omega(X,Y) &= d\big(udv\big)(X,Y)\\
&= du\wedge dv(X,Y)\\
&= du(X)dv(Y) - dv(X)du(Y)\\
&= XuYv - XvYu,
\end{aligned}$$

y el lado derecho,

$$\begin{aligned}
X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]) &= X\big(udv(Y)\big) - Y\big(udv(X)\big) - udv\big([X,Y]\big)\\
&= XuYv + uXYv - YuXv - uYXv - uXYv + uYXv\\
&= XuYv - XvYu.
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.66 (Formula invariante para la derivada exterior). *Sea M una variedad suave y $\omega \in \Omega^k(M)$. Para todos campos vectoriales $X_1, ..., X_{k+1}$, suaves sobre M se tiene*

$$
\begin{aligned}
d\omega(X_1, ..., X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i \omega(X_1, ..., \hat{X}_i, ..., X_{k+1}) \\
&+ \sum_{i,j=1, i<j}^{k+1} (-1)^{i+j} \omega\big([X_i, X_j], X_1, ..., \hat{X}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_{k+1}\big),
\end{aligned}
$$

donde los indices con sombreros omiten argumentos.

Demostración. Ver [5] y [7]. □

Proposición 1.67. *Sea M una variedad suave y X un campo vectorial. Si ω, $\eta \in \Omega^*(M)$, entonces*

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = \big(\mathcal{L}_X \omega\big) \wedge \eta + \omega \wedge \big(\mathcal{L}_X \eta\big)$$

Demostración. Por definición,

$$
\begin{aligned}
\Big(\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta)\Big)_p &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\big(\psi_t^*(\omega \wedge \eta)\big)_p - \omega_p \wedge \eta_p}{t} \\
&= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{(\psi_t^* \omega)_p \wedge (\psi_t^* \eta)_p - \omega_p \wedge \eta_p}{t} \\
&= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\big(\psi_t^* \omega\big)_p - \omega_p}{t} \wedge \big(\psi_t^* \eta\big)_p + \omega_p \wedge \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\big(\psi_t^* \eta\big)_p - \eta_p}{t} \\
&= \big(\mathcal{L}_X \omega\big)_p \wedge \eta_p + \omega_p \wedge \big(\mathcal{L}_X \eta\big)_p.
\end{aligned}
$$

□

Teorema 1.68 (Formula mágica de Cartan). *Sea M una variedad suave. Para todo campo vectorial suave X en M y para cualquier forma suave ω, se tiene:*

$$\mathcal{L}_X \omega = \boldsymbol{i}_X d\omega + d\boldsymbol{i}_X \omega. \tag{1.14}$$

Demostración. Por inducción sobre k: para 0-formas se tiene,

$$\boldsymbol{i}_X df + d\boldsymbol{i}_X f = df(X) = \mathcal{L}_X f.$$

Ahora, supongamos que la igualdad sea válida para formas de grado menor que k. En una carta suave (U, φ), ω es escrito como: $\omega = \sum_I \omega_I dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$, y luego considerando $u = x^{i_1}$ y $\beta = \omega_I dx^{i_2} \wedge ... \wedge dx^{i_k} \in \Omega^{k-1}(M)$, se observa que los términos de sumatoria ω, son de forma $du \wedge \beta$. Además se justifica: $d\big(\mathcal{L}_X u\big) = \mathcal{L}_X du$, usando la proposición 1.55 d), para $A = du$,

$$\begin{aligned}
\Big(\mathcal{L}_X du\Big)(X_1) &= \mathcal{L}_X\big(du(X_1)\big) - du\big(\mathcal{L}_X X_1\big)\\
&= XX_1 u - [X, X_1]u\\
&= XX_1 u - XX_1 u + X_1 X u\\
&= X_1 X u\\
&= X_1\big(\mathcal{L}_X u\big)\\
&= d\Big(\mathcal{L}_X u\Big)(X_1)
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i}_X d\big(du \wedge \beta\big) + d\boldsymbol{i}_X\big(du \wedge \beta\big) &= \boldsymbol{i}_X\big(-du \wedge d\beta\big) + d\big(\boldsymbol{i}_X du \wedge \beta - du \wedge \boldsymbol{i}_X \beta\big)\\
&= -\boldsymbol{i}_X du \wedge d\beta + du \wedge \boldsymbol{i}_X d\beta + d(Xu\beta) - d(du \wedge \boldsymbol{i}_X \beta)\\
&= -Xud\beta + du \wedge \boldsymbol{i}_X d\beta + d(Xu) \wedge \beta + (Xu)d\beta\\
&\quad + du \wedge d\boldsymbol{i}_X \beta\\
&= du \wedge \big(\boldsymbol{i}_X d\beta + d\boldsymbol{i}_X \beta\big) + d(Xu) \wedge \beta\\
&= du \wedge \mathcal{L}_X \beta + d\big(\mathcal{L}_X u\big) \wedge \beta, \text{ por hipótesis}\\
&= du \wedge \mathcal{L}_X \beta + \mathcal{L}_X du \wedge \beta\\
&= \mathcal{L}_X(du \wedge \beta).
\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Materiales y metódos

2.1. Materiales

- Libros
- Internet
- USB
- Papel A4
- Lapicero
- Pizarra
- Plumones acrílicos
- Mota

2.2. Metódologia de la investigación

La investigación es básica y está basada en los resultados obtenidos en el artículo de Marsden, Weinstein y Meyer [9], el trabajo será ampliar y profundizar el artículo.

Método de investigación

El método que se utilizará en la presente investigación es lectura, análisis, síntesis, justificación, interpretación y comprensión.

Diseño de investigación

El diseño de investigación que se usará es de tipo descriptivo que consiste en la exploración.

Técnicas

Lectura compresiva, concentración, análisis y consulta, de libros, artículos y notas disponibles en internet, impreso, y en entre otros.

Estrategias

Planificar, tomar apuntes, y subrayar la información necesaria para el trabajo propuesto.

Capítulo 3

Resultados y discusión

En este capítulo, expongo el resultado del proyecto de tesis. Primero presento grupos de Lie y álgebras de Lie en la cual, demuestro un resultado importante de espacios cocientes que admiten una estructura suave y cuyas referencias son [2], [5] y [7]; luego, en la geometría simplética presento variedades simpléticas y defino el concepto de aplicación de momento y analizo ejemplos de aplicación del momento. Finalmente, la prueba y aplicaciones del teorema de Marsden, Weinstein y Meyer [1], [4], [9] y [10].

3.1. Introducción de grupos de Lie y álgebras de Lie

3.1.1. Grupos de Lie

Definición 3.1. Un grupo de Lie es una variedad suave G, con una estructura algebraica de un grupo tales que las operaciones del grupo $m : G\times G \longrightarrow G$, $(g,h) \longmapsto gh$ y $i : G \longrightarrow G$, $g \longmapsto g^{-1}$ son suaves.

Dichas operaciones m e i, son llamados multiplicación e inversión respectivamente. A continuación defino las traslaciones sobre un grupo de Lie G:

Para cada $g \in G$, se define la traslación a la izquierda

$$\begin{array}{rccc} L_g : & G & \longrightarrow & G \\ & h & \longmapsto & gh \end{array}$$

Para cada $g \in G$, se define la traslación a la derecha

$$\begin{array}{rccc} R_g : & G & \longrightarrow & G \\ & h & \longmapsto & hg \end{array}$$

Ejemplos de grupos de Lie:

Ejemplo 3.1. *Sea el grupo lineal general* $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : Det(A) \neq 0\}$. *Como* $GL(n, \mathbb{R})$ *es abierto en* $M(n, \mathbb{R})$, *entonces* $GL(n, \mathbb{R})$ *es una variedad suave. La* $(i, j)-$*entrada del producto de dos matrices* A *y* B *en* $GL(n, \mathbb{R})$,

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

es un polinomio en las coordenadas de A *y* B, *entonces la multiplicación* $m : GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$, *es una aplicación suave. Recuerde que* $(i, j)-$*menor* M_{ij} *de una matriz* A *es el determinante de la submatriz de* A, *eliminando la fila* i *y la columna* j *de* A. *Por regla de Cramer del álgebra lineal, la* $(i, j)-$*entrada de* A^{-1} *es:*

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{det(A)} (-1)^{i+j} M_{ji},$$

que es una función suave. En consecuencia, la aplicación inversión $i : GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$, *es también suave. Por lo tanto,* $GL(n, \mathbb{R})$ *es un grupo de Lie.*

Ejemplo 3.2. *El grupo lineal general complejo* $GL(n, \mathbb{C}) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) : det(A) \neq 0\}$, *es un grupo de matrices de* $n \times n$ *invertibles bajo la multiplicación de matrices. Como* $GL(n, \mathbb{C})$ *es un abierto en* $M(n, \mathbb{C})$ *entonces* $GL(n, \mathbb{C})$, *es una subvariedad suave abierta en* $M(n, \mathbb{C})$, *de dimensión* $2n^2$; *las aplicaciones de multiplicación* m *y inversión* i *son suaves porque, la parte real y la parte imaginaria son suaves. Se concluye que* $GL(n, \mathbb{C})$, *es un grupo de Lie.*

Ejemplo 3.3. *El circulo unitario* $S^1 \subset \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$*, es una variedad suave con atlas suave:* $\mathcal{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$*, donde*

$$\varphi : U = \{(cos\theta, \operatorname{sen}\theta) : \theta \in \langle 0, 2\pi\rangle\} \longrightarrow \mathbb{R}, (cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \longmapsto \theta \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

y

$$\psi : V = \{(cos\theta, sen\theta) : \theta \in \langle -\pi, \pi\rangle\} \longrightarrow \mathbb{R}, (cos\theta, sen\theta) \longmapsto \theta \in \langle -\pi, \pi\rangle.$$

También, es un grupo con la multiplicación compleja y las operaciones de multiplicación m *y la inversión* i*, tienen representación de coordenadas suaves* $(\theta_1, \theta_2) \longmapsto \theta_1 + \theta_2$*, y* $\theta \longmapsto -\theta$*. Por tanto,* S^1 *es un grupo de Lie.*

Ejemplo 3.4. *Dados los grupos de Lie* $G_1, ..., G_k$*, su producto directo* $G_1 \times ... \times G_k$ *es una variedad producto con estructura de grupo dada por:*

$$(g_1, ..., g_k).(h_1, ..., h_k) = (g_1h_1, ..., g_kh_k).$$

Es fácil verificar que $G_1 \times ... \times G_k$*, es un grupo de Lie.*
Un ejemplo particular, el n*-toro* $\mathbb{T}^n = S^1 \times ... \times S^1$ *es un grupo de Lie abeliano de dimensión* n*.*

Definición 3.2. Sean G y H grupos de Lie.

i) Un homomorfismo de grupos de Lie de H en G, es una aplicación suave $\varphi : H \longrightarrow G$, que es un homomorfismo de grupos.

ii) Un isomorfismo de grupos de Lie de H en G, es un homomorfismo de grupos de Lie biyectiva $\varphi : H \longrightarrow G$, con inversa $\varphi^{-1} : G \longrightarrow H$, homomorfismo de grupos de Lie.

Definición 3.3. Un subgrupo de Lie de un grupo de Lie G es,

i) un subgrupo algebraico H;

ii) H una subvariedad immersada vía aplicación inclusión;

iii) las operaciones del grupo sobre H, son suaves.

La siguiente proposición, muestra que subgrupos regulares (o subgrupos incrustados) son automáticamente subgrupos de Lie.

Proposición 3.4. *Si H es un subgrupo algebraico y una subvariedad incrustada de un grupo de Lie G, entonces H, es un subgrupo de Lie de G.*

Demostración. Como H es una subvariedad incrustada de G, entonces $i : H \hookrightarrow G$ es una aplicación incrustada suave y en particular, H es una subvariedad immersa en G.
Sea $m : G \times G \longrightarrow G$, la aplicación multiplicación sobre G. Como H, es una subvariedad incrustada de G, entonces la aplicación inclusión $i : H \hookrightarrow G$, es suave. Por lo tanto, la aplicación inclusión $H \times H \hookrightarrow G \times G$ es también suave y la composición $m \circ i : H \times H \longrightarrow G$, es suave. Como satisface las hipótesis del teorema 1.44, la aplicación inducida $\tilde{m} : H \times H \longrightarrow H$, es suave (porque H es una subvariedad regular.)
La suavidad de la aplicación inversa $i : H \longrightarrow H$, es deducida de la suavidad de $i : G \longrightarrow G$, usando el mismo argumento que el de la multiplicación. $\square$

Ejemplo 3.5. *El conjunto $O(n) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : A^T A = I_n\}$, es un subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ llamado el grupo ortogonal.*
Defina una aplicación suave $\Phi : M(n, \mathbb{R}) \longrightarrow S_{n\times n} \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, por $\Phi(A) = A^T A$. Entonces $O(n) = \Phi^{-1}(I_n)$.
Para cada $A \in \Phi^{-1}(I_n)$, demostremos que $\Phi_{*A} : T_A M(n, \mathbb{R}) \longrightarrow T_{I_n} S_{n\times n}$ es sobreyectiva. En efecto, como $T_A M(n, \mathbb{R}) \cong M(n, \mathbb{R})$ y $T_{I_n} S_{n\times n} \cong S_{n\times n}$, entonces

$$\begin{aligned}
\Phi_{*A}(B) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Phi(A + tB) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (A^T + tB^T)(A + tB) \\
&= A^T B + B^T A.
\end{aligned}$$

Sea $S \in S_{n\times n}$ arbitrario. Entonces existe $B = \dfrac{AS}{2} \in M(n, \mathbb{R})$ tal que $\Phi_{*A}(B) = S$. La identidad I_n, es un valor regular de Φ, se sigue que $O(n)$ es una subvariedad *incrustada de* $M(n,\mathbb{R})$*, de dimensión* $\dfrac{n(n-1)}{2}$*. Por la proposición anterior se concluye,* $O(n)$ *es un subgrupo de Lie de* $M(n,\mathbb{R})$*.*

Ejemplo 3.6. *La aplicación* $\Phi : GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$*, dada por* $\Phi(A) = Det(A)$ *es suave y el conjunto de nivel* $\Phi^{-1}(1)$ *es:*

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) : Det(A) = 1\},$$

el grupo de lineal especial. Para $I_n \in \Phi^{-1}(1)$*,*

$$\begin{aligned}
\Phi_{*I_n}(B) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi\big(e^{tB}\big) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Det\big(e^{tB}\big) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{ttr(B)} \\
&= tr(B).
\end{aligned}$$

Luego, para $A \in \Phi^{-1}(1)$ *obtenemos*

$$\begin{aligned}
\Phi_{*A}(B) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Det(A + tB) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Det(A)Det(I_n + tA^{-1}B) \\
&= Det(A)\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Det(I_n + tA^{-1}B) \\
&= Det(A)\Phi_{*I_n}\big(A^{-1}B\big) \\
&= Det(A)tr(A^{-1}B).
\end{aligned}$$

Como $Det(A) = 1$ *y para cada* $k \in \mathbb{R}$ *tome* $B = \dfrac{k}{n}A$*. Entonces, existe* $B \in M(n,\mathbb{R})$ *tal que* $\Phi_{*A}(B) = tr(\dfrac{k}{n}I_n) = k$*.*
Así, Φ_{*A} *es sobreyectiva para todo* $A \in SL(n,\mathbb{R})$ *y por lo tanto,* 1 *es un valor regular de* Φ*. Consecuentemente,* $SL(n,\mathbb{R})$ *es una subvariedad incrustada en* $GL(n,\mathbb{R})$*. Por la proposición anterior,* $SL(n,\mathbb{R})$ *es un subgrupo de Lie.*

Teorema 3.5 (Teorema de rango equivariante). *Sean* M *y* N *variedades suaves y sea* G *un grupo de Lie. Supongamos que* $F : M \longrightarrow N$*, es una aplicación suave equivariante con respecto a una acción suave transitiva de* G *en* M *y cualquier acción* *suave de G en N. Entonces F, tiene rango constante. Así, si F es sobreyectiva entonces es una submersión suave; si F es inyectiva entonces es una inmersión suave; si F es biyectiva entonces es un difeomorfismo.*

Demostración. Sean ψ y θ, acciones de G en M y N respectivamente, y sean p y q puntos arbitrarios en M. Escoja $g \in G$ tal que $\psi_g(p) = q$ (g existe, pues G actúa transitivamente sobre M). Como $F \circ \psi_g = \theta_g \circ F$, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T_pM & \xrightarrow{dF_p} & T_{F(p)}N \\ {\scriptstyle d(\psi_g)_p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d(\theta_g)_{F(p)}} \\ T_qM & \xrightarrow[dF_q]{} & T_{F(q)}N \end{array}$$

Como $dF_q \circ d(\psi_g)_p = d(\theta_g)_{F(p)} \circ dF_p$, de aquí resulta que $rank(dF_p) = rank(dF_q)$. Por consiguiente, F tiene rango constante.
Por otro lado, sean $m = dimM$ y $n = dimN$ y supongamos que F, tiene un rango constante k. Para demostrar que F es submersión, supongamos que F no es una submersión entonces $k < n$. Por el teorema de rango, para cada $p \in M$, existen cartas suaves (U, φ) en $p \in M$ y (V, ψ) en $F(p) \in N$ tal que $F(U) \subset V$ y la representación coordenada de F, es dada por

$$\hat{F}(x^1, ..., x^m) = (x^1, ..., x^k, 0, ..., 0). \tag{3.1}$$

Como cualquier cobertura de una variedad tiene una subcobertura numerable, podemos escoger colección numerable de cartas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ para M y correspondientes cartas suaves $\{(V_i, \psi_i)\}$ para N tales que $\{U_i\}$ cubre a M y $F(U_i) \subset V_i$, y la representación coordenada de $F : U_i \longrightarrow V_i$ es dada en (3.1). Como $F(U_i)$ está contenida en un k-"slice"de V_i, entonces $F(U_i)$ tiene medida cero en N. Como $F(M) = \bigcup_i F(U_i)$, entonces $F(M)$ tiene medida cero en N. Lo cual implica que F, no es sobreyectiva.
Para probar que F es una inmersión, supongamos que F tiene rango constante k. Si F no es una inmersión entonces $k < m$. Por el teorema de rango, existen cartas suaves (U, φ) de $p \in M$ y (V, ψ) de $F(p)$ tal que F tiene una representación

coordenada,

$$\hat{F}(x^1, ..., x^k, x^{k+1}, ..., x^n) = (x^1, ..., x^k, 0, ..., 0).$$

Entonces $\hat{F}(0, ..., 0, \varepsilon) = \hat{F}(0, ..., 0)$, para ε suficientemente pequeño y concluimos que F, no es inyectiva.

Finalmente, si F es biyectiva entonces F es submersión e inmersión, o sea, $dimM = dimN$. La biyectividad y el teorema de la función inversa, implica que $F : M \longrightarrow N$ es un difeomorfismo.

$\square$

Proposición 3.6. *El grupo unitario $U(n)$, es un subgrupo de Lie incrustado de $GL(n, \mathbb{C})$, de dimensión n^2.*

Demostración. Considere la aplicación $\Phi : GL(n, \mathbb{C}) \longrightarrow M(n, \mathbb{C})$, definida por $\Phi(A) = A^*A$. Se observa que $U(n) = \Phi^{-1}(I_n)$.

Probemos que Φ, es equivariante con respecto a un adecuada acción a la derecha de $GL(n, \mathbb{C})$. Sea $GL(n, \mathbb{C})$, que actúa sobre si mismo por la multiplicación a la derecha y defina una acción a la derecha de $GL(n, \mathbb{C})$ sobre $M(n, \mathbb{C})$, por

$$X.B = B^*XB, \text{ para } X \in M(n, \mathbb{C}) \text{ y } B \in GL(n, \mathbb{C}).$$

Esta acción definida, es suave (pues la parte real y la parte imaginaria son suaves), y Φ es equivariante, porque para $A \in GL(n, \mathbb{C})$ se tiene:

$$\Phi(AB) = B^*A^*AB = B^*\Phi(A)B = \Phi(A).B.$$

Entonces, por el teorema 3.5, Φ tiene rango constante. Por tanto, $U(n)$ es un subgrupo de Lie incrustado de $GL(n, \mathbb{C})$.

Para determinar la dimensión de $U(n)$, necesitamos calcular el rango de la aplicación Φ. Como el rango de Φ es constante, es suficiente determinar Φ_{*I_n}. Así, para cualquier $B \in T_{I_n}GL(n, \mathbb{C}) = M(n, \mathbb{C})$, sea $\gamma : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$, la curva $\gamma(t) = I_n + tB$ y calculando,

$$\Phi_{*I_n}(B) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\Phi \circ \gamma)(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (I_n + tB)^*(I_n + tB) = B^* + B.$$

Luego, la imagen de Φ_{*I_n} es igual al conjunto $\{A \in M(n, \mathbb{C}) : A^* = A\}$ (de matrices $n \times n$ Hermitianas) y cuya dimensión es n^2. Por consiguiente, $U(n)$ es un subgrupo de Lie incrustado de dimensión $2n^2 - n^2 = n^2$. $\square$

Teorema 3.7. *Supongamos que M y N son variedades suaves y $\pi : M \longrightarrow N$ una aplicación suave. Entonces π es una submersión suave si, solamente si, todo punto de M esta en la imagen de una sección local suave de π.*

Demostracción. Primero, supongamos que π es una submersión suave. Dada $p \in M$ y sea $q = \pi(p) \in N$. Como π tiene rango constante, entonces por el teorema de rango constante, escoja las coordenadas suaves $\Big(U, \varphi = (x^1, ..., x^m)\Big)$ centrada en p y $\Big(V, \psi = (y^1, ..., y^n)\Big)$ centrada en q, tal que π tiene representación coordenada,

$$\hat{\pi}(x^1, ..., x^n, x^{n+1}, ..., x^m) = (x^1, ..., x^n).$$

Si ε es un número positivo suficientemente pequeño entonces el cubo coordenada

$$C_\varepsilon = \{x : |x^i| < \varepsilon,\ i = 1, ..., m\},$$

es una vecindad de $\varphi(p)$, cuyo imagen bajo $\hat{\pi}$ es el cubo

$$C'_\varepsilon = \{y : |y^i| < \varepsilon,\ i = 1, ..., n\}.$$

La aplicación $\hat{\sigma} : C'_\varepsilon \longrightarrow C_\varepsilon$, dada por:

$$\hat{\sigma}(x^1, ..., x^n) = (x^1, ..., x^n, 0, ..., 0),$$

define una sección local suave $\sigma = \varphi^{-1} \circ \hat{\sigma} \circ \psi\Big|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \longrightarrow M$, para π donde $\tilde{V} = \psi^{-1}(C'_\varepsilon)$ y satisface $\sigma(q) = p$.

Recíprocamente, supongamos que cada punto de M está contenido en la imagen de una sección local suave. Dada $p \in M$ y sea $\sigma : U \longrightarrow M$, una sección local suave tal que $\sigma(q) = p$, donde $q = \pi(\sigma(q)) = \pi(p) \in N$. La ecuación $\pi \circ \sigma = Id|_U$, implica que $d\pi_p \circ d\sigma_q = Id|_{T_qN}$. Por consiguiente, $d\pi_p$ es sobreyectiva. $\square$

Proposición 3.8. *Sean M y N variedades suaves, y $\pi : M \longrightarrow N$ una submersión suave sobreyetiva. Para cualquer variedade suave P, la aplicación $F : N \longrightarrow P$ es suave si, y solamente si, $F \circ \pi$ es suave.*

Demostración. Si F es suave entonces, $F \circ \pi$ es suave.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "F\circ\pi"] & \\
N \arrow[r, "F"'] & P
\end{tikzcd}$$

Recíprocamente, supongamos $F \circ \pi$ es suave y sea $q \in N$ arbitrario. Para cualquier $p \in \pi^{-1}(q)$, existe una vecindad U en q y una sección local suave $\sigma : U \longrightarrow M$ de π tal que $\sigma(q) = p$ (por el teorema 3.7). Entonces $\pi \circ \sigma = Id|_U$, implica

$$F|_U = F|_U \circ Id|_U = (F \circ \pi) \circ \sigma,$$

es una composición de aplicaciones suaves. Esto muestra que F, es suave en una vecindad U de q, por consiguiente F es suave. $\square$

Teorema 3.9. *Sean M y N variedades suaves y $F : M \longrightarrow N$ una imersión inyectiva suave. Si F es propia entonces F, es una aplicación cerrada y incrustada suave.*

Demostración. Primero verifiquemos que si F es propia, entonces F es una aplicación cerrada. Dada $A \subset M$, un cerrado arbitrario y sea $q \in \overline{F(A)}$. Como N es precompacto, entonces existe una vecindad U_q de q tal que $\overline{U_q}$ es compacto en N. Por hipótesis, F es propia implica que $F^{-1}(\overline{U_q})$ es compacto. En consecuencia, $F^{-1}(\overline{U_q}) \cap A$ es compacto en M y por otro lado, por continuidad de F, el conjunto $F(F^{-1}(\overline{U_q}) \cap A) = \overline{U_q} \cap F(A)$ es compacto en N. Se sabe que N, es Hausdorff de ahí $\overline{U_q} \cap F(A)$ es cerrado en N. Por consiguiente, $q \in \overline{\overline{U_q} \cap F(A)} = \overline{U_q} \cap F(A) \subset F(A)$, es decir, $q \in F(A)$.

Como F es inyectiva, entonces $F : M \longrightarrow F(M)$ es biyectiva y existe $F^{-1} : F(M) \longrightarrow M$.

Dada $A \subset M$ un conjunto cerrado arbitrario. Entonces $F(A)$, es cerrado en N. Además, $F(A) = F(A) \cap F(M)$ y por tanto, $F(A)$ es cerrado en $F(M)$. Esto muestra que $F : M \longrightarrow F(M)$ es continua, biyectiva y cerrada. Concluimos que $F : M \longrightarrow F(M)$, es un homeomorfismo.

□

3.1.2. Álgebras de Lie

Definición 3.10. Un álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$, es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ real, con una aplicación (corchete de Lie) $[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, $(X,Y) \longmapsto [X,Y]$ que satisface las siguientes propiedades: para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

i) **bilineal**: para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X,Z] + \beta[Y,Z],$$

$$[Z, \alpha X + \beta Y] = \alpha[Z,X] + \beta[Z,Y],$$

ii) **antisimétrica**:

$$[X,Y] \;=\; -[Y,X],$$

iii) **identidad de Jacobi**:

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] \;=\; 0. \tag{3.2}$$

Definición 3.11. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Un subespacio vectorial $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, es llamado un subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, si es cerrado bajo el corchete de Lie.

Definición 3.12. Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie. Una aplicación lineal $T : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$, se dice un homomorfismo de álgebras de Lie si preserva el corchete de Lie: $T([X,Y]) = [TX, TY],\ X, Y \in \mathfrak{g}$.

Un homomorfismo invertible de álgebras de Lie es llamado un isomorfismo de álgebras de Lie. Si existe un isomorfismo de álgebras de Lie, $T : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$, entonces diremos que $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son isomorfos como álgebras de Lie ($\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}$).

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.7. *El espacio $\mathfrak{X}(M)$, de todos los campos vectoriales suaves sobre una variedad suave M, es un álgebra de Lie con el corchete de Lie:*

$$[X,Y]f = XYf - YXf, \;\; X,Y \in \mathfrak{X}(M), \;\; f \in C^\infty(M).$$

En efecto, la bilinealidad para todo $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ y para $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}[\alpha X + \beta Y, Z]f &= \alpha(XZ - ZX)f + \beta(YZ - ZY)f \\ &= \big(\alpha[X,Z] + \beta[Y,Z]\big)f\end{aligned}$$

y de manera similar,

$$[Z, \alpha X + \beta Y]f = \big(\alpha[Z,X] + \beta[Z,Y]\big)f.$$

La antisimétrica es inmediato y la Identidad de Jacobi se verifica:

$$\begin{aligned}\big([[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y]\big)f &= [X,Y]Zf - Z[X,Y]f + [Y,Z]Xf - \\ &\quad X[Y,Z]f + [Z,X]Yf - Y[Z,X]f \\ &= 0.\end{aligned}$$

Campos vectoriales invariantes a la izquierda sobre un grupo de Lie

Sea X un campo vectorial (débil) sobre un grupo de Lie G. Para cualquier $g \in G$, y como la translación a la izquierda $L_g : G \longrightarrow G$, es un difeomorfismo entonces el "pushforward" $(L_g)_* X$, es un campo vectorial bien definida en G.

Definición 3.13. Decimos que el campo vectorial X, es invariante a la izquierda si $(L_g)_* X = X$, para todo $g \in G$; es decir, para cada $h \in G$,

$$(L_g)_{*h}(X_h) = X_{gh}.$$

En otras palabras, un campo vectorial X es invariante a la izquierda, si solamente, si X es L_g-relacionado sobre si mismo, para todo $g \in G$.

Ejemplo 3.8. *Si G es un grupo de Lie entonces el conjunto de campos vectoriales suaves invariantes a la izquierda sobre G, es un subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(G)$ y por lo tanto, un álgebra de Lie. De hecho, $\{X \in \mathfrak{X}(G) : (L_g)_* X = X,$ para todo $g \in G\}$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{X}(G)$ y $(L_g)_*\big([X,Y]\big) = [(L_g)_*X, (L_g)_*Y] = [X,Y]$.*

Observación. *En el ejemplo 3.8. El álgebra de Lie formado por todos los campos vectoriales invariantes a la izquierda sobre el grupo de Lie G, es llamada el álgebra de Lie de G y es denotado por $Lie(G)$.*

Ejemplo 3.9. *El espacio vectorial $M(n,\mathbb{R})$, de matrices reales de $n \times n$, es un álgebra de Lie de dimensión n^2 con el corchete conmutador:*

$$[A,B] = AB - BA.$$

La bilinealidad y antisimétrica son obvias por la definición, y la identidad de Jacobi se obtiene de un simple cálculo. Cuando se considera $M(n,\mathbb{R})$, como álgebra de Lie con corchete conmutador, denotaré por $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

Ejemplo 3.10. *Similarmente, para el espacio vectorial $M(n,\mathbb{C})$, de matrices complejas de $n \times n$, es un álgebra de Lie con corchete conmutador. Dicha álgebra de Lie real de dimensión $2n^2$ es denotada por $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.*

El siguiente teorema es un resultado fundamental, de $Lie(G)$ que tiene dimensión finita y posee la misma dimensión que G:

Teorema 3.14. *Sea G un grupo de Lie. La aplicación $\boldsymbol{t} : Lie(G) \longrightarrow T_{\mathbf{1}}G$, dada por $\boldsymbol{t}(X) = X_{\mathbf{1}}$, es un isomorfismo de espacios vectoriales. Así, $Lie(G)$ es de dimensión finita con dimensión igual a la de G.*

Demostración. Es claro que, $\boldsymbol{t}$ es lineal sobre $\mathbb{R}$: para todo $X, Y \in Lie(G)$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\boldsymbol{t}(\alpha X + \beta Y) = (\alpha X + \beta Y)_{\mathbf{1}} = \alpha X_{\mathbf{1}} + \beta Y_{\mathbf{1}}.$$

Verificaré que $\boldsymbol{t}$ es inyectiva: si $\boldsymbol{t}(X) = X_{\mathbf{1}} = 0$, para algún $X \in Lie(G)$ entonces la invarianza a la izquierda de X implica que $X_g = (L_g)_{*\mathbf{1}}(X_{\mathbf{1}}) = 0$, para todo $g \in G$, o sea, $X = 0$.

Para demostrar que $\boldsymbol{t}$ es sobreyectiva, sea $v \in T_{\mathbf{1}}G$ arbitraria y defina un campo vectorial (débil) v^L sobre G por

$$v^L\Big|_g \quad = \quad (L_g)_{*\mathbf{1}}(v). \tag{3.3}$$

Si existe un campo vectorial invariante a la izquierda sobre G, cuyo valor en la identidad es v, entonces claramente dicho campo vectorial esta dado por la ecuación (3.3).

Primero necesito verificar que v^L es suave. Por la proposición 1.25, es suficiente mostrar que $v^L f$ es suave cuando $f \in C^\infty(G)$. Se escoge una curva suave $\gamma : \langle -\delta, \delta \rangle \longrightarrow G$, tales que $\gamma(0) = \mathbf{1}$ y $\gamma'(0) = v$. Entonces para todo $g \in G$,

$$\begin{aligned}
\big(v^L f\big)(g) &= v^L\Big|_g f \\
&= v(f \circ L_g) \\
&= \gamma'(0)(f \circ L_g) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \circ L_g \circ \gamma)(t).
\end{aligned}$$

Si definimos $\varphi : \langle -\delta, \delta \rangle \times G \longrightarrow \mathbb{R}$, por $\varphi(t, g) = f \circ L_g \circ \gamma(t) = f(g\gamma(t))$, entonces $\big(v^L f\big)(g) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, g)$. Como φ es una composición de suaves, entonces resulta que φ es suave. Por lo que sigue, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, g)$ depende solamente de g y por tanto, concluimos v^L es suave.

Luego, mostremos que v^L es invariante a la izquierda, es decir,

$$(L_h)_{*g}(v^L\Big|_g) = v^L\Big|_{hg}, \text{ para todo } g, h \in G.$$

Usando la definición de v^L y $L_h \circ L_g = L_{hg}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\big(L_h\big)_{*g}(v^L\Big|_g) &= \big(L_h\big)_{*g}\big((L_g)_{*\mathbf{1}}(v)\big) \\
&= \Big(L_{hg}\Big)_{*\mathbf{1}}(v) \\
&= v^L\Big|_{hg}.
\end{aligned}$$

Así, $v^L \in Lie(G)$. Como $L_{\mathbf{1}}$ (translación a la izquierda en la identidad) es la aplicación identidad de G, entonces $\boldsymbol{t}(v^L) = v^L\big|_{\mathbf{1}} = v$, en otras palabras $\boldsymbol{t}$ es sobreyectiva. □

Dado cualquier vector $v \in T_{\mathbf{1}}G$, y denotaré por v^L al campo vectorial suave invariante a la izquierda definida por (3.3).
Vale la pena observar en la prueba anterior, que la suavidad de la definición de $Lie(G)$ es innecesaria; veamos el corolario que sigue:

Corolário 3.15. *Cualquier campo vectorial débil invariante a la izquierda sobre el grupo de Lie es suave.*

Demostración. Sea X un campo vectorial débil invariante a la izquierda sobre el grupo de Lie G y sea $v = X_1$. El hecho que X es invariante a la izquierda, implica que $v^L\big|_g = \big(L_g\big)_{*\mathbf{1}}(X_1) = X_g$, y de lo cual X es suave. □

Ejemplos de álgebras de Lie de algunos grupos de Lie familiares:

Ejemplo 3.11. *Espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$: si consideramos $\mathbb{R}^n$, como un grupo de Lie bajo la adición entonces la traslación a la izquierda por un elemento $b \in \mathbb{R}^n$, es dada por la aplicación afín $L_b(x) = x + b$, cuya diferencial $(L_b)_{*1}$, es representado por la matriz identidad en coordenadas estándares. Así, $X^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \in Lie(\mathbb{R}^n)$, si solamente si, $(L_b)_{*0}\big(X^i(0)\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_0\big) = X^i(b)\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_b$, lo que equivale, X^i es constante. Como*

$$[X, Y] = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big) = 0,$$

para todo $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}, Y = Y^j\frac{\partial}{\partial x^j} \in Lie(\mathbb{R}^n)$, entonces el álgebra de Lie: $Lie(\mathbb{R}^n)$, es abeliano y es isomorfo al mismo $\mathbb{R}^n$, con corchete de Lie trivial. Escribimos, $Lie(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 3.12. *El grupo circulo S^1: sea un carta suave $(U, \varphi = (\theta))$. Luego, para $g = e^{ic}$ se tiene*

$$\big(L_g\big)_{*1}\Big(\frac{\partial}{\partial \theta}\Big|_1\Big) = a\frac{\partial}{\partial \theta}\Big|_g.$$

Sin embargo,

$$a = a\frac{\partial}{\partial\theta}\Big|_g \theta = (L_g)_{*1}(\frac{\partial}{\partial\theta}\Big|_1)\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}\Big|_{\varphi(1)}\theta \circ L_g \circ \varphi^{-1} = \frac{\partial}{\partial\theta}\Big|_{\varphi(1)}\theta + c = 1.$$

Entonces, $\{\frac{\partial}{\partial\theta}\}$ *es base de* $Lie(S^1)$ *y por lo tanto,* $Lie(S^1)$ *es abeliano y* $Lie(S^1) \cong \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.13. *El* n*-toro* $\mathbb{T}^n = S^1 \times ... \times S^1$*: considere un carta suave* $(U, \varphi = (\theta_1, ..., \theta_n))$*. Luego,*

$$(L_g)_{*1}(\frac{\partial}{\partial\theta_k}\Big|_1) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial}{\partial\theta_i}\Big|_g,$$

implica que

$$a_{lk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial}{\partial\theta_i}\Big|_g \theta_l = (L_g)_{*1}(\frac{\partial}{\partial\theta_k}\Big|_1)\theta_l = (\varphi^{-1})_{*\varphi(1)}(\frac{\partial}{\partial\theta_k}\Big|_{\varphi(1)})\theta_l \circ L_g \tag{3.4}$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta_k}\Big|_{\varphi(1)}(\varphi \circ L_g \circ \varphi^{-1})_l = \frac{\partial}{\partial\theta_k}\Big|_{\varphi(1)}(c_l + \theta_l) = \begin{cases} 0 & :k \neq l \\ 1 & :k = l \end{cases} \tag{3.5}$$

donde $g = (e^{ic_1}, ..., e^{ic_n})$*. De la ecuación (3.5), el conjunto* $\{\frac{\partial}{\partial\theta_1}, ..., \frac{\partial}{\partial\theta_n}\}$*, de campos vectoriales coordenados, es una base para* $Lie(\mathbb{T}^n)$*. Como el corchete de Lie de estos campos coordenados es cero, entonces* $Lie(\mathbb{T}^n) \cong \mathbb{R}^n$*.*

El pushforward de campos vectoriales invariantes a la izquierda

Si $F : N \longrightarrow M$, es una aplicación suave de variedades y X un campo vectorial suave sobre N, entonces el "pushforward" F_*X, en general no está bien definida, excepto cuando F, es un difeomorfismo. Si embargo, en caso de grupos de Lie debido a la correspondencia entre campos vectoriales invariantes a la izquierda y vectores tangentes en la identidad, es posible definir el "pushforward" de campos vectoriales invariantes a la izquierda bajo un homomorfismo de grupos de Lie.

Sea $F : H \longrightarrow G$, un homomorfismo de grupos de Lie. Un campo vectorial X, invariante a la izquierda sobre H, es generado por su valor $v = X_{\mathbf{1}} \in T_{\mathbf{1}}H$ en la identidad, de modo que $X = v^L$. Como un homomorfismo de grupos de Lie

$F : H \longrightarrow G$, lleva la identidad de H para la identidad de G, por esta razón su diferencial $F_{*\mathbf{1}}$ en la identidad, es una aplicación lineal de $T_{\mathbf{1}}H$ para $T_{\mathbf{1}}G$. El diagrama

$$\begin{tikzcd} T_{\mathbf{1}}H \arrow[r, "F_{*\mathbf{1}}"] \arrow[d, "\cong"'] & T_{\mathbf{1}}G \arrow[d, "\cong"] & v \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & F_{*\mathbf{1}}v \arrow[d, mapsto] \\ Lie(H) \arrow[r] & Lie(G) & v^L \arrow[r, mapsto] & (F_{*\mathbf{1}}v)^L \end{tikzcd}$$

claramente, muestra la existencia de una aplicación lineal inducida $F_* : Lie(H) \longrightarrow Lie(G)$, sobre campos vectoriales invariantes a la izquierda; así, hay una manera para definir ello.

Definición 3.16. Sea $F : H \longrightarrow G$, un homomorfismo de grupos de Lie. Se define $F_* : Lie(H) \longrightarrow Lie(G)$ por

$$F_*(v^L) = \big(F_{*\mathbf{1}}v\big)^L, \text{ para todo } v \in T_{\mathbf{1}}H.$$

Teorema 3.17 (El homomorfismo inducido de álgebras de Lie). *Sean H y G grupos de Lie, y sean $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{g}$ sus álgebras de Lie. Suponga que $F : H \longrightarrow G$ es un homomorfismo de grupos de Lie. Para cualquier $X \in \mathfrak{h}$, existe un único campo vectorial Y en $\mathfrak{g}$, tal que $F_*X = Y$. La aplicación $F_* : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$, definida por F_*X, es un homomorfismo de álgebras de Lie.*

Demostración. Defina

$$Y = F_{*\mathbf{1}}(X_{\mathbf{1}})^L.$$

Verifiquemos que $F_*X = Y$: como F es un homomorfismo de grupo de Lie, entonces

$$\begin{aligned} F\big(L_h(h')\big) &= F(h)F(h') \\ &= L_{F(h)}\big(F(h')\big) \\ &= L_{F(h)} \circ F(h') \end{aligned}$$

Luego, $F_* \circ L_{h*} = L_{F(h)*} \circ F_*$ implica que

$$\begin{aligned} F_{*h}(X_h) &= F_{*h}\big(L_{h*}(X_{\mathbf{1}})\big) \\ &= L_{F(h)*\mathbf{1}}\big(F_{*\mathbf{1}}(X_{\mathbf{1}})\big) \\ &= L_{F(h)*\mathbf{1}}(Y_{\mathbf{1}}) \\ &= Y_{F(h)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $X \in \mathfrak{h}$, existe $Y \in \mathfrak{g}$ tal que $F_*X = Y$. La unicidad es inmediata y como F_*X denota el único campo vectorial en $\mathfrak{g}$, resulta que

$$F_*([X, X']) = [F_*X, F_*X'].$$

Por consiguiente, F_* es un homomorfismo de álgebra de Lie.

$\square$

El álgebra de Lie de un subgrupo de Lie

Si G es un grupo de Lie y $H \subset G$ es un subgrupo de Lie entonces esperamos tener que el álgebra de Lie de H, es un subálgebra de Lie del álgebra de Lie G. Sin embargo, los elementos de $Lie(H)$ son campos vectoriales definidos en H, y no en G; así, hablando estrictamente los elementos de $Lie(H)$, no son campos vectoriales invariantes a la izquierda en G. No obstante, la siguiente proposición nos da una manera de ver $Lie(H)$ como subálgebra de Lie de $Lie(G)$.

Proposición 3.18. *Suponga que $H \subset G$, es un subgrupo de Lie y $i : H \hookrightarrow G$, es la aplicación inclusión. Entonces existe un subálgebra de Lie $i_*\big(Lie(H)\big)$ en $Lie(G)$, y es isomorfo a $Lie(H)$, donde*

$$i_*\big(Lie(H)\big) = \{X \in Lie(G) : X_{\mathbf{1}} \in T_{\mathbf{1}}H\} \tag{3.6}$$

Demostración. Como la aplicación inclusión $i : H \hookrightarrow G$, es un homomorfismo de grupos de Lie entonces $i_*\big(Lie(H)\big) = \{i_*(X) \in Lie(G) : X \in Lie(H)\}$, es un subálgebra de Lie de $Lie(G)$. De manera como se definió el homomorfismo inducido de álgebras de Lie, $i_*(X)\big|_g = \big(L_g\big)_{*\mathbf{1}}(i_{*\mathbf{1}}(X_{\mathbf{1}}))$. Entonces

$$\begin{aligned} i_*\big(Lie(H)\big) &= \{i_*(X) \in Lie(G) : X \in Lie(H)\} \\ &= \{X \in Lie(G) : X_{\mathbf{1}} \in T_{\mathbf{1}}H\}, \text{ pues } i_{*\mathbf{1}}\big(T_{\mathbf{1}}H\big) = T_{\mathbf{1}}H \subset T_{\mathbf{1}}G. \end{aligned}$$

La inyectividad de $i_{*\mathbf{1}} : T_{\mathbf{1}}H \longrightarrow T_{\mathbf{1}}G$, implica que $i_* : Lie(H) \longrightarrow Lie(G)$, es inyectiva; como $Lie(H) \longrightarrow i_*\big(Lie(H)\big)$ es sobreyectiva (por la definición de $i_*\big(Lie(H)\big)$, resulta que $Lie(H)$ es isomorfo a $i_*\big(Lie(H)\big)$. $\square$

Observación: Usando esta proposición, siempre cuando H es un subgrupo de Lie de G, identificaré $Lie(H)$ como un subálgebra de Lie de $Lie(G)$. Como mencione antes, los elementos de $Lie(H)$ no son en sí campos vectoriales invariantes a la izquierda en G. Pero en la procedente proposición muestro que cualquier elemento de $Lie(H)$ corresponde a un único elemento de $Lie(G)$, determinado por su valor en la identidad y el isomorfismo $Lie(H) \cong i_*\big(Lie(H)\big) \subset G$, así determina $[X,Y]_{\mathfrak{h}} = [i_*X, i_*Y]_{\mathfrak{g}} = [X,Y]_{\mathfrak{g}}$; por eso al considerar $Lie(H)$, como un subálgebra de $Lie(G)$, no se comete ningún error.

Ejemplos de subálgebras de Lie:

Ejemplo 3.14. *El grupo ortogonal $O(n)$, es un subgrupo de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$ (ejemplo 3.5). Recuerde $O(n) = \Phi^{-1}(I_n)$ con I_n valor regular, implica que $T_{I_n}O(n) = Ker\Phi_{*I_n}$. Es decir, $T_{I_n}O(n) = \{B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) : B + B^T = 0\}$. Por lo tanto,*

$$Lie(O(n)) \cong \mathfrak{o}(n) = \{B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) : B + B^T = 0\}.$$

Ejemplo 3.15. *El subgrupo lineal especial $SL(n,\mathbb{R})$, es un subgrupo de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$ (ejemplo 3.6). Entonces*

$$\begin{aligned} T_{I_n}SL(n,\mathbb{R}) &= Ker\Phi_{*I_n} \\ &= \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) : tr(A) = 0\}. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$Lie(SL(n,\mathbb{R})) \cong \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) : tr(A) = 0\}.$$

Ejemplo 3.16. *El grupo de matrices unitarios $U(n)$, es un subgrupo de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$, Luego,*

$$\begin{aligned} T_{I_n}U(n) &= Ker\Phi_{*I_n} \\ &= \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) : A + A^* = 0\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Lie(U(n)) \cong \mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) : A + A^* = 0\}$.

Definición 3.19. Un subgrupo de 1-parámetro de G, es un homomorfismo de grupos de Lie $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow G$, con $\mathbb{R}$ como un grupo de Lie bajo la adicción.
Dada $X \in Lie(G)$, el subgrupo de 1-parámetro determinado por X, es llamado el *subgrupo de 1-parámetro generado* por X.

A continuación defino la aplicación exponencial:

Definición 3.20. Dada un grupo de Lie G, con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se define una aplicación $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$, llamado la aplicación exponencial de G como: para cada $X \in \mathfrak{g}$,

$$\exp(X) = \gamma(1),$$

donde γ es el subgrupo de 1-parámetro generado por X, o equivalentemente la curva integral de X, comenzando por $\mathbf{1}$.

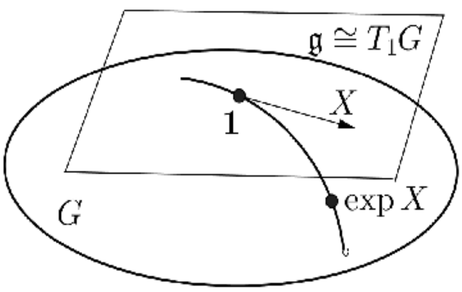

Figura 3.1: La aplicación exponencial

Teorema 3.21. *Sea G un grupo de Lie. Los subgrupos de 1-parametros de G son precisamente las curvas integrales maximales del campo vectorial invariante a la izquierda, comenzando en la identidad $\mathbf{1}$.*

Demostración. Ver [7].

$\square$

Propiedades de la aplicación exponencial.

Proposición 3.22. *Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie de G. Entonces:*

a) *La aplicación exponencial $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$, es una aplicación suave.*

b) *Para todo $X \in \mathfrak{g}$ y $t, s \in \mathbb{R}$, $\exp\big((s+t)X\big) = \exp(sX)\exp(tX)$.*

c) *Para todo $X \in \mathfrak{g}$, $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$.*

d) *Para todo $X \in \mathfrak{g}$ y $n \in \mathbb{Z}$, $(\exp X)^n = \exp(nX)$.*

e) *La diferencial $d\exp_0 : T_0\mathfrak{g} \longrightarrow T_{\mathbf{1}}G$, es la aplicación identidad, bajo las identificaciones $T_0\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}$ y $T_{\mathbf{1}}G \cong \mathfrak{g}$.*

f) *La aplicación exponencial $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$, es un difeomorfismo en una vecindad en el origen $0 \in \mathfrak{g}$, para una vecindad de $\mathbf{1}$.*

g) *Si H es un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$,y $\Phi : G \longrightarrow H$, es un homomorfismo de grupos de Lie, entonces el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\Phi_*} & \mathfrak{h} \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{\Phi} & H \end{array}$$

h) *El flujo ψ del campo vectorial X, invariante a la izquierda en G es dada por $\psi_t = R_{\exp(tX)}$.*

Demostración. a) Para cualquier $X \in \mathfrak{g}$, denota el flujo de X por ψ_X. Defina un campo vectorial $\tilde{X}$, en la variedad producto $G \times \mathfrak{g}$ por

$$\tilde{X}_{(g,X)} = (X_g, 0) \in T_gG \oplus T_X\mathfrak{g} \cong T_{(g,X)}(G \times \mathfrak{g}).$$

Mostremos que $\tilde{X}$, es suave: escogemos cualquier base $\{X_1, ..., X_k\}$ para $\mathfrak{g}$ y sea $(\mathfrak{g}, \varphi = (x^i))$, la carta global suave de $\mathfrak{g}$, definida por $(x^j X_j) \longmapsto x^i$. Sea $(U, W = (w^i))$ carta local suave de G. Si $f \in C^\infty(G \times \mathfrak{g})$ arbitrario, entonces $\tilde{X}f$, es escrito localmente:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}f \circ (W \times \varphi)^{-1}(w^i, x^i) &= \tilde{X}f(W^{-1}(w^i)\varphi^{-1}(x^i)) \\
&= df_{(W^{-1}(w^i),\varphi^{-1}(x^i))}\left(\tilde{X}_{(W^{-1}(w^i),\varphi^{-1}(x^i))}\right) \\
&= df_{(W^{-1}(w^i),\varphi^{-1}(x^i))}\left(x^j X_{jW^{-1}(w^i)}, 0\right) \\
&= x^j df_{(W^{-1}(w^i),\varphi^{-1}(x^i))}\left(X_{jW^{-1}(w^i)}, 0\right) \\
&= x^j X_{j(W^{-1}(w^i),\varphi^{-1}(x^i))} f \\
&= x^j X_j f\left((W \times \varphi)^{-1}(w^i, x^i)\right)
\end{aligned}$$

como X_j, son suaves, y usando la proposición 1.25, concluimos que $\tilde{X}$ es suave.

El flujo Ψ dada

$$\Psi_t(g, X) = (\psi_X(t, g), X),$$

es un flujo de $\tilde{X}$. De hecho,

$$\begin{aligned}
\Psi^{(g,X)\prime}(t_0)f &= d\Psi^{(g,X)}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\right)f \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} f \circ \Psi^{(g,X)}(t) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} f(\psi_X(t, g), X) \\
&= df_{(\psi_X(t_0,g),X)}\left(X_{\psi_X(t_0,g)}, 0\right) \\
&= \tilde{X}_{(\psi_X(t_0,g),X)} f \\
&= \tilde{X}_{\Psi^{(g,X)}(t_0)} f
\end{aligned}$$

Por el teorema fundamental para flujos, $\Psi : \mathbb{R} \times (G \times \mathfrak{g}) \longrightarrow G \times \mathfrak{g}$, es suave. Luego, observe la composición de aplicaciones suave

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{i_1} G \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\Psi_1} G \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\Pr_G} G$$

y $\big(\mathrm{Pr}_G \circ \Psi_1 \circ i_{\mathbf{1}}\big)(X) = \big(Pr_G \circ \Psi_1\big)(\mathbf{1}, X) = \mathrm{Pr}_G(\psi_X(1, \mathbf{1}), X) = \psi_X^{(\mathbf{1})}(1) = \exp(X)$. Por lo tanto, exp es suave.

Para demostrar los demás, primero probemos la siguiente afirmación:

Afirmación: Sea G un grupo de Lie. Para cualquier $X \in Lie(G)$, $\gamma(s) = \exp(sX)$ es un subgrupo de un 1-parámetro de G, generado por X.

En efecto, sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow G$, el subgrupo de 1-parámetro generado por X, o sea, es la curva integral de X comenzando en $\mathbf{1}$. Para cualquier fijo $s \in \mathbb{R}$, reescalando por $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(st)$. Mostremos que $\tilde{\gamma}$ es curva integral de sX, comenzando en $\mathbf{1}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}'(t)f &= d\tilde{\gamma}(t)(\frac{d}{dt})f \\
&= \frac{d}{dt}(f \circ \tilde{\gamma})(t) \\
&= s\frac{d}{d(st)}(f \circ \gamma)(st) \\
&= s\gamma'(st)f \\
&= sX_{\gamma(st)}f.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\exp(sX) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma(s)$ es un subgrupo de 1-parámetro.

b) Para $s, t \in \mathbb{R}$,

$$\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t) = \exp(sX)\exp(tX).$$

c) Usando a), para $s = -1$ y $t = 1$ tenemos

$$\mathbf{1} = \exp(-X)\exp(X).$$

d) Es inmediato.

Para probar e), sea $X \in \mathfrak{g}$ arbitrario y sea $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{g}$, la curva $\sigma(t) = tX$. Entonces $\sigma'(0) = X$ y

$$\begin{aligned}
d\exp_0(X) &= d\exp_0(\sigma'(0)) \\
&= \big(\exp \circ \sigma\big)'(0) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tX) \\
&= X.
\end{aligned}$$

f) Por la parte e), $d\exp_0$ es un isomorfismo entonces por el teorema de la función inversa 1.31, existen vecindades U en $0 \in \mathfrak{g}$ y $\exp(U)$ en $\mathbf{1}$ tal que $\exp|_U : U \longrightarrow \exp(U)$, es un difeomorfismo.

g) Sea $\Phi : G \longrightarrow H$, un homomorfismo de grupos de Lie. Queremos mostrar que: $\exp(\Phi_*(X)) = \Phi(\exp(X))$, para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Si $\sigma(t) = \Phi(\exp(tX))$, es una curva en H entonces $\sigma = \Phi \circ \rho$ es compuesta de homomorfismos de grupos de Lie, donde $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow G$, $\rho(t) = \exp(tX)$ y cuyo vector velocidad satisface

$$\begin{aligned} \sigma'(0) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi(\exp(tX)) \\ &= \Phi_{*\mathbf{1}}(X_{\mathbf{1}}) \\ &= \big(\Phi_* X\big)_{\mathbf{1}}. \end{aligned}$$

Así, $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow G$, $\sigma(t) = \Phi(\exp(tX))$ es un subgrupo de 1-párametro de G, generado por $\Phi_* X$. Por definición de la exponencial, resulta que

$$\exp(\Phi_* X) = \sigma(1) = \Phi(\exp(X)).$$

Finalmente, para todo $g \in G$, la traslación a la izquierda L_g, toma curvas integrales de X para curvas integrales de X. Así, la aplicación $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow G$ dada por $\rho(t) = L_g(\exp(tX))$, es una curva integral comenzando en g, es decir, $\psi_X^{(g)}(t) = \rho(t)$, luego obtenemos

$$\psi_X^{(g)}(t) = g\exp(tX) = R_{\exp(tX)}(g).$$

□

Teorema 3.23. *Cualquier subgrupo de Lie H, de un grupo de Lie G, es una subvariedad incrustada débil.*

Demostración. Ver, la página 506 en [7]. □

La aplicación exponencial tiene la siguiente caracterización para subálgebra de Lie de un subgrupo de Lie.

Proposición 3.24. *Sea G un grupo de Lie y sea $H \subset G$ un subgrupo de Lie. Identifique $i_*(Lie(H)) \cong Lie(H)$ como subálgebra de Lie de $Lie(G)$, entonces la aplicación exponencial H, es la restricción de la aplicación exponencial de G, al $Lie(H)$ y*

$$Lie(H) \quad = \quad \{X \in Lie(G) : \exp(tX) \in H, \ \textit{para todo}\ t \in \mathbb{R}\}. \tag{3.7}$$

Demostración. Sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow H$ un subgrupo de 1-parámetro. Entonces $i \circ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow G$ define subgrupo de 1-parámetro en G. Para todo $X \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$,

$$\exp_G(X) = i \circ \gamma(1) = \exp_H(X) \Longrightarrow \exp_H = \exp_G \Big|_{\mathfrak{h}}$$

Establecemos la siguiente equivalencia para todo $X \in Lie(G)$:

$$\exp(tX) \in H, \ \forall\, t \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow X_{\mathbf{1}} \in T_{\mathbf{1}}H$$

($\Longleftarrow$) Supongamos que $X_{\mathbf{1}} \in T_{\mathbf{1}}H$. Sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow G$, $\gamma(t) = \exp(tX)$, el subgrupo de 1-parámetro de G con $\gamma'(0) = X_{\mathbf{1}}$ y considere un subgrupo de 1-parámetro $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow H$, con $\tilde{\gamma}'(0) = X_{\mathbf{1}} \in T_{\mathbf{1}}H$. De la composición de $\tilde{\gamma}$ con $i : H \hookrightarrow G$, tenemos $i \circ \tilde{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow G$, un subgrupo de un 1-parámetro en G, que satisface $(i \circ \tilde{\gamma})'(0) = \tilde{\gamma}'(0) = \gamma'(0)$, y entonces por la unicidad de curvas integrales $\gamma = i \circ \tilde{\gamma}$. Por consiguiente, $\exp(tX) \in H$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

($\Longrightarrow$) Supongamos que $\exp(tX) \in H$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Como H, es una subvariedad incrustada débil en G (por el teorema 3.23), entonces la curva $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow H$, $\gamma(t) = \exp(tX)$ es una curva suave en H y $\gamma'(0) = X_{\mathbf{1}} \in T_{\mathbf{1}}H$. □

3.1.3. Acciones adjuntas y coadjuntas

Dada una acción suave a la izquierda de un grupo de Lie G en una variedad suave M (denotando por $\psi : G \times M \longrightarrow M$, $\psi(g,p) = g.p$), con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Para cada $\xi \in \mathfrak{g} = Lie(G)$, se define un flujo global suave en M:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times M \quad &\longrightarrow \quad M \\ (t,p) \quad &\longmapsto \quad \exp(t\xi).p, \end{aligned}$$

debido a que satisface $\exp(0\xi).p = p$ y $\exp((t+s)\xi).p = \exp(t\xi)\exp(s\xi).p$.

Definición 3.25. Sea G un grupo de Lie y M una variedad suave. Si $\psi : G \times M \longrightarrow M$, es una acción suave a la izquierda, se define el *generador infinitesimal* de ψ, como una aplicación $\hat{\psi} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, dada por $\hat{\psi}(\xi) = \xi^M$, donde

$$\xi^M(p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(t\xi).p = \psi^{(p)}_{*\mathbf{1}}(\xi), \tag{3.8}$$

y $\psi^{(p)} : G \longrightarrow M$, $\psi^{(p)}(g) = g.p$ es la aplicación órbita.

La asignación $p \in M \longmapsto \xi^M(p)$, define un campo vectorial ξ^M en M.

Teorema 3.26. *Sea $\rho : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$, $\rho(t,p) = exp(t\xi).p$ el flujo suave sobre una variedad suave M. El generador infinitesimal de ρ, define ξ^M un campo vectorial suave en M y cada curva $\rho^{(p)} : \mathbb{R} \longrightarrow M$, es una curva integral de ξ^M.*

Demostración. Para mostrar que $V = \xi^M$ es suave, basta demostrar que Vf es suave para cualquier función $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, suave definida en un abierto $U \subset M$.
Para todo $f \in C^\infty(U)$ y para cualquier $p \in U$:

$$V_pf = \rho^{(p)'}(0)f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f \circ \rho^{(p)}(t) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(0,p)} f(\rho(t,p)).$$

Como $f(\rho(t,p))$ es suave entonces $\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(0,p)} f(\rho(t,p))$ es suave. Así, la suavidad de Vf depende del punto p, por lo tanto, V suave.
A continuación deseamos demostrar que $\rho^{(p)}(t) = \exp(t\xi).p$, es una curva integral de V, es decir, $\rho^{(p)'}(t) = V_{\rho^{(p)}(t)}$, para todo $p \in M$ y para cualquier $t \in \mathbb{R}$.
En efecto, sea $t_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario y sea $q = \rho^{(p)}(t_0) = \rho_{t_0}(p)$. Tenemos que verificar $\rho^{(p)'}(t_0) = V_q$. Para todo $t \in \mathbb{R}$, por la definición grupo se tiene:

$$\rho^{(q)}(t) = \rho_t(\rho_{t_0}(p)) = \rho^{(p)}(t + t_0).$$

Por consiguiente, para cualquier función real suave f definida en una vecindad de q, se obtiene

$$\begin{aligned} V_qf &= \rho^{(q)'}(0)f \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\rho^{(q)}(t)) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\rho^{(p)}(t + t_0)) \\ &= \rho^{(p)'}(t_0)f. \end{aligned}$$

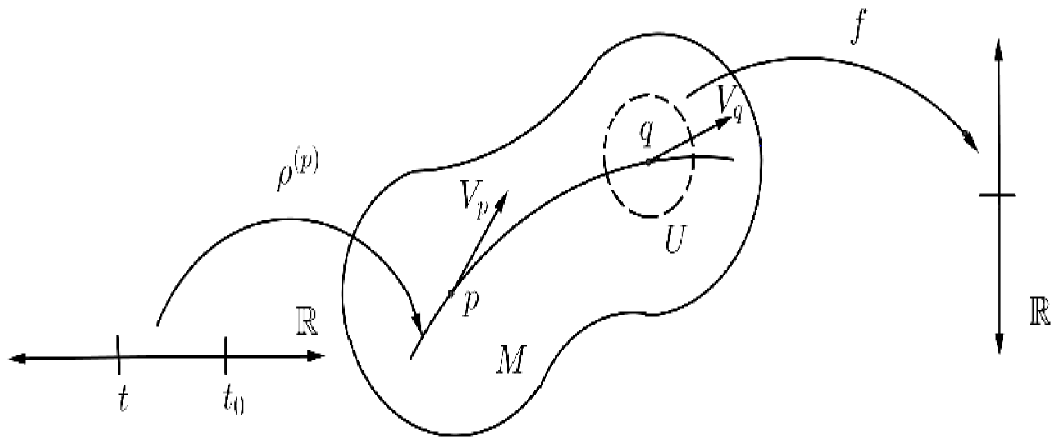

Figura 3.2: curva integral

$\square$

Definición 3.27. Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y para cada $g \in G$, sea $C_g : G \longrightarrow G$, $h \longmapsto ghg^{-1}$ la acción conjugada. Entonces la aplicación

$$Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g}),\ g \longmapsto Ad_g = (C_g)_{*1}$$

es llamada la *representación adjunta* de G.

Explicitamente, define la *acción adjunta* de G en $\mathfrak{g}$:

$$\begin{array}{rlll} \psi & : G \times \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ & (g, \xi) & \longmapsto & \psi(g, \xi) \quad = Ad_g \xi = \left(R_{g^{-1}} \circ L_g\right)_{*1} \xi. \end{array}$$

Definición 3.28. Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Sea $Ad_g^* : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, el dual de Ad_g y es definida por:

$$\langle Ad_g^* \eta, \xi \rangle = \langle \eta, Ad_{g^{-1}} \xi \rangle,$$

para $\eta \in \mathfrak{g}^*$ y $\xi \in \mathfrak{g}$. Entonces la aplicación

$$\begin{array}{rlll} \psi & : G \times \mathfrak{g}^* & \longrightarrow & \mathfrak{g}^* \\ & (g, \eta) & \longmapsto & \psi(g, \eta) \quad = Ad_g^* \eta, \end{array}$$

es la *acción coadjunta* de G sobre $\mathfrak{g}^*$. La correspondiente *representación coadjunta* de G sobre $\mathfrak{g}^*$, es denotado por

$$\begin{array}{rcl} Ad^* \ : G & \longrightarrow & GL(\mathfrak{g}^*) \\ g & \longmapsto & Ad^*_g \quad = \left(R_{g^{-1}} \circ L_g\right)^*_{*1}. \end{array}$$

Ejemplo 3.17. *Para $SO(3) = \{A \in O(3) : Det(A) = 1\}$, la acción conjugada es dada por $C_A(B) = ABA^{-1}$. Luego, diferenciando C_A en I se tiene $Ad_A(\hat{v}) = (C_A)_{*I}(\hat{v}) = A\hat{v}A^{-1}$. Sin embargo, para el álgebra de Lie $Lie(SO(3)) \cong \mathfrak{o}(3) = \{A : A + A^T = 0\}$ con corchete $[A, B] = AB - BA$, existe una aplicación lineal $\hat{.} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathfrak{so}(3)$ dada por*

$$v = (a, b, c) \longmapsto \hat{v} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

es un isomorfismo. Como $\mathbb{R}^3$, es un álgebra de Lie con producto vectorial entonces se verifica $\hat{.}(v \times w) = [\hat{v}, \hat{w}]$ y por lo tanto, $\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$. Usando $\hat{v}(w) = v \times w$, luego

$$\begin{aligned} \left(Ad_A\hat{v}\right)(w) &= A\hat{v}A^{-1}(w) \\ &= A\hat{v}(A^{-1}w) \\ &= A(v \times A^{-1}w) \\ &= Av \times w. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Ad_A\hat{v} = \hat{Av}$. Identificando, $\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$ obtenemos $Ad_A v = Av$.

Definición 3.29. Dada $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. La aplicación

$$\begin{array}{rcl} ad \ : \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X & \longmapsto & ad_X \quad : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \end{array}$$

define una *representación adjunta* de $\mathfrak{g}$.

Usando la aplicación exponencial, demostraré que las representaciones Ad y ad están idénticamente relacionadas.

Teorema 3.30. *Sea G un grupo de Lie, con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y sea $Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ la representación adjunta de un grupo de Lie G. Entonces la representación de álgebra de Lie inducida $Ad_{*\mathbf{1}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, es dada por*

$$(Ad)_{*\mathbf{1}} = ad.$$

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{g}$. Por definición de la diferencial de Ad tenemos $d(Ad)_{\mathbf{1}} : \mathfrak{g} \cong T_{\mathbf{1}}G \longrightarrow T_I(GL(\mathfrak{g}))$. Así, para $X \in \mathfrak{g} = T_{\mathbf{1}}(G)$ se tiene $Ad_{*\mathbf{1}}X \in T_I(GL(\mathfrak{g})) \cong \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, es decir, $Ad_{*\mathbf{1}}X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Como $t \longmapsto \exp(tX)$ es una curva integral en G pasando por $\mathbf{1}$, con vector velocidad $X_{\mathbf{1}}$ en $t = 0$. Entonces calculando la acción de $Ad_{*\mathbf{1}}X$ sobre un elemento $Y \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} \big(Ad_{*\mathbf{1}}X\big)(Y) &= \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{\exp(tX)}\right)(Y) && (3.9)\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{\exp(tX)}Y && (3.10)\end{aligned}$$

Como un elemento de $\mathfrak{g}$, se observa que $Ad_{\exp(tX)}Y$, es un campo vectorial invariante a la izquierda en G y así, $Ad_{\exp(tX)}Y$ está determinado en la identidad $\mathbf{1}$.
Usando el hecho que

$$Ad_g = (C_g)_{*\mathbf{1}} = \big(R_{g^{-1}} \circ L_g\big)_{*\mathbf{1}},$$

y su valor en $\mathbf{1} \in G$ es dada por

$$\Big(Ad_{\exp(tX)}Y\Big)_{\mathbf{1}} = \big(dR_{\exp(-tX)} \circ dL_{\exp(tX)}(Y)\big)_{\mathbf{1}} = dR_{\exp(-tX)}(Y_{\exp(tX)}). \qquad (3.11)$$

Por la proposición 3.22, el flujo de X es dada por $\psi_t(g) = R_{\exp(tX)}(g)$. Por consiguiente, la ecuación (3.11) implica

$$\begin{aligned} \Big(Ad_{\exp(tX)}Y\Big)_{\mathbf{1}} &= d\big(R_{\exp(-tX)}\big)(Y_{\exp(tX)})\\ &= \Big(\psi_{-t}\Big)_{*\psi_t(\mathbf{1})}(Y_{\psi_t(\mathbf{1})}).\end{aligned}$$

Tomando la derivada con respecto a t en $t = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \Big(Ad_*X(Y)\Big)_{\mathbf{1}} &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big(Ad_{\exp(tX)}Y\big)_{\mathbf{1}}\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big(\psi_{-t}\big)_{*\psi_t(\mathbf{1})}(Y_{\psi_t(\mathbf{1})})\\ &= \big(\mathcal{L}_XY\big)_{\mathbf{1}}\\ &= [X,Y]_{\mathbf{1}}.\end{aligned}$$

Como $\big(Ad_* X\big)Y$ es determinada en la identidad $\mathbf{1}$, esto completa la demostración. □

Corolário 3.31. *Para $\xi \in \mathfrak{g}$ e $g \in G$ tenemos:*

$$Ad_{\exp(\xi)} = \exp(ad_\xi)$$

Demostración. Se obtiene del teorema 3.30. □

Proposición 3.32. *Sea ψ una acción(izquierda) suave de un grupo de Lie G en M.*

a) Para cualquier $g \in G$ y $\xi \in \mathfrak{g}$ se tiene

$$\big(\psi_g\big)_{*g^{-1}.p}(\xi^M(g^{-1}.p)) = (Ad_g\xi)^M(p),\ p \in M.$$

b) La aplicación $\hat{\psi} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, dada por $\xi \longmapsto \xi^M$ es un anti-homomorfismo de álgebras de Lie.

Demostración. a)

$$\begin{aligned}
(Ad_g\xi)^M(p) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tAd_g\xi).p \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g\exp(t\xi)g^{-1}.p, \text{ por proposición 3.22, (g)} \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi_g\big(\exp(t\xi).(g^{-1}.p)\big) \\
&= \big(\psi_g\big)_{*g^{-1}.p}(\xi^M(g^{-1}.p)).
\end{aligned}$$

b) Usando el resultado anterior, para $g = \exp(t\eta)$ obtenemos

$$\big(\psi_{\exp(t\eta)}\big)_{*\exp(-t\eta).p}\big(\xi^M(\exp(-t\eta).p)\big) = \big(Ad_{\exp(t\eta)}\xi\big)^M(p).$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
-[\eta^M,\xi^M](p) &= \Big(\mathcal{L}_{-\eta^M}\xi^M\Big)(p) \\
&= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{d(\rho_{-t})_{\rho_t(p)}\big(\xi^M(\rho_t(p))\big)-\xi^M(p)}{t}, \ \ \rho_t(p)=\exp(-t\eta).p \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\big(\psi_{\exp(t\eta)}\big)_{*\exp(-t\eta).p}\big(\xi^M(\exp(-t\eta).p)\big) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big(Ad_{\exp(t\eta)}\xi\big)^M(p) \\
&= \big(ad_\eta\xi\big)^M(p) \\
&= [\eta,\xi]^M(p) \\
&= \hat{\psi}([\eta,\xi])(p).
\end{aligned}
$$

□

Proposición 3.33. *El espacio tangente a $G.p$, en p es definida por*

$$T_p(G.p)=\{\xi^M(p):\xi\in\mathfrak{g}\},$$

donde $G.p$, tiene estructura de variedad suave y $F:G/G_p\longrightarrow G.p$ un difeomorfismo.

Demostración. Observe el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\psi^{(p)}"] & \\
G/G_p \arrow[r, "F"'] & G.p
\end{tikzcd}
$$

entonces $dF_{G_p}\Big(T_{G_p}(G/G_p)\Big)=T_p(G.p)$. Luego,

$$
\begin{aligned}
T_p(G.p) &= \{dF_{G_p}(V):V\in T_{G_p}\Big(G/G_p\Big)\} \\
&= \{dF_{G_p}(\pi_{*1}(\xi)):\xi\in\mathfrak{g}\} \\
&= \{\Big(\psi^{(p)}\Big)_{*1}(\xi):\ \xi\in\mathfrak{g}\} \\
&= \{\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(t\xi).p:\xi\in\mathfrak{g}\}, \ \text{por definición.} \\
&= \{\xi^M(p):\xi\in\mathfrak{g}\}.
\end{aligned}
$$

□

3.1.4. Teorema de subgrupo cerrado

En esta subsección, usando la aplicación exponencial se prueba el siguiente resultado: si un subgrupo de un grupo de Lie, es topologicamente un conjunto cerrado entonces, es un subgrupo de Lie.

Antes se tiene un simple resultado:

Proposición 3.34. *Sea G un grupo de Lie y sea $\mathfrak{g}$, su álgebra de Lie. Para cualquier $X, Y \in \mathfrak{g}$, existe una aplicación suave $Z : \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle \longrightarrow \mathfrak{g}$, para algún $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp(t(X+Y) + t^2 Z(t)), \ \textit{para todo } t \in \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle. \tag{3.12}$$

Demostración. Como la aplicación exponencial es un difeomorfismo en alguna vecindad del origen en $\mathfrak{g}$, entonces existe algún $\varepsilon > 0$ tal que la aplicación $\varphi : \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle \longrightarrow \mathfrak{g}$, definida por

$$\varphi(t) = \exp^{-1}\big(\exp(tX)\exp(tY)\big),$$

es suave. Es obvio que $\varphi(0) = 0$ y $\exp(tX)\exp(tY) = \exp(\varphi(t))$.

Observe que φ, es la composición:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{e_X \times e_Y} G \times G \xrightarrow{m} G \xrightarrow{\exp^{-1}} \mathfrak{g}$$

donde, $e_X(t) = \exp(tX)$ y $e_Y(t) = \exp(tY)$. El resultado, $m_{*(\mathbf{1},\mathbf{1})}(X,Y) = X + Y$, para $X, Y \in T_{\mathbf{1}}G$, implica que

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= d(\exp^{-1})_{\mathbf{1}}\big(e'_X(0) + e'_Y(0)\big) \\ &= \big(d(\exp)_0\big)^{-1}\big(e'_X(0) + e'_Y(0)\big) \\ &= X + Y. \end{aligned}$$

Por tanto, por el teorema de Taylor se tiene

$$\varphi(t) = t(X+Y) + t^2\big(Z(t)\big),$$

para alguna aplicación suave Z.

□

Corolário 3.35. *Sea G un grupo de Lie y sea $\mathfrak{g}$, su álgebra de Lie. Para cualquier $X, Y \in \mathfrak{g}$,*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\Big(\exp\big(\frac{t}{n}X\big)\exp\big(\frac{t}{n}Y\big)\Big)^n \quad = \quad \exp\big(t(X+Y)\big). \tag{3.13}$$

Demostración. La proposición 3.34, implica que para cualquier $t \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande,

$$\exp\big(\frac{t}{n}X\big)\exp\big(\frac{t}{n}Y\big) = \exp\big(\frac{t}{n}(X+Y) + \frac{t^2}{n^2}Z(\frac{t}{n})\big)$$

y entonces por la proposición 3.22 c),

$$\begin{aligned}\Big(\exp\big(\frac{t}{n}X\big)\exp\big(\frac{t}{n}Y\big)\Big)^n &= \Big(\exp\big(\frac{t}{n}(X+Y) + \frac{t^2}{n^2}Z(\frac{t}{n})\big)\Big)^n \\ &= \exp\big(t(X+Y) + \frac{t^2}{n}Z(\frac{t}{n})\big).\end{aligned}$$

Fijando t y tomando el limite ambos lados cuando $n \longrightarrow \infty$, obtenemos

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\Big(\exp\big(\frac{t}{n}X\big)\exp\big(\frac{t}{n}Y\big)\Big)^n = \exp\big(t(X+Y)\big).$$

□

Teorema 3.36 (Teorema de subgrupo cerrado). *Supongamos que G, es un grupo de Lie y $H \subset G$ es subconjunto cerrado con estructura de subgrupo en G. Entonces H, es un subgrupo de Lie incrustado.*

Demostración. Usando la proposición 3.4, es suficiente demostrar que H, es una subvariedad incrustada de G.

Sea $\mathfrak{g} = Lie(G)$ y defina un subconjunto $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ por:

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} : \exp(tX) \in H,\ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Necesitamos, demostrar $\mathfrak{h}$, es un subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$:

si $X \in \mathfrak{h}$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces $tX \in \mathfrak{h}$ (por definición).

Suponga que $X, Y \in \mathfrak{h}$ y sea $t \in \mathbb{R}$, arbitrario. Entonces $\exp\big(\frac{t}{n}X\big)$, $\exp\big(\frac{t}{n}Y\big) \in H$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y como H, es un subgrupo cerrado en G y el corolario 3.35, implica que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \Big(\exp\big(\frac{t}{n}X\big) \exp\big(\frac{t}{n}Y\big)\Big)^n = \exp(t(X+Y)) \in H.$$

Así, $X + Y \in \mathfrak{h}$, en consecuencia $\mathfrak{h}$, es un subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$.

Afirmación: existe una vecindad U en $0 \in \mathfrak{g}$, tales que $\exp\Big|_U$ es un difeomorfismo y

$$\exp(U) \cap H \quad = \quad \exp(U \cap \mathfrak{h}). \tag{3.14}$$

Si $U \subset \mathfrak{g}$, es cualquier vecindad en la cual exp es difeomorfismo, entonces $\exp(U \cap \mathfrak{h}) \subset \big(\exp U\big) \cap H$ (por definición de $\mathfrak{h}$).

Luego, verifico la existencia de U, con la propiedad $\exp(U) \cap H \subset \exp(U \cap \mathfrak{h})$: supongamos lo contrario, $\exp(U) \cap H \not\subset \exp(U \cap \mathfrak{h})$, para toda vecindad U en $0 \in \mathfrak{g}$. Escoja un subespacio vectorial $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$, que es el complemento a $\mathfrak{h}$, o sea, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{b}$. Defina la aplicación $\Phi : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{b} \longrightarrow G$, por $\Phi(X, Y) = \exp(X) \exp(Y)$, y cuya derivada,

$$\begin{aligned} \Phi_{*(0,0)}(U, V) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi(tU, tV) \\ &= U + V. \end{aligned}$$

Entonces, $\Phi_{*(0,0)}$ es un isomorfismo. Por el teorema de la función inversa, existe una vecindad $\tilde{U}_0$ en $(0,0) \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{b}$ tal que, $\Phi\Big|_{\tilde{U}_0} : \tilde{U}_0 \longrightarrow \Phi(\tilde{U}_0)$ es un difeomorfismo. Por otro lado, existe una vecindad U_0 en $0 \in \mathfrak{g}$ tal que $\exp\Big|_{U_0} : U_0 \longrightarrow \exp(U_0)$, es un difeomorfismo.

Sea $\{U_i\}$ una base numerable en $0 \in \mathfrak{g}$, con $U_i \subset U_0$, para cada i. Si escogemos $V_i = \exp(U_i)$ y $\tilde{U}_i = \Phi^{-1}(V_i)$, con $\tilde{U}_i \subset \tilde{U}_0$, para cada i entonces $\{V_i\}$ y $\{\tilde{U}_i\}$ son bases vecindades para G en $\mathbf{1}$ y para $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{b}$ en $(0,0)$, respectivamente. La suposición implica que, para todo i, existe $h_i \in \exp(U_i) \cap H$ tal que, $h_i \notin \exp(U_i \cap \mathfrak{h})$. Esto significa, que $h_i = \exp Z_i$ para algún $Z_i \in U_i$. Como $\exp(U_i) = \Phi(\tilde{U}_i)$, entonces

$$h_i \quad = \quad \exp(X_i) \exp(Y_i) \ \text{ para algún } (X_i, Y_i) \in \tilde{U}_i. \tag{3.15}$$

Tenemos dos casos:

Caso 1: si $Y_i = 0$, entonces $h_i = \exp(Z_i) = \exp(X_i) \in \exp(\mathfrak{h})$. Pero, exp es inyectiva en U_0, esto implica que $X_i = Z_i \in U_i \cap \mathfrak{h}$, o sea, $h_i = \exp(X_i) \in \exp(U_i \cap \mathfrak{h})$ (lo cual contradice a $h_i \notin \exp(U_i \cap \mathfrak{h})$).

Caso 2: si $Y_i \neq 0$, y como $\{U_i\}$ es una base vecindad en $(0,0)$, entonces $Y_i \longrightarrow 0$, cuando $i \longrightarrow \infty$. Observe que, $\exp(X_i) \in H$ (por definición de $\mathfrak{h}$), implica que $\exp(Y_i) = \big(\exp(X_i)\big)^{-1}.h_i \in H$.

Considere un producto interno en $\mathfrak{b}$ y sea $|\cdot|$, denota la norma asociado a ese producto interno. Si $c_i = |Y_i|$, entonces $c_i \longrightarrow 0$, cuando $i \longrightarrow \infty$. La secuencia $\big(c_i^{-1}Y_i\big)$, satisface $|c_i^{-1}Y_i| = 1$, entonces $c_i^{-1}Y_i$ pertenece a la esfera unitaria en $\mathfrak{b}$. Como la esfera es compacta, existe un subsecuencia $\big(c_i^{-1}Y_i\big)$, tal que $c_i^{-1}Y_i \longrightarrow Y \in \mathfrak{b}$, con $|Y| = 1$. En particular, $Y \neq 0$.

Demostremos que:

$$\exp(tY) \in H, \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.16}$$

De hecho, sea $t \in \mathbb{R}$ arbitrario y para cada i, sea $n_i = \left\lceil \frac{t}{c_i} \right\rceil$, entero grande tal que $n_i \leq \frac{t}{c_i}$. Entonces,

$$|n_i - \frac{t}{c_i}| \leq 1,$$

lo cual implica, $|n_ic_i - t| \leq c_i \longrightarrow 0$. Así, $n_iY_i = (n_ic_i)(c_i^{-1}Y_i) \longrightarrow tY$, y por continuidad $\exp(n_iY_i) \longrightarrow \exp(tY)$. Pero, $\exp(n_iY_i) = \big(\exp(Y_i)\big)^{n_i} \in H$ y como H es cerrado, resulta que $\exp(tY) \in H$. Por lo tanto, $\exp(tY) \in H$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como $Y \neq 0$, y $Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{b} = \{0\}$, entonces $Y = 0$. Esto muestra para el caso 2, que la suposición es no verdad.

Así, existe una vecindad U en $0 \in \mathfrak{g}$ tal que $\exp(U) \cap H \subset \exp(U \cap \mathfrak{h})$. Por lo tanto, queda justificada la igualdad (3.14).

Escoge, la base $\{V_1, ..., V_k, W_{k+1}, ..., W_m\}$ en $\mathfrak{g}$, con $\{V_1, .., ., V_k\}$ base en $\mathfrak{h}$ entonces el isomorfismo lineal $E : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $E(\sum_{i=1}^{k} a^iV_i + \sum_{j=k+1}^{m} b^jW_j) = (a^1, ..., a^k, b^{k+1}, ..., b^m)$ cumple $E(\mathfrak{h}) \subset \mathbb{R}^k$. La composición $\varphi = E \circ \exp^{-1} : \exp(U) \longrightarrow \mathbb{R}^m$, es una carta

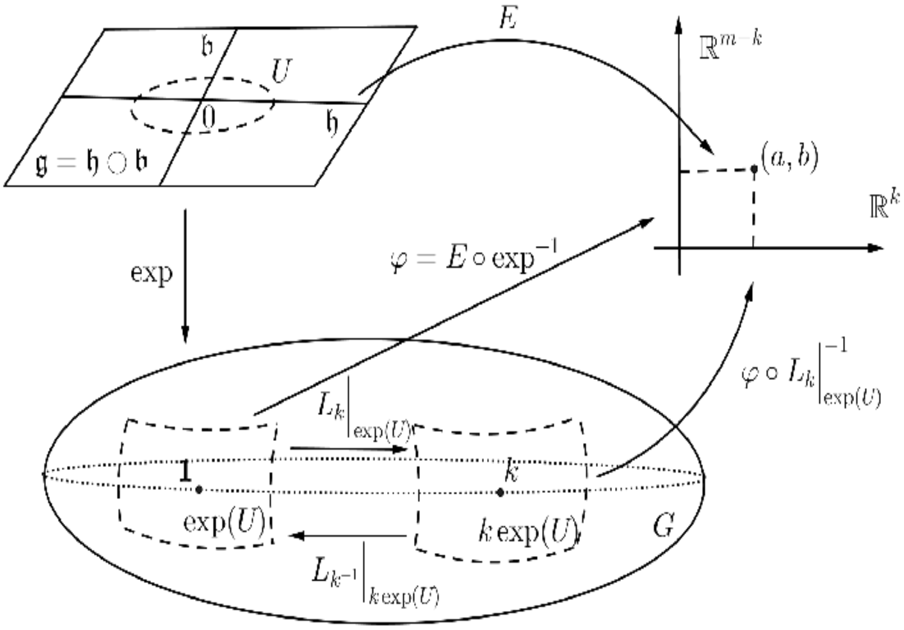

Figura 3.3: carta slice en H.

suave para G y $\varphi\big(\exp(U) \cap H\big) = E\big(U \cap \mathfrak{h}\big) = \{(a, b) : b^{k+1} = \ldots = b^m = 0\}$, es el k-“slice”. Además, si $h \in H$ es arbitrario entonces, $L_k : G \longrightarrow G$ define un difeomorfismo $L_k\Big|_{\exp(U)} : \exp(U) \longrightarrow k\exp(U)$. Como H es un subgrupo y $L_k(H) = H$, entonces,

$$L_k\big(\exp(U) \cap H\big) = L_k\big(\exp(U)\big) \cap H.$$

Ahora, verifiquemos que $\varphi \circ L_k\Big|_{\exp(U)}^{-1} : k\exp(U) \longrightarrow \mathbb{R}^m$, es una carta “slice”(satisface la condición local de k-“slice”) para H:

$$\varphi \circ L_k\Big|_{\exp(U)}^{-1}\big(k\exp(U) \cap H\big) = \varphi\big(\exp(U) \cap H\big) = E\big(U \cap \mathfrak{h}\big).$$

Así, H es una subvariedad incrustada de G y conclusión, H es un subgrupo de Lie.

□

3.1.5. Teorema de la variedad cociente

Se considera una acción a la izquierda de un grupo G, en una variedad topológica M. Defina una relación de equivalencia en M por: $p \sim q$ si, existe $g \in G$ tal que $g.p = q$. Esta relación define clases de equivalencia que son exactamente las órbitas de G en M. El conjunto de órbitas es denotado por M/G y con topología cociente es llamada el espacio de órbitas de la acción.

Proposición 3.37. *Sea M una variedad topológica y sea G un grupo de Lie que actúa continuamente sobre M. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) La acción es propia.

b) Si (p_i) es una secuencia en M y (g_i) una secuencia en G tales que (p_i) y $(g_i.p_i)$ convergen, entonces existe una subsecuencia de (g_i) convergente.

c) Para cualquier subconjunto compacto $K \subset M$, el conjunto

$$G_K = \{g \in G : (g.K) \cap K \neq \emptyset\},$$

es compacto.

Demostración. Sea $\Psi : G \times M \longrightarrow M \times M$, la aplicación dada por $\Psi(g, p) = (g.p, p)$; así, la acción ψ es propia si, solamente si, Ψ es propia.
Pruebo de la siguiente manera:

$$a) \Longrightarrow b) \Longrightarrow c) \Longrightarrow a).$$

$a) \Longrightarrow b)$. Supongamos que Ψ es propia y sean (p_i), (g_i) secuencias satisfaciendo la hipótesis $b)$. Sean U y V vecindades precompactas de los puntos $p = \lim\limits_i p_i$ y $q = \lim\limits_i g_i.p_i$, respectivamente. La suposición significa que los puntos $\Psi(g_i, p_i) = (g_i.p_i, p_i) \in \bar{V} \times \bar{U}$, de modo que i es suficientemente grande y $(g_i, p_i) \in \Psi^{-1}(\bar{V} \times \bar{U})$. Por lo tanto, la subsecuencia de (g_i, p_i) converge en $G \times M$. En particular, existe una subsecuencia de (g_i) en G que converge.
$b) \Longrightarrow c)$. Supongamos que se cumple $b)$ y sea K un subconjunto compacto de M. Para mostrar que G_K es compacto, suponga (g_i) una secuencia arbitraria de puntos

de G_K. Esto significa que para cada i, existe $p_i \in (g_i.K) \cap K$, o sea, (p_i) y $(g_i^{-1}.p_i)$ son secuencias en K. Por compacidad, existen subsecuencias (p_{i_k}) y $(g_{i_k}^{-1}.p_{i_k})$ convergentes a p y q respectivamente, luego $(g_{i_k}^{-1})$ tiene una subsecuencia convergente en G, lo que implica que (g_{i_k}) tiene una subsecuencia convergente. Como cada secuencia arbitraria de G_k, tiene una subsecuencia convergente, entonces G_K es compacto.

$c) \Longrightarrow a)$. Finalmente, supongamos que es valido $c)$. Considere $L \subset M \times M$, compacto y sea $K = \pi_1(L) \cup \pi_2(L) \subset M$, donde π_1 y π_2 proyecciones de $M \times M$ sobre M, definida sobre la primer y el segundo factor respectivamente. Entonces

$$\Psi^{-1}(L) \subset \Psi^{-1}(K \times K) = \{(g,p) : g.p \in K, p \in K\} \subset G_K \times K.$$

Como $\Psi^{-1}(L)$ es cerrado por continuidad, y además es un subconjunto cerrado del conjunto compacto $G_K \times K$, entonces $\Psi^{-1}(L)$ es compacto. Esto muestra que la acción es propia. $\square$

Lema 3.38. *Para cualquier acción continua de un grupo de Lie G sobre una variedad topológica M la aplicación cociente $\pi : M \longrightarrow M/G$, es una aplicación abierta.*

Demostración. Sea U un conjunto abierto de M. Entonces considere $\pi^{-1}(\pi(U))$,

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(\pi(U)) &= \{p \in M : \pi(p) \in \pi(U)\} \\
&= \{p \in M : G.p = G.q, \text{ para algún } q \in U\} \\
&= \{p \in M : p = g.q, \text{ para algún } q \in U \text{ y para algún } g \in G\} \\
&= \{p \in M : p \in g.U, \text{ para algún } g \in G\} \\
&= \bigcup_{g \in G} g.U
\end{aligned}$$

Por otro lado, para cada $g \in G$, la acción $\psi_g : M \longrightarrow M$ es un homeomorfismo implica que gU es abierto y por tanto, $\pi^{-1}(\pi(U))$ es abierto. Concluimos que $\pi(U)$ es abierto en M/G. $\square$

Ejemplo 3.18. *Sea $G = \mathbb{R}$, el grupo que actúa sobre $M = \mathbb{R}$ por:*

$$\begin{aligned}
\psi \ : G \times M &\longrightarrow M \\
(t,s) &\longmapsto \psi_t(s) = e^t.s.
\end{aligned}$$

Entonces $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ *y* $\{0\}$ *son órbitas de* $M/\mathbb{R}$. *Claramente,* $M/\mathbb{R}$ *no es Hausdorff.*

Ejemplo 3.19. *Sea* $G = \mathbb{C} - \{0\}$, *el grupo que actúa sobre* $\mathbb{C}^n$ *por*

$$\begin{aligned} \psi \quad : G \times M \quad &\longrightarrow \quad M \\ (t, z) \quad &\longmapsto \quad \psi(t, z) \quad = (t.z_1, ..., t.z_n). \end{aligned}$$

Las órbitas son las lineas complejas perforadas en el origen, y una órbita inestable en 0, $\{0\}$. *El espacio de órbita es*

$$M/G = \mathbb{CP}^{n-1} \sqcup \{0\}.$$

La topología cociente restricta a la topología usual sobre $\mathbb{CP}^{n-1}$. *Solamente el conjunto abierto que contiene* $\{0\}$ *en la topología cociente es el espacio total* M/G. *Nuevamente, la topología cociente en* M/G *no es Hausdorff. Quitando el origen de* $\mathbb{C}^n$, *se obtiene* M/G, *Hausdorff.*

Teorema 3.39 (**Teorema de variedad cociente**). *Suponga que* G *es un grupo de Lie que actúa suavemente, libremente y propiamente sobre una variedad suave* M. *Entonces el espacio de órbitas* M/G *es una variedad topológica de dimensión igual* $dimM - dimG$, *y tiene una única estructura suave con la propiedad de que la aplicación cociente* $\pi : M \longrightarrow M/G$, *es una submersión suave.*

Demostración. Supongo sin perdida de generalidad que G, actúa por la izquierda en M y escribiendo $dimG = k$, $dimM = m$ y $n = m - k$. Sea $\psi : G \times M \longrightarrow M$, la acción y $\Psi : G \times M \longrightarrow M \times M$, la aplicación propia dada por, $\Psi(g, p) = (g.p, p)$.
Primero muestro la unicidad de la estructura suave:
Supongo que M/G, tiene dos estructuras suaves diferentes tal que $\pi : M \longrightarrow M/G$, es una submersión suave. Sean $(M/G)_1$ y $(M/G)_2$ dos estructuras que denotan a (M/G), con la primera y con la segunda estructura suave respectivamente. Por la proposición 3.8, la aplicación identidad de $(M/G)_1$ para $(M/G)_2$, es suave:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ (M/G)_1 \arrow[r, "Id"'] & (M/G)_2 \end{tikzcd}$$

El mismo argumento muestra que $Id : (M/G)_2 \longrightarrow (M/G)_1$, es suave. Por lo tanto, las dos estructuras suaves son idénticas, esto justifica la unicidad.

(A1) M/G es una variedad topológica.

(a) M/G es Hausdorff: defina la relación órbita $\mathcal{O}$ en $M \times M$ por:

$$\mathcal{O} = \Psi(G \times M) = \{(g.p, p) : g \in G, \ p \in M\}.$$

Es llamada relación órbita porque, $(q,p) \in \mathcal{O}$, si solamente si, p y q están en la misma órbita. Como $G \times M$ es cerrado y Ψ es propia, entonces $\mathcal{O} = \Psi(G \times M)$ es cerrado (por el teorema 3.9).

Si $\pi(p)$ y $\pi(q)$ son dos puntos arbitrarios de M/G tal que $\pi(p) \neq \pi(q)$, entonces p y q están en órbitas diferentes, así $(q,p) \notin \mathcal{O}$. Como $\mathcal{O}^c$ es un conjunto abierto, entonces existe una vecindad abierta producto $U \times V$ de (q,p), y luego $\pi(U)$ y $\pi(V)$ son abiertos disjuntos en M/G, conteniendo $\pi(q)$ y $\pi(p)$ respectivamente. Por consiguiente, M/G es Hausdorff.

(b) M/G, satisface la segunda numerabilidad: sea $U \subset M/G$, un conjunto abierto arbitrario. Por la definición de la aplicación cociente, se tiene $\pi^{-1}(U)$ es abierto en M entonces existe una base numerable de abiertos $\{U_i\}_i$ en M tal que $\pi^{-1}(U) = \bigcup_i U_i$. Entonces $U = \bigcup_i \pi(U_i)$.

(c) M/G, es localmente Euclidiano.

Mostremos que las órbitas definidas por G, son subvariedades incrustadas en M, y difeomorfas a G:

En efecto, para cualquier $p \in M$, defina la aplicación órbita $\psi^{(p)} : G \longrightarrow M$ por

$$\psi^{(p)}(g) = g.p,$$

esto es una aplicación suave cuya imagen es exactamente la órbita $G.p$, de p.

(c1) $\psi^{(p)}$ es inyectiva: sean $g, g' \in G$ tal que $\psi^{(p)}(g) = \psi^{(p)}(g')$, entonces $g'^{-1}g.p = p$, y por la hipótesis del teorema se tiene $g = g'$.

(c2) $\psi^{(p)}$ tiene rango constante:

De hecho, se observa que, para todo $g, g' \in G$ y cualesquiera $p \in M$ se tiene

$$\psi^p(g'g) = g'.\psi^p(g).$$

Así, ψ^p es equivariante con respecto a la acción de grupo G, sobre si mismo y la acción de G en M, como G actúa transitivamente sobre si mismo entonces por el teorema de rango equivariante 3.5, $\psi^{(p)}$ tiene rango constante.

De los resultados (c1), (c2) y por el teorema 3.5, implica que $\psi^{(p)}$ es una inmersión suave.

(c3) $\psi^{(p)}$ es una aplicación propia:

Sea $K \subset M$ un subconjunto compacto arbitrario. Por continuidad, la preimagen $(\psi^{(p)})^{-1}(K)$ es cerrada en G y como $(\psi^{(p)})^{-1}(K) \subset G_{K\cup\{p\}} = \{g \in G : g(K \cup \{p\}) \cap (K \cup \{p\}) \neq \emptyset\}$, con $G_{K\cup\{p\}}$ compacto, resulta que $(\psi^{(p)})^{-1}(K)$ es compacto.

De (c1), (c2), (c3), y por el teorema 3.9, se obtiene que $\psi^{(p)}$, es una aplicación incrustada suave. Es decir, la aplicación $\psi^{(p)} : G \longrightarrow G.p$ es un homeomorfismo y nuevamente por teorema 3.5, $\psi^{(p)} : G \longrightarrow G.p$ es un difeomorfismo.

(c4) Demostraré que para cualquier $p \in M$, existe una carta coordenada adaptada centrada en p:

se sabe que $G.p$ es una subvariedad incrustada de M, entonces existe una carta coordenada (W, φ_0) en M centrada en p tal que $G.p \cap W$ es un k-“slice “en W. Escribo las funciones coordenadas de φ_0 como, $(u^1, ..., u^k, v^1, ..., v^n)$, de modo que $G.p \cap W$ es un “slice ”de la forma $\{(u, v) : v^1 = ... = v^n = 0\}$. Sea S la subvariedad de W definida por $\{(u, v) : u^1 = ... = u^k = 0\}$ (esta “slice”es perpendicular a la órbita en esta coordenada). Así, T_pM se descompone como suma directa:

$$T_pM = T_p(G.p) \oplus T_pS,$$

donde $T_p(G.p)$, es generado por $\{\frac{\partial}{\partial u^1}, ..., \frac{\partial}{\partial u^k}\}$ y T_pS es generado por $\{\frac{\partial}{\partial v^1}, ..., \frac{\partial}{\partial v^n}\}$.

Sea $\psi|_{G\times S} : G \times S \longrightarrow M$, denota la restricción de la aplicación ψ a $G \times S \subset$

$G \times M$. Usando el teorema de la función inversa, demostraré que $\psi|_{G\times S}$, es un difeomorfismo en una vecindad de $(\mathbf{1}, p) \in G \times S$. Sea $i_p : G \longrightarrow G \times S$, la aplicación incrustada suave dada por $i_p(g) = (g, p)$. La aplicación órbita $\psi^p : G \longrightarrow M$, es igual a la composición:

$$G \xrightarrow{i_p} G \times S \xrightarrow{\psi|_{G\times S}} M.$$

(Observe la figura, 3.4). Como $\psi^{(p)}$ es una aplicación incrustada suave cuyo

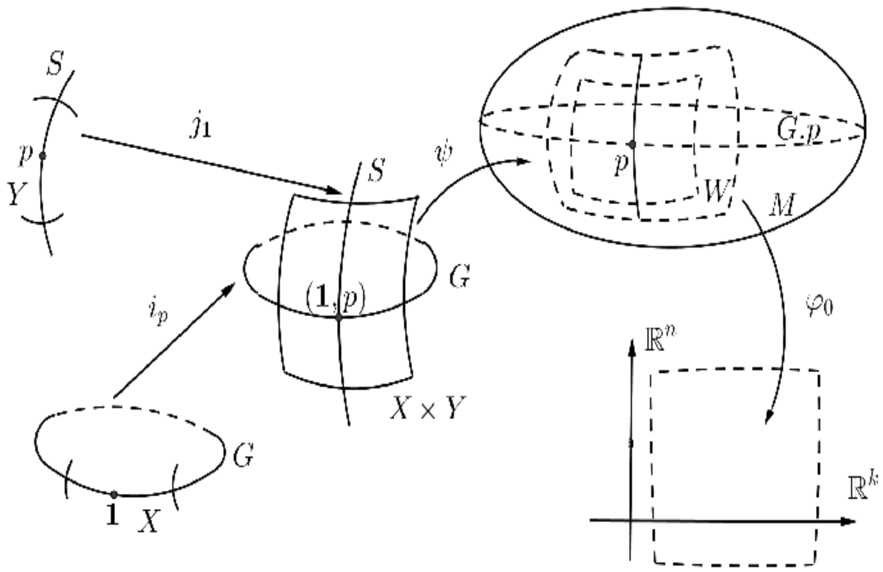

Figura 3.4: Construcción de una carta adaptada.

imagen es la órbita $G.p$, de ello se deduce $\psi_*^{(p)}(T_{\mathbf{1}}G) = T_p(G.p) \subset T_pM$, y así, la imagen de $(\psi|_{G\times S})_* : T_{(\mathbf{1},p)}(G \times S) \longrightarrow T_pM$, contiene $T_p(G.p)$. Similarmente, si $j_{\mathbf{1}} : S \longrightarrow G \times S$ es una aplicación incrustada suave definida $j_{\mathbf{1}}(q) = (\mathbf{1}, q)$, entonces la inclusión $i : S \hookrightarrow M$, es igual a la composición:

$$S \xrightarrow{j_{\mathbf{1}}} G \times S \xrightarrow{\psi|_{G\times S}} M.$$

Por consiguiente, la imagen de $(\psi|_{G\times S})_*$ también incluye $T_pS \subset T_pM$. Como $T_p(G.p)$ y T_pS generan a T_pM resulta que $(\psi|_{G\times S})_*$ es sobreyectiva y por razones de dimensión, $(\psi|_{G\times S})_*$ es un isomorfismo. Por el teorema de la función inversa 1.31, existe una vecindad $X \times Y$ en $(\mathbf{1}, p) \in G \times S$ y una vecindad U en $p \in M$ tal que $\psi|_{X\times Y} : X \times Y \longrightarrow U$, es un difeomorfismo.

Reduciendo X y Y (si es necesario), podemos asumir que X y Y son conjuntos precompactos que son difeomorfos a las bolas Euclidianas en $\mathbb{R}^k$ y $\mathbb{R}^n$, respectivamente.

Mostraré que $Y \subset S$ (lo suficientemente pequeño), intercepta a cada órbita $G.p$ en lo máximo en un solo punto.

En efecto, supongo lo contrario. Entonces si $\{Y_i\}$ es una base vecindad en p (una sucesión de bolas coordenadas cuyos diámetros decrecen para 0), para cada i, existen $p_i, p'_i \in Y_i$ con $p_i \neq p'_i$ tal que están en la misma órbita, es decir, $g_i.p_i = p'_i$, para algún $g_i \in G$. Como $\{Y_i\}$ es una base vecindad entonces las secuencias $\{p_i\}$ y $\{p'_i = g_i.p_i\}$, convergen para p. Por la proposición 3.37, se pode pasar a una subsecuencia y supongo que $g_{i_k} \longrightarrow g \in G$. Por continuidad, tenemos

$$g.p = \lim_{k\to\infty} g_{i_k}.p_{i_k} = \lim_{k\to\infty} p'_{i_k} = p.$$

Como G actúa libremente esto implica $g = \mathbf{1}$. Cuando k es suficientemente grande, tenemos $g_{i_k} \in X$. Pero, $\psi|_{X\times Y}$ es inyectiva, o sea,

$$\psi(g_{i_k}, p_{i_k}) = p'_{i_k} = \psi(1, p'_{i_k})$$

implica que $p_{i_k} = p'_{i_k}$. Lo cual contradice a la suposición.

Escojo difeomorfismos $\alpha : \mathbb{B}^k \longrightarrow X$ y $\beta : \mathbb{B}^n \longrightarrow Y$ (donde $\mathbb{B}^k$ y $\mathbb{B}^n$, son bolas abiertas unitarias respectivamente), y defina $\gamma : \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^n \longrightarrow U$, por

$$\gamma(x, y) \quad = \quad \psi_{\alpha(x)}(\beta(y)). \tag{3.17}$$

Como γ, es igual a la composición de difeomorfismos:

$$\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^n \xrightarrow{\alpha\times\beta} X \times Y \xrightarrow{\psi|_{X\times Y}} U,$$

entonces γ, es un difeomorfismo. Por lo tanto, la aplicación $\varphi = \gamma^{-1}$, es una aplicación coordenada suave (carta suave) en U.

Demostraré que (U, φ), es una carta adaptada para la acción de G: por construcción $\varphi(U) = \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ y se observa que $\varphi^{-1}(\{(x, y) \in \varphi(U \cap G.p_0) : y = c^i\}) = \psi \circ (\alpha \times \beta)\{(x, y) \in \varphi(U \cap G.p_0) : y = c^i\} = \psi(X \times \{\beta(c)\}) \subset G.\beta(c) = G.p_0$. Es decir,

$$G.p_0 \cap U \quad = \quad \cup_i \varphi^{-1}\big(\{(x, y) : \varphi(U \cap G.p_0) : y = c^i\}\big). \qquad (3.18)$$

Sin embargo, como la órbita arbitraria $G.p_0$ intercepta a Y, en un solo punto eso implica que para todo i, $c^i = c$. Entonces $G.p_0 \cap U$, es un "slice"de la forma $\{(x, y) : y = c\}$. Esto completa la prueba que (U, φ), es una carta adaptada. Para finalizar la prueba que M/G, es localmente Euclidiana, considere un punto arbitrario $q = \pi(p)$ en M/G, y sea (U, φ), una carta coordenada adaptada para M centrada en p, con $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$. Sea $V = \pi(U)$, un abierto en M/G (porque π es aplicación abierta). Denotando las funciones coordenadas de φ, como $(x^1, ..., x^k, y^1, ..., y^n)$ y sea $Y \subset U$, la $n-$"slice" $\{(x, y) : x^1 = ... = x^k = 0\}$. Note que $\pi\Big|_Y : Y \longrightarrow V$, es biyectiva: sean $p_1, p_2 \in Y$ tal que $\pi(p_1) = \pi(p_2)$, entonces existe $g \in G$ tal que $p_1 = g.p_2$. Por la definición de la carta adaptada, $\varphi(p_1), \varphi(p_2) \in \varphi(U \cap G.p_1) = \{(x, y) : y = c\}$, pero $\varphi(p_1), \varphi(p_2) \in \varphi(Y) = \{(x, y) : x = 0\}$ de eso obtenemos $\varphi(p_1) = \varphi(p_2)$, lo cual implica que $p_1 = p_2$. Por otro lado, dada $v \in V$. Entonces existe $p \in U$ tal que $\pi(p) = v$, y como cada órbita $G.p$ intercepta a Y en un solo punto, es decir, existe $q \in Y$ tal que $q = g.p$. Así, existe $q \in Y$ tal que $\pi(q) = v$. Por lo tanto, $\pi\Big|_Y$ es biyectiva.

Por otra parte, si $\tilde{W}$ es un subconjunto abierto de Y (n-"slice" $\{(x, y) \in U : x = 0\}$) entonces

$$\pi\big(\varphi^{-1}(\{(x, y) \in \varphi(U) : (0, y) \in \varphi(\tilde{W})\})\big) = \pi\Big|_Y(\tilde{W}), \text{ es abierto en } M/G \text{ y}$$

por lo tanto, $\pi\Big|_Y$ es un homeomorfismo.

Sea $\sigma = (\pi\Big|_Y)^{-1} : V \longrightarrow Y \subset U$, una sección local de π. Defino una aplicación

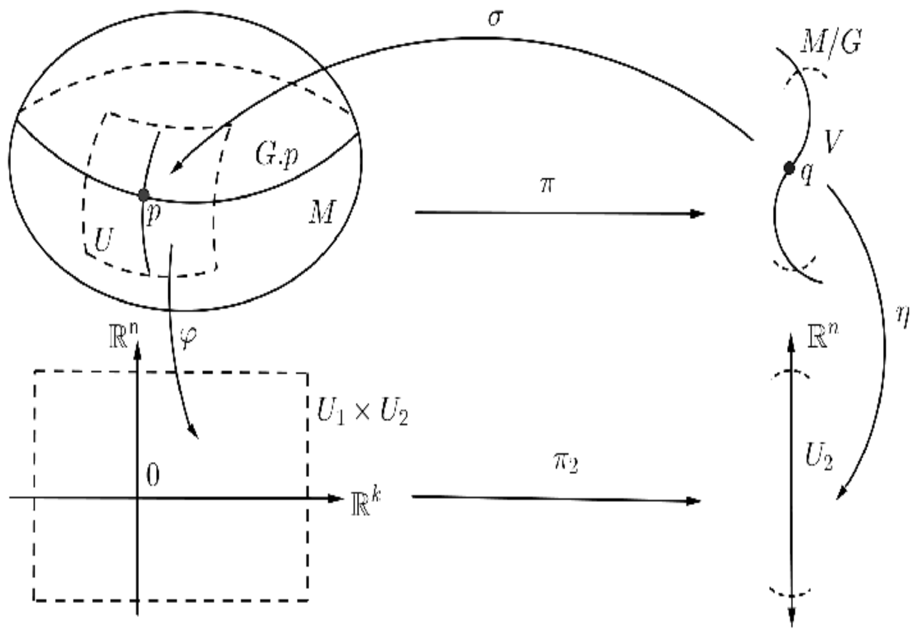

Figura 3.5: Una carta coordenada para M/G.

$\eta = \pi_2 \circ \varphi \circ \sigma$:

$$\begin{aligned} \eta : \quad V \quad &\longrightarrow \quad U_2 \\ [(x, y)] \quad &\longmapsto \quad y \end{aligned} \tag{3.19}$$

donde $\pi_2 : U_1 \times U_2 \longrightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^n$, es la proyección en el segundo factor y identificando $(x, y) = p$. Como $\sigma : V \longrightarrow Y \subset U$, y $\pi_2 \circ \varphi : Y \longrightarrow U_2$ son homeomorfismos entonces η, es un homeomorfismo. Esto completa la prueba que M/G, es una variedad topológica n-dimensional.

(A2) Finalmente, demuestro que M/G tiene una estructura suave con la propiedad de que π, sea una submersión. Defino el atlas $\{(V_\alpha, \eta_\alpha)\}$, constituido por todas las cartas de tipo (V_α, η_α), como fue dada en (3.19). Muestro que para dos cartas cualesquiera para M/G, son compatibles.

Sean $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) cartas adaptadas para M y sean (V_α, η_α) y (V_β, η_β), las cartas coordenadas correspondientes para M/G.

Primero, considere el caso en que las dos cartas adaptadas están centrada en el mismo punto $p \in M$. Escribo las coordenadas adaptadas como, $\varphi_\alpha = (x, y)$ y $\varphi_\beta = (\tilde{x}, \tilde{y})$.

La aplicación de transición $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, es de forma $\big(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\big)(x, y) = (A(x, y), B(x, y)) = (\tilde{x}, \tilde{y})$, donde $A : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ y $B : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, son aplicaciones suaves. Para x_1, x_2 arbitrarios tales que $(x_1, y), (x_2, y) \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, entonces $\varphi_\alpha^{-1}(x_1, y), \varphi_\alpha^{-1}(x_2, y)$ están en la misma órbita (por carta adaptada). Lo cual implica, $B(x_1, y) = B(x_2, y)$, en consecuencia $B(x, y) = B_0(y)$.

La aplicación de transición $\eta_\beta \circ \eta_\alpha^{-1} : \eta_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) \longrightarrow \eta_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$, es dada por:

$$
\begin{aligned}
(\eta_\beta \circ \eta_\alpha^{-1})(y) &= \big(\pi_{2\beta} \circ \varphi_\beta \circ \sigma_\beta\big) \circ \big(\sigma_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \pi_{2\alpha}^{-1}\big)(y) \\
&= B_0(y) = \tilde{y},
\end{aligned}
$$

lo cual es claramente suave.

Para el caso general, supongo que $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) son cartas adaptadas para M y $p \in U_\alpha$, $\tilde{p} \in U_\beta$ son puntos tales que $\pi(p) = \pi(\tilde{p}) = q$. Modificando ambas cartas, podemos suponer que ellos están centrados en p y $\tilde{p}$ respectivamente. Como p y $\tilde{p}$ están en la misma órbita entonces, existe $g \in G$ tal que $g.p = \tilde{p}$. Como $\psi_g : \psi_g^{-1}(U_\beta) \longrightarrow U_\beta$ es un difeomorfismo, entonces $\varphi'_\beta = \varphi_\beta \circ \psi_g : \psi_g^{-1}(U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\beta)$,, es otra carta adaptada centrada en p. Por otra parte, $\sigma'_\beta = \psi_g^{-1} \circ \sigma_\beta$, es la sección local correspondiente a φ'_β, y por lo tanto,

$$\eta'_\beta = \pi_2 \circ \varphi'_\beta \circ \sigma'_\beta = \pi_2 \circ \varphi_\beta \circ \sigma_\beta = \eta_\beta.$$

De esta manera, se reduce al primer caso y por consiguiente, $\eta_\beta \circ \eta_\alpha^{-1}$ es suave.

Finalmente, pruebo que $\pi : M \longrightarrow M/G$ es una submersión. Sean $p \in M$ y $q = \pi(p) \in M/G$. Entonces existen cartas suaves (U, φ) en p y (V, η) en q tal que, la representación coordenada,

$$\hat{\pi}(x, y) = y$$

es submersión suave. Entonces π, es una submersión suave.

□

Aplicaciones del teorema:

Ejemplo 3.20. *Sea $G = \mathbb{R}^2$ el grupo de Lie, actúa en $M = \mathbb{R}^2$ por traslación:*

$$\begin{array}{rccl} \psi: & G \times M & \longrightarrow & M \\ & (g,x) & \longmapsto & \psi(g,x) = g + x. \end{array}$$

Entonces, para todo $x \in M = \mathbb{R}^2$ la órbita es $\mathbb{R}^2.x = \{g + x : g \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$. Se observa que la acción es transitiva, propia y libre, usando el teorema 3.39, $M/\mathbb{R}^2$ es una variedad suave.

Ejemplo 3.21. *Se considera $M = \mathbb{R}^n$ y una acción del grupo $\mathbb{Z}^n$ en M, por:*

$$(k_1, ..., k_n).(x^1, ..., x^n) = (x^1 + k_1, ..., x^n + k_n).$$

Esta acción es propia y libre, y por lo tanto, $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n$ es una variedad suave de dimensión n.

Ejemplo 3.22. *El grupo $G = \mathbb{R} - \{0\}$, actúa en $M = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ por:*

$$t.(x^1, ..., x^{n+1}) = (tx^1, ..., tx^{n+1}).$$

Esta acción es propia y libre, y por consiguiente, $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/\mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{RP}^n$ es una variedad suave de dimensión n.

Ejemplo 3.23. *Sea $G = \mathbb{C} - \{0\}$, que actúa en $M = \mathbb{C}^n - \{0\}$ por:*

$$\begin{array}{rccl} \psi: & G \times M & \longrightarrow & M \\ & (t,z) & \longmapsto & \psi(t,z) = (t.z_1, ..., t.z_n). \end{array}$$

La acción es libre y propia, entonces por el teorema 3.39, el espacio de órbitas

$$\mathbb{CP}^{n-1} = \mathbb{C}^n - \{0\}/\mathbb{C} - \{0\} = S^{2n-1}/S^1,$$

es una variedad suave.

Ejemplo 3.24. *Sean $G = SO(3)$ y $M = \mathbb{R}^3(\cong \mathfrak{so}^*(3))$. Se considera la acción*

$$\begin{array}{rccl} \psi & SO(3)\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (A,x) & \longmapsto & \psi(A,x) = \; A.x. \end{array}$$

Entonces $G.x = \{y \in \mathbb{R}^3 : \|y\| = \|x\|\}$ es una esfera de radio $\|x\|$. Por lo tanto, $M/SO(3) \cong \mathbb{R}_0^+$.

El conjunto $\mathbb{R}_0^+ = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$, no es una variedad (pues incluye el extremo 0). Consecuentemente, la acción de $SO(3)$ sobre $\mathbb{R}^3$ no es libre.

Ejemplo 3.25. *Sea G un grupo de Lie abeliano. Entonces $Ad_g = Id_{\mathfrak{g}}$, $Ad^*_{g^{-1}} = Id_{\mathfrak{g}^*}$ y las órbitas adjuntas y coadjuntas de $\xi \in \mathfrak{g}$ y $\eta \in \mathfrak{g}^*$, son conjuntos de un solo punto $\{\xi\}$ y $\{\eta\}$ respectivamente. Por consiguiente, $\mathfrak{g}/G = \mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^*/G = \mathfrak{g}^*$ son variedades suaves.*

3.2. Geometría Simplética

Inicio con geometría simplética en espacios vectoriales en seguida, variedades simpléticas y acciones Hamiltonianas. Finalmente, analizo algunos ejemplos del aplicación del momento en T^*M, $\mathbb{C}^n$ y otros.

3.2.1. Espacio vectorial simplético

Definición 3.40. Sea una aplicación(forma) bilineal, $\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$.

- ω es antisimétrica si, $\omega(v,w) = -\omega(w,v)$, para todo $v, w \in V$.
- ω es no-degenerado si, para cualquier $v \in V$,

$$\omega(v,w) = 0, \text{ para todo } w \in V, \text{ implica que } v = 0.$$

Teorema 3.41. *Si* ω *es cualquier forma bilineal antisimétrica sobre espacio vectorial* V*, entonces existe una base* $\{u_1, ..., u_k, e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n\}$ *en* V *tales que*

$$\begin{aligned} \omega(u_i, v) &= 0, \forall i, \forall v \in V, & (3.20)\\ \omega(e_i, e_j) &= 0 = \omega(f_i, f_j),\ \forall i, j, & (3.21)\\ \omega(e_i, f_j) &= \delta_{ij},\ \forall i, j. & (3.22) \end{aligned}$$

Demostración. Sea $U = \{u \in V : \omega(u, v) = 0, \forall v \in V\}$. Escojo una base $\{u_1, .., u_k\}$ en U y considere el espacio complemento de U en V(denotando por W), entonces:

$$V = U \oplus W.$$

Tome $e_1 \in W$, con $e_1 \neq 0$. Entonces, existe $f_1 \in W$ tal que $\omega(e_1, f_1) \neq 0$. Normalizando, tenemos $\omega(e_1, f_1) = 1$.

Sean

$$\begin{aligned} W_1 &= span\{e_1, f_1\},\\ W_1^\omega &= \{w \in W : \omega(w, v) = 0,\ \forall v \in W_1\}. \end{aligned}$$

Afirmación: $W_1 \cap W_1^\omega = \{0\}$.

De hecho, supongo que $v = ae_1 + bf_1 \in W_1 \cap W_1^\omega$. Luego,

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(v, e_1) = -b,\\ 0 &= \omega(v, f_1) = a. \end{aligned}$$

Entonces $v = 0$.

Afirmación: $W = W_1 \oplus W_1^\omega$.

En efecto, supongo que $v \in V$ y tiene $\omega(v, e_1) = c$ y $\omega(v, f_1) = d$. Entonces

$$v = (de_1 - cf_1) + (v + cf_1 - de_1) \in W_1 \oplus W_1^\omega,$$

pues, $de_1 - cf_1 \in W_1$ y $v + cf_1 - de_1 \in W_1^\omega$.

Luego, $V = U \oplus W_1 \oplus W_1^\omega$ con $\omega(e_1, f_1) = 1$. Como W_1^ω es un espacio vectorial de dimensión $2n - 2$ entonces por hipótesis de inducción, existe una base

$\{e_2, ..., e_n, f_2, ..., f_n\}$ en V tales que $\omega(u_i, v) = 0,\ \forall i,\ \forall v \in V,\ \omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0,\ 2 \leq i, j \leq n,\ \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij},\ 2 \leq i, j \leq n.$ □

Definición 3.42. Un espacio vectorial simplética es un par (V, ω), que consiste de un espacio vectorial real, V de dimensión finita y una forma bilineal $\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, antisimétrica y no-degenerada.

Para todo espacio vectorial simplético (V, ω). Por el teorema 3.41, se tiene $U = \{0\}$ y $dimV = 2n$. En conclusión todo espacio vectorial simplético es de dimensión par.

Ejemplo 3.26. *Sea* $\mathbb{R}^{2n}$, *espacio vectorial con forma bilineal:*

$$\omega_0(u, v) = -u_{n+1}v_1 - u_{n+2}v_2 - ... - u_{2n}v_n + u_1v_{n+1} + ... + u_nv_{2n},$$

$u = (u_1, ..., u_{2n})$ *y* $v = (v_1, ..., v_{2n})$ *en* $\mathbb{R}^{2n}$. *El par* $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, *es un espacio vectorial simplética.*

Definición 3.43. Un simplectomorfismo lineal de espacios vectoriales simpléticos (V, ω) y $(\tilde{V}, \tilde{\omega})$, es un isomorfismo lineal $\varphi : V \longrightarrow \tilde{V}$, tal que $\varphi^*\tilde{\omega} = \omega$.

De forma explicita, la definición $\varphi^*\tilde{\omega}$ es dada por:

$$\varphi^*\tilde{\omega}(u, v) = \tilde{\omega}(\varphi(u), \varphi(v)),\ \text{para todo}\ u, v \in V.$$

Definición 3.44. El complemento simplético de un subespacio vectorial W en (V, ω), es definida como el subespacio,

$$W^\omega = \{v \in V : \omega(v, w) = 0,\ \forall w \in W\}.$$

El complemento simplético no es necesariamente es trasversal a W. Un subespacio vectorial W es llamado,

- isotrópico si $W \subset W^\omega$;
- coisotrópico si $W^\omega \subset W$;

- simplética si $W \cap W^{\omega} = \{0\}$;
- Lagrangiana si $W = W^{\omega}$.

Note que, W es isotrópico si, solamente si, $\omega|_W = 0$ y W es simplética es equivalente a, $\omega|_W$ es no-degenerado.

Lema 3.45. *Sea W un subespacio vectorial de (V, ω). Entonces*

$$dimW + dimW^{\omega} = dimV, \quad W^{\omega\omega} = W.$$

Demostración. Defino una aplicación, $\hat{\omega} : V \longrightarrow V^*$ dada por $\hat{\omega}(u) = \omega(u, .)$. Como ω es no degenerada, implica que $\hat{\omega}$, es un isomorfismo. Usando la identificación $W^{\omega} \cong W^{\perp}$, mediante $v \longmapsto \omega(v, .)$. Pero, por álgebra lineal para un subespacio vectorial arbitrario W del espacio vectorial V, se tiene

$$dimW + dimW^{\perp} = dimV$$

lo cual demuestra el lema.

Por otro lado, sea $w \in W$. Para todo $v \in W^{\omega}$, se tiene $\omega(v, w) = 0$. Por consiguiente, $w \in W^{\omega\omega}$. Así, $W \subset W^{\omega\omega}$.

Se sabe que $dimW^{\omega} + dimW^{\omega\omega} = dimV$, de modo que, $dimW^{\omega\omega} = dimW$. Por lo tanto, $W^{\omega\omega} = W$.

$\square$

Corolário 3.46. *Sea W un subespacio vectorial de (V, ω). Tenemos las siguientes equivalencias:*

a) W es simplética, si solamente si, W^{ω} es simplética;

b) W es Lagrangiana, si solo si, $dimV = \frac{1}{2}dimW$;

c) W es isotrópico, si solamente si, W^{ω} es coisotrópico.

Demostración. Inmediatamente se sigue del lema anterior.

$\square$

El siguiente resultado, afirma que todos los espacios vectoriales simpléticos de la misma dimensión son simplectomorfismos lineal.

Teorema 3.47. *Sea (V,ω) un espacio vectorial simplética de dimensión $2n$. Entonces existe una base $\{e_1,...,e_n,f_1,...,f_n\}$, tales que*

$$\omega(e_i,e_j)=\omega(f_i,f_j)=0,\ \omega(e_i,f_j)=\delta_{ij}.$$

Tal base es llamada una base simplética. Además, existe un isomorfismo $F:\mathbb{R}^{2n}\longrightarrow V$, de espacios vectoriales tal que $F^*\omega=\omega_0$.

Demostración. Pruebo por inducción sobre n. Como ω es no-degenerado, entonces existe vectores $e_1,f_1\in V$ tal que

$$\omega(e_1,f_1)=1.$$

Sea $U=span\{e_1,f_1\}$. Para $v=ae_1+bf_1\in U$, satisfaciendo $\omega(v,e_1)=0$, y $\omega(v,f_1)=0$, tenemos $a=0$ y $b=0$. Por lo tanto, $(U,\omega|_U)$ es un espacio vectorial simplética.
Observe que $W=U^\omega$ es un espacio vectorial simplética de dimensioń $2n-2$. Por hipótesis de la inducción, existe una base simplética $\{e_2,...,e_n,f_2,...,f_n\}$ de W. Por consiguiente, los vectores $\{e_1,...,e_n,f_1,...,f_n\}$, forman una base simplética de V. La aplicación lineal $F:\mathbb{R}^{2n}\longrightarrow V$, es definida por

$$F(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n)=\sum_{j=1}^n x_je_j+\sum_{j=1}^n y_jf_j,$$

satisface $F^*\omega=\omega_0$: para $u=(u_1,...,u_{2n})$ y $v(v_1,...,v_{2n})$ en $\mathbb{R}^{2n}$,

$$\begin{aligned}
F^*\omega(u,v) &= \omega(F(u),F(v))\\
&= \omega\Big(\sum_{j=1}^n u_je_j+\sum_{k=1}^n u_{n+k}f_k,\sum_{j=1}^n v_je_j+\sum_{k=1}^n v_{n+k}f_k\Big)\\
&= \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n u_jv_{n+k}\omega(e_j,f_k)+\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n u_{n+k}v_j\omega(f_k,e_j)\\
&= \sum_{j=1}^n u_jv_{n+j}-\sum_{j=1}^n u_{n+j}v_j\\
&= \omega_0(u,v).
\end{aligned}$$

□

Corolário 3.48. *Si V es un espacio vectorial de dimensión $2n$, entonces una forma bilineal antisimétrica ω, sobre V es no-degenerada, si solamente si, $\omega^n = \omega \wedge ... \wedge \omega \neq 0$.*

Demostración. Supongo primero que ω, es degenerado. Sea $v \neq 0$, tal que $\omega(v, w) = 0$, para todo $w \in V$. Ahora, escoja una base $\{v_1, ..., v_{2n}\}$ de V tal que $v_1 = v$. Entonces $\omega^\omega(v_1, ..., v_{2n}) = \omega(v, .)...\omega(v_{2n}, .) = 0$.
Recíprocamente, supongo que ω, es no-degenerado. Como ω_0^n es la forma de volumen entonces por el teorema 3.47, existe un isomorfismo $F : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow V$, tal que $F^*\omega = \omega_0$. Así, $F^*\omega^n = \omega_0^n \neq 0$, esto implica que $\omega^n \neq 0$.

□

3.2.2. Variedad simplética

Definición 3.49. Una variedad suave M, es una variedad simplética si existe una forma ω de grado 2 tales que ω es no-degenerado y cerrado en M. Es decir, ω satisface

a) $d\omega = 0$ y

b) para todo $p \in M$ y para cada $X \in T_pM$, se $\omega_p(X, Y) = 0$, para todo $Y \in T_pM$, entonces $X = 0$.

Denotamos toda variedad simplética por (M, ω). Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.27. *Sea $M = \mathbb{R}^{2n}$, con coordenadas estándar $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$, la 2-forma*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i,$$

es simplética. En efecto, sea $\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p, ..., \frac{\partial}{\partial y_n}\Big|_p\}$, una base de $T_p\mathbb{R}^{2n}$.

Para $u = \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p + \beta_j \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_p \in T_p\mathbb{R}^{2n}$ *arbitrario y para todo* $v \in T_p\mathbb{R}^{2n}$*, tenemos*

$$\omega_p(u, \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\beta_i = 0,$$
$$\omega_p(u, \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_p) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_j = 0,$$

y concluimos que $u = 0$*. Además,* $d\omega = 0$*. Por lo tanto,* $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ *es una variedad simplética.*

Ejemplo 3.28. *Sea* $M = \mathbb{C}^n$*, con coordenadas lineales* $z_1, ..., z_n$*. La forma*

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\bar{z}_k,$$

es simplética. De hecho, esta 2-forma es igual al ejemplo anterior bajo la identificación $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$*,* $z_k = x_k + iy_k$*.*

Ejemplo 3.29. *Sea* $M = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$*, la esfera unitaria. La forma simplética estándar en* S^2*, inducido por el producto interior y el producto vectorial:*

$$\omega_p(u, v) = \langle p, u \times v\rangle, \text{ para todo } u, v \in T_pS^2 = \{p\}^{\perp},$$

define (S^2, ω)*, una variedad simplética.*

Considero las coordenadas cilíndricas (θ, h) *en* S^2*, definida en* $0 \leq \theta \leq 2\pi$ *y* $-1 \leq h \leq 1$*. La forma simplética anterior es de la forma:*

$$\omega = d\theta \wedge dh.$$

En efecto, sea $V = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$*. La 2-forma*

$$\omega = \boldsymbol{i}_V(dx \wedge dy \wedge dz) = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$$

en $\mathbb{R}^3$*. Luego, en coordenadas cilíndricas* $x = \sqrt{1-h^2}\cos\theta$*,* $y = \sqrt{1-h^2}sen\theta$ *y* $z = h$*, obtenemos*

$$\begin{aligned} dx &= \frac{-h}{\sqrt{1-h^2}}\cos\theta dh - \sqrt{1-h^2}sen\theta d\theta \\ dy &= \frac{-h}{\sqrt{1-h^2}}sen\theta dh + \sqrt{1-h^2}\cos\theta d\theta \\ dz &= dh \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= h d\theta \wedge dh \\ dx \wedge dz &= -\sqrt{1-h^2} sen\theta d\theta \wedge dh \\ dy \wedge dz &= \sqrt{1-h^2}\cos\theta d\theta \wedge dh \end{aligned}$$

Restringiendo, en la esfera unitaria:

$$\boldsymbol{i}_V dx \wedge dy \wedge dz\Big|_{S^2} = d\theta \wedge dh.$$

No cualquier variedad tiene estructura simplética, los contra ejemplos triviales son todas las variedades de dimensión impar y también existen ejemplos de dimensión par, que no son simpléticas como por ejemplo:

Ejemplo 3.30. *Se muestra que* (S^{2n}, ω), *no es una variedad simplética para* $n \geq 2$. *En efecto, supongamos que* ω *es una 2-forma cerrada y no-degenerada sobre* S^{2n}. *Como* $H^2_{dR}(S^{2n}) = 0$, *(ver [7]) entonces existe* α *1-forma tal que* $\omega = d\alpha$. *Luego, la forma de volumen* $\Omega = \underbrace{\omega \wedge \omega \cdots \wedge \omega}_{n}$ *es exacta, o sea, existe* $\underbrace{\omega \wedge \omega \cdots \wedge \omega}_{n-1} \wedge \alpha \in \Omega^{2n-1}(S^{2n})$ *tal que*

$$d(\underbrace{\omega \wedge \omega \cdots \wedge \omega}_{n-1} \wedge \alpha) = d(\underbrace{\omega \wedge \omega \cdots \wedge \omega}_{n-1}) \wedge \alpha + (\underbrace{\omega \wedge \omega \cdots \wedge \omega}_{n-1}) \wedge d\alpha = \Omega.$$

Por el teorema de Stokes se tiene:

$$\int_{S^{2n}} d(\underbrace{\omega \wedge \omega \cdots \wedge \omega}_{n-1} \wedge \alpha) = \int_{\partial S^{2n}} \underbrace{\omega \wedge \omega \cdots \wedge \omega}_{n-1} \wedge \alpha = 0.$$

Lo cual es una contradicción para la forma de volumen Ω.

Una de las variedades simpléticas importantes es el fibrado cotangente. Primero, justifico la existencia de una 1-forma τ, natural en T^*M, llamado 1-forma tautológica definida como sigue. Un punto en T^*M es un covector $\alpha \in T^*_q M$, para algún $q \in M$ (algunas veces denotamos tal punto por (q, α)). La proyección natural $\pi : T^*M \longrightarrow M$, está dada por $\pi(q, \alpha) = q$, y su pullback puntual en q, es una aplicación lineal $d\pi^*_{(q,\alpha)} : T^*_q M \longrightarrow T^*_{(q,\alpha)}(T^*M)$. Se define $\tau \in \Omega^1(T^*M)$ por

$$\tau_{(q,\alpha)} = d\pi^*_{(q,\alpha)}\alpha. \tag{3.23}$$

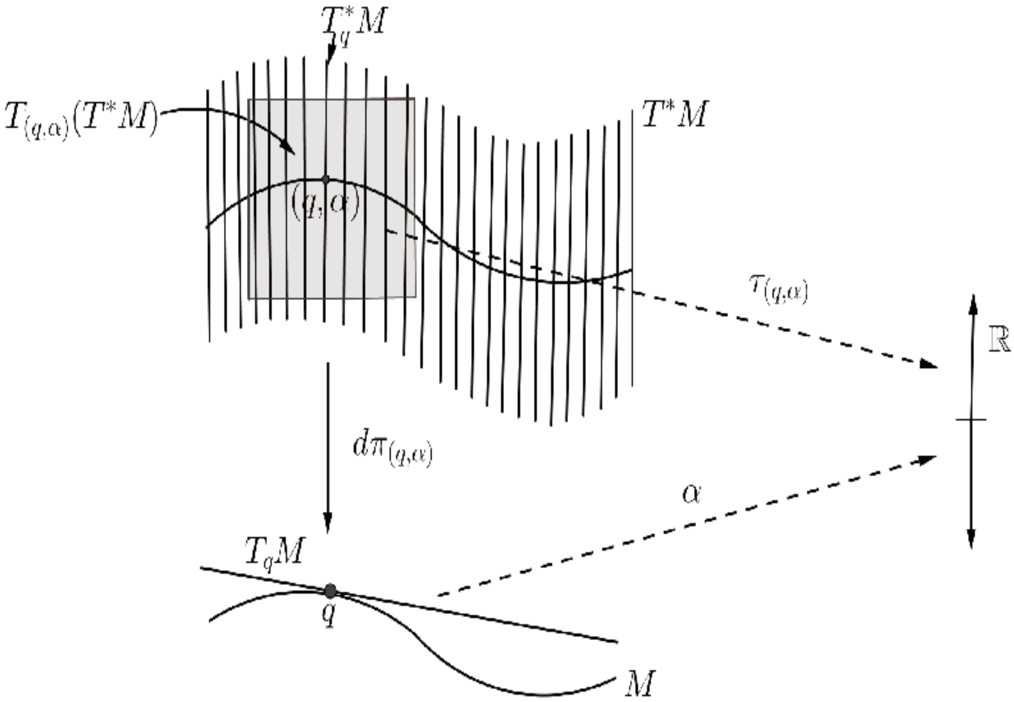

Figura 3.6: 1-forma tautológica

Observe la figura 3.6. En otra palabras, el valor de τ en $(q, \alpha) \in T^*M$, es el pullback con respecto a π del covector α en el punto (q, α). Si v es un vector tangente en $T_{(q,\alpha)}(T^*M)$, entonces

$$\tau_{(q,\alpha)}(v) = \alpha(d\pi_{(q,\alpha)}(v)).$$

Proposición 3.50. *Sea M variedad suave. La 1-forma τ tautológica es suave y $(T^*M, -d\tau)$ es una variedad simplética.*

Demostración. Sea $(U, \varphi = (x^i))$, carta suave en $p \in M$ y sea $\left(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi} = (x^i, \xi_i)\right)$, denota la carta suave correspondiente en $(p, \xi) \in T^*M$. En términos de estas coordenadas, la proyección $\pi : T^*M \longrightarrow M$, tiene la representación coordenada $\pi(x, \xi) = x$. Esto implica que $d\pi^*(dx^i) = dx^i$, y en consecuencia,

$$\tau_{(x,\xi)} = d\pi^*_{(x,\xi)}\left(\xi_i dx^i\right) = \xi_i dx^i \tag{3.24}$$

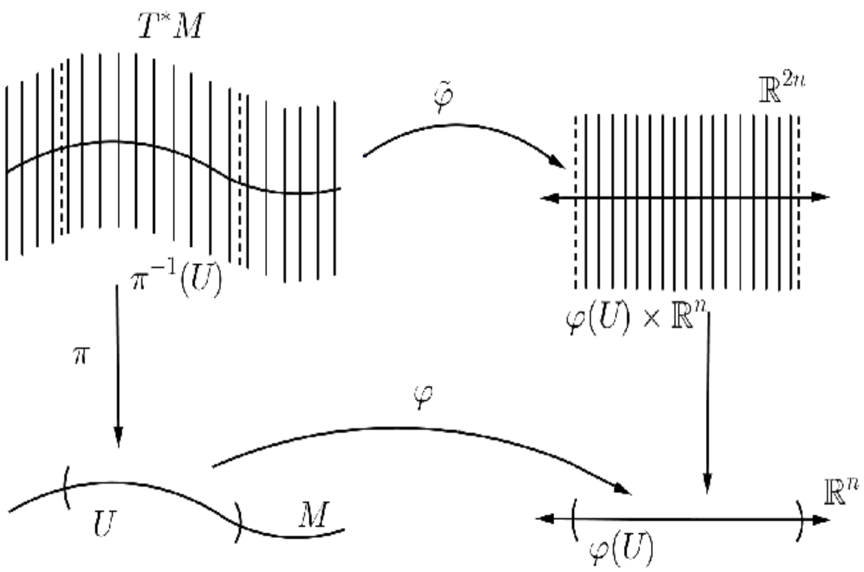

Figura 3.7: Coordenadas para fibrado cotangente

Como las funciones coordenadas son lineales, por lo tanto, τ es suave.

Sea $\omega = -d\tau \in \Omega^2(T^*M)$. Como $d\omega = -d^2\tau = 0$, entonce ω es cerrado. Además, τ en coordenadas naturales definida en 3.24, se cumple:

$$\omega = -d\tau = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge d\xi_i.$$

La forma ω, es cerrado y no-degenerado por el ejemplo 3.27, por consiguiente (T^*M, ω), es estructura simplética. $\square$

Proposición 3.51. *La* $1-$*forma* $\tau \in \Omega^1(T^*M)$, *es únicamente caracterizada por la propiedad:*

$$\sigma^*\tau \quad = \quad \sigma, \tag{3.25}$$

para cualquier $1-$*forma* $\sigma : M \longrightarrow T^*M$.

Demostración. Sean cartas suaves $(U,(x^i))$ en $p\in M$, y $(\pi^{-1}(U),(x^i,a_j))$ en $(p,\sigma)\in T^*M$. La 1-forma σ en M, es escrito de la forma:

$$\sigma_x=\sum_{j=1}^{n}a_j(x)dx^j.$$

Consideramos σ, como aplicación de M, para T^*M, la representación coordenada es dada:

$$\sigma(x)=(x^1(x),...,x^n(x),a_1(x),...,a_n(x))$$

EL pullback de τ, mediante el σ, se tiene:

$$\begin{aligned}
\big(\sigma^*\tau\big)_x &= \sigma^*_{*x}\big(\tau_{(x,\sigma_x)}\big)\\
&= \sigma^*_{*x}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_j(x)dx^j\Big)_x\\
&= \sum_{j=1}^{n}a_j(x)\big(\sigma^*dx^j\big)_x\\
&= \sum_{j=1}^{n}a_j(x)d(x^j\circ\sigma)_x\\
&= \sum_{j=1}^{n}a_j(x)\big(dx^j\big)_x\\
&= \sigma_x.
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.52. *Sean (M_1,ω_1) y (M_2,ω_2) variedades simpléticas y sea $M=M_1\times M_2$ la variedad producto con proyecciones $Pr_1:M\longrightarrow M_1$, y $Pr_2:M\longrightarrow M_2$. La 2-forma ω definida sobre M por*

$$\omega=Pr_1^*\omega_1-Pr_2^*\omega_2$$

es simplética.

Demostración. La 2-forma ω es obviamente cerrada pues,

$$d\omega=Pr_1^*d\omega_1-Pr_2^*d\omega_2=0.$$

Observe, además que el espacio tangente en un punto $p = (p_1, p_2)$ de la variedad producto $M = M_1 \times M_2$ es identificado con la suma directa $T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$. Como ω_1 es no-degenerado entonces para $u_1 \neq 0$, existe $v_1 \in T_{p_1}M_1$ tal que $\omega_1(u_1, v_1) \neq 0$. Dado $U = (u_1, u_2) \neq 0$ entonces existe $V = (\omega_1(u_1, v_1)v_1, -\omega_2(u_2, v_2)v_2) \in T_p(M_1 \times M_2)$ tal que

$$\omega(U, V) = [\omega_1(u_1, v_1)]^2 + [\omega_2(u_2, v_2)]^2 \neq 0.$$

□

3.2.3. Teorema de Darboux

El objetivo es mostrar que toda variedad simplética de dimensión finita, son locamente parecidas. El interés del teorema de Darboux, es el estudio local de resultados en variedades simpléticas y fue formulada por Darboux de la siguiente manera:

Teorema 3.53. *Sea (M, ω_0) una variedad simplética de dimensión $2n$. Entonces para cada punto $p_0 \in M$, existe vecindad coordenada $(U, (x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n))$ tal que*

$$\omega_0 = \sum_{k=1}^{n} dx^k \wedge dy^k.$$

Para probar, demostraré algunos resultados primero:

Proposición 3.54. *Sea M una variedad suave. Suponga que $V : J \times M \longrightarrow TM$, es un campo vectorial suave dependiente de tiempo y $\psi : \mathcal{E} \subset J \times J \times M \longrightarrow M$, su flujo dependiente de tiempo del V. Para cualquier campo tensorial covariante suave $A \in T^k(M)$ y cualquier $(t_1, t_0, p) \in \mathcal{E}$,*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_1} (\psi^*_{t,t_0} A)_p \quad = \quad \left(\psi^*_{t_1,t_0}(\mathcal{L}_{V_{t_1}} A)\right)_p. \tag{3.26}$$

Demostración. Para $t_1 = t_0$, se reduce a $\psi_{t_0,t_0} = Id_M$ y

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \left(\psi^*_{t,t_0} A\right)_p \quad = \quad \left(\mathcal{L}_{V_{t_0}} A\right)_p \tag{3.27}$$

Para el caso especial, $A = f$ 0-campo tensorial suave:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \left(\psi^*_{t,t_0} f\right)_p &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=t_0} f\big(\psi(t, t_0, p)\big) = V(t_0, \psi(t_0, t_0, p))f \\ &= \left(\mathcal{L}_{V_{t_0}} f\right)(p). \end{aligned}$$

Ahora, considere $A = df$, 1-forma. En cualquier coordenada local suave (x^i), la función $\psi^*_{t,t_0} f(x)$, depende suavemente de $n+1$ variables $(t, x^1, ..., x^n)$. Así, la derivada parcial $\dfrac{\partial}{\partial t}$ conmuta con todas las derivadas parciales $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, cuando aplicamos a $\psi^*_{t,t_0} f$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \big(\psi^*_{t,t_0} df\big)_p &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=t_0} d\big(\psi^*_{t,t_0} f\big)_p \\ &= d\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=t_0} \big(\psi^*_{t,t_0} f\big)\Big)_p \\ &= d\big(\mathcal{L}_{V_{t_0}} f\big)_p, \text{ por ecuación (3.27), para 0-tensor} \\ &= \big(\mathcal{L}_{V_{t_0}} df\big)_p \end{aligned}$$

Queda demostrado la ecuación, (3.27) para $A = f$ y $A = df$.

En seguida, supongamos que $A = B \otimes C$, donde B y C, son algunos campos tensoriales covariantes y asumimos que es verdad la ecuacioón (3.27), para B y C.

Por regla del producto para derivada de Lie, se tiene

$$\Big(\mathcal{L}_{V_{t_0}}(B \otimes C)\Big)_p = \big(\mathcal{L}_{V_{t_0}} B\big)_p \otimes C_p + B_p \otimes \big(\mathcal{L}_{V_{t_0}} C\big)_p. \tag{3.28}$$

Por otro lado, satisface

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \big(\psi^*_{t,t_0}(B \otimes C)\big)_p = \Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \big(\psi^*_{t,t_0} B\big)_p\Big) \otimes C_p + B_p \otimes \Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \big(\psi^*_{t,t_0} C\big)_p\Big)$$

Esta igualdad y la ecuación (3.28), implica que

$$\Big(\mathcal{L}_{V_{t_0}}(B \otimes C)\Big)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \big(\psi^*_{t,t_0}(B \otimes C)\big)_p \tag{3.29}$$

Esto demuestra que la ecuación (3.27), es válida para A, cuando B y C satisface.

Por inducción: para un campo tensorial covariante suave arbitrario, el dicho campo tensorial es escrito localmente como suma de campos tensoriales de la forma $A = f dx^{i_1} \otimes x^{i_2} \otimes ... \otimes dx^{i_k}$. Es suficiente demostrar la ecuación (3.27), para A.

Considere $A = \underbrace{f dx^{i_1}}_{B} \otimes \underbrace{dx^{i_2} \otimes dx^{i_3} \otimes ... \otimes dx^{i_k}}_{C}$. Entonces por la ecuación (3.29), queda demostrado la ecuación (3.27), para cualquier campo tensorial covariante.

Usando el teorema fundamental de flujo 1.30, (d): para t_1, arbitrario

$$\psi_{t,t_0} = \psi_{t,t_1} \circ \psi_{t_1,t_0},$$

Por lo tanto,

$$d(\psi_{t_1,t_0})_p^* : T^k(T^*_{\psi_{t_1,t_0}(p)}M) \longrightarrow T^k(T^*_pM)$$

no depende de t y

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_1}(\psi^*_{t,t_0}A)_p &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_1} d(\psi_{t,t_0})_p^*(A_{\psi_{t,t_0}(p)}) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_1} d(\psi_{t_1,t_0})_p^* \circ d(\psi_{t,t_1})^*_{\psi_{t_1,t_0}(p)}(A_{\psi_{t,t_0}(p)}) \\
&= d(\psi_{t_1,t_0})_p^* \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_1} d(\psi_{t,t_1})^*_{\psi_{t_1,t_0}(p)}(A_{\psi_{t,t_1}\circ\psi_{t_1,t_0}(p)}) \\
&= d(\psi_{t_1,t_0})_p^* \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_1}(\psi^*_{t,t_1}A)_{\psi_{t_1,t_0}(p)}\right) \\
&= (\psi^*_{t_1,t_0}(\mathcal{L}_{V_{t_1}}A))_p, \text{ por ecuación (3.27).}
\end{aligned}$$

□

Corolário 3.55. *Sea M una variedad suave y $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Suponga que $V : J \times M \longrightarrow TM$, un campo vectorial suave dependiente de tiempo en M, $\psi : \mathcal{E} \subset J \times J \times M \longrightarrow M$, flujo dependiente de tiempo del V y $A : J \times M \longrightarrow T^k(T^*M)$, un campo tensorial suave dependiente de tiempo en M. Entonces para todo $(t_1, t_0, p) \in \mathcal{E}$,*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_1}(\psi^*_{t,t_0}A_t)_p = \left(\psi^*_{t_1,t_0}(\mathcal{L}_{V_{t_1}}A_{t_1} + \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_1}A_t)\right)_p. \tag{3.30}$$

Demostración. Para $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeño, considere la aplicación suave $F : \langle t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon\rangle \times \langle t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon\rangle \longrightarrow T^k(T_p^*M)$ es definida por:

$$F(u, v) = \big(\psi^*_{u,t_0}A_v\big)_p = d\big(\psi_{u,t_0}\big)_p^*\big(A_v\Big|_{\psi_{u,t_0}(p)}\big).$$

Como F, toma valores en el espacio vectorial de dimensión finita $T^k(T_p^*M)$, entonces aplicamos la regla de cadena y la proposición 3.54, para concluir que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_1} F(t,t) &= \frac{\partial F}{\partial u}(t_1,t_1) + \frac{\partial F}{\partial v}(t_1,t_1)\\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_1} F(t,t_1) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_1} F(t_1,t)\\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_1}\big(\psi^*_{t,t_0} A_{t_1}\big) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_1} d(\psi_{t_1,t_0})^*_p\Big(A_t\Big|_{\psi_{t_1,t_0}(p)}\Big)\\
&= \big(\psi^*_{t_1,t_0}(\mathcal{L}_{V_{t_1}} A_{t_1})\big)_p + d\big(\psi_{t_1,t_0}\big)^*_p\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_1} A_t\Big|_{\psi_{t_1,t_0}(p)}\Big)\\
&= \big(\psi^*_{t_1,t_0}(\mathcal{L}_{V_{t_1}} A_{t_1})\big)_p + \Big(\psi^*_{t_1,t_0}\big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_1} A_t\big)\Big)_p.
\end{aligned}$$

□

Demostración del teorema de Darboux. Sea $p_0 \in M$ arbitrario. Entonces existe una carta suave $(U,\tilde{\varphi})$ centrada en p_0. Considere la variedad simplética $(\mathbb{R}^{2n},\tilde{\omega}_1)$, donde

$$\tilde{\omega}_1 = \sum_{k=1}^{n} d\hat{x}^k \wedge d\hat{y}^k \tag{3.31}$$

Como $\omega_1 = \tilde{\varphi}^*\tilde{\omega}_1$ y ω_0 definen formas simpléticas en M, mediante el cambio de variable por transformación lineal obtenemos $\omega_1\Big|_{p_0} = \omega_0\Big|_{p_0}$.

Sea $\eta = \omega_1 - \omega_0$. Entonces $d\eta = 0$, o sea, η es cerrada y por el lema de Poncaré, existe $\alpha \in \Omega^1(U)$ tal que $-\eta = d\alpha$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $\alpha\Big|_{p_0} = 0$.

Para cada $t \in \mathbb{R}$, defina $\omega_t : U \longrightarrow \Lambda^2(T^*U)$ por $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$. Luego, $\omega_t\Big|_{p_0} = (1-t)\omega_0\Big|_{p_0} + t\omega_1\Big|_{p_0} = \omega_0\Big|_{p_0}$, es no-degenerado, para todo $t \in \mathbb{R}$.
Ahora, definimos $\omega : \mathbb{R}\times U \longrightarrow \Lambda^2(T^*U)$ por

$$\omega(t,p) = \omega_t(p). \tag{3.32}$$

Identificando en un punto p el elemento de $\Lambda^2(T^*U)$, con una matriz alternada en p, tenemos la composición de ω con determinante: $Det \circ \omega : \mathbb{R}\times U \longrightarrow \mathbb{R}$,

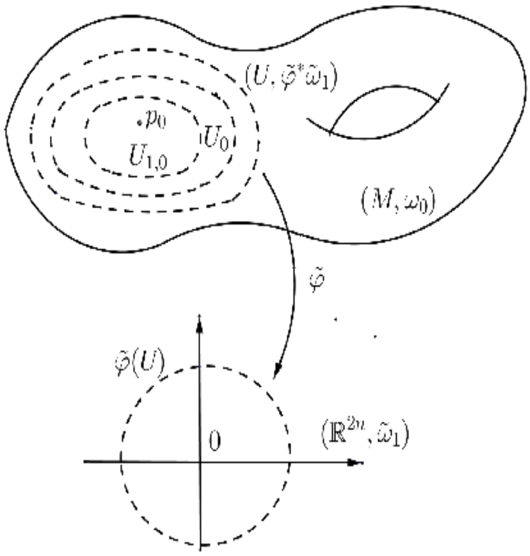

Figura 3.8: teorema de Darboux

$Det \circ \omega(t,p) = Det\big(\omega_t(p)\big)$.

Sea J, un intervalo abierto acotado tal que $[0,1] \subset J$. Como $\omega_t\Big|_{p_0}$ es no-degenerado, para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces $Det\big(\omega_t(p_0)\big) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Por continuidad, para todo $t_0 \in \bar{J}$ y $p_0 \in U$, existe un abierto $\langle t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon \rangle \times U_{t_0}$, en $\mathbb{R} \times U$ tal que

$$Det\big(\omega_t(p)\big) \neq 0, \text{ para todo } (t,p) \in \langle t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon \rangle \times U_{t_0}.$$

Por compacidad de $\bar{J}$, existen $t_1, ..., t_k \in \bar{J}$ y $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k > 0$ tal que

$$\bar{J} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \langle t_i - \varepsilon_i, t_i + \varepsilon_i \rangle,$$

y respectivos vecindades $U_{t_1}, ..., U_{t_k}$ en p_0.

Escogemos $U_1 = \bigcap_i^k U_{t_i}$. Entonces existe un abierto U_1 en U centrado en p_0 tal que ω_t es no-degenerado para todo $t \in \bar{J}$ y para cada $p \in U_1$.

Como $\omega_t\Big|_p$ es no degenerado para todo $(t,p) \in \bar{J} \times U_1$, define un homomorfismo de fibrados

$$\begin{array}{rccl} \hat{\omega}_t : & TU_1 & \longrightarrow & T^*U_1 \\ & X & \longmapsto & \hat{\omega}_t(X) \;= \omega(X, .) \end{array}$$

que es suave, y un isomorfismo para todo $t \in \bar{J}$.

Defina un campo vectorial suave dependiente del tiempo

$$\begin{array}{rccl} V: & J \times U_1 & \longrightarrow & TU_1 \\ & (t,p) & \longmapsto & V(t,p) = \hat{\omega}_t\Big|_p^{-1}(\alpha_p). \end{array}$$

Por suposición $\alpha|_{p_0} = 0$ y como $0 = \omega_t\Big|_{p_0}(V(t,p_0),.)$. De este modo,

$$V(t,p_0) = 0, \text{ para todo } t \in J.$$

Si $\psi : \mathcal{E} \subset J \times J \times U_1 \longrightarrow U_1$, es un flujo dependiente del tiempo de V (por teorema 1.30) entonces $\psi(t,0,p_0) = p_0$, para todo $t \in J$. Por tanto, $J \times \{0\} \times \{p_0\} \subset \mathcal{E}$. Como $\mathcal{E}$ es abierto en $J \times J \times M$ y $[0,1]$ es compacto, entonces existe una vecindad U_0 en p_0 tal que $[0,1] \times \{0\} \times U_0 \subset \mathcal{E}$.

Como satisface las hipótesis del corolario 3.55, entonces para cada $t_1 \in [0,1]$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_1}\Big(\psi^*_{t,0}\omega_t\Big) &= \psi^*_{t_1,0}\Big(\mathcal{L}_{V_{t_1}}\omega_{t_1} + \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_1}\omega_t\Big) \\ &= \psi^*_{t_1,0}\big(\boldsymbol{i}_{V_{t_1}}d\omega_{t_1} + d\boldsymbol{i}_{V_{t_1}}\omega_{t_1} + \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_1}\omega_t\big) \\ &= \psi^*_{t_1,0}(d\alpha + \eta) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces $\psi^*_{t,0}\omega_t$ =constante, para todo $t \in [0,1]$, lo que implica $\psi^*_{1,0}\omega_1 = \omega_0$. Por otro, lado

$$\omega_0 = \big(\tilde{\varphi} \circ \psi_{1,0}\big)^*\tilde{\omega}_1 = \sum_{k=1}^{n} d\big(\hat{x}^k \circ \tilde{\varphi} \circ \psi_{1,0}\big) \wedge d\big(\hat{y}^k \circ \tilde{\varphi} \circ \psi_{1,0}\big),$$

es suficiente considerar las funciones coordenadas $\big(U_{1,0}, (\hat{x}^1 \circ \tilde{\varphi} \circ \psi_{1,0}, ..., \hat{x}^n \circ \tilde{\varphi} \circ \psi_{1,0}, \hat{y}^1 \circ \tilde{\varphi} \circ \psi_{1,0}, ..., \hat{y}^n \circ \tilde{\varphi} \circ \psi_{1,0})\big)$. □

3.2.4. Campos vectoriales simpléticos y Hamiltonianos

Definición 3.56. Una aplicación suave $\phi : M \longrightarrow N$ entre variedades simpléticas (M, ω_1) y (N, ω_2), es llamado aplicación simplética se $\phi^*\omega_2 = \omega_1$. Además, si ϕ es un difeomorfismo entonces diremos que ϕ, es un *simplectomorfismo.*

Sea (M,ω) una variedad simplética y sea $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Su diferencial dH es un $1-$forma. Por ser ω no-degenerado, existe un único campo vectorial X_H en M tal que $\boldsymbol{i}_{X_H}\omega = dH$. Supongamos que M es compacto, o por lo menos X_H sea completo y sea $\{\psi_t : M \longrightarrow M\}_{t\in\mathbb{R}}$, la familia de difeomorfismos determinado por el flujo $\psi : \mathbb{R}\times M \longrightarrow M$ de X_H. Entonces, para todo $p \in M$

$$\begin{aligned}
\psi^{(p)\prime}(t) &= X_{H\psi^{(p)}(t)}\\
\psi^{(p)}(0) &= p.
\end{aligned}$$

Teorema 3.57. *Cada difeomorfismo ψ_t preserva ω, es decir, $\psi_t^*\omega = \omega$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración. En efecto, primero mostremos la igualdad

$$\begin{aligned}
\psi_t^*\big(\mathcal{L}_{X_H}\omega\big)(p) &= \big(\mathcal{L}_{X_H}\omega\big)_{\psi_t(p)} \circ (\psi_t)_{*p}\\
&= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\Big(\psi_s^*\omega\Big)_{\psi_t(p)} \circ (\psi_t)_{*p}\\
&= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\omega_{\psi_{s+t}(p)} \circ (\psi_{t+s})_{*p}\\
&= \frac{d}{dt}\big(\psi_t^*\omega\big)(p).
\end{aligned}$$

Usando la igualdad tenemos

$$\frac{d}{dt}\psi_t^*\omega = \psi_t^*\big(\mathcal{L}_{X_H}\omega\big) = \psi_t^*\big(d\boldsymbol{i}_{X_H}\omega + \boldsymbol{i}_{X_H}d\omega\big) = 0.$$

Por consiguiente, para cualquier función definida en (M,ω), da una familia de simplectomorfismos.

$\square$

Note que en la prueba del teorema se uso que ω, es no-degenerado y cerrado.

Definición 3.58. Sea (M,ω) una variedad simplética. Un campo vectorial X, es dicho campo simplético si,

$$d\big(\boldsymbol{i}_X\omega\big) = 0.$$

Definición 3.59. Sea (M, ω) una variedad simplética. Un campo vectorial X_H que satisface

$$\boldsymbol{i}_{X_H}\omega = dH,$$

es llamado el campo vectorial Hamiltoniano con función Hamiltoniano H.

Ejemplo 3.31. *Para la función altura $H(\theta, h) = h$ sobre la esfera $(M, \omega) = (S^2, d\theta \wedge dh)$, se tiene*

$$\boldsymbol{i}_{X_H}(d\theta \wedge dh) = dh \Longleftrightarrow X_H = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Así, la aplicación $\psi_t(\theta, h) = (\theta + t, h)$ es rotación sobre el eje vertical; la función altura H es preservada por el ψ_t.

Observación. Si X_H es Hamiltoniano entonces

$$\mathcal{L}_{X_H}H = \boldsymbol{i}_{X_H}dH + d\boldsymbol{i}_{X_H}H = \boldsymbol{i}_{X_H}\boldsymbol{i}_{X_H}\omega = 0.$$

Por lo tanto, campos vectoriales Hamiltonianos preserva su función Hamiltoniano y cada curva integral $\{\psi^{(p)} : I \longrightarrow M\}$ de X_H está contenido en un conjunto de nivel de H:

$$H(p) = \big(\psi_t^* H\big)(p) = H(\psi_t(p)), \text{ para todo } t \in I.$$

3.2.5. Corchete de Poisson

Los campos vectoriales son operadores diferenciales en espacio de funciones: si X es un campo vectorial y $f \in C^\infty(M)$, y siendo df el correspondiente $1-$forma entonces

$$Xf = df(X) = \mathcal{L}_X f.$$

Dados dos campos vectoriales X y Y, entonces existe un único campo vectorial W tal que

$$\mathcal{L}_W f = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y f) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X f).$$

Donde $W = [X, Y]$, y $\mathcal{L}_W = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$ es el conmutador.

Teorema 3.60. *Para cualquier forma* $\omega \in \Omega^2(M)$,

$$\boldsymbol{i}_{[X,Y]}\omega = \mathcal{L}_X \boldsymbol{i}_Y \omega - \boldsymbol{i}_Y \mathcal{L}_X \omega = [\mathcal{L}_X, \boldsymbol{i}_Y]\omega.$$

Demostración. Usando la proposición 1.55 d), para $\boldsymbol{i}_Y\omega \in \Omega^1(M)$ se tiene

$$\begin{aligned}\Big(\mathcal{L}_X\big(\boldsymbol{i}_Y\omega\big)\Big)(Y_1) &= \mathcal{L}_X\Big(\big(\boldsymbol{i}_Y\omega\big)(Y_1)\Big) - \boldsymbol{i}_Y\omega\big(\mathcal{L}_X Y_1\big) &(3.33)\\ &= \mathcal{L}\Big(\omega(Y,Y_1)\Big) - \boldsymbol{i}_Y\omega\big(\mathcal{L}_X Y_1\big) &(3.34)\end{aligned}$$

y nuevamente por la proposición 1.55, obtenemos

$$\mathcal{L}_X\Big(\omega(Y,Y_1)\Big) = \Big(\mathcal{L}_X\omega\Big)(Y,Y_1) + \omega(\mathcal{L}_X Y, Y_1) + \omega(Y, \mathcal{L}_X Y_1). \qquad (3.35)$$

Remplazando (3.35) en (3.34), obtenemos

$$\begin{aligned}\Big(\mathcal{L}_X\big(\boldsymbol{i}_X\omega\big)\Big)(Y_1) &= \Big(\mathcal{L}_X\omega\Big)(Y,Y_1) + \omega(\mathcal{L}_X Y, Y_1)\\ &= \boldsymbol{i}_Y\big(\mathcal{L}_X\omega\big)(Y_1) + \boldsymbol{i}_{[X,Y]}\omega(Y_1).\end{aligned}$$

$\square$

Corolário 3.61. *Si* X *y* Y *son campos vectoriales simpléticos sobre una variedad simplética* (M,ω), *entonces* $[X,Y]$ *es Hamiltoniano con función Hamiltoniano* $\omega(X,Y)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}_{[X,Y]}\omega &= \mathcal{L}_X\boldsymbol{i}_Y\omega - \boldsymbol{i}_Y\mathcal{L}_X\omega\\ &= d\boldsymbol{i}_X\boldsymbol{i}_Y\omega + \boldsymbol{i}_X\underbrace{d\boldsymbol{i}_Y\omega}_{0} - \boldsymbol{i}_Y\underbrace{d\boldsymbol{i}_X\omega}_{0} - \boldsymbol{i}_Y\boldsymbol{i}_X\underbrace{d\omega}_{0}\\ &= d\omega(Y,X).\end{aligned}$$

$\square$

Definición 3.62. El corchete de Poisson para dos funciones $f, g \in C^\infty(M)$, es definida por:

$$\{f,g\} = \omega(X_f, X_g). \qquad (3.36)$$

Como $X_{\omega(X_f,X_g)} = [X_g, X_f]$ entonces $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$.

Teorema 3.63. *El corchete de Poisson* $\{.,.\}$ *satisface la identidad de Jacobi:*

$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$$

.

Demostración. Usando la proposición 1.66 y $d\omega(X_f,X_g,X_h)=0$ tenemos:

$$\begin{aligned}
0 &= X_f\omega(X_g,X_h)-X_g\omega(X_f,X_h)+X_h\omega(X_f,X_g)-\omega([X_f,X_g],X_h)\\
&\quad +\omega([X_f,X_h],X_g)-\omega([X_g,X_h],X_f)\\
&= X_f\{g,h\}-X_g\{f,h\}+X_h\{f,g\}+\omega(X_{\{f,g\}},X_h)-\omega(X_{\{f,h\}},X_g)+\\
&\quad \omega(X_{\{g,h\}},X_f)\\
&= \{\{g,h\},f\}-\{\{f,h\},g\}+\{\{f,g\},h\}+\{\{f,g\},h\}-\{\{f,h\},g\}+\{\{g,h\},f\}\\
&= 2\{g,\{f,h\}\}+2\{f,\{h,g\}\}+2\{h,\{g,f\}\}
\end{aligned}$$

□

Corolário 3.64. *El corchete de Poisson* $\{.,.\}$ *definida en (3.36), satisface la regla de Leibniz:*

$$\{f,gh\}=\{f,g\}h+g\{f,h\}.$$

Demostración. Sean $f,g,h\in C^\infty(M)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\{f,gh\} &= \omega(X_f,X_{gh})\\
&= -\boldsymbol{i}_{X_{gh}}\omega(X_f)\\
&= -d(gh)(X_f)\\
&= -dg(X_f)h-gdh(X_f)\\
&= \{f,g\}h+g\{f,h\}.
\end{aligned}$$

□

Concluimos que, si (M, ω) es una variedad simplética entonces $(C^\infty(M), \{.,.\})$, es un álgebra de Lie. Además, tenemos un antihomomorfismo de álgebras de Lie:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ H & \longmapsto & X_H \\ \{f, g\} & \longmapsto & -[X_f, X_g]. \end{array}$$

Sea $\mathfrak{g}^*$ el dual del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. La acción coadjunta de G en $\mathfrak{g}^*$, está dada por:

$$\begin{array}{ccc} Ad^* : G \times \mathfrak{g}^* & \longrightarrow & \mathfrak{g}^* \\ (g, \eta) & \longmapsto & Ad^*_g \eta, \end{array}$$

El grupo isotropico en $\eta \in \mathfrak{g}^*$ está definida por:

$$G_\eta = \{g \in G : Ad^*_g \eta = \eta\}.$$

La órbita coadjunta a través de η es dada por:

$$\mathcal{O}_\eta = \{Ad^*_g \eta \in \mathfrak{g}^* : g \in G\},$$

es una variedad suave difeomorfo a G/G_η y la aplicación inclución $\mathcal{O}_\eta \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$ es una imersión suave.

Teorema 3.65. *Sea G un grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie y $\mathfrak{g}^*$ el espacio vectorial dual de $\mathfrak{g}$.*

a) Sea $\xi^{\mathfrak{g}}$ el campo vectorial generado por $\xi \in \mathfrak{g}$, para la representación adjunta de G en $\mathfrak{g}$. Entonces

$$\xi^{\mathfrak{g}}(\zeta) = [\xi, \zeta], \ \textit{para todo}\ \zeta \in \mathfrak{g}.$$

b) Sea $\xi^{\mathfrak{g}^*}$ el campo vectorial generado por $\xi \in \mathfrak{g}$, para la representación coadjunta de G en $\mathfrak{g}^*$. Entonces

$$\langle \xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta \rangle = -\langle \eta, [\xi, \zeta] \rangle, \ \textit{para todo}\ \zeta \in \mathfrak{g}.$$

c) *Para cualquier $\eta \in \mathfrak{g}^*$, defina una forma bilineal antisimetrica sobre $\mathfrak{g}$ por*

$$\omega_\eta(\xi, \zeta) = \langle \eta, [\xi, \zeta] \rangle.$$

Entonces el núcleo de ω_η, es el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_\eta$ del estabilizador de η para la representación coadjunta.

d) *Verifique que ω_η define un $2-$forma $\omega^{\mathcal{O}_\eta}$, no-degenerada sobre el espacio tangente a la órbita coadjunta en el punto η.*

e) *$\omega^{\mathcal{O}_\eta}$ es cerrada.*

f) *La estructura de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, define un corchete de Poisson en $\mathfrak{g}^*$:*

$$\{f.g\}(\eta) = \langle \eta, [df_\eta, dg_\eta] \rangle,$$

para $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ y $\eta \in \mathfrak{g}^*$. Note que $df_\eta : T_\eta \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, es identificado con un elemento de $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^{**}$. Entonces $\{.,.\}$ satisface la regla de Leibniz,

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

Demostración. *a*) Por definición,

$$\begin{aligned}
\xi^{\mathfrak{g}}(\zeta) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\xi).\zeta \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{\exp(t\xi)}\zeta \\
&= ad_\xi \zeta \\
&= [\xi, \zeta]
\end{aligned}$$

b) Recuerde que $\langle Ad_g^*, \zeta \rangle = \langle \eta, Ad_{g^{-1}}\zeta \rangle$, y considere $g = \exp(t\xi)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle \xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta \rangle &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle Ad^*_{\exp(t\xi)}\eta, \zeta \rangle \\
&= \langle \eta, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{\exp(-t\xi)}\zeta \rangle \\
&= -\langle \eta, [\xi, \zeta] \rangle
\end{aligned}$$

c) Sea (ω_{ij}) la representación matricial de ω_η. Entonces

$$\begin{aligned}
Ker(\omega_{ij}) &= \{\xi \in \mathfrak{g} : \langle \eta, [\xi, \zeta] \rangle = 0,\ \forall \zeta \in \mathfrak{g}\} \\
&= \{\xi \in \mathfrak{g} : \xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta) = 0\}, \text{por b)} \\
&= \mathfrak{g}_\eta.
\end{aligned}$$

$d)$ Sean $\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta) \in T_\eta \mathcal{O}_\eta$. Defina

$$\omega^{\mathcal{O}_\eta}\left(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\right) = -\langle \eta, [\xi, \zeta] \rangle. \tag{3.37}$$

Demostremos que $\omega^{\mathcal{O}_\eta}$ está bien definida:

sean $\xi_1^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta_1^{\mathfrak{g}^*}(\eta) \in T_\eta \mathcal{O}_\eta$ tales que $\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta) = \xi_1^{\mathfrak{g}^*}(\eta)$ y $\zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta) = \zeta_1^{\mathfrak{g}^*}(\eta)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\omega^{\mathcal{O}_\eta}\left(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\right) &= -\langle \eta, [\xi, \zeta] \rangle \\
&= -\langle ad_\xi^* \eta, \zeta \rangle \\
&= \langle \xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta \rangle \\
&= \langle \xi_1^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta \rangle \\
&= -\langle \eta, [\xi_1, \zeta] \rangle \\
&= \langle ad_\zeta^* \eta, \xi_1 \rangle \\
&= \langle ad_{\zeta_1}^* (\eta), \xi_1 \rangle \\
&= \omega^{\mathcal{O}_\eta}\left(\xi_1^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta_1^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\right).
\end{aligned}$$

El $\omega^{\mathcal{O}_\eta}$ es no-degenerada:

$$\begin{aligned}
\omega^{\mathcal{O}_\eta}(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)) &= 0, \ \forall \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta) \in T_\eta \mathcal{O}_\eta \\
-\langle \eta, [\xi, \zeta] \rangle &= 0, \ \forall \zeta \in \mathfrak{g} \\
\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta) &= 0.
\end{aligned}$$

$e)$ Sean $\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta)$ campos vectoriales en $\mathcal{O}_\eta$. Usando la derivada exterior, de la proposición 1.66 resulta que

$d\omega^{\mathcal{O}_\eta}\left(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\right) = \xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\omega^{\mathcal{O}_\eta}\left(\zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\right) - \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\omega^{\mathcal{O}_\eta}\left(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\right)$ $+\gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\omega^{\mathcal{O}_\eta}\left(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\right) - \omega^{\mathcal{O}_\eta}\left([\xi^{\mathfrak{g}}(\eta), \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)], \gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\right) + \omega^{\mathcal{O}_\eta}\left([\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta)], \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\right) -$ $\omega^{\mathcal{O}_\eta}\left([\zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta)], \xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\right)$.

Luego, verifiquemos $Ad_g^*\Big(\omega^{\mathcal{O}_\eta}\Big) = \omega^{\mathcal{O}_\eta}$, para todo $g \in G$:

$$\begin{aligned} d\Big(Ad_g^*\Big)(\xi^{\mathfrak{g}}(\eta)) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(Ad_g^*\Big)\Big(Ad^*_{\exp(t\xi)}\eta\Big) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad^*_{g\exp(t\xi)g^{-1}}\big(Ad_g^*\eta\big) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad^*_{\exp(tAd_g\xi)}\big(Ad_g^*\eta\big) \\ &= \Big(Ad_g\xi\Big)^{\mathfrak{g}^*}\big(Ad_g^*\eta\big) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} Ad_g^*\Big(\omega^{\mathcal{O}_\eta}\Big)\Big(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\Big) &= \Big(\omega^{\mathcal{O}_\eta}\Big)_{Ad_g^*\eta}\Big(d\big(Ad_g^*\big)\big(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\big), d\big(Ad_g^*\big)\big(\zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\big)\Big) \\ &= \Big(\omega^{\mathcal{O}_\eta}\Big)_{Ad_g^*\eta}\Big(\big(Ad_g\xi\big)^{\mathfrak{g}^*}\big(Ad_g^*\eta\big), \big(Ad_g\zeta\big)^{\mathfrak{g}^*}\big(Ad_g^*\eta\big)\Big) \\ &= -\langle Ad_g^*\eta, [Ad_g\xi, Ad_g\zeta]\rangle \\ &= \omega^{\mathcal{O}_\eta}\Big(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\Big) \end{aligned}$$

Usando, la invarianza de $\omega^{\mathcal{O}_\eta}$ por G, se deduce;

$$\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\omega^{\mathcal{O}_\eta}\big(\zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\big) = \omega^{\mathcal{O}_\eta}\big([\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)], \gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\big) + \omega^{\mathcal{O}_\eta}\big(\zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta), [\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta)]\big)$$

$$\zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\omega^{\mathcal{O}_\eta}\big(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\big) = \omega^{\mathcal{O}_\eta}\big([\zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta)], \gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\big) + \omega^{\mathcal{O}_\eta}\big(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), [\zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta)]\big)$$

$$\gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\omega^{\mathcal{O}_\eta}\big(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\big) = \omega^{\mathcal{O}_\eta}\big([\gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta)], \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\big) + \omega^{\mathcal{O}_\eta}\big(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), [\gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)]\big)$$

Reemplazando estas ecuaciones en $d\omega^{\mathcal{O}_\eta}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} d\omega^{\mathcal{O}_\eta}\big(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta^*(\eta), \gamma^*(\eta)\big) &= -\omega^{\mathcal{O}_\eta}\big([\zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta)], \gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\big) + \\ &\quad \omega^{\mathcal{O}_\eta}\big(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), [\gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)]\big) + \omega^{\mathcal{O}_\eta}\big([\gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta)], \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\big) \\ &= \langle \eta, [\gamma, [\zeta, \xi]] + [\xi, [\gamma, \zeta]] + [\zeta, [\xi, \gamma]]\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

$f)$ Por defınción,

$$\begin{aligned} \{f, gh\}(\eta) &= \langle \eta, [df_\eta, d(gh)_\eta]\rangle \\ &= \langle \eta, [df_\eta, h(\eta)dg_\eta + g(\eta)dh_\eta]\rangle \\ &= \langle \eta, [df_\eta, dg_\eta]\rangle h(\eta) + \langle \eta, [df_\eta, dh_\eta]\rangle g(\eta) \\ &= \{f, g\}(\eta)h(\eta) + \{f, h\}(\eta)g(\eta). \end{aligned}$$

□

La forma $\omega^{\mathcal{O}_\eta}$, definida en (3.37) es conocido como la forma de Kirillow-Kostant-Sourian de la órbita coadjunta $\mathcal{O}_\eta$.

Ejemplo 3.32. *Para el prototipo* $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, *donde* $\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$, *tenemos:*

$$X_{x_i} = -\frac{\partial}{\partial y_i} \text{ y } X_{y_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Por lo tanto, $\{x_i, x_j\} = \{y_i, y_j\} = 0$ *y*

$$\{x_i, y_j\} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}, \forall i, j.$$

Para funciones arbitrarias $f, g \in C^\infty(M)$ *se tiene el campo vectorial Hamiltoniano*

$$X_f = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \Big),$$

y el corchete de Poisson clásica es

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -dg(X_f) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big). \end{aligned}$$

3.2.6. Acciones simpléticas y Hamiltonianas

Para definir las acciones simpléticas y Hamiltonianas en geometría simplética, consideré siempre acciones suaves de un grupo de Lie G, en una variedad suave M. La suavidad de $\psi : G \times M \longrightarrow M$, implica que $\psi_g : M \longrightarrow M$, es un difeomorfimo para g fijo. Entonces $S(M) = Diff(M)$ y $G \longrightarrow Diff(M)$, $g \longrightarrow \psi_g$, es homomorfismo de grupos, donde $Diff(M)$ denota el grupo de difeomorfismos.

De la observación de la definición 1.3, el homomorfismo $G \longrightarrow Diff(M)$ determina una acción definida por $\psi(g, p) = \psi_g(p)$.

Definición 3.66. Sea (M,ω) una variedad simplética y sea G un grupo de Lie. La acción $\psi : G \times M \longrightarrow M$, es una acción simplética si, ψ_g es simplectomorfismo, para todo $g \in G$. Es decir,

$$\psi_g^*\omega = \omega, \text{ para todo } g \in G.$$

El conjunto $\{\psi_g : \psi_g^*\omega = \omega\}$, tiene una estructura de grupo.

Ejemplo 3.33. *En $\mathbb{R}^{2n}$ con $\omega = \sum_{k=1}^{n} dx_k \wedge dy_k$, y sea $X = -\frac{\partial}{\partial y_1}$. Las órbitas de la acción generada por X son lineas paralelas al eje y_1,*

$$\{(x_1, y_1 - t, x_2, y_2, ..., x_n, y_n) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Sea $X = X_{x_1}$. Entonces

$$\boldsymbol{i}_X\omega = \sum_{k=1}^{n} dx_k \wedge dy_k(-\frac{\partial}{\partial y_1}, .) = dx_1.$$

Como $X = X_{x_1}$ es un campo Hamiltoniano (con la función Hamiltoniano $H = x_1$), esto es un ejemplo de la acción Hamiltoniana de $\mathbb{R}$, que defino mas adelante y en particular es la acción simplética. Otra forma, para mostrar que es una acción simplética: para $\psi_t(x_1, y_1, ..., x_n, y_n) = (x_1, y_1 - t, x_2, ..., x_n, y_n)$, se tiene

$$\psi_t^*\omega = \sum_{k=1}^{n} d\psi_t^* x_k \wedge d\psi_t^* y_k = \omega, \textit{para todo } t.$$

Ejemplo 3.34. *En el $2-$toro simplético $(\mathbb{T}^2, d\theta_1 \wedge d\theta_2)$, los difeomorfismos son dadas por rotación alrededor de cada circulo, $\psi_{1,t}(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + t, \theta_2)$, $(t \in \mathbb{R})$ y $\psi_{2,t}(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1, \theta_2 + t)$ y definen acciones simpléticas por S^1.*

Ejemplo 3.35. *Sobre la esfera simplética $(S^2, d\theta \wedge dh)$ (en coordenadas cilíndricas), el subgrupo de difeomorfismos es dada por la rotación alrededor del eje vertical, $\psi_t(\theta, h) = (\theta + t, h)$ $(t \in \mathbb{R})$ y es una acción simplética del grupo S^1 (porque preserva la forma de área). Como el campo vectorial correspondiente a ψ, es Hamiltoniano (con la función Hamiltoniana $H = h$). Esto es un ejemplo de acción Hamiltoniana de S^1, que defino a continuación.*

Definición 3.67. Una acción simplética ψ de S^1 o $\mathbb{R}$ en (M, ω) es Hamiltoniana si, el campo vectorial generado por ψ es Hamiltoniano. Equivalentemente, una acción ψ de S^1 o $\mathbb{R}$ en (M, ω), es Hamiltoniana si existe $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ con $dH = \boldsymbol{i}_X\omega$, donde X es el campo vectorial generado por ψ.

Para el caso donde $G = \mathbb{T}^n = S^1 \times ... \times S^1$, es un $n-$toro y una acción $\psi : G \longrightarrow Simp(M, \omega)$, $g \longmapsto \psi_g$ debería ser llamada Hamiltoniana cuando cada restricción al i-enésimo

$$\psi^i = \psi\Big|_{S^1 \text{ i-enésimo factor de } G} : S^1 \longrightarrow Simp(M, \omega),$$

es Hamiltoniana en el sentido de la definición 3.67, con la función Hamiltoniana preservadas por la acción del resto de G.
Cuando G no es producto de factores de S^1 o $\mathbb{R}$, la solución es usar una función Hamiltoniana mejorada conocida, como una aplicación del momento. La constante aditiva y una aplicación del momento μ, es determinada por funciones coordenadas μ_i satisfaciendo $d\mu^i = \boldsymbol{i}_{X_i}\omega$, para una base $\{X_i\}$ del álgebra de Lie de G. Hay varias maneras para fijar esa constante aditiva y podemos siempre escoger μ equivariante, es decir, interrelacionando la acción de G en M con la acción coadjunta de G en el dual del álgebra de Lie.

3.2.7. Aplicación del momento

Generalizo el concepto de función Hamiltoniana de grupos de Lie S^1 o $\mathbb{R}$, para grupos de Lie generales tal función será llamada aplicación del momento.

Definición 3.68. Sea (M, ω) una variedad simplética, G un grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G, $\mathfrak{g}^*$ el espacio vectorial dual de $\mathfrak{g}$ y $\psi : G \times M \longrightarrow M$, una acción simplética. La acción ψ, es una acción Hamiltoniana si, existe una aplicación $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ satisfaciendo:

1. Para cada $\xi \in \mathfrak{g}$, sean

    - $\mu^\xi : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mu^\xi(p) = \langle \mu(p), \xi \rangle$ la componente de μ a lo largo de ξ,

- ξ^M es el campo vectorial en M, definida por el generador infinitesimal de ψ.

Entonces

$$d\mu^{\xi} \quad = \quad \boldsymbol{i}_{\xi^M}\omega, \tag{3.38}$$

es decir, μ^{ξ} es una función Hamiltoniana para el campo vectorial ξ^M.

2. μ es equivariante con respecto a las acciones ψ de G en M y coadjunta Ad^* de G en $\mathfrak{g}^*$:

$$\mu \circ \psi_g \quad = \quad Ad_g^* \circ \mu, \text{ para todo } g \in G. \tag{3.39}$$

La aplicación $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, es llamada *aplicación del momento* para la acción Hamiltoniana dada. Para una acción simplética $\psi : G \times M \longrightarrow M$, del grupo de Lie G en variedad simplética (M, ω), que es Hamiltoniana con aplicación del momento μ, y denoto de aquí en adelante por: (M, ω, G, μ), se denominará G-*variedad Hamiltoniana*.

Ejemplos de aplicación de momento:

Ejemplo 3.36. *Sean $M = \mathbb{R}^2$ y una acción de $G = \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, por traslación $\psi : G \times M \longrightarrow M$, $(g,p) \longmapsto g + p$. Entonces $\mu : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^2$, $\langle \mu(x_1, x_2), (\xi_1, \xi_2) \rangle = \xi_1 x_2 - \xi_2 x_1$ es la aplicación de momento. En efecto, para $\xi = (1, 0)$ se tiene $\xi^M(p) = \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p$ y luego,*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}_{\xi^M}\omega &= \boldsymbol{i}_{\frac{\partial}{\partial x_1}}(dx_1 \wedge dx_2) \\ &= dx_2. \end{aligned}$$

De manera similar, para $\xi = (0, 1)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}_{\xi^M}\omega &= \boldsymbol{i}_{\frac{\partial}{\partial x_2}}(dx_1 \wedge dx_2) \\ &= -dx_1. \end{aligned}$$

En conclusión

$$\begin{aligned}\langle \mu(x_1,x_2),(\xi_1,\xi_2)\rangle &= \xi_1\langle \mu(x_1,x_2),(1,0)\rangle + \xi_2\langle \mu(x_1,x_2),(0,1)\rangle \\ &= \xi_1 x_2 - \xi_2 x_1.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.37. *Sea la acción de S^1 sobre $(\mathbb{C}, \frac{i}{2}dz\wedge d\bar{z})$, por rotaciones:*

$$\begin{aligned}\psi: \; S^1 &\longrightarrow \; Diff(\mathbb{C}) \\ e^{it} &\longmapsto \; \psi_{e^{it}}(z) = \; e^{ikt}.z,\end{aligned}$$

donde k es fijo. La acción es Hamiltoniana con aplicación del momento $\mu:\mathbb{C}\longrightarrow \mathfrak{g}^*\cong\mathbb{R}$, definida por

$$\mu(z) \;=\; -\frac{k}{2}|z|^2 + C, \tag{3.40}$$

donde C, es un constante.

Verifico en coordenadas polares:

$$\mu(re^{i\theta}) = -\frac{k}{2}r^2 + C,$$

donde $z = re^{i\theta}$ y $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$. Como $\frac{i}{2}dz\wedge d\bar{z} = rdr\wedge d\theta$ y para $\xi = 1\in\mathfrak{g}\cong\mathbb{R}$,

$$\xi^{\mathbb{R}^2}(r,\theta) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(r,\theta+kt) = k\frac{\partial}{\partial\theta}\Big|_{(r,\theta)}$$

y se obtiene

$$\boldsymbol{i}_{\xi^{\mathbb{R}^2}}\omega = rdr\wedge d\theta\big(k\frac{\partial}{\partial\theta},.\big) = -krdr = d\big(-\frac{k}{2}r^2 + C\big) = d\langle -\frac{k}{2}r^2 + C, 1\rangle.$$

Ejemplo 3.38. *Sea (M,ω) una variedad simplética con $\omega = -d\lambda$. Si $\psi: G\times M\longrightarrow M$, es una acción que satisface $\psi_g^*\lambda = \lambda$, para todo $g\in G$, entonces la acción es Hamiltoniana con la función Hamiltoniana $\mu^\xi: M\longrightarrow\mathbb{R}$, $\mu^\xi(p) = \boldsymbol{i}_{\xi^M(p)}\lambda_p$, para cada $\xi\in\mathfrak{g}$. De hecho,*

$$\big(\mathcal{L}_{\xi^M}\lambda\big)(p) = \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\big(\psi^*_{\exp(t\xi)}\lambda\big)_p - \lambda_p}{t} = 0.$$

Luego, usando la formula de Cartan:

$$0 = \mathcal{L}_{\xi^M}\lambda = \boldsymbol{i}_{\xi^M}d\lambda + d\big(\boldsymbol{i}_{\xi^M}\lambda\big) \Rightarrow \boldsymbol{i}_{\xi^M}\omega = d\big(\boldsymbol{i}_{\xi^M}\lambda\big)$$

Por lo tanto, $\mu^{\xi} = \boldsymbol{i}_{\xi^M}\lambda$, *para todo* ξ.

Para demostrar que μ, *es equivariante basta justificar:*

$$\mu^{\xi}\big(g.p\big) = \mu^{Ad_{g^{-1}}\xi}(p),\ \forall g \in G,\ \forall p \in M,\ y\, \forall \xi \in \mathfrak{g}.$$

Como

$$\begin{aligned}
\xi^M(g.p) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\xi).(g.p) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi_g \circ \psi_{g^{-1}}\big(\exp(t\xi).(g.p)\big) \\
&= \big(\psi_g\big)_{*p} \circ \big(\psi_{g^{-1}}\big)_{*g.p}\big(\xi^M(g.p)\big) \\
&= \big(\psi_g\big)_{*p}\big((Ad_{g^{-1}}\xi)^M(p)\big),\ \textit{por la proposición 3.32}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mu^{\xi}(g.p) &= \big(\boldsymbol{i}_{\xi^M}\lambda\big)(g.p) \\
&= \lambda_{g.p}\big(\xi^M(g.p)\big) \\
&= \lambda_{g.p}\big(\big(\psi_g\big)_{*p}(Ad_{g^{-1}}\xi)^M(p)\big) \\
&= \big(\psi_g^*\lambda\big)_p\big((Ad_{g^{-1}}\xi)^M(p)\big) \\
&= \lambda_p\big((Ad_{g^{-1}}\xi)^M(p)\big) \\
&= \big(\boldsymbol{i}_{(Ad_{g^{-1}}\xi)^M}\lambda\big)(p) \\
&= \mu^{Ad_{g^{-1}}\xi}(p).
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.39. *Sea* $(T^*M, -d\tau)$ *el fibrado cotangente y considero una acción*

$$\begin{array}{cccl}
\tilde{\psi} & G \times T^*M & \longrightarrow & T^*M \\
 & (g, \alpha_q) & \longmapsto & \tilde{\psi}(g, \alpha_q) \ = (\psi_{g^{-1}})^*_{*g.q}(\alpha_q),
\end{array}$$

donde, un punto en T^*M *es un par* (q, α_q), *con* $q \in M$ *y* $\alpha_q \in T_q^*M$. *La acción* $\tilde{\psi}$ *es Hamiltoniana con la aplicación del momento* μ, *determinado por:*

$$\mu^{\xi}(q, \alpha_q) \;=\; \alpha_q\big(\xi^M(q)\big). \tag{3.41}$$

En efecto, la aplicación proyección $\pi : T^*M \longrightarrow M$, *es equivariante con respecto a las acciones de* $\tilde{\psi}$ *y* ψ, *porque* $\pi \circ \tilde{\psi}_g(q, \alpha_q) = \pi\big((\psi_{g^{-1}}\alpha)^*_{*g.p}\big) = g.p$ *y* $\psi_g \circ \pi(q, \alpha_q) =$

g.p. Luego, como $\psi_g \circ \pi = \pi \circ \tilde{\psi}_g$ *y considerando* $g = \exp(t\xi)$, *se obtiene*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi \circ \tilde{\psi}_{\exp(t\xi)}(q,\alpha_q) = \pi_{*(q,\alpha_q)}\big(\xi^{T^*M}(q,\alpha_q)\big) \tag{3.42}$$

y

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi_{\exp(t\xi)} \circ \pi(q,\alpha_q) = \xi^M(q) \tag{3.43}$$

o sea, $\pi_{*(q,\alpha_q)}\big(\xi^{T^*M}(q,\alpha_q)\big) = \xi^M(q)$ *por (3.42) y (3.43).*

La forma tautológica τ *satisface* $\tilde{\psi}_g^*\tau = \tau$, *para todo* g: *para todo* $\beta_p \in T^*M$ *y para cada* $v \in T_{\beta_p}(T^*M)$,

$$\begin{aligned}
\big(\tilde{\psi}_g^*\tau\big)_{\beta_p}(v) &= \tau_{\tilde{\psi}_g(\beta_p)}\big((\tilde{\psi}_g)_{*\beta_p}(v)\big)\\
&= \tau_{(\psi_{g^{-1}})^*_{*g.p}(\beta_p)}\Big(\big(\tilde{\psi}_g\big)_{*\beta_p}(v)\Big)\\
&= \Big(\psi_{g^{-1}}\Big)^*_{*g.p}(\beta_p)\Big(\pi_{*(\psi_{g^{-1}})^*_{*g.p}(\beta_p)}\big(\tilde{\psi}_g\big)_{*\beta_p}(v)\Big)\\
&= \beta_p\Big(\big(\psi_{g^{-1}}\big)_{*g.p}\big(\pi_{*(\psi_{g^{-1}})^*_{*g.p}(\beta_p)} \circ (\tilde{\psi}_g)_{*\beta_p}\big)(v)\Big)\\
&= \beta_p\big((\psi_{g^{-1}} \circ \pi \circ \tilde{\psi}_g)_{*\beta_p}(v)\big)\\
&= \beta_p\big(\pi_{*\beta_p}(v)\big)\\
&= \tau_{\beta_p}(v)
\end{aligned}$$

Por el ejemplo 3.38, $\mu^\xi = \boldsymbol{i}_{\xi^{T^*M}}\tau$ *en seguida*

$$\begin{aligned}
\mu^\xi(q,\alpha_q) &= \boldsymbol{i}_{\xi^{T^*M}}\tau(q,\alpha_q)\\
&= \tau_{(q,\alpha_q)}\Big(\xi^{T^*M}(q,\alpha_q)\Big)\\
&= \alpha_q\Big(\pi_{*\alpha_q}\big(\xi^{T^*M}(q,\alpha_q)\big)\Big)\\
&= \alpha_q\big(\xi^M(q)\big).
\end{aligned}$$

Teorema 3.69. *Sea* $\phi : H \longrightarrow G$, *un homomorfismo de grupos de Lie y* (M,ω,G,μ), *una* G*-variedad Hamiltoniana. El homomorfismo de álgebras de Lie* $\phi_* : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$, *induce a una aplicación dual* $(\phi_*)^* : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{h}^*$. *La acción de* H *inducida por* ϕ, *tiene aplicación del momento* $(\phi_*)^* \circ \mu$.

Demostración. Defino la acción de H sobre M por $h.p = \phi(h).p$. Sea $\xi \in \mathfrak{h}$, entonces

$$\begin{aligned} \xi^M(p) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\xi).p \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi(\exp(t\xi)).p \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\phi_*(\xi)).p, \text{ por proposición, 3.22 g)} \\ &= \phi_*(\xi)^M(p). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}_{\xi^M}\omega &= d\mu^{\phi_*\xi} \\ &= d\langle(\phi_*)^* \circ \mu, \xi\rangle \\ &= d\big((\phi_*)^* \circ \mu\big)^{\xi}. \end{aligned}$$

Para la equivarianza, antes justifico que

$$(\phi_*)^* \circ Ad^*_{\phi(h)} = Ad^*_h \circ (\phi_*)^*, \tag{3.44}$$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}^* \arrow[r, "(\phi_*)^*"] \arrow[d, "Ad^*_{\phi(h)}"'] & \mathfrak{h}^* \arrow[d, "Ad^*_h"] \\ \mathfrak{g}^* \arrow[r, "(\phi_*)^*"'] & \mathfrak{h}^* \end{tikzcd}$$

Para todo $\eta \in \mathfrak{g}^*$ y $\xi \in \mathfrak{h}$ arbitrarios, tenemos

$$\begin{aligned} \langle(\phi_*)^* \circ Ad^*_{\phi(h)}(\eta), \xi\rangle &= \langle Ad^*_{\phi(h)}(\eta), \phi_*(\xi)\rangle \\ &= \langle \eta, Ad_{\phi(h^{-1})}\phi_*(\xi)\rangle \\ &= \langle \eta, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big(C_{\phi(h^{-1})} \circ \phi\big)(\exp(t\xi))\rangle \\ &= \langle \eta, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\phi(h^{-1}\exp(t\xi)h)\rangle \\ &= \langle \eta, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\phi(\exp(tAd_{h^{-1}}\xi))\rangle, \text{por la proposición, 3.22 g)} \\ &= \langle \eta, \phi_*(Ad_{h^{-1}}(\xi))\rangle \\ &= \langle(\phi_*)^*\eta, Ad_{h^{-1}}(\xi)\rangle \\ &= \langle Ad^*_h \circ (\phi_*)^*(\eta), \xi\rangle. \end{aligned}$$

Sea $\tilde{\mu} = (\phi_*)^* \circ \mu$. Entonces

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(h.p) &= (\phi_*)^*\big(\mu(\phi(h).p)\big) \\
&= (\phi_*)^* \circ Ad^*_{\phi(h)}(\mu(p)) \\
&= Ad^*_h\big((\phi)^*_* \circ \mu(p)\big), \text{ por } (3.44).
\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 3.40. *Sea la acción natural de $U(n)$, sobre $(\mathbb{C}^n, \omega = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\bar{z}_k)$:*

$$\psi(g, z) = g.z, \ z \in \mathbb{C}^n, g \in U(n).$$

Esta acción es Hamiltoniana con una aplicación del momento $\tilde{\mu} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathfrak{u}(n)$, dada por

$$\tilde{\mu}(z) = \frac{i}{2} z z^*,$$

donde el álgebra de Lie $\mathfrak{u}(n)$ es identificado con su dual vía el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(A^*B)$. En efecto, sea el homomorfismo $\rho : U(n) \longrightarrow GL(2n, \mathbb{R})$, $\rho(h + ik) = \begin{pmatrix} h & -k \\ k & h \end{pmatrix}$ entonces $\rho(U(n)) = \left\{ \begin{pmatrix} h & -k \\ k & h \end{pmatrix} : h^T h + k^T k = I_n, h^T k = k^T h \right\}$ actúa en $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ por:

$$g. \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & -k \\ k & h \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

donde $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Como $\mathfrak{u}(n) = \{X : X^* + X = 0\}$ y $X = V + iW$, entonces $V = -V^T$ y $W = W^T$. Además, $\xi = \rho_{*I}(X) = \begin{pmatrix} V & -W \\ W & V \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned}
\xi^{\mathbb{R}^{2n}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\xi). \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\xi)^k}{k!}. \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Vx - Wy \\ Wx + Vy \end{pmatrix} \\
&= (Vx - Wy)^i \frac{\partial}{\partial x^i} + (Wx + Vy)^j \frac{\partial}{\partial y^j}
\end{aligned}$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{i}_{\xi^{\mathbb{R}^{2n}}}\omega(v) &= \sum_{k=1}^{n} dx_k \wedge dy_k(\xi^{\mathbb{R}^{2n}}, v)\\
&= \sum_{k=1}^{n} dx_k \wedge dy_k\big((Vx - Wy)^i\frac{\partial}{\partial x^i} + (Wx + Vy)^j\frac{\partial}{\partial y^j}, v\big)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(Vx - Wy)^k dy_k(v) - \sum_{k=1}^{n}(Wx + Vy)^k dx_k(v)\\
&= \langle Vx, (dy_1(v), ..., dy_n(v))\rangle - \langle Wy, (dy_1(v), ..., dy_n(v))\rangle -\\
&\langle Wx, (dx_1(v), ..., dx_n(v))\rangle - \langle Vy, (dx_1(v), ..., dx_n(v))\rangle\\
&= d\big(-\frac{1}{2}\langle Wx, x\rangle + \langle y, Vx\rangle - \frac{1}{2}\langle Wy, y\rangle\big)(v)
\end{aligned}
$$

lo que implica, $\mu^{\xi}(z) = -\frac{1}{2}\langle Wx, x\rangle + \langle y, Vx\rangle - \frac{1}{2}\langle Wy, y\rangle$. *Se sabe que, para* $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}^n$ *el producto Hermitiano se puede expresar en la parte real y imaginaria:*

$$\langle x_1 + iy_1, x_2 + iy_2\rangle = \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle + i(\langle x_2, y_1\rangle - \langle x_1, y_2\rangle),$$

en seguida,

$$\langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle = \frac{1}{2}\{\langle x_1 + iy_1, x_2 + iy_2\rangle + \overline{\langle x_1 + iy_1, x_2 + iy_2\rangle}\} \tag{3.45}$$

Por otro, lado

$$\begin{aligned}
\mu^{\xi}(z) &= -\frac{1}{2}\{\langle x, Wx+Vy\rangle + \langle -y, Vx-Wy\rangle\}\\
&= -\frac{1}{4}\{\langle x-iy, Wx+Vy+i(Vx-Wy)\rangle + \overline{\langle x-iy, Wx+Vy+i(Vx-Wy)\rangle}\}\\
&= -\frac{1}{4}\{\langle x-iy, i(V-iW)(x-iy)\rangle + \langle i(V-iW)(x-iy), x-iy\rangle\}\\
&= \frac{i}{4}\{\langle x-iy, (V-iW)(x-iy)\rangle - \langle (V-iW)(x-iy), x-iy\rangle\}\\
&= \frac{i}{4}\{\langle x-iy, (V-iW)(x-iy)\rangle - \langle x-iy, \left(V^T+iW^T\right)(x-iy)\rangle\}\\
&= \frac{i}{4}\{2\langle x-iy, (V-iW)(x-iy)\rangle\}\\
&= \frac{i}{2}\langle x-iy, (V-iW)(x-iy)\rangle\\
&= \frac{i}{2}z^*Xz\\
&= \frac{i}{2}tr(zz^*X).
\end{aligned}$$

La compuesta $\tilde{\mu} = \rho_*^*\circ\mu$, *donde* $\mu : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow Lie(\rho(U(n)))^*$ *y* $\rho_*^* : Lie(GL(2n,\mathbb{R}))^* \longrightarrow \mathfrak{u}(n)^* \cong \mathfrak{u}(n)$. *Resulta que*

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}^X(z) &= \langle\tilde{\mu}(z), X\rangle\\
&= \langle\mu(z), \rho_*X\rangle\\
&= \mu^{\xi}(z)\\
&= \frac{i}{2}tr(zz^*X)\\
&= \frac{i}{2}\langle zz^*, X\rangle
\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\tilde{\mu}(z) = \dfrac{i}{2}zz^*$ *y la equivarianza se sigue de,* $\langle\tilde{\mu}(Az), X\rangle = \dfrac{i}{2}Tr(Azz^*A^*X) = \dfrac{i}{2}Tr(zz^*A^*XA) = \langle\dfrac{i}{2}zz^*, A^*XA\rangle = \langle\tilde{\mu}(z), Ad_{A^{-1}}X\rangle = \langle Ad_A^*\tilde{\mu}(z), X\rangle$.

Ejemplo 3.41. *Sea el campo vectorial* $\xi^{\mathfrak{g}}$, *definida para* $\xi \in \mathfrak{g}$. *Para la representación coadjunta de un grupo de Lie* G *en* $\mathfrak{g}^*$, *satisface* $\langle\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta\rangle = -\langle\eta, [\xi,\zeta]\rangle$, *para todo* $\zeta \in \mathfrak{g}$ *(por teorema 3.65). La órbita coadjunta equipada con la forma simplética estándar de Kirillow, Kostant y Sourian,* $\omega = -\omega^{\mathcal{O}_\eta}$. *Demostremos que para cada*

$\eta \in \mathfrak{g}^*$, la acción coadjunta sobre la órbita $G.\eta = \mathcal{O}_\eta$, es Hamiltoniana con la aplicación del momento, la aplicación inclusión:

$$i = \mu : \mathcal{O}_\eta \hookrightarrow \mathfrak{g}^*.$$

En efecto, se sabe que $T_\eta \mathcal{O}_\eta = \{\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta) : \xi \in \mathfrak{g}\}$ (por la proposición 3.33). Entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}_{\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta)}\omega(\zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)) &= -\omega^{\mathcal{O}_\eta}(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)) \\ &= \langle \eta, [\xi, \zeta] \rangle \\ &= \langle -ad^*_\zeta \eta, \xi \rangle \\ &= \langle \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \xi \rangle \end{aligned}$$

Por otro lado, para $\mu^\xi = i^\xi$ tenemos

$$\begin{aligned} di^\xi_\eta(\zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} i^\xi(\exp(t\zeta).\eta) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle i(\exp(t\zeta).\eta), \xi \rangle \\ &= \langle \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad^*_{\exp(t\zeta)}\eta, \xi \rangle \\ &= \langle \zeta^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \xi \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mu = i$ es la aplicación del momento y la equivarianza es inmediata.

Teorema 3.70. *Sea un grupo de Lie G que actúa de manera Hamiltoniana sobre dos variedades simpléticas (M_j, ω_j), $j = 1, 2$, con aplicaciones del momento $\mu_j : M_j \longrightarrow \mathfrak{g}^*$. Entonces la acción diagonal de G sobre $(M_1 \times M_2, Pr_1^*\omega_1 + Pr_2^*\omega_2)$, es Hamiltoniana con la aplicación de momento $\mu : M_1 \times M_2 \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, dada por*

$$\mu(p_1, p_2) = \mu_1(p_1) + \mu_2(p_2), \ \text{para } p_j \in M_j.$$

Demostración. Sea ξ_j un elemento arbitrario de la base $\mathfrak{g}$ y $p = (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$. Entonces

$$\begin{aligned} \xi_j^{M_1 \times M_2}(p) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\xi_j).p \\ &= \big(\xi_j^{M_1}(p_1), \xi_j^{M_2}(p_2)\big). \end{aligned}$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{i}_{\xi_j^{M_1\times M_2}}\big(Pr_1^*\omega_1+Pr_2^*\omega_2\big)(v) &= Pr_1^*\omega_1\big(\xi_j^{M_1\times M_2},v\big)+Pr_2^*\omega_2\big(\xi_j^{M_1\times M_2},v\big)\\
&= \omega_1\big(\xi_j^{M_1},Pr_{1*}(v)\big)+\omega_2\big(\xi_j^{M_2},Pr_{2*}(v)\big)\\
&= \boldsymbol{i}_{\xi_j^{M_1}}\omega_1(Pr_{1*}(v))+\boldsymbol{i}_{\xi_j^{M_2}}\omega_2(Pr_{2*}(v))\\
&= d\mu_1^{\xi_j}(Pr_{1*}(v))+d\mu_2^{\xi_j}(Pr_{2*}(v))\\
&= \langle\big(\mu_1\circ Pr_1\big)_*(v),\xi_j\rangle+\langle\big(\mu_2\circ Pr_2\big)_*(v),\xi_j\rangle\\
&= d\langle Pr_1^*\mu_1+Pr_2^*\mu_2,\xi_j\rangle(v)\\
&= d\big(Pr_1^*\mu_1+Pr_2^*\mu_2\big)^{\xi_j}(v).
\end{aligned}
$$

Entonces, $\mu(p)=Pr_1^*\mu_1(p)+Pr_2^*\mu_2(p)=\mu_1(p_1)+\mu_2(p_2)$. La equivarianza μ:

$$
\begin{aligned}
\mu\big(g.(p_1,p_2)\big) &= \mu_1(g.p_1)+\mu_2(g.p_2)\\
&= Ad_g^*\mu(p_1,p_2).
\end{aligned}
$$

$\square$

Con este teorema, podemos construir varias aplicaciones del momento para acciones diagonales en variedades de productos. Mostraremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3.42. *Sea la acción de S^1 sobre $(\mathbb{C}^n,\omega)$:*

$$
t.(z_1,...,z_n) = (t^{k_1}.z_1,...,t^{k_n}.z_n), \tag{3.46}
$$

con $\omega=\dfrac{i}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}dz_j\wedge d\bar{z}_j$. Tiene un aplicación del momento $\mu:\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathfrak{g}^*\cong\mathbb{R}$, dada por:

$$
\mu(z_1,...,z_n) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}k_j|z_j|^2.
$$

En efecto, considere $(\mathbb{C},\frac{i}{2}dz_j\wedge d\bar{z}_j)$ y $Pr_j:\mathbb{C}\times...\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ la proyección sobre el j-factor, con acción $t.z_j=t^{k_j}.z_j$ es Hamiltoniano (por el ejemplo 3.37), con aplicación de momento $\mu_j:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}$, $\mu_j(z_j)=-\dfrac{k_j}{2}|z_j|^2$. Por el teorema 3.70, la acción diagonal de S^1 sobre $\mathbb{C}^n$, es Hamiltoniano con aplicación de momento $\mu=Pr_1^*\mu_1+...+Pr_n^*\mu_n:\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, $\mu(z_1,...,z_n)=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}k_j|z_j|^2$.

Ejemplo 3.43. *Sea la acción natural de $U(k)$, en la simplética $(M(k \times n, \mathbb{C}), \omega)$, donde $M(k \times n, \mathbb{C})$ denota espacio de matrices complejas de $k \times n$. Identificando el álgebra de Lie $\mathfrak{u}(k)$, con su dual vial producto interno $\langle A, B\rangle = tr(A^* B)$. La dicha acción, es Hamiltoniana con la aplicación del momento dada por:*

$$\tilde{\mu}(Z) = \frac{i}{2} Z Z^* + \frac{Id}{2i}, \quad Z \in M(k \times n, \mathbb{C}).$$

Considero la siguiente identificación:

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ z_{k1} & z_{k2} & & z_{kn} \end{pmatrix} \leftrightarrow (z_1 \ldots z_n),$$

donde $z_j = \begin{pmatrix} z_{1j} \\ z_{2j} \\ \vdots \\ z_{kj} \end{pmatrix}$ *y una acción diagonal en* $\underbrace{\mathbb{C}^k \times \ldots \times \mathbb{C}^k}_{n}$,

$$A.Z = (Az_1, \ldots, Az_n), \; A \in U(k), Z \in M(k \times n, \mathbb{C}).$$

Como $U(k)$, actúa en j-enésimo factor $\mathbb{C}^k$ de $\mathbb{C}^{kn} = \mathbb{C}^k \times \ldots \times \mathbb{C}^k$, de manera Hamiltoniana (por el ejemplo 3.40), con la aplicación de momento $\mu_j : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathfrak{u}(k)$, dada por $\mu_j(z_j) = \frac{i}{2} z_j z_j^*$. Por el teorema 3.70, la acción diagonal $U(k)$, en $\mathbb{C}^{kn}$ es

Hamiltoniana con la aplicación del momento:

$$\begin{aligned}
\mu(Z) &= \mu_1(z_1) + ... + \mu_n(z_n) \\
&= \frac{i}{2}\{z_1 z_1^* + ... + z_n z_n^*\} \\
&= \frac{i}{2}\{\begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{21} \\ \vdots \\ z_{k1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{z}_{11} \; \bar{z}_{21} ... \; \bar{z}_{k1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_{12} \\ z_{22} \\ \vdots \\ z_{k2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{z}_{12} \; \bar{z}_{22} ... \; \bar{z}_{k2} \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} z_{1n} \\ z_{2n} \\ \vdots \\ z_{kn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{z}_{1n} \; \bar{z}_{2n} ... \; \bar{z}_{kn} \end{pmatrix}\} \\
&= \frac{i}{2}\{\begin{pmatrix} z_1 & ... & z_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{z}_1^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} z_1 & ... & z_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \bar{z}_n^T \end{pmatrix}\} \\
&= \frac{i}{2}\{\begin{pmatrix} z_1 & ... & z_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{z}_1^T \\ \vdots \\ \bar{z}_n^T \end{pmatrix}\} \\
&= \frac{i}{2}ZZ^*.
\end{aligned}$$

Sea $\tilde{\mu}(Z) = \frac{i}{2}ZZ^* + \frac{Id}{2i}$ *y sea* $\xi \in \mathfrak{u}(k)$. *Entonces*

$$\tilde{\mu}^\xi(Z) = tr\left(\frac{i}{2}ZZ^*\xi + \frac{\xi}{2i}\right) = \mu^\xi(Z) + tr\left(\frac{\xi}{2i}\right),$$

y por lo tanto, $\tilde{\mu}$ *es la aplicación de momento.*

Teorema 3.71. *Sean* $(M_j, \omega_j, G_j, \mu_j)$, G_j*-variedades Hamiltonianas para* $j = 1, 2$. *Entonces el producto* $M = M_1 \times M_2$ *es una* $G_1 \times G_2$*-variedad Hamiltoniana equipada con la aplicación del momento* $Pr_1^*\mu_1 \times Pr_2^*\mu_2$.

Demostración. Sea $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\xi^M(p) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\xi).p \\
&= (\xi_1^{M_1}(p_1), \xi_2^{M_2}(p_2)).
\end{aligned}$$

Sea $\omega = Pr_1^*\omega_1 + Pr_2^*\omega_2$, 2-forma sobre $M_1 \times M_2$. Luego,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i}_{\xi^M}\omega(\vec{x}) &= \big(\boldsymbol{i}_{\xi^M}Pr_1^*\omega_1 + \boldsymbol{i}_{\xi^M}Pr_2^*\omega_2\big)(\vec{x}) \\
&= \omega_1(Pr_{1*}(\xi^M), Pr_{1*}(\vec{x})) + \omega_2(Pr_{2*}(\xi^M), Pr_{2*}(\vec{x})) \\
&= d\mu_1^{\xi_1}\big(Pr_{1*}(\vec{x})\big) + d\mu_2^{\xi_2}\big(Pr_{2*}(\vec{x})\big) \\
&= d\big(\mu_1 \circ Pr_1\big)^{\xi_1}(\vec{x}) + d\big(\mu_2 \circ Pr_2\big)^{\xi_2}(\vec{x}) \\
&= d\big(\langle Pr_1^*\mu_1, \xi_1\rangle + \langle Pr_2^*\mu_2, \xi_2\rangle\big)(\vec{x}) \\
&= d\langle Pr_1^*\mu_1 \times Pr_2^*\mu_2, (\xi_1, \xi_2)\rangle(\vec{x}).
\end{aligned}$$

Para probar la equivarianza, se sabe que $C_{(g_1,g_2)}(h_1, h_2) = (C_{g_1}(h_1), C_{g_2}(h_2))$. Luego, se tiene

$$\begin{aligned}
\langle \mu(g.p), (\xi_1, \xi_2)\rangle &= \langle\big(\mu_1(g_1.p_1), \mu_2(g_2.p_2)\big), (\xi_1, \xi_2)\rangle \\
&= \langle\big(Ad_{g_1}^*\mu_1(p_1), Ad_{g_2}^*\mu_2(p_2)\big), (\xi_1, \xi_2)\rangle \\
&= \langle \mu_1(p_1), Ad_{g_1^{-1}}\xi_1\rangle + \langle \mu_2(p_2), Ad_{g_2^{-1}}\xi_2\rangle \\
&= \langle (\mu_1(p_1), \mu_2(p_2)), Ad_{g^{-1}}(\xi)\rangle \\
&= \langle Ad^*\mu(p), \xi\rangle.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.44. *Sea* $\mathbb{T}^n = \{(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{C}^n : |t_j| = 1,$ *para todo* $j\}$ *un* $n-$*toro actúa sobre* $(\mathbb{C}^n, \omega = \sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\bar{z}_k)$ *por*

$$(t_1, ..., t_n).(z_1, ..., z_n) = (t_1^{k_1}z_1, ..., t_n^{k_n}z_n),$$

donde $k_1, ..., k_n \in \mathbb{Z}$*, son fijos. Entonces esa acción es Hamiltoniana con la aplicación de momento* $\mu : \mathbb{C}^n \longrightarrow (\mathfrak{t}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$*, dada por*

$$\mu(z_1, ..., z_n) = -\frac{1}{2}\big(k_1|z_1|^2, ..., k_n|z_n|^2\big) + constante.$$

De hecho, considero $(\mathbb{C}, \omega_j = \frac{i}{2}dz_j \times d\bar{z}_j, S^1, \mu_j)$*,* S^1*-variedad Hamiltoniana con la aplicación del momento* $\mu_j(z_j) = -\frac{k_j}{2}|z_j|^2 + constante$ *(por el ejemplo 3.37). Por el teorema 3.71, se obtiene*

$$\mu(z) = \big(Pr_1^*\mu_1 \times ... \times Pr_n^*\mu_n\big)(z) = -\frac{1}{2}(k_1|z_1|^2, ..., k_n|z_n|^2) + constante.$$

3.3. Teorema de Marsden, Weinstein y Meyer

Finalmente, desarrollo el resultado de Marsden, Weinstein y Meyer, sobre la reducción simplética.
El vector (M, ω, G, μ), denota G-variedad Hamiltoniana, que consta de:

- (M, ω), una variedad simplética.
- $\psi : G \times M \longrightarrow M$, una acción Hamiltoniana.
- $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, una aplicación del momento equivariante.

Para $\eta \in \mathfrak{g}^*$, sea un subgrupo $G_\eta = \{g \in G : Ad_g^* \eta = \eta\}$ del grupo de Lie G, induce una acción $\psi^\eta : G_\eta \times \mu^{-1}(\eta) \longrightarrow \mu^{-1}(\eta)$ y se define la *reducción simplética* por:

$$M_\eta^{red} \;=\; \mu^{-1}(\eta)/G_\eta,$$

que viene ser, el espacio topológico cociente.

3.3.1. Demostración del teorema de Marsden, Weinstein y Meyer

Se denota por $G.p$ y $G_\eta.p$, las órbitas para las acciones de G y G_η respectivamente, en el punto $p \in M$; si $p \in \mu^{-1}(\eta)$, entonces $G_\eta.p \subset \mu^{-1}(\eta)$. El siguiente lema de reducción, justifica hechos importante entre espacios tangentes de órbitas y la derivada de la aplicación del momento.

Lema 3.72 (Lema de reducción). *Sea (M, ω, G, μ), G-variedad Hamiltoniana. Si $\eta \in \mathfrak{g}^*$, es un valor regular de μ, $p \in \mu^{-1}(\eta)$ y $G.\eta$ denota la órbita coadjunta en η entonces:*

a) $\mu^{-1}(G.\eta) = G.\mu^{-1}(\eta) = \{g.p : g \in G,\ \mu(p) = \eta\}$;

b) $G_\eta.p = (G.p) \cap \mu^{-1}(\eta)$;

c) $T_p(G_\eta.p) = T_p(G.p) \cap T_p(\mu^{-1}(\eta))$;

d) $T_p(\mu^{-1}(\eta)) = T_p(G.p)^{\omega_p}$.

Demostración.

a) $\mu^{-1}(G.\eta) \subset G.\mu^{-1}(\eta)$:

$$\begin{aligned} p \in \mu^{-1}(G.\eta) &\Rightarrow \mu(p) \in G.\eta \\ &\Rightarrow \mu(p) = g.\eta, \text{ para algún } g \in G \\ &\Rightarrow Ad^*_{g^{-1}}\mu(p) = \eta, \text{ para algún } g \in G \\ &\Rightarrow \mu(g^{-1}.p) = \eta, \text{ para algún } g \in G, \text{ (por la definición (3.39))} \\ &\Rightarrow p = g.(g^{-1}.p) \in G.\mu^{-1}(\eta). \end{aligned}$$

$G.\mu^{-1}(\eta) \subset \mu^{-1}(G.\eta)$:

$$\begin{aligned} p \in G.\mu^{-1}(\eta) &\Rightarrow p = g.q, \text{ para algún } g \in G \text{ y } q \in \mu^{-1}(\eta) \\ &\Rightarrow \mu(p) = Ad^*_g\eta \in G.\eta \\ &\Rightarrow p \in \mu^{-1}(G.\eta) \end{aligned}$$

b) $G_\eta.p \subset G.p \cap \mu^{-1}(\eta)$:

$$\begin{aligned} q \in G_\eta.p &\Rightarrow q = g.p, \text{ para algún } g \in G_\eta \\ &\Rightarrow \mu(q) = Ad^*_g\mu(p) = \eta \\ &\Rightarrow q \in G.p \cap \mu^{-1}(\eta). \end{aligned}$$

$G.p \cap \mu^{-1}(\eta) \subset G_\eta.p$:

$$\begin{aligned} q \in G.p \cap \mu^{-1}(\eta) &\Rightarrow q = g.p, \text{ para algún } g \in G \text{ y } \mu(q) = \eta \\ &\Rightarrow q = g.p, \eta = \mu(g.p) = Ad^*_g\mu(p) = Ad^*_g\eta \\ &\Rightarrow q = g.p, \; g \in G_\eta \\ &\Rightarrow q \in G_\eta.p \end{aligned}$$

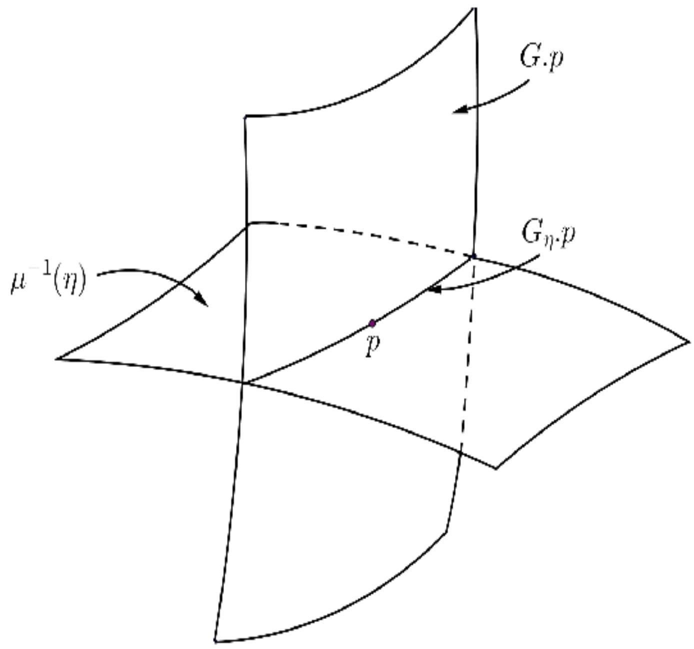

Figura 3.9: Lema de reducción.

c) Primero supongo que $X_p \in T_p(G.p) \cap T_p(\mu^{-1}(\eta))$. Entonces $X_p = \xi^M(p)$, para algún $\xi \in \mathfrak{g}$ y, $X_p \in T_p\mu^{-1}(\eta)$. Por otro, lado

$$
\begin{aligned}
X_p \in T_p\mu^{-1}(\eta) \quad &\Rightarrow \quad X_p \in Kerd\mu_p, \text{ por la proposición } \quad (1.43) \\
&\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mu(exp(t\xi).p) = d\mu_p(\xi^M(p)) = 0, \xi \in \mathfrak{g} \\
&\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} Ad^*_{exp(t\xi)}\mu(p) = 0, \xi \in \mathfrak{g}, \text{ por la definición } (3.39) \\
&\Rightarrow \quad \xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta) = 0, \xi \in \mathfrak{g}.
\end{aligned}
$$

Sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ una curva integral de $\xi^{\mathfrak{g}^*}$, dada por $\gamma(t) = \eta$. Sea la curva $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, definida por $\tilde{\gamma}(t) = Ad^*_{\exp(t\xi)}\eta$, con $\tilde{\gamma}(0) = \eta$ entonces $\tilde{\gamma}$ es curva integral de $\xi^{\mathfrak{g}^*}$. Por unicidad de curvas integrales, $\gamma = \tilde{\gamma}$, es decir $Ad^*_{\exp(t\xi)}\eta = \eta$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Por consiguiente, $\xi \in \mathfrak{g}_\eta = \{\xi \in Lie(G) : \exp(t\xi) \in G_\eta, \forall t \in \mathbb{R}\}$.
Recíprocamente, supongamos que $X_p \in T_p(G_\eta.p)$ entonces $X_p = \xi^M(p)$, para algún $\xi \in \mathfrak{g}_\eta$. Por el resultado b), se tiene $G_\eta.p \subset G.p$ y $G_\eta.p \subset \mu^{-1}(\eta)$, luego resulta que $X_p \in T_p(G.p)$ y $X_p \in T_p(\mu^{-1}(\eta))$.

d) $T_p(\mu^{-1}(\eta)) \subset T_p(G.p)^{\omega_p}$

Si $X_p \in T_p(\mu^{-1}(\eta))$, entonces $X_p \in Kerd\mu_p$. Sea $V \in T_p(G.p) = \{\zeta^M(p) : \zeta \in \mathfrak{g}\}$ un arbitrario. Entonces

$$\begin{aligned} \omega_p(X_p, V) &= -\boldsymbol{i}_V \omega_p(X_p) \\ &= -\boldsymbol{i}_{\zeta^M(p)} \omega_p(X_p), \ \zeta^M(p) = V \\ &= -d\langle \mu, \zeta \rangle_p(X_p), \text{ por definición (3.38)} \\ &= -\langle d\mu_p(X_p), \zeta \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\omega_p(X_p, V) = 0$, $\forall V \in T_p(G.p)$, o sea, $X_p \in T_p(G.p)^{\omega_p}$.

$T_p(G.p)^{\omega_p} \subset T_p(\mu^{-1}(\eta))$

Supongo que $X_p \in (T_p(G.p))^{\omega_p} = \{U : \omega_p(U, V) = 0, \ \forall V \in T_p(G.p)\}$, entonces $\omega_p(X_p, V) = 0$, $\forall V \in T_p(G.p) = \{\xi^M(p) : \xi \in \mathfrak{g}\}$. Asimismo,

$$\begin{aligned} \omega_p(X_p, \xi^M(p)) = 0, \ \forall \xi \in \mathfrak{g} &\Rightarrow \boldsymbol{i}_{\xi^M(p)} \omega_p(X_p) = 0, \ \forall \xi \in \mathfrak{g} \\ &\Rightarrow \langle d\mu_p(X_p), \xi \rangle = 0, \ \xi \in \mathfrak{g} \\ &\Rightarrow d\mu_p(X_p) = 0, \ \xi \in \mathfrak{g} \\ &\Rightarrow X_p \in Kerd\mu_p \\ &\Rightarrow X_p \in T_p(\mu^{-1}(\eta)), \text{ por la proposición (1.43)}. \end{aligned}$$

Se concluye que, $X_p \in T_p(\mu^{-1}(\eta))$.

□

Finalmente, desarrollaré la prueba del teorema de Marsden, Weinstein y Meyer.

Teorema 3.73 (Teorema de Marsden, Weinstein y Meyer). *Sea* (M, ω, G, μ), *G-variedad Hamiltoniana con acción propia y con aplicación del momento* $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$. *Supongamos que* $\eta \in \mathfrak{g}^*$, *es valor regular de* μ *y que la acción inducida de* $G_\eta = \{g \in G : Ad_g^* \eta = \eta\}$ *en* $\mu^{-1}(\eta)$ *es libre. Entonces:*

a) *El espacio topológico M_η^{red}, es una única estructura de variedad suave tal que la proyección natural $\pi_\eta : \mu^{-1}(\eta) \longrightarrow M_\eta^{red}$, es una submersión suave.*

b) *Existe una única forma simplética ω_η sobre M_η^{red} tal que*

$$\pi_\eta{}^*\omega_\eta \quad = \quad i_\eta{}^*\omega, \tag{3.47}$$

donde $i_\eta : \mu^{-1}(\eta) \longrightarrow M$, es la inclusión natural.

Demostración. a) Como (M, ω, G, μ), es G-variedad Hamiltoniana, entonces μ es una aplicación del momento con $\eta \in \mathfrak{g}^*$, valor regular. Por el teorema de valor regular 1.42, $\mu^{-1}(\eta)$ es una subvariedad incrustada de M.

Afirmación: La acción propia ψ de G en M, induce una acción propia de G_η en $\mu^{-1}(\eta)$.

En efecto, defina $\psi^\eta : G_\eta \times \mu^{-1}(\eta) \longrightarrow \mu^{-1}(\eta)$, $(g,p) \longmapsto g.p$. Se sabe que $\mu^{-1}(\eta)$ es invariante por G_η, y por tanto, ψ^η está bien definida.

Sean (g_i) y (p_i) secuencias en G_η y $\mu^{-1}(\eta)$ tales que $(g_i p_i)$ y (p_i) convergen en $\mu^{-1}(\eta)$. Como $\mu^{-1}(\eta)$, es una subvariedad y $i : \mu^{-1}(\eta) \hookrightarrow M$ es suave, entonces en particular, i es continua; se sigue, (p_i) y $(g_i.p_i)$ convergen en M. Por hipótesis, ψ es propia entonces (g_i) tiene una subsecuencia (g_{i_k}), que converge en G. Pero G_η, es cerrada de ahí (g_{i_k}) converge en G_η. Por consiguiente, ψ^η es una acción propia.

Tenemos:

- G_η, es un grupo de Lie (por teorema 3.36),
- G_η, actúa suavemente, libremente, y propiamente en $\mu^{-1}(\eta)$.

Entonces, por el teorema de la variedad cociente 3.39, el espacio de órbita $\mu^{-1}(\eta)/G_\eta$ es una variedad topólogica de dimensión $dim\mu^{-1}(\eta) - dimG_\eta$ y tiene una única estructura suave tal que la aplicación $\pi_\eta : \mu^{-1}(\eta) \longrightarrow \mu^{-1}(\eta)/G_\eta$, es una submersión suave.

b) Como $\pi_\eta : \mu^{-1}(\eta) \longrightarrow M_\eta^{red}$, es una submersión suave entonces para cada $p \in \mu^{-1}(\eta)$, $\pi_{\eta * p} : T_p\big(\mu^{-1}(\eta)\big) \longrightarrow T_{[p]}M_\eta^{red}$ es sobreyectiva, o sea, para todo $V \in$

$T_{[p]}M_\eta^{red}$ existe $X \in T_p\mu^{-1}(\eta)$ tal que $\pi_{\eta * p}(X) = V$. Defina ω_η por

$$\omega_{\eta[p]}\big(\pi_{\eta * p}(X_1), \pi_{\eta * p}(X_2)\big) = \omega_p(X_1, X_2), \tag{3.48}$$

donde $p \in \mu^{-1}(\eta)$ y $X_1, X_2 \in T_p\mu^{-1}(\eta)$.

Para demostrar que $\omega_{\eta[p]} : T_{[p]}M_\eta^{red} \times T_{[p]}M_\eta^{red} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por (3.48), está bien definida: basta verificar que el lado derecho de la ecuación (3.48), no depende de la elección de $p \in \mu^{-1}(\eta)$ y $X_1, X_2 \in T_p\mu^{-1}(\eta)$. En efecto, sea $\tilde{p} \in \mu^{-1}(\eta)$ y $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2 \in T_{\tilde{p}}\mu^{-1}(\eta)$ tales que

$$[p] = [\tilde{p}], \;\; \pi_{\eta * p}(X_1) = \pi_{\eta * \tilde{p}}(\tilde{X}_1) \text{ y } \pi_{\eta * p}(X_2) = \pi_{\eta * \tilde{p}}(\tilde{X}_2).$$

Entonces existe $g \in G_\eta$ tales que $p = \psi_g^\eta(\tilde{p})$,

$$\begin{aligned} \pi_{\eta * p}\Big(\big(\psi_g^\eta\big)_{*\tilde{p}}(\tilde{X}_1) - X_1\Big) &= \pi_{\eta * \tilde{p}}(\tilde{X}_1) - \pi_{\eta * p}(X_1) = 0, \\ \pi_{\eta * p}\Big((\psi_g^\eta)_{*\tilde{p}}(\tilde{X}_2) - X_2\Big) &= 0. \end{aligned}$$

Así, $\big(\psi_g^\eta\big)_{*\tilde{p}}(\tilde{X}_1) - X_1 \in T_p(G_\eta.p)$ y $\big(\psi_g^\eta\big)_{*\tilde{p}}(\tilde{X}_2) - X_2 \in T_p(G_\eta.p)$.

$$\begin{aligned} \omega_{\eta[\tilde{p}]}(\pi_{\eta * \tilde{p}}(\tilde{X}_1), \pi_{\eta * \tilde{p}}(\tilde{X}_2)) &= \omega_{\tilde{p}}(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2), \\ &= \Big((\psi_{g^{-1}}^\eta)^*\omega\Big)_p\Big((\psi_g^\eta)_{*\tilde{p}}(\tilde{X}_1), (\psi_g^\eta)_{*\tilde{p}}(\tilde{X}_2)\Big), \\ &= \omega_p\big(X_1 + (\psi_g^\eta)_{*\tilde{p}}(\tilde{X}_1) - X_1, X_2 + (\psi_g^\eta)_{*\tilde{p}}(\tilde{X}_2) - X_2\big), \\ &= \omega_p(X_1, X_2), \\ &= \omega_{\eta[p]}(\pi_{\eta * p}(X_1), \pi_{\eta * p}(X_2)). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\omega_{\eta[p]}\big(\pi_{\eta * p}(X_1), \pi_{\eta * p}(X_2)\big) = \omega_p(X_1, X_2), \;\; \forall p \in \mu^{-1}(\eta) \Longleftrightarrow \pi_\eta^*\omega_\eta = i_\eta^*\omega.$$

La unicidad y suavidad de ω_η, se sigue de la aplicación π_η, submersión suave y sobreyectiva. Ahora verifico que ω_η, es cerrada y no degenerada: como $d\omega = 0$ y

$$\pi_\eta^* d\omega_\eta = d\pi_\eta^*\omega_\eta \;\; = \;\; d\big(\boldsymbol{i}_\eta^*\omega\big) = 0,$$

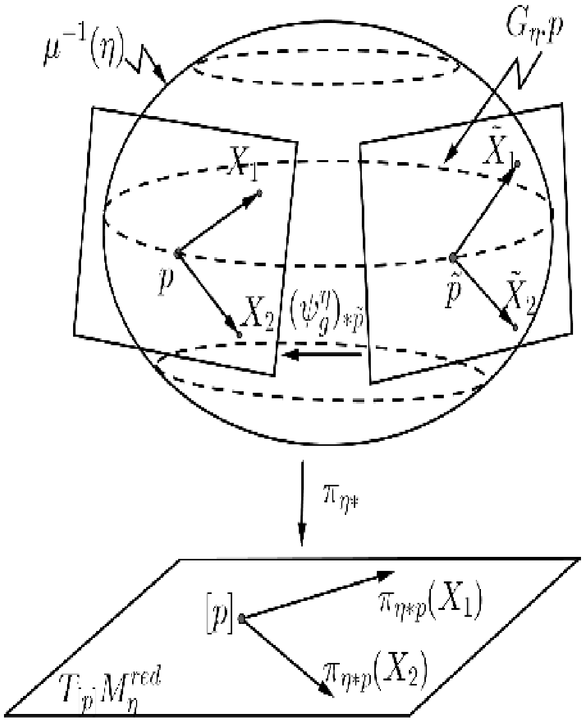

Figura 3.10: La definición de ω_η.

resulta que $\pi_\eta^* d\omega_\eta = 0$. Usando que π_η es submersión suave, se concluye que $d\omega_\eta = 0$.

Para demostrar que ω_η es no-degenerada en M_η^{red}, sean $[p] \in M_\eta^{red}$ y $\pi_{\eta*p}(X_1) \in T_{[p]}M_\eta^{red}$ tal que

$$\omega_{\eta[p]}\big(\pi_{\eta*p}(X_1), \pi_{\eta*p}(X_2)\big) = 0,$$

para todo $\pi_{\eta*p}(X_2) \in T_{[p]}M_\eta^{red}$.

Por la definición de ω_η (en la ecuación (3.48)), obtenemos

$$\omega_p(X_1, X_2) = 0, \text{ para todo } X_2 \in T_p\mu^{-1}(\eta).$$

Lo que implica $X_1 \in T_p\mu^{-1}(\eta)^{\omega_p}$. Por el Lema 3.72 c) y d), se tiene $X_1 \in T_p\mu^{-1}(\eta)^{\omega_p} \cap T_p\mu^{-1}(\eta) = T_p(G_\eta.p)$. Además, del isomorfismo $T_{[p]}\Big(\mu^{-1}(\eta)/G_\eta\Big) \cong T_p\mu^{-1}(\eta)/T_p(G_\eta.p)$, se concluye $\pi_{\eta*p}(X_1) = 0$.

$\square$

3.3.2. Ejemplos de reducción y algunas aplicaciones del teorema

Ejemplo 3.45. *Sea* $\omega = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\bar{z}_k = \sum_{k=1}^{n} dx_k \wedge dy_k$*, la forma simplética estándar en* $\mathbb{C}^n$*. Sea la acción de* S^1 *en* $(\mathbb{C}^n, \omega)$*:*

$$\begin{array}{rrcl} \psi: & S^1 & \longrightarrow & Diff(\mathbb{C}^n) \\ & t & \longmapsto & \psi_t(z) = (t.z_1, ..., t.z_n), \end{array}$$

donde $z = (z_1, ..., z_n)$*. En el ejemplo 3.42, para* $k_1 = ... = k_n = 1$ *se mostró que es Hamiltoniana con la aplicación del momento*

$$\begin{array}{rcccl} \mu & : \mathbb{C}^n & \longrightarrow & (Lie(S^1))^* \cong \mathbb{R} & \\ & z & \longmapsto & \mu(z) & = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + C, \end{array}$$

donde C*, es una constante.*
Si $C = \frac{1}{2}$ *entonces* $\mu^{-1}(0) = S^{2n-1}$*, es la esfera unitaria. Por el teorema 3.73, el espacio de órbitas del conjunto de nivel del la aplicación de momento está dada por:*

$$\mu^{-1}(0)/S^1 = S^{2n-1}/S^1 = \mathbb{CP}^{n-1},$$

es una variedad simplética.

Ejemplo 3.46. *Para la acción natural de* $U(k)$*, en* $M(k \times n, \mathbb{C})$ *con la aplicación de momento* $\tilde{\mu}$ *(encontrada en el ejemplo 3.43), se tiene* $\tilde{\mu}^{-1}(0) = \{A \in M(k \times n, \mathbb{C}) : AA^* = Id\}$*. Entonces el espacio cociente*

$$\tilde{\mu}^{-1}(0)/U(k) = \mathbb{G}(k, n),$$

es una variedad grassmaniana de planos de dimensión k *en* $\mathbb{C}^n$*.*

Ejemplo 3.47. *Sea una acción* $\psi : G \times G \longrightarrow G$*,* $\psi(h, g) = L_h(g)$*. Dicha acción induce una acción sobre* T^*G*:*

$$\begin{array}{rrcll} \tilde{\psi}: & G \times T^*G & \longrightarrow & T^*G & \\ & (h, \alpha_g) & \longmapsto & \tilde{\psi}(h, \alpha_g) & = \Big(L_{h^{-1}}\Big)^*_{*hg}(\alpha_g). \end{array}$$

Por el ejemplo 3.39, se tiene como la aplicación de momento de la forma:

$$\begin{array}{rcl} \mu: \ T^*G & \longrightarrow & \mathfrak{g}^* \\ \alpha_g & \longmapsto & \mu(\alpha_g) = \ (R_g)^*_{*1}\alpha_g \in T^*_1G = \mathfrak{g}^*, \end{array}$$

donde $\alpha_g \in T^*_gG$.

La acción $\tilde{\psi}$ *es obviamente libre. Como* ψ *es propia entonces verifico que* $\tilde{\psi}$ *es propia: Sean* (g_i) *y* (α_i) *secuencias en* G *y* T^*G*, respectivamente tales que* $(\tilde{\psi}_{g_i}(\alpha_i))$ *y* (α_i) *convergen. Entonces* $\Big(\pi(\alpha_i)\Big)$ *y* $\Big(\psi_{g_i}(\pi(\alpha_i))\Big)$*, convergen (usando la equivarianza de* π*). Como* G *actúa propiamente en* G*, resulta que* (g_i) *posee una subsecuencia convergente en* G*. Por consiguiente,* G *actúa propiamente en* T^*G.

Sea $\eta \in \mathfrak{g}^* \cong T^*_{\mathbf{1}}G$ *y denoto por* $\alpha_\eta \in \Omega^1(G)$*, la forma diferencial invariante a la derecha sobre* G *definida por* $\alpha_\eta\Big|_{\mathbf{1}} = \eta$*. Así,* $\alpha_\eta\Big|_g = \Big(R_{g^{-1}}\Big)^*_{*g}(\eta)$.

Sean los conjuntos $\alpha_\eta\Big|_G = \Big\{\alpha_\eta\Big|_g : \alpha_\eta\Big|_g = (R_{g^{-1}})^*_{*g}(\eta),\ \textit{para todo}\ g \in G\Big\}$ *y* $\mu^{-1}(\eta) = \Big\{\alpha_g \in T^*G : \mu(\alpha_g) = (R_g)^*_{*\mathbf{1}}(\alpha_g)\Big\}$*. Sea* $\alpha_\eta\Big|_g \in \alpha_\eta\Big|_G$*. Entonces*

$$\mu(\alpha_\eta\Big|_g) = (R_g)^*_{*1}(\alpha_\eta\Big|_g) = \Big(R_{g^{-1}} \circ R_g\Big)^*_{*1}(\eta) = \eta$$

se obtiene $\alpha_\eta\Big|_G \subset \mu^{-1}(\eta)$*. Recíprocamente, para todo* $\alpha_g \in \mu^{-1}(\eta)$*, se tiene* $\mu(\alpha_g) = \eta$*, o sea,* $(R_g)^*_{*\mathbf{1}}(\alpha_g) = \eta$*. Luego,*

$$(R_{g^{-1}})^*_{*g}(\eta) = (R_{g^{-1}})^*_{*g}((R_g)^*_{*\mathbf{1}}(\alpha_g)) = \alpha_g.$$

Resulta que, $\mu^{-1}(\eta) = \alpha_\eta\Big|_G$*. Debido a*

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_h(\alpha_\eta\Big|_g) &= \Big(L_{h^{-1}}\Big)^*_{*hg} \circ \Big(R_{g^{-1}}\Big)^*_{*g}(\eta) \\ &= \Big(R_{g^{-1}} \circ L_{h^{-1}}\Big)^*_{*hg}(\eta) \\ &= \Big(C_{h^{-1}} \circ R_{h^{-1}} \circ R_{g^{-1}}\Big)^*_{*hg}(\eta) \\ &= \Big(R_{g^{-1}}\Big)^*_{*hg} \circ \Big(R_{h^{-1}}\Big)^*_{*h} \circ Ad^*_{h^{-1}}(\eta) \\ &= \Big(R_{(hg)^{-1}}\Big)^*_{*hg}(\eta),\ \textit{pues}\ h \in G_\eta \end{aligned}$$

La G_η *acción sobre* $\mu^{-1}(\eta)$ *está dada por*

$$\tilde{\psi}_h(\alpha_\eta\Big|_g) \ = \ \alpha_\eta\Big|_{hg}. \tag{3.49}$$

Como $\left(R_g\right)^*_{*1}$, *es biyectiva entonces* μ, *es una submersión. Luego, aplicando el teorema de la reducción 3.73, el espacio de órbita* $\mu^{-1}(\eta)/G_\eta$ *es una variedad simplética.*

Ejemplo 3.48. *Sea* G *un grupo de Lie y sea* (T^*G, ω, G, μ), G*-variedad Hamiltoniana (en el ejemplo 3.39). Para cualquier* $\eta \in \mathfrak{g}^*$, *el espacio simplético* $\left(\mu^{-1}(\eta)/G_\eta, \omega_\eta\right)$ *es simplectomorfismo a la órbita coadjunta* $\left(\mathcal{O}_\eta, \omega^{\mathcal{O}_\eta}\right)$.

Sea τ, *la* $1-$*forma tautológica y* $\omega = -d\tau$, *la forma simplética estándar en* T^*G. *Sea la aplicación*

$$\begin{array}{ccc} \mu^{-1}(\eta) & \longrightarrow & \mathcal{O}_\eta \\ \alpha_\eta\Big|_g & \longmapsto & Ad^*_{g^{-1}}\eta. \end{array}$$

Induce,

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : \mu^{-1}(\eta)/G_\eta & \longrightarrow & \mathcal{O}_\eta \\ & [\alpha_\eta\Big|_g] & \longmapsto & \varphi\big([\alpha_\eta\Big|_g]\big) \;= Ad^*_{g^{-1}}\eta, \end{array}$$

es una aplicación bien definida: sean $[\alpha_\eta\Big|_{g_1}], [\alpha_\eta\Big|_{g_2}] \in \mu^{-1}(\eta)/G_\eta$ *tal que* $[\alpha_\eta\Big|_{g_1}] = [\alpha_\eta\Big|_{g_2}]$, *entonces existe* $h \in G_\eta$ *tal que* $\tilde{\psi}(h, \alpha_\eta\Big|_{g_1}) = \alpha_\eta\Big|_{g_2}$. *En consecuencia,* $Ad^*_{g_1^{-1}}\eta = Ad^*_{g_2^{-1}}\eta$. *Se descompone* φ *como:*

$$\mu^{-1}(\eta)/G_\eta \longrightarrow G/G_\eta \longrightarrow \mathcal{O}_\eta.$$

De aquí, $\mu^{-1}(\eta)/G_\eta \cong G/G_\eta$ *y* $G/G_\eta \cong \mathcal{O}_\eta$. *Así,* φ *es un difeomorfismo. Demostraré que*

$$\varphi^*\omega^{\mathcal{O}_\eta} = \omega_\eta.$$

Debido a la ecuación (3.47), es suficiente mostrar que:

$$\pi^*_\eta \circ \varphi^*\omega^{\mathcal{O}_\eta} \;=\; \omega\Big|_{T(\mu^{-1}(\eta))} \tag{3.50}$$

Ahora, usando el difeomorfismo $F : G \longrightarrow \alpha_\eta\Big|_G$, $g \longmapsto \alpha_\eta\Big|_g$ *obtenemos el espacio vectorial tangente a* $\mu^{-1}(\eta)$ *en* $\alpha_\eta\Big|_g$:

$$\begin{aligned} T_{\alpha_\eta\big|_g}\big(\mu^{-1}(\eta)\big) &= F_{*g}\big(T_gG\big) \\ &= \{F_{*g}\big(\xi^G(g)\big) : \xi \in \mathfrak{g}\} \\ &= \{\big(\alpha_\eta\big)_{*g}\big(\xi^G(g)\big) : \xi \in \mathfrak{g}\}. \end{aligned}$$

Así, en el lado izquierdo de la ecuación (3.50) obtenemos:

$$\pi_\eta^* \circ \varphi^* \omega^{\mathcal{O}_\eta}\Big(\alpha_{\eta * g}\big(\xi^G(g)\big), \alpha_{\eta * g}\big(\tilde{\xi}^G(g)\big)\Big) = (\varphi \circ \pi_\eta)^* \omega^{\mathcal{O}_\eta}\Big(\alpha_{\eta * g}\big(\xi^G(g)\big), \alpha_{\eta * g}\big(\tilde{\xi}^G(g)\big)\Big)$$

$$= \omega^{\mathcal{O}_\eta}_{Ad^*_{g^{-1}}\eta}\big((\varphi \circ \pi_\eta \circ \alpha_\eta)_{*g}(\xi^G(g)), (\varphi \circ \pi_\eta \circ \alpha_\eta)_{*g}(\tilde{\xi}^G(g))\big),$$

Para cualquier $f \in C^\infty(\mathcal{O}_\eta)$,

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \pi_\eta \circ \alpha_\eta)_{*g}(\xi^G(g))f &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f \circ \varphi \circ \pi_\eta \circ \alpha_\eta)(\exp(t\xi).g) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\left(Ad^*_{g^{-1}\exp(-t\xi)}\eta\right) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\left(Ad^*_{g^{-1}\exp(-t\xi)g} \circ Ad^*_{g^{-1}}\eta\right) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\left(Ad^*_{\exp(-tAd_{g^{-1}}\xi)} \circ Ad^*_{g^{-1}}(\eta)\right) \\
&= -\left(Ad_{g^{-1}}\xi\right)^{\mathcal{O}_\eta}(f)(Ad^*_{g^{-1}}\eta) \\
&= -\left(Ad_{g^{-1}}\xi\right)^{\mathcal{O}_\eta}(Ad^*_{g^{-1}}\eta)f,
\end{aligned}$$

donde $\left(Ad_{g^{-1}}\xi\right)^{\mathcal{O}_\eta}$, *denoto campo vectorial definida por generador infinitesimal para la acción coadjunta. Por consiguiente,*

$$(\varphi \circ \pi_\eta \circ \alpha_\eta)_{*g}(\xi^G(g)) = -\left(Ad_{g^{-1}}\xi\right)^{\mathcal{O}_\eta}(Ad^*_{g^{-1}}\eta). \tag{3.51}$$

Luego, sustituiendo la ecuación (3.51) en $\omega^{\mathcal{O}_\eta}_{Ad_{g^{-1}}\xi}$ *se obtiene:*

$$\begin{aligned}
\omega^{\mathcal{O}_\eta}_{Ad^*_{g^{-1}}\eta}\Big((Ad_{g^{-1}}\xi)^{\mathcal{O}_\eta}(Ad^*_{g^{-1}}\eta), (Ad_{g^{-1}}\tilde{\xi})^{\mathcal{O}_\eta}(Ad^*_{g^{-1}}\eta)\Big) &= -\langle Ad^*_{g^{-1}}\eta, [Ad_{g^{-1}}\xi, Ad_{g^{-1}}\tilde{\xi}]\rangle \\
&= -\langle \eta, [\xi, \tilde{\xi}]\rangle.
\end{aligned}$$

Para el lado, derecho de la ecuación (3.50) tenemos:

$$\begin{aligned}
\omega_{\alpha_\eta(g)}\left(\alpha_{\eta * g}\big(\xi^G(g)\big), \alpha_{\eta * g}\big(\tilde{\xi}^G(g)\big)\right) &= -\left(\alpha_\eta^* \omega\right)_g\left(\xi^G(g), \tilde{\xi}^G(g)\right) \\
&= -\left(d\alpha_\eta\right)_g(\xi^G(g), \tilde{\xi}^G(g)), \text{ por la proposición 3.51} \\
&= -\xi^G(g)\alpha_\eta\Big|_g(\tilde{\xi}^G(g)) + \tilde{\xi}^G(g)\alpha_\eta\Big|_g(\xi^G(g)) + \\
&\quad \alpha_\eta\Big|_g([\xi^G(g), \tilde{\xi}^G(g)]) \\
&= -\xi^G(g)\langle \eta, \tilde{\xi}\rangle + \tilde{\xi}^G(g)\langle \eta, \xi\rangle + \alpha_\eta\Big|_g([\xi^G(g), \tilde{\xi}^G(g)]) \\
&= -\langle \eta, [\xi, \tilde{\xi}]\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, φ es un simplectomorfismo.

Una de las aplicaciones del teorema 3.73, es para construir aplicaciones del momento en espacios proyectivos complejos. El siguiente ejemplo es caso general, para dos acciones de grupos de Lie que conmutan y actúan suavemente en una variedad simplética, se plantea de la siguiente manera:

Ejemplo 3.49. *Sea (M, ω, K, μ_K), K-variedad Hamiltoniano con $\mu_K : M \longrightarrow \mathfrak{k}^*$. Sea (M, ω, G, μ_G), G-variedad Hamiltoniana con $\mu_G : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$. Supongamos que las acciones de G y K sobre M conmutan. Tenemos:*

i) Si μ_K es invariante por G, con K conexo, entonces $\mu_{G\times K} = \mu_G \times \mu_K : M \longrightarrow (\mathfrak{g}\times\mathfrak{k})^* = \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{k}^*$, es una aplicación del momento para la acción de $G \times K$ sobre M.

ii) Sea $\nu \in \mathfrak{k}^*$, el valor de regular de μ_K. Si la acción de K_ν en $\mu_K^{-1}(\nu)$, es libre y propia, entonces G induce una acción simplética en $M_\nu = \mu_K^{-1}(\nu)/K_\nu$ y con la aplicación del momento natural $\mu_\nu : M_\nu \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ (inducido por μ_G.)

Primero verifico $i)$. Como μ_K es invariante por G, con K conexo entonces $\mu_K(\exp(t\xi).p) = \mu_K(p)$, para todo $p \in M$ y para cada $\xi \in \mathfrak{g}$, o sea, $d\langle \mu_K, \zeta\rangle(\xi^M) = 0$, para todo $\xi \in \mathfrak{g}$ y $\zeta \in \mathfrak{k}$.

Luego, para todo $\zeta \in \mathfrak{k}$

$$\begin{aligned} d\langle \mu_G, \xi\rangle(\zeta^M) &= d\langle \mu_G, \xi\rangle(X_{\mu_K^\zeta}) \\ &= X_{\mu_K^\zeta}(\mu_G^\xi) \\ &= \{\mu_G^\xi, \mu_K^\zeta\} \\ &= -d\mu_K^\zeta(X_{\mu_G^\xi}) \\ &= -d\mu_K^\zeta(\xi^M) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como K es conexo, entonces μ_G es invariante por K.

Considero una acción de $G \times K$ en M por:

$$(g, k).p = g.(k.p) = k.(g.p) \tag{3.52}$$

Para todo $(\xi, \zeta) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{k}$,

$$
\begin{aligned}
(\xi,\zeta)^M(p) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp\big(t(\xi,\zeta)\big).p \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp(t\xi), \exp(t\zeta)).p \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(t\xi).\exp(t\zeta).p \\
&= \xi^M(p) + \zeta^M(p).
\end{aligned}
$$

Donde

$$
\boldsymbol{i}_{(\xi,\zeta)^M}\omega = \omega(\xi^M + \zeta^M, .) = \boldsymbol{i}_{\xi^M}\omega + \boldsymbol{i}_{\zeta^M}\omega = d\mu_G^{\xi} + d\mu_K^{\zeta}
$$

de ahí, $\mu_{G\times K}^{(\xi,\zeta)} = \mu_G^{\xi} + \mu_K^{\zeta}$.

Verifico la equivarianza de $\mu_{G\times K}$*: para todo* $p \in M$ *y para cada* $(g,k) \in G \times K$,

$$
\begin{aligned}
\mu_{G\times K}\big((g,k).p\big) &= \big(\mu_G(g.k.p), \mu_K(g.k.p)\big) \\
&= \big(\mu_G(g.p), \mu_K(k.p)\big), \ \textit{pues } \mu_G \textit{ es invariante por } K \\
&= \big(Ad_g^*\mu_G(p), Ad_k^*\mu_K(p)\big) \\
&= Ad_{(g,k)}^*\big(\mu_G, \mu_K\big)(p) \\
&= Ad_{(g,k)}^*\mu_{G\times K}(p).
\end{aligned}
$$

En consecuencia, $\mu_{G\times K} : M \longrightarrow \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{k}^*$ *es una aplicación del momento.*

ii) Como $\nu \in \mathfrak{k}^*$ *es un valor regular de* μ_K *y satisface las hipótesis del teorema 3.73, resulta que* $\left(M_\nu^{red} = \mu_K^{-1}(\nu)/K_\nu, \omega_\nu\right)$ *tiene una estructura simplética tal que*

$$
\pi_\nu^*\omega_\nu = i_\nu^*\omega, \tag{3.53}
$$

donde $\pi_\nu : \mu_K^{-1}(\nu) \longrightarrow M_\nu^{red}$*, es la proyección natural e* $i_\nu : \mu_K^{-1}(\nu) \hookrightarrow M$ *la inclusión.*

$$
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[r, "\psi_g"] & M \arrow[d, "\mu_G"] \\
\mu_K^{-1}(\nu) \arrow[ur, hook, "i_\nu"] \arrow[r, "\psi_g^\nu"] \arrow[d, "\pi_\nu"'] & \mu_K^{-1}(\nu) \arrow[ur, hook, "i_\nu"] \arrow[d, "\pi_\nu"] & \mathfrak{g}^* \\
M_\nu^{red} \arrow[r, "\psi_{g,\nu}"'] & M_\nu^{red} \arrow[ur, "\mu_\nu"'] &
\end{tikzcd}
$$

Defina aplicaciones $\psi_g^\nu : \mu_K^{-1}(\nu) \longrightarrow \mu_K^{-1}(\nu)$ *por*

$$\psi_g^\nu(p) = g.p, \tag{3.54}$$

y $\psi_{g,\nu} : M_\nu^{red} \longrightarrow M_\nu^{red}$ *por*

$$\psi_{g,\nu}([p]_{K_\nu}) = [g.p]_{K_\nu}. \tag{3.55}$$

Claramente, dichas aplicaciones están bien definidas porque μ_K *es invariante por* G. *Entonces las igualdades (3.54) y (3.55), son acciones del grupo Lie* G *que actúa en* $\mu_K^{-1}(\nu)$ *y* M_ν^{red}, *respectivamente.*

Antes, verifico que G *actúa de manera simplética en* M_ν^{red}:

$$\begin{aligned} \pi_\nu^*\Big(\psi_{g,\nu}^*\omega_\nu\Big) &= \Big(\psi_g^\nu\Big)^*(\pi_\nu^*\omega_\nu) \\ &= \Big(\psi_g^\nu\Big)^*(i_\nu^*\omega), \text{ por (3.53)} \\ &= i_\nu^*(\psi_g^*\omega) \\ &= i_\nu^*\omega \\ &= \pi_\nu^*\omega_\nu. \end{aligned}$$

Como π_ν^* *es inyectiva, entonces* $\psi_{g,\nu}^*\omega_\nu = \omega_\nu$.

Defina $\mu_\nu : M_\nu^{red} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, *por*

$$\mu_\nu([p]_{K_\nu}) = \mu_G(p). \tag{3.56}$$

Se justifica que μ_ν, *está bien definida:*

$$\begin{aligned} [p]_{K_\nu} = [q]_{K_\nu} &\Longrightarrow \exists k \in K_\nu; p = k.q \\ &\Longrightarrow \mu_G(p) = \mu_G(k.q) = \mu_G(q) \\ &\Longrightarrow \mu_\nu([p]_{K_\nu}) = \mu_\nu([q]_{K_\nu}) \end{aligned}$$

Finalmente, pruebo μ_ν *es la aplicación del momento para la acción de* G *en* M_ν^{red}: *para* $p \in \mu_K^{-1}(\nu)$ *y* $\xi \in \mathfrak{g}$,

$$\pi_\nu \circ \psi_{\exp(t\xi)}^\nu = \psi_{\exp(t\xi),\nu} \circ \pi_\nu \implies \pi_{\nu * p}\big(\xi^M(p)\big) = \xi^{M_\nu^{red}}\big([p]_{K_\nu}\big) \tag{3.57}$$

de ahí,

$$\begin{aligned}
\Big(\pi_\nu^*\big(\boldsymbol{i}_{\xi^{M_\nu^{red}}}\omega_\nu\big)\Big)_p(v) &= \big(\boldsymbol{i}_{\xi^{M_\nu^{red}}}\omega_\nu\big)_{\pi_\nu(p)}\big(\pi_{\nu*p}(v)\big)\\
&= \big(\omega_\nu\big)_{\pi_\nu(p)}\big(\xi^{M_\nu^{red}}([p]_{K_\nu}),\pi_{\nu*p}(v)\big)\\
&= \big(\omega_\nu\big)_{\pi_\nu(p)}\big(\pi_{\nu*p}(\xi^M(p)),\pi_{\nu*p}(v)\big)\\
&= \big(\pi_\nu^*\omega_\nu\big)_p\big(\xi^M(p),v\big)\\
&= \big(i_\nu^*\omega\big)_p\big(\xi^M(p),v\big), \text{ por (3.53)}\\
&= \omega_p\big(\xi^M(p),(i_\nu)_{*p}(v)\big)\\
&= \boldsymbol{i}_{\xi^M(p)}\omega_p\big(i_{\nu*p}(v)\big)\\
&= d\big(\mu_G^\xi\big)_p\big(i_{\nu*p}(v)\big)\\
&= \big(\pi_{\nu*p}^*d\mu_{\nu[p]}^\xi\big)(v)\\
&= \big(\pi_\nu^*d\mu_\nu^\xi\big)_p(v)
\end{aligned}$$

o sea, $\boldsymbol{i}_{\xi^{M_\nu^{red}}}\omega_\nu = d\mu_\nu^\xi$. *Por otro lado, se tiene la equivarianza: para todo* $g\in G$, *y para cada* $[p]_{K_\nu}\in M_\nu^{red}$,

$$Ad_g^*\mu_\nu([p]_{K_\nu}) = Ad_g^*\mu_G(p) = \mu_G(g.p) = \mu_\nu(g.[p]_{K_\nu}).$$

Los ejemplos particulares del ejemplos anterior, son para definir aplicación de momento en $\mathbb{CP}^n$:

Ejemplo 3.50. *Sea la acción natural de* $\mathbb{T}^{n+1}$ *en* $\mathbb{CP}^n$, *dada por:*

$$(e^{i\theta_1},...,e^{i\theta_{n+1}}).[z_0:...:z_n] = [e^{i\theta_1}.z_0:...:e^{i\theta_{n+1}}.z_n],$$

define una acción Hamiltoniana. En efecto, sean las acciones naturales de S^1 *en* $\mathbb{C}^{n+1}$ *dada por*

$$e^{i\theta}.(z_0,...,z_n) = (e^{i\theta}.z_0,...,e^{i\theta}.z_n)$$

y $\mathbb{T}^{n+1}$ *en* $\mathbb{C}^{n+1}$, *como*

$$(e^{i\theta_1},...,e^{i\theta_{n+1}}).(z_0,...,z_n) = (e^{i\theta_1}.z_0,...,e^{i\theta_{n+1}}.z_n).$$

Los cuales son Hamiltonianas y fueron justificadas en los ejemplos 3.42 y 3.44. Como satisface las hipótesis del ejemplo 3.49, se tiene:

$$\mu_{\mathbb{CP}^n}\big([z_0:...:z_n]\big)=\mu_{\mathbb{T}^{n+1}}\Big(\frac{z_0}{\parallel z\parallel},...,\frac{z_n}{\parallel z\parallel}\Big).$$

Usando la aplicación de momento $\mu_{\mathbb{T}^{n+1}}$, obtenemos

$$\mu_{\mathbb{CP}^n}([z]) \;=\; -\frac{1}{2}\Big(\frac{|z_0|^2}{\sum_{k=0}^n|z_k|^2},...,\frac{|z_n|^2}{\sum_{k=0}^n|z_k|^2}\Big).$$

Ejemplo 3.51. *Sean la acción de $U(n+1)$ en $\mathbb{CP}^n$:*

$$A.[z]=[Az],\ para\ A\in U(n+1),\ \ y\ [z]\in\mathbb{CP}^n,$$

es Hamiltoniana. De hecho, considerando las acciones Hamiltonianas naturales de S^1 en $\mathbb{C}^{n+1}$ y

$$A.z=A.\begin{pmatrix}z_0\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix},\ A\in U(n+1)$$

que tienen las aplicaciones del momento $\mu_{S^1}:\mathbb{C}^{n+1}\longrightarrow Lie(S^1)^*\cong\mathbb{R}$ dada por $\mu_{S^1}(z_0,...,z_n)=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}|z_k|^2+\frac{1}{2}$ y $\mu_{U(n+1)}:\mathbb{C}^{n+1}\longrightarrow\mathfrak{u}(n+1)^*\cong\mathfrak{u}(n+1)$, como $\mu_{U(n+1)}(z_0,...,z_n)=\frac{i}{2}zz^*$. Usando el ejemplo 3.49,

$$\mu_{\mathbb{CP}^n}\circ\pi_0=\mu_{U(n+1)}\circ i_0,$$

donde $\pi_0:\mu_{S^1}^{-1}(0)\longrightarrow\mu_{S^1}^{-1}(0)/S^1$ y $i_0:\mu_{S^1}^{-1}(0)\hookrightarrow\mathbb{C}^{n+1}$. Por lo tanto,

$$\mu_{\mathbb{CP}^n}\big([z]\big)=\mu_{U(n+1)}\Big(\frac{z}{\|z\|}\Big)=\frac{i}{2}\frac{zz^*}{\|z\|^2}.$$

Ejemplo 3.52. *Supongamos que $G=S^1$ actúa en $\mathbb{C}^{n+1}$, por:*

$$e^{i\theta}.(z_0,...,z_n)=(e^{im_0\theta}.z_0,...,e^{im_n\theta}.z_n),$$

donde $m_0,...,m_n\in\mathbb{Z}$. Por otro, lado la acción natural S^1 en $\mathbb{C}^{n+1}$ define la aplicación de momento $\mu_{S^1}(z)=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}|z_k|^2+\frac{1}{2}$. Por el ejemplo 3.49 se tiene,

$$\mu_{\mathbb{CP}^n}\circ\pi_0=\mu_G\circ i_0,$$

donde $i_0 : \mu_{S^1}^{-1}(0) \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ *es la inclusión,* $\pi_0 : \mu_{S^1}^{-1}(0) \longrightarrow \mu_{S^1}^{-1}(0)/S^1$ *la aplicación cociente y* $\mu_G(z) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} m_k|z_k|^2$ *la aplicación del momento para la acción de* G*. Entonces,* $\mu_{\mathbb{CP}^n} : \mathbb{CP}^n \longrightarrow Lie(S^1)^* \cong \mathbb{R}$ *es definida por:*

$$\mu_{\mathbb{CP}^n}\big([z]\big) \quad = \quad -\frac{1}{2}\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} m_k|z_k|^2}{\|z\|^2}.$$

Capítulo 4

Conclusiones

1. Se logró demostrar el teorema de la variedad cociente, para acciones suaves, libres y propias, de un grupo de Lie G en una variedad suave M, mediante una carta adaptada en M, se construye una carta en el cociente topólogica M/G y satisface los requisitos necesarios para ser una variedad topológica y finalmente, una estructura suave.

2. Los problemas de aplicación de momento fueron justificados satisfactoriamente usando la definición, los cuales me permitieron para reducir la variedad.

3. Para la construcción de una forma de grado 2 en M_η^{red}, se verificó la igual de la intersección de espacios tangentes a las órbitas con el espacio tangente al conjunto de nivel. Lo cual me facilitó construir la forma en M_η^{red}.

4. Con el uso teorema de Marsden, Weinstein y Meyer, se reduce la variedad simplética a otra variedad simplética de dimensión menor que el original, y además es posible demostrar para dos acciones Hamiltonianas, de dos grupos de Lie diferentes que conmutan sobre una variedad simplética para define una aplicación de momento en la variedad cociente. En particular, sirve para definir una aplicación de momento en el espacio proyectivo complejo.

Capítulo 5

Recomendaciones

1. Antes de iniciar la lectura del teorema de Marsden, Weinstein, y Meyer, se recomienda leer conceptos básicos de variedades suaves, subvariedades incrustadas, espacio cociente, formas diferenciales, y variedades simpléticas, para que el lector pueda entender sin ninguna dificultad este trabajo.

2. Durante el trabajo surgieron preguntas, que podrían ser consideradas en futuras investigaciones por ejemplo, recomiendo: el teorema de reducción singular, reducción en variedades de Kähler para construir cocientes de Kähler y estructuras de hyperkähler.

Bibliografía

[1] Abraham, R., Marsden, J. E. *Foundations of Mechanics*, second edition, Addison-Wesley, Reading, 1978.

[2] Alexander Kirillov, Jr. *An introduction to Lie Groups and Lie Algebras.* Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York, 2008.

[3] Aebischer, B., Borer, M., Kälin, M., Leuenberger, Ch., Reimann, H.M. *Symplectic Geometry an introduction Based on the Seminar in Bern, 1992.* Progress in Mathematics 124, Birkhäuser Verlag, Basel 1994.

[4] A., Cannas da Silva. *Lecture on symplectic geometry.* Lecture notes in Mathematics, Springer-Verlag, 2001.

[5] Gerd Rudolph, Matthias Shmidt. *Diferential geometry and mathematical physics.* Part I, Spring, New York, 2013.

[6] Guillemin, V. *Moment Maps and Combinatorial Invariants of Hamiltonian $\mathbb{T}^n$-spaces.* Progress in Mathematics 122, Birkhäuser, Boston, 1994.

[7] John M., Lie. *Introduction to Smooth Manifolds.* Second Edition, Springer Science Business Media, New York 2003, 2013.

[9] Marsden, J., Weinstein, A. *Reduction of Symplectic manifolds with symmetry.* Rep., Mathematical Phys.,5 (1974), 121-130.

[10] D. McDuff and D. Salamon. *Introduction to symplectic topology.* Second edition, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1998.

Anexo I

Teorema de la función inversa y del rango

Teorema I.1 (**Teorema de la función inversa**). *Suponga que* U *y* V *subconjuntos abiertos en* $\mathbb{R}^n$ *y* $F : U \longrightarrow V$*, una aplicación suave. Si* $DF(a)$*, es invertible en algún punto* $a \in U$*, entonces existen vecindades conexas* $U_0 \subset U$ *de* a *y* $V_0 \subset V$ *de* $F(a)$ *tal que* $F\Big|_{U_0} : U_0 \longrightarrow V_0$*, es un difeomorfismo.*

La prueba de este teorema está basada en un resultado elemental sobre espacios métricos, que describimos primeramente.

Sea (X, d), un espacio métrico. Una aplicación $T : X \longrightarrow X$, es dicho una *contracción* si, existe una constante $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ tal que

$$d\big(T(x), T(y)\big) \leq \lambda d(x, y),\ \forall x, y \in X.$$

Claramente, cualquier contracción es continua.

Un *punto fijo* de una aplicación $T : X \longrightarrow X$, es un punto $x \in X$, tal que $T(x) = x$.

Lema I.2 (**Lema de contracción**). *Sea* (X, d)*, un espacio métrico completo no vacío. Cualquier contracción* $T : X \longrightarrow X$*, tiene un único punto fijo.*

Demostración. La unicidad es inmediato: si x y x' son puntos fijos de T, con $x \neq x'$, entonces

$$d(x, x') = d(T(x), T(x')) \leq \lambda d(x, x').$$

O sea, $\lambda \geq 1$ es una contradicción.

Para probar la existencia de un punto fijo, considere un punto x_0, arbitrario de X y defina una secuencia (x_n), inductivamente por $x_{n+1} = T(x_n)$. Para cualquier $i \geq 1$, obtenemos

$$d(x_i, x_{i+1}) = d(T(x_{i-1}), T(x_i)) \leq \lambda d(x_{i-1}, x_i),$$

y por inducción tenemos

$$d(x_i, x_{i+1}) \leq \lambda d(x_{i-1}, x_i) \leq \lambda^2 d(x_{i-2}, x_{i-1}) \leq ... \leq \lambda^i d(x_0, x_1).$$

Si $N \in \mathbb{N}$ y $j \geq i \geq N$, entonces

$$\begin{aligned} d(x_i, x_j) &\leq d(x_i, x_{i+1}) + d(x_{i+1}, x_{i+2}) + ... + d(x_{j-1}, x_j) \\ &\leq (\lambda^i + ... + \lambda^{j-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq \lambda^i \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \Big) d(x_0, x_1) \\ &\leq \lambda^N \Big(\frac{1}{1-\lambda} \Big) d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Así, existe $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{ln(\frac{\varepsilon(1-\lambda)}{d(x_0,x_1)})}{ln\lambda} - 1 \right\rceil \in \mathbb{N}$ tal que

$$j \geq i \geq N \Rightarrow d(x_i, x_j) < \varepsilon.$$

En consecuencia, (x_n) es una secuencia de Cauchy. Por tanto, (x_n) converge para un punto $x \in X$. Como T, es continua, entonces

$$T(x) = T(\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

□

Prueba del teorema de la función inversa. Empezamos con algunas modificaciones a la función F. Primero, defina la función F_1 por

$$F_1(x) = F(x + a) - F(a),$$

en una vecindad de 0, que es suave y satisface $F_1(0) = 0$ y $DF_1(0) = DF(a)$; claramente, F es un difeomorfismo es una vecindad conexa de a si, solamente si, F_1

es un difeomorfismo en una vecindad conexa de 0.

Segundo, la función $F_2 = DF_1(0)^{-1} \circ F_1$ es suave en la vecindad de 0 y satisface $F_2(0) = 0$ y $DF_2(0) = I_n$; y si F_2 es un difeomorfismo en una vecindad de 0, entonces F_1 también lo es y por lo tanto, F es un difeomorfismo. De aquí en adelante, remplazamos F por F_2, asumiendo que F está definida en una vecindad U, en el origen 0, $F(0) = 0$ y $DF(0) = I_n$. Como $x \longmapsto DetDF(x)$, es una función continua de x entonces existe una vecindad $\tilde{U}$ de 0 contenido en U tal que $DF(x)$ es invertible, para cada $x \in \tilde{U}$.

Sea $H(x) = x - F(x)$, para $x \in \tilde{U}$. Entonces $DH(0) = I_n - DF(0) = 0$. Como las entradas de la matriz $DH(x)$, son funciones continuas de x entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $B_\delta(0) \subset \tilde{U}$ y para todo $x \in \bar{B}_\delta(0)$, se tiene $|DH(x)| \leq \frac{1}{2}$. Si $x, x' \in \bar{B}_\delta(0)$, entonces

$$|H(x') - H(x)| \;\; \leq \;\; \frac{1}{2}|x' - x| \tag{I.1}$$

En particular, tomando $x' = 0$, esto implica

$$|H(x)| \;\; \leq \;\; \frac{1}{2}|x|. \tag{I.2}$$

Como $x' - x = F(x') - F(x) + H(x') - H(x)$, entonces

$$|x' - x| \leq |F(x') - F(x)| + |H(x') - H(x)| \leq |F(x') - F(x)| + \frac{1}{2}|x' - x|,$$

o sea,

$$|x' - x| \leq 2|F(x') - F(x)|, \tag{I.3}$$

para todo $x, x' \in \bar{B}_\delta(0)$. En particular, esto demuestra que F, es inyectiva en $\bar{B}_\delta(0)$. Ahora, sea $y \in B_{\delta/2}(0)$ arbitrario. Afirmación: existe un único punto $x \in B_\delta(0)$ tal que $F(x) = y$. Sea $T(x) = y + H(x) = y + x - F(x)$, de modo que $T(x) = x$ es equivalente a $F(x) = y$.

Si $|x| \leq \delta$ entonces

$$|T(x)| \leq |y| + |H(x)| < \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}|x| \leq \delta, \tag{I.4}$$

así, $T(\bar{B}_\delta(0)) \subset \bar{B}_\delta(0)$. De la ecuación (I.1), obtenemos

$$|T(x) - T(x')| = |H(x) - H(x')| \leq \frac{1}{2}|x - x'|.$$

Por consiguiente, T es una contracción. Como $\bar{B}_\delta(0)$ es un espacio métrico completo entonces por el lema I.2, T tiene un único punto fijo $x \in \bar{B}_\delta(0)$. De (I.4),

$$|x| = |T(x)| < \delta,$$

de hecho $x \in B_\delta(0)$.

Por lo tanto, existe un único $x \in B_\delta(0)$ tal que $F(x) = y$.

Sea $V_0 = B_{\delta/2}(0)$ y $U_0 = B_\delta(0) \cap F^{-1}(V_0)$. Entonces U_0 es abierto en $\mathbb{R}^n$ y $F : U_0 \longrightarrow V_0$ es biyectiva, así $F^{-1} : V_0 \longrightarrow U_0$ existe. Sustituyendo $x = F^{-1}(y)$ y $x' = F^{-1}(y')$ en (I.3), muestra que F es continua. Así, $F : U_0 \longrightarrow V_0$ es un homeomorfismo y se sigue que U_0, es conexo porque V_0 lo es.

La única cosa que falta probar es que F^{-1}, sea suave. Demostremos que F^{-1}, es diferenciable en cada punto de V_0 y con derivada total dada por $D(F^{-1})(y) = DF(x)^{-1}$, donde $x = F^{-1}(y)$.

Sea $y \in V_0$ arbitrario y escoja $x = F^{-1}(y)$, y $L = DF(x)$. Necesitamos demostrar que

$$\lim_{y' \to y} \frac{F^{-1}(y') - F^{-1}(y) - L^{-1}(y' - y)}{|y' - y|} = 0.$$

Dada $y' \in V_0 - \{y\}$, escribimos $x' = F^{-1}(y') \in U_0 - \{x\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{F^{-1}(y') - F^{-1}(y) - L^{-1}(y' - y)}{|y' - y|} &= L^{-1}\Big(\frac{L(x' - x) - (y' - y)}{|y' - y|}\Big) \\ &= \frac{|x' - x|}{|y' - y|} L^{-1}\Big(- \frac{F(x') - F(x) - L(x' - x)}{|x' - x|}\Big). \end{aligned}$$

El factor $\dfrac{|x' - x|}{|y' - y|}$, es acotado por 2 (por (I.3)), y como L^{-1} es lineal por lo tanto, es acotado. Es decir,

$$\Big|\frac{F^{-1}(y') - F^{-1}(y) - L^{-1}(y' - y)}{|y' - y|}\Big| \leq 2|L^{-1}|\Big|\frac{F(x') - F(x) - L(x' - x)}{|x' - x|}\Big|$$

Como $y' \longrightarrow y$, se sigue que $x' \longrightarrow x$ (por continuidad de F^{-1}).

$$\begin{aligned} \lim_{y' \longrightarrow y} \Big|\frac{F^{-1}(y') - F^{-1}(y) - L^{-1}(y' - y)}{|y' - y|}\Big| &\leq 2|L^{-1}| \lim_{x' \longrightarrow x} \Big|\frac{F(x') - F(x) - L(x' - x)}{|x' - x|}\Big| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto completa la prueba de que F^{-1}, es diferenciable.

Como F^{-1} es diferenciable, entonces exiten derivadas parciales de $(F^{-1})^i$ y $DF^{-1}(y) = JF^{-1}(y)$, en cada punto $y \in V_0$. Observe que la formula $D(F^{-1})(y) = DF(F^{-1}(y))^{-1}$ implica que la aplicación $y \longmapsto D(F^{-1})(y)$ es la composición:

$$y \overset{F^{-1}}{\longmapsto} F^{-1}(y) \overset{DF}{\longmapsto} DF(F^{-1}(y)) \overset{i}{\longmapsto} DF(F^{-1}(y))^{-1}, \tag{I.5}$$

donde i, es inversión matricial. En esta composición, F^{-1} es continua; DF, es suave pues, sus funciones componentes son derivadas parciales de F; y i es suave , porque por la regla de Cramer, las entradas de una matriz inversa son funciones racionales de las entradas de la matriz. Como $D(F^{-1})$, es una composición de aplicaciones continuas, entonces $D(F^{-1})$ es continua. Así, las derivadas parciales de F^{-1} son continuas, en consecuencia F^{-1} es de clase C^1.

Ahora supone por inducción, para $F^{-1} \in C^k$ es válido. Esto significa que cada una de las aplicaciones en (I.5), son de clase C^k. Como $D(F^{-1})$, es una composición de aplicaciones C^k, entonces $D(F^{-1})$ es C^k; esto implica que las derivadas parciales de F^{-1} son de clase C^k, en conclusión F^{-1}, es de clase C^{k+1}. Continuando por inducción, F^{-1} es suave. $\square$

Teorema I.3 (Teorema de rango). *Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ y $V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos, y $F : U \longrightarrow V$ una aplicación suave con rango constante k. Para cualquier $p \in U$ existen cartas coordenadas suaves (U_0, φ) para $\mathbb{R}^m$ centrada en p y (V_0, ψ) para $\mathbb{R}^n$, con $U_0 \subset U$ y $F(U_0) \subset V_0 \subset V$ tal que*

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x^1, ..., x^k, x^{k+1}, ..., x^m) = (x^1, ..., x^k, 0, ..., 0).$$

Demostración. Como $DF(p)$, tiene un rango k entonces existe una submatriz de $k \times k$ con determinante diferente de cero. Reordenando las coordenadas F^j y x^j podemos suponer:

$$DF(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p) & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

donde $\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right)(p)$ es un submatriz de $k \times k$.

Consideremos coordenadas estándares $(x, y) = (x^1, ..., x^k, y^1, ..., y^{m-k})$ en $\mathbb{R}^m$ y $(v, w) = (v^1, ..., v^k, w^1, ..., w^{n-k})$ en $\mathbb{R}^n$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $p = (0, 0)$ y $F(p) = (0, 0)$.

Si $F(x, y) = (Q(x, y), R(x, y))$, para algunas aplicaciones suaves $Q : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $Q = (Q^1, ..., Q^k)$ y $R : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ entonces

$$Det \begin{pmatrix} \frac{\partial Q^1}{\partial x^1}(0,0) & \dots & \frac{\partial Q^1}{\partial x^k}(0,0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q^k}{\partial x^1}(0,0) & \dots & \frac{\partial Q^k}{\partial x^k}(0,0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

por hipótesis.

Defina $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ por $\varphi(x, y) = (Q(x, y), y)$. Su derivada en $(0, 0)$ es

$$D\varphi(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q^i}{\partial x^j}(0,0) & \frac{\partial Q^i}{\partial y^j}(0,0) \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix}$$

de lo cual $DetD\varphi(0, 0) \neq 0$. En consecuencia, por el teorema de la función inversa existen vecindades conexas U_0 de $(0, 0)$ y $\tilde{U}_0$ de $\varphi(0, 0) = (0, 0)$ tal que $\varphi\big|_{U_0} : U_0 \longrightarrow \tilde{U}_0$ es un difeomorfismo.

Escribe

$$\varphi\Big|_{U_0}^{-1}(x, y) = (A(x, y), B(x, y)), \tag{I.6}$$

donde $A : \tilde{U}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^k$ y $B : \tilde{U}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^{m-k}$ son algunas aplicaciones.

Calculemos

$$(x, y) = \varphi\big(A(x, y), B(x, y)\big) = \big(Q(A(x, y), B(x, y)), B(x, y)\big)$$

de eso, se obtiene $y = B(x, y)$, y por tanto, $\varphi\Big|_{U_0}^{-1}$, es de forma

$$\varphi\Big|_{U_0}^{-1}(x, y) = \big(A(x, y), y\big). \tag{I.7}$$

Observe que

$$\varphi\Big|_{U_0} \circ \varphi\Big|_{U_0}^{-1} = Id_{\tilde{U}_0} \Longrightarrow \varphi\big(A(x, y), y\big) = (x, y) \Longrightarrow Q(A(x, y), y) = x$$

y implica que

$$F \circ \varphi\Big|_{U_0}^{-1}(x,y) = \big(Q(A(x,y),y), R(A(x,y),y)\big) = (x, \tilde{R}(x,y))$$

donde $\tilde{R} : \tilde{U}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, es definida por $\tilde{R}(x,y) = R(A(x,y),y)$.
La matriz Jacobiano de $F \circ \varphi\Big|_{U_0}^{-1}$, en un punto arbitrario $(x,y) \in \tilde{U}_0$ es:

$$D\big(F \circ \varphi\Big|_{U_0}^{-1}\big)(x,y) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ \frac{\partial \tilde{R}^i}{\partial x^j}(x,y) & \frac{\partial \tilde{R}^i}{\partial y^j}(x,y) \end{pmatrix}$$

Como $\varphi\Big|_{U_0}$ es un difeomorfismo entonces $rankF = rank(F \circ \varphi\Big|_{U_0}^{-1})$, o sea, $\dfrac{\partial \tilde{R}^i}{\partial y^j}(x,y) = 0$, para todo $(x,y) \in \tilde{U}_0$, y para cada $i = k+1, ..., n$ y $j = k+1, ..., m$. Lo cual implica que $\tilde{R}$, es independiente de y. Si $S(x) = \tilde{R}(x,0)$, tenemos

$$F \circ \varphi\Big|_{U_0}^{-1}(x,y) \quad = \quad (x, S(x)). \tag{I.8}$$

Ahora, necesitamos definir una carta suave en $(0,0) \in \mathbb{R}^n$. Sea $V_0 = \{(v,w) \in V : (v,0) \in \tilde{U}_0\} \subset V$, el conjunto abierto que es una vecindad de $(0,0)$ (porque $(0,0) \in \tilde{U}_0$) y defina $\psi : V_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$, por

$$\psi(v,w) = (v, w - S(v))$$

suave y cuya inversa $\psi^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow V_0$, $\psi^{-1}(s,t) = (s, t + S(s))$ también es suave; así, (V_0, ψ) es una carta suave en $\mathbb{R}^n$. Luego,

$$\begin{aligned} \psi \circ F \circ \varphi\Big|_{U_0}^{-1}(x,y) &= \psi(x, S(x)), \text{ por ecuación } (I{,}8) \\ &= (x, 0). \end{aligned}$$

□