UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“Transformación de las Ecuaciones Diferenciales no Lineales de Riccati a Ecuaciones diferenciales Lineales”

TESIS

PRESENTADO POR:

Huarcaya CCamapaza Yoner

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PROMOCIÓN: 2009

PUNO - PERÚ
2017

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"TRANSFORMACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES DE RICCATI A ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES "

TESIS PRESENTADO POR:

Yoner Huarcaya CCamapaza

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

APROBADO POR EL JURADO REVISOR CONFORMADO POR:

PRESIDENTE : Mg. Celso Wilfredo Calsin Velasquez ....

PRIMER MIEMBRO : Lic. Ruperto Zapana Yerba ....

SEGUNDO MIEMBRO: Lic. Mirsa Dolores Cruz Cuentas ....

DIRECTOR DE TESIS: M.Sc. Martin Condori Concha ....

ASESOR DE TESIS : Lic. Wilber Antonio Figueroa Quispe ....

Área: Matemática Pura

Tema: Transformación convencional y la nueva Transformación

Linea de Investigación: ecuaciones diferenciales

PUNO PERÚ

DEDICATORIA

A mis queridos padres:
Augusto y Maria gestores de mis días y sabios consejeros, agradecerles por su apoyo y sacrificio, en mi formación profesional. A mis hemano(a)s, por su apoyo incomparable.

Quiero dedicar este trabajo a Dios, porque siempre ha estado ahí, en los momentos más difíciles para guiarme y superar las adversidades, sobre todo en la realización de este trabajo y en el estudio de licenciatura de Matemática.

AGRADECIMIENTOS

Primero quiero agradecer a Dios, porque siempre a estado ahí en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente.

Agradezco a mis padres y hermano(a)s por siempre motivarme y por su confianza.

Mi profundo agradecimiento a mi director de tesis, M.Sc Martin Condori Concha por conducirme a la obtención del título profesional y al asesor Lic. Wilber A. Figueroa Quispe, por su ayuda constante para seguir adelante con esta tesis. Por el tiempo que amablemente ambos profesores mencionados han dedicado para orientarme, ayudarme y animarme; este trabajo se a concluido satisfactoriamente. Así mismo agradezco a los jurados por dedicar su tiempo en la revisión, dictamen del proyecto y borrador de tesis, y por alcanzarme las correcciones pertinentes.

Agradezco también a todos mis profesore(a)s de pre-grado por ser los orientadores de mi vida profesional, a mis amigos de toda la vida, compañeros que siempre estaban pendientes del desarrollo.

Si no nombro alguno, por favor disculpen, ¡ Muchas gracias a todos !.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN

En la presente Investigación titulada ***Transformación de las Ecuaciones Diferenciales no Lineales de Riccati a Ecuaciones diferenciales Lineales***, tiene por objetivo analizar la transformación convencional y la nueva transformación de la ecuación diferencial no lineal de Riccati, que surge de las ideas de Riccati y Sugai y se obtiene las dos transformaciones de la forma $y = \frac{g'}{Qg}$ y $y = \frac{Rf}{f'}$ a través de la transformación de prueba $y(x) = \frac{u(x)f(x)}{g(x)}$ donde $g(x) \neq 0$.

El presente estudio se justificó por cuanto posee valor teórico y utilidad práctica en el estudio de ecuación diferencial no lineal de Riccati, etimológicamente el trabajo de investigación aborda desde la perspectiva de tipo básico con aplicación del diseño descriptivo y análisis, se usa el método inductivo-deductivo.

El procesamiento de la información permitió identificar las dos ecuaciones diferenciales que se tiene $z'' + [P - \frac{Q'}{Q}]z' - QRz = 0$ y $f'' - [P + \frac{R'}{R}]f' - QRf = 0$ son lineales de orden dos y homogénea, se obtiene ecuaciones del mismo tipo al sustituir la transformación convencional atribuida a Riccati y la nueva transformación.

Palabras clave: Ecuación diferencial, ecuación de Riccati, transformación convencional, la nueva transformación.

ABSTRACT

In the present research titled ***Transformation of the Riccati Nonlinear Differential Equations to Linear Differential Equations***, it has the objective of analyzing the conventional transformation and the new transformation of Riccati's nonlinear differential equation, which arises from the ideas of Riccati and Sugai. Obtains the two transformations of the form $y = \frac{g'}{Qg}$ and $y = \frac{Rf}{f'}$ through the test transformation $y(x) = \frac{u(x) f(x)}{g(x)}$ where $g(x) \neq 0$.

The present study is justified because it has theoretical value and utility practices in the study of non-linear Riccati differential equation, etymologically the research work approaches from the perspective of basic type with application of descriptive design and analysis, The inductive-deductive method is used.

The processing of the information allowed to identify the two differential equations

That is $z'' + [P - \frac{Q'}{Q}]z' - QRz = 0$ and $f'' - [P + \frac{R'}{R}]f' - QRf = 0$, are linear of order two and homogeneous, we obtain equations of the same type by substituting the conventional transformation attributed to Riccati and the new transformation.

Key Words: Differential equation, Riccati equation, Conventional transformation, The new transformation.

INTRODUCCIÓN

Una de las áreas de investigación de la Matemática es Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales es de suma importancia en las ciencias e ingeniería y para la solución es necesario realizar transformación convencional y la nueva transformación que surge de la transformación de prueba. Existen ecuaciones diferenciales no lineales ordinarias que puede reducirse a la forma lineal por las transformaciones especiales. Entre estos destaca ecuaciones de Bernoulli, $\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)y^n, n\neq 1$ y $n\in\mathbb{R}$, Riccati $\frac{dy}{dx}+P(x)y+Q(x)y^2=R(x)$ y Jacobi $(a_1+b_1x+c_1y)(xdy-ydx)-(a_2+b_2x+c_2y)dy+(a_3+b_3x+c_3y)dx=0$.

Como el problema de investigación ha sido formulado mediante la interrogante ***¿Bajo que condición se puede analizar las transformaciones de las ecuaciones diferenciales no lineales de Riccati a ecuaciones diferenciales lineales?*** , Para lograr dicho objetivo se utiliza la transformación convencional $y=\frac{z'}{Qz}$ atribuida a Riccati y la nueva transformación $y=\frac{Rf}{f'}$ Surge las ideas de Riccati y Sugai para deducir cada una de las transformaciones y se aplica las transformaciones en ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de orden superior.

A continuación se describe la estructura de los contenidos por capítulos:

Capítulo 1.- Planteamiento y formulación del problema.

Capítulo 2.- Marco teórico: presenta conceptos, definiciones básicas de ecuaciones diferenciales ordinarias, variables separables, homogéneas, ecuaciones diferenciales exactas, el factor integrante, ecuación diferencial lineal de primer orden, Bernoully y Riccati. Ecuaciones diferenciales de segundo orden (ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, ecuación diferencial no homogénea y variación de parámetros).

Capítulo 3.- Tipo y diseño de investigación, métodos y técnicas utilizadas.

Capítulo 4.- Se muestra exposición y análisis de resultado de la transformación convencional y la nueva transformación, transformación convencional extendida y la nueva transformación extendida. Finalmente: conclusión y Recomendación.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del Problema

1.1.1. Fundamentación del Problema

La teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) es una de las disciplinas importantes de la matemática, es utilizado para modelar fenómenos de otras ramas de las ciencias (Física, Biología, Química , Ecología , Economía , ingenierías, etc.), por tal motivo las EDOs juegan un papel preponderante en la investigación científica.

El estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineales de Riccati es de suma importancia para ser transformada en ecuación diferencial ordinaria lineal, existen ecuaciones diferenciales no lineales ordinarias que puede deducirse a la forma lineal, con las transformaciones especiales. Entre estos destaca ecuaciones de Bernoulli, $\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)y^n, n\neq 1$. Riccati $\frac{dy}{dx}+P(x)y+Q(x)y^2=R(x)$ y Jacobi $(a_1+b_1x+c_1y)(xdy-ydx)-(a_2+b_2x+c_2y)dy+(a_3+b_3x+c_3y)dx=0$.

El objetivo de esta investigación radica en analizar la transformación convencional $y=\frac{g'}{Qg}$ atribuida a Riccati y la nueva transformación $y=\frac{Rf}{f'}$ de las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de Riccati. Las ecuaciones diferenciales no lineales que abordaremos desde un punto de vista cuantitativa, presenta conceptos, teoremas que ayuden a interpretar de la forma sencilla las ecuaciones diferenciales no lineales de

Riccati.

1.1.2. Formulación del Problema

El problema de estudio se enmarca en ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de Riccati, la idea principal es linealizar las ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineales y no-homogénea de Riccati, para lograr dicho objetivo se usa la transformación convencional atribuida a Riccati y la nueva transformación, a partir de la transformación de prueba.

1.1.3. Problema General

¿Bajo qué condición se puede analizar las transformaciones de las ecuaciones diferenciales no lineales de Riccati a ecuaciones diferenciales lineales?

1.1.4. Problema Específico

- *¿Es posible analizar la transformación convencional y la nueva transformación de las ecuaciones diferenciales no lineales y no homogénea de primer orden de grado superior a uno*?.
- *¿Es posible generalizar la ecuación diferencial no lineal de Riccati mediante la transformación convencional y la nueva transformación*?.

1.1.5. Justificación del Problema

El presente investigación pretende difundir el concepto de las ecuaciones diferenciales ordinarias y mostrar su utilidad en facilitar la solución de la transformación de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y no homogéneas de Riccati. La ecuación de Riccati es una de las más estudiadas por su aparición en problemas clásicos y modernos en ingeniería (teoría de control, así como en la solución de problemas de contorno), Física (mecánica cuántica) y Biología (el estudio de ADN). Para solucionar una ecuación de Riccati, uno necesita la transformación de la forma $y = \frac{z'}{Qz}$ sin saber por lo menos una solución, no hay absolutamente ocasión de encontrar ninguna solución a tal ecuación.

Con la ejecución de la investigación se pretende analizar y explicar la transformación convencional atribuida a Riccati y la nueva transformación, las ideas de Riccati y Sugai linealiza las ecuaciones diferenciales no lineales y no homogéneas.

El desarrollo de la investigación sirve para hacer más accesible el tema para estudiantes de Pre-grado de las escuelas de ingenierías y ciencias Físico Matemáticas en asignatura de ecuaciones diferenciales ordinarias en tema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.

1.2. Antecedentes de la Investigación

Se considera como antecedentes los siguientes trabajos de investigación por la relación que tiene con el proyecto de investigación.

A) A nivel Internacional

- El tema de la transformación de ecuaciones diferenciales no lineales de Riccati no es algo nuevo, I. Sugai (1961) en su libro Electrical Comunication desarrolla una teoría completa Exact Solutions for Ordinary Nonlinear Differential

Equations produciendo dos transformaciones $y=\frac{z'}{Qz}$, $y=\frac{Rf}{f'}$ que resuelve la ecuación diferencial no lineal de Riccati.

- *SUGAI (1960)*, "Riccati's nonlinear differential equation" , publicado en la revista American Mathematical Monthly. Este artículo se basa principalmente en linealizar la ecuación diferencial no lineal y no homogéneo de Riccati a transformación convencional y la nueva transformación.
- *FRACESCO RICCATI (1724)*. Estudió la ecuación diferencial que lleva su nombre:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y+Q(x)y^2=R(x)$$

Sin lograr sus soluciones. Es importante resaltar, fueron tratados por integrantes de la familia Bernoulli que sí logra conseguir sus soluciones con la transformación $y(x)=y_1(x)+\frac{1}{z(x)}$

- *NUẼZ PAUL (2006)*, Ecuación diferencial no lineal de Riccati, publicado en la Universidad Central de Venezuela Facultad de Ciencias Escuela de Matemática, se basa en comprender en linealizar y convertir una ecuación diferencial no lineal en una ecuación diferencial lineal.

B) A nivel Nacional

- LOBÓN DURAND, Roxana (2008). en su tesis Resolución Numérica de las Ecuaciones Diferenciales con Retardo Mediante Runge-Kutta Explícito y su Aplicación en Biomatemática, hace descripciones sobre Solución de un PVI, Análisis de existencia y unicidad de solución para EDOs , publicado en la Universidad Nacional de Ingeniería Facultad de Ciencias Escuela Profesional de Matemáticas.

C) A nivel regional

- Al revisar los archivos de tesis e informes de investigación existentes en la hemeroteca de la Universidad Nacional del Altiplano y en la biblioteca de nuestra Escuela Profesional no se encontró trabajos realizados referentes al tema de investigación.

1.3. Objetivos de la Investigación

1.3.1. Objetivo General

Analizar la transformación convencional y la nueva transformación de las ecuaciones diferenciales no lineales de Riccati.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Analizarlas transformaciones de las ecuaciones diferenciales no homogéneas de primer orden y de segundo grado.
- Generalizar las ecuaciones diferenciales no lineales de Riccati mediante transformación convencional y la nueva transformación.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO E HIPÓTESIS

2.1. Marco Teórico

2.1.1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales nos hacen pensar en la solución de cierto tipo de ecuación que contiene derivadas. Así como estudiar álgebra y trigonometría se invierte bastante tiempo en, resolver ecuaciones de la forma $x^2+5x+4=0$ con la incógnita x, Se puede resolver ecuaciones diferenciales de la forma $y''+2y'+y=0$, cuya incógnita es la función $y=f(x)$. De tal modo que satisfaga dicha ecuación, es decir, resolver la ecuación diferencial.

2.1.2. Ecuaciones Diferenciales

Definición 2.1.1. Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes. [1]

$$F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0, \forall x \in I$$

2.1.3. Clasificación de las Ecuaciones diferenciales

Ecuación Diferencial Ordinaria

Definición 2.1.2. Es una ecuación que contiene solo derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente. [1]

$$F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0, \forall x \in I$$

Ecuación Diferencial Parcial

Definición 2.1.3. Una ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes, respecto de dos o más variables independientes, se llama ecuación diferencial en derivadas parciales . [11]

$$a(x,y)\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y} + f(x,y)\mu = g(x,y)$$

2.1.4. Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales Según su Or- den y Grado

Definición 2.1.4 (**Orden de una E.D.).** El orden de una ecuación diferencial (ordinaria o en derivadas parciales) es la derivada de mayor orden en la ecuación. [19]

Definición 2.1.5 (**Grado de una E.D.).** Se llama grado de la ecuación diferencial al exponente de la derivada de mayor orden. [19]

***Ejemplo* 2.1.1**. Determinar el orden y grado de las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$\underbrace{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}_{2^{do}\text{ orden y de }1^{er}\text{ grado}} + 5 \underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}_{1^{er}\text{ orden y de }3^{er}\text{ grado}} - 4y = e^x$$

es una E.D O. de según orden y de primer grado.

2.1.5. Clasificación Según la Linealidad

Definición 2.1.6. E.D.O. Lineal. Se dice que una E.D. es lineal si se puede expresar de la forma :

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

donde $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x), g(x)$ dependen solo de variable x.

En caso contrario se dice que la ecuación diferencial es no lineal. [12]

Observación (1)**.** La linealidad de la ecuación diferencial sólo se exige para y y sus derivadas.

Dentro de las ecuaciones diferenciales lineales distinguimos:

- La variable dependiente y y todas sus derivadas son de primer grado, es decir, la potencia de la variable y es uno.
- Cada coeficiente depende sólo de la variable independiente x.
- Si $g(x)=0$ la ecuación es diferencial lineal homogénea, en caso contrario es no-homogénea.
- Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, cuando todos los coeficientes son constantes: $a_i(x)=cte, \forall_i =1,\cdots,n.$
- Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables si algún coeficiente es una función $a_i(x)$ que depende de x y no es constante. [18]

2.1.6. Soluciones de las ecuaciones diferenciales

Definición 2.1.7. Se llama solución de una ecuación diferencial ordinaria en un intervalo I a una función $y(x)$ definida en I que, sustituida en la ecuación junto con sus derivadas, se verifica en dicho intervalo. es decir: [1]

$$F(x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n)}(x))=0, \forall x\in I$$

Clasificación de las soluciones

Se clasifica las soluciones de una ecuación diferencial de la forma siguiente:

- **Familia** $n-$**paramétrica de soluciones:** es la solución de la ecuación diferencial que contiene n constantes arbitrarias.

$$F(x.y.y'.\cdots,y^{(n)})=0 \rightarrow g(x,y,C_1,\cdots,C_n)=0$$

- **Solución particular:** es una solución de la ecuación diferencial que no contiene constantes arbitrarias y que se obtiene dando valores numéricos a las constantes de la familia n-paramétrica de soluciones. [3].

- **Solución singular:** es una solución de la ecuación diferencial que no contiene constantes arbitrarias y no está contenida en la familia n-paramétrica. [3].
- **Solución general de una ecuación diferencial ordinaria de orden n:** que contiene todas las soluciones de la ecuación y está formada por la familia $n-$paramétrica de soluciones, las posibles soluciones singulares que tenga la ecuación. [3].

2.1.7. Problema de Valor Inicial

Definición 2.1.8. Un problema de valor inicial o problema de Cauchy para una ecuación de primer orden es un problema de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$$

La condición adicional $y(x_0) = y_0$ recibe el nombre de condición inicial. [19]

Para resolver un problema de valor inicial se tiene que hallar una solución particular de la ecuación diferencial; precisamente la que pasa por el punto (x_0, y_0); es decir, aquélla solución que al sustituir el valor x_0 se obtiene y_0.

La condición inicial nos permite calcular la constante que aparece en la familia paramétrica, obteniendo la solución particular que nos interesa.

En general, se tiene una ecuación diferencial de orden n, necesita n condiciones, $y(x_0), y'(x_0), \cdots, y^{(n)}(x_0)$, para poder determinar las n constantes arbitrarias que aparecen en la solución.

Definición 2.1.9. Un problema de valor inicial de una ecuación diferencial de orden n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

consiste en encontrar una solución en el intervalo I de $\mathbb{R}$ tal que para cada $x_0 \in I$ satisfaga la condición inicial

$$y(x_0) = y_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

además $y_0, \cdots, y_{n-1}$ son valores constantes.

2.1.8. Existencia y Unicidad de soluciones

Teorema 2.1.1. *(***De existencia y unicidad***)*. Dado el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ tal que } y(x_0)=y_0 \qquad (2.1)$$

y sea el rectangulo $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset \mathbb{R}^2$ con $(a,b) > 0$ Si se verifican las condiciones :

- $f(x; y)$ es una función continua en R.
- (Condición de Lipschitz) Para todo par de puntos $(x; y_1); (x; y_2) \in R$, existe una constante $L > 0$ tal que

$$| f(x, y_1) - f(x, y_2) | \leq L | y_1 - y_2 |$$

Entonces existe una única solución del problema, $y(x)$, definida en un cierto intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $(0 < \delta \leq a)$

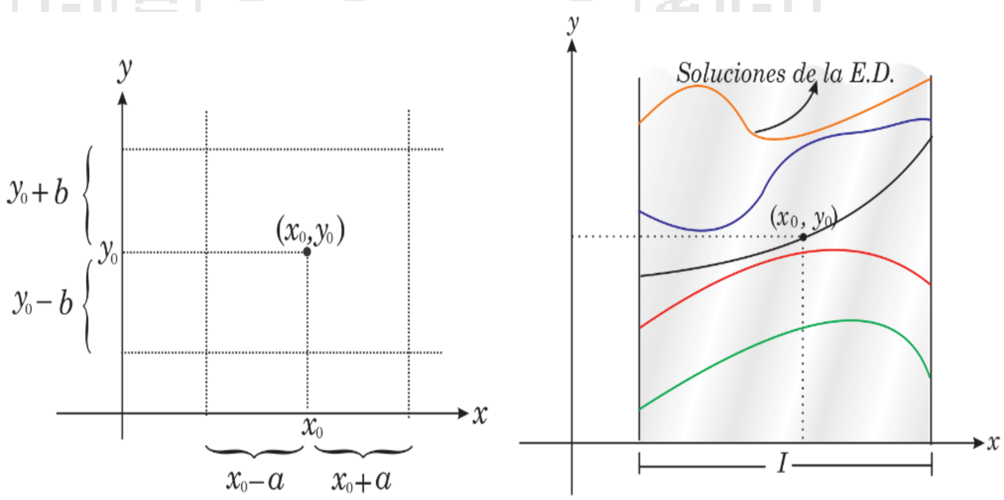

Figura 2.1: De existencia y unicidad

Demostración**.** En primer lugar, obsérvese que, en virtud de la primera condición, $f(x; y)$ está acotado en D (por ser D compacto), luego $\exists M > 0$ tal que $| f(x; y) | \leq M$.

Teniendo esto en cuenta, la demostración sigue los pasos:

- El problema de valor inicial (2.1) puede formularse en forma de ecuación integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{2.2}$$

ya que, integrando desde x_0 a x la ecuación (2.1) escrita en la forma $\dfrac{dy}{dt} = f(t; y(t))$ se obtiene la ecuación

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

y como $y(x_0) = y_0$, de aquí se llega a la ecuación (2.2). Recíprocamente, derivando la ecuación integral se obtiene $y' = f(x; y(x))$ y, por otra parte, dicha ecuación, para $x = x_0$ da $y(x_0) = y_0$.

- Se define la sucesión funcional $\{y_n(x)\}; (n \in \{0\}) \cup \mathbb{N}$, definida como

$$\begin{aligned}
&y_0(x) = y_0 \\
&y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt \\
&\vdots \\
&y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt
\end{aligned}$$

cuyos elementos se denominan iterantes de Picard. Se demuestra que $\lim_{x\to\infty}\{y_n(x)\} = y(x)$ función límite que está definida en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ siendo δ el menor de los números $a, b/M$.

- Se prueba que $y(x)$ es solución de la ecuación (2.2).
- Se prueba que esa es la única solución del problema ya que, si $z(x)$ fuera otra solución, llamando $\phi(x) = y(x) - z(x)$, se tendría

$$
\begin{aligned}
|\phi(x)| = |y(x) - z(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, y(t)) - f(t, z(t)))dt \right| \\
&\leq L \int_{x_0}^{x} |y(t) - z(t)| dt \qquad (2.3) \\
&= L \int_{x_0}^{x} \phi(t)dt
\end{aligned}
$$

En este punto es necesario el siguiente resultado:

Lema 1. (de Gronwald): Sea $\phi(x)$ una función continua no negativa tal que satisface

$$\phi(x) \leq N + M|x - x_0| + L\int_{x_0}^{x} \phi(t)dt \qquad (2.4)$$

Con $N, M \geq 0, L > 0$. Entonces

$$\phi(x) \leq Ne^{L(x-x_0)} + \frac{M}{L}(e^{L(x-x_0)} - 1) \qquad (2.5)$$

***Demostración*:**

Sea $x > x_0$ poniendo $\psi(x) = \int_{x_0}^{x} \phi(t)dt$ la desigualdad (2.4) se escribe

$$\psi'(x) - L\psi(x) \leq N + M(x - x_0)$$

multiplicando por $e^{-L(x-x_0)}$ resulta

$$(\psi'(x) - L\psi(x))e^{-L(x-x_0)} = \frac{d}{dt}(\psi(x)e^{-L(x-x_0)}) \leq (N + M(x - x_0))e^{-L(x-x_0)}$$

e integrándola por x_0 a x, al ser $\psi(x_0) = 0$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\psi(x)e^{-L(x-x_0)} &\leq \frac{N}{L}(1 - e^{-L(x-x_0)}) - \frac{M}{L}(x - x_0)e^{-L(x-x_0)} - \frac{M}{L^2}(e^{-L(x-x_0)} - 1) \Leftrightarrow \\
\psi(x) = \int_{x_0}^{x} \phi(t)dt &\leq \frac{N}{L}(e^{-L(x-x_0)} - 1) - \frac{M}{L}(x - x_0) + \frac{M}{L^2}(e^{-L(x-x_0)} - 1)
\end{aligned}
$$

de modo que, sustituyendo en la desigualdad (2.4), se llega a la desigualdad (2.5) y aplicando este lema con $N, M = 0$, de la desigualdad (2.3) se obtiene que $\phi(x) = 0$, para probar la unicidad de la solución ha sido esencial la condición de Lipschitz

2.1.9. Ecuaciones Diferenciales de Primer y Segundo Orden

Existen métodos básicos para la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden:

Ecuaciones diferenciales ordinarias de Variable Separable

Definición 2.1.10. Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

es una ecuación separable o de variables separables si f (x, y) se puede expresar como el producto de una función de x por una función de y, esto es: [13].

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{2.6}$$

Método de Solución

Si la ecuación diferencial presenta la forma (2.6), se separa las variables x e y, aislándo en miembros opuestos de la ecuación. Para ello, suponer que $h(y) \neq 0$, en este caso:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

$$p(y)dy = g(x)dx$$

donde, por comodidad, $p(y)$ representa a $\frac{1}{h(y)}$, ahora se integra ambos miembros con respecto a sus correspondientes variables, se obtiene

$$\int p(y)dy = \int g(x)dx$$

$$H(y) = G(x) + C$$

es la solución de la ecuación, la cual generalmente es una función dada en forma implícita, donde $H(y)$ y $G(x)$ son anti-derivadas de $p(y)=\dfrac{1}{h(y)}$ y de $g(x)$ respectivamente.

Observación (2)**.** No hay necesidad de emplear dos constantes cuando se integra una ecuación separable, por que si escribimos $H(y)+c_1=G(x)+c_2$, la diferencia c_1-c_2 se remplaza con una sola constante C, por ejemplo puede ser múltiplo de constantes o logaritmo de constante o exponencial de constantes o si aparece la suma de varias constantes reunir en una sola constante.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Reducibles a variables separables La Ecuación de la forma $\dfrac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$

Cuando a,b,c son constantes, esta ecuación se transforma en una ecuación de variables separables mediante la sustitución $z=ax+by+c$, entonces $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{b}(\dfrac{dz}{dx}-a)$ al reemplazar $\dfrac{dy}{dx}$ en la ecuación se obtiene $\dfrac{1}{b}(\dfrac{dz}{dx}-a)=f(z)$, la cual es una ecuación diferencial de variables separables [7].

$$\frac{dz}{dx}=a+bf(z) \Leftrightarrow \frac{dz}{a+bf(z)}=dx.$$

Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

Definición 2.1.11. La función $f(x,y)$ se dice que es homogénea de grado n respecto a las variables x e y. si para todo t se verifica la identidad. [16]

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$$

Definición 2.1.12. Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden se dice que es homogénea si se puede escribir de la forma: [18]

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{2.7}$$

si los coeficientes $M(x,y),N(x,y)$, a la vez, son funciones homogéneas del mismo grado en x e y. La ecuación (2.7) decimos que es una E.D. homogénea si

$$M(tx,ty)=t^n M(x,y) \quad y \quad N(tx,ty)=t^n N(x,y)$$

Este tipo de ecuación diferencial mediante un cambio de variable se transforma en una ecuación en variable separable.

Nota. Si la estructura algebraica de N es más sencilla que M, entonces es conveniente usar la sustitución $y=ux,$ y la diferencial $dy=udx+xdu$. Si la estructura algebraica de M, es más sencilla que N, es conveniente usar la sustitución $x=vy,$ y la diferencial $dx=vdy+ydv.$

Ecuaciones Diferenciales Reducibles a Homogéneas

La ecuación diferencial de la forma siguiente

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

se transforma en ecuaciones homogéneas mediante la sustitución

$$x=t+h \ \Rightarrow dx=dt$$
$$y=v+k \ \Rightarrow dy=dv$$

con h , k constantes. Así se tiene que:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dt}=f\left(\frac{a_1t+b_1v+(a_1h+b_1k+c_1)}{a_2t+b_2v+(a_2h+b_2k+c_2)}\right)$$

si h,k toman valores de modo que :

$$a_1h+b_1k+c_1=0$$
$$a_2h+b_2k+c_2=0$$

Lo cual es posible determinar $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ entonces se obtiene la ecuación.

$$y' = \frac{dv}{dt} = f\Big(\frac{a_1 t + b_1 v}{a_2 t + b_2 v}\Big)$$

La cual es una ecuación homogénea.

si el determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, entonces

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k, \Rightarrow \begin{cases} a_2 = ka_1 \\ b_2 = kb_1 \end{cases}$$

y la ecuación puede escribirse en la forma

$$y' = f\Big(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{k(a_1 x + b_1 y) + c_2}\Big) = F\big(a_1 x + b_1 y\big)$$

que es una ecuación diferencial reducible a variables separables.

Ecuaciones Diferenciales Exactas

Dada una familia de curvas $F(x, y) = C$, se puede generar una ecuación diferencial de primer orden hallando la diferencial total de F . [13].

$$dF(x, y) = 0,$$

Es decir

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

El método que da la resolución de las ecuaciones diferenciales exactas es el proceso inverso. Es decir, dada una ecuación diferencial en la forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

se intenta ver si corresponde a ecuación de alguna función de dos variables.

Definición 2.1.13. Una ecuación diferencial de primer orden [3]

$$M(x,\ y)dx\ +\ N\ (x,\ y)dy\ =\ 0 \tag{2.8}$$

es exacta en un rectángulo R si $M(x,y)dx+N(x,y)dy$, es una diferencial exacta, es decir, si existe una función $F\ (x,\ y)$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=M(x,y)\wedge\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=N(x,y),\ \forall(x,y)\in R$$

El siguiente teorema da una condición necesaria y suficiente para conocer cuándo una ecuación es exacta y su demostración proporciona un método para obtener la solución general $F(x,y)=C$.

Teorema 2.1.2. Sean $M(x,y)$ y $N(x,y)$ funciones continuas con derivadas parciales de primer orden continuas en un rectángulo R. Entonces, la ecuación

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

es exacta si y sólo si se verifica . [8].

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\ \forall(x,y)\in R \tag{2.9}$$

***Demostración*. (De la necesidad)** suponga que $M(x,y)$ y $N(x,y)$ tienen primeras derivadas parciales continuas para (x,y).

Si la expresión $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ es una diferencial exacta, entonces existe una función $F(x,y)$ tal que:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=dF(x,y)$$

en consecuencia

$$M(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \wedge N(x,y)=\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)=\frac{\partial N}{\partial x}$$

las primeras derivadas parciales de M y N son continuas en R, también las derivadas parciales segundas cruzadas de F ; por tanto, éstas son iguales :

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \ \forall (x,y)\in R$$

La parte de la suficiencia del teorema, dada la ecuación $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, se va demostrar que existe una función F se verifica la condición de la definición de ecuación exacta.

Si $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=M(x,y)$ entonces

$$F(x,y)=\int M(x,y)dx=G(x,y)+\phi(y) \tag{2.10}$$

donde $G(x,y)$ es una primitiva de $M(x,y)$ respecto de x. Ahora, se deriva parcialmente respecto a y la expresión se obtiene para F y se iguala a $N(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial G}{\partial y}(x,y)+\phi'(y)=N(x,y)$$

de donde se despeja $\phi'(y)$:

$$\phi'(y)=N(x,y)-\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) \tag{2.11}$$

si esta expresión sólo depende de y, podrá integrar y obtener $\phi(y)$ que, sustituida en (2.10) dará la expresión de $F(x,y)$.

Queda por demostrar que (2.11) sólo depende de y. Para ello, se comprueba que su derivada parcial respecto de x es cero:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(N(x,y)-\frac{\partial G}{\partial y}(x,y)) &= \frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}\\ &= \frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}\\ &= \frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0\end{aligned}$$

Ecuaciones no exactas reducibles a exactas mediante un factor integrante

Considere la ecuación diferencial de la forma. [13].

$$M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy=0 \tag{2.12}$$

Si la ecuación (2.12) no es exacta es decir $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ es posible convertir en una ecuación exacta, multiplicar a la ecuación por una función $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ llamada ***factor integrante*** o ***factor de integración***, la ecuación se transforma en:

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0 \tag{2.13}$$

Como la ecuación (2.13) es exacta, entonces se cumple

$$\frac{\partial\mu(x,y)M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\mu(x,y)N(x,y)}{\partial x}$$

Para determinar el factor integrante se considera los siguientes casos:

Primer caso: como $\mu(x,y)$ es función solo de x es decir $\mu(x)$, entonces $\frac{\partial\mu(x)}{\partial y}=0$, además $\frac{\partial\mu(x)}{\partial x}=\mu'(x)$

la ecuación (4.26) se puede escribir como:

$$\mu(x)(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x})=N(x,y)\mu'(x)$$
$$\frac{1}{N(x,y)}(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x})=\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{1}{u(x)}\frac{du}{dx}$$

La expresión que interesa obtener es $\mu(x)$ suponer el miembro de la izquierda es solo función de x, re-nombrar como $p(x)$ es decir:

$$p(x)=\frac{1}{N(x,y)}(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x})$$

Entonces

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=p(x) \qquad (2.14)$$

es una ecuación que se puede resolver al hacer una sustitución $v=\mu(x)$ y derivar esta expresión $\frac{dv}{dx}=\mu'(x),$ se sustituye en (2.14).

$$\frac{\frac{dv}{dx}}{v}=p(x)\Rightarrow\frac{dv}{vdx}=p(x)$$

y al reacomodar para resolver por separación de variables

$$\int\frac{dv}{v}=\int p(x)dx$$
$$lnv=\int p(x)dx$$
$$v=e^{\int p(x)dx}$$

al reemplazar v, y con (2.14) se obtiene:

$$v=\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx}$$

Segundo caso: Si $\mu(x,y)$ es una función solo de y es decir μ(y), entonces $\frac{\partial\mu(y)}{\partial x}=0$ luego la ecuación (4.42) resulta:

$$M(x,y)\frac{\partial \mu(y)}{\partial y}=(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y})\mu(y)$$

de donde

$$\frac{d\mu(y)}{\mu(y)}=-\frac{1}{M(x,y)}(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x})dy$$

la expresión que nos interesa obtener es µ(y) suponer que el miembro de la derecha es solo función de y, renombrar como g(y) es decir:

$$g(y)=-\frac{1}{M(x,y)}(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x})$$

entonces $\frac{d\mu(y)}{\mu(y)}=g(y)dy$ se integra

$$\int\frac{d\mu(y)}{\mu(y)}=\int g(y)dy \Rightarrow ln\mu(y)=\int g(y)dy$$

y al final se obtiene:

$$\mu(y)=e^{\int g(y)dy}=e^{\int\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}dy}$$

Tercer caso: Cuando el factor integrante es de la forma $\mu(x,y)=f(x)g(x)$ reemplazando en la ecuación

$$M(x,y)\frac{\partial f(x)g(x)}{\partial y}-N(x,y)\frac{\partial f(x)g(x)}{\partial x}=(\frac{\partial M(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y})f(x)g'(y)$$

La expresión anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$(\frac{\partial M(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y})=N(x,y)\frac{f'(x)}{f(x)}-M(x,y)\frac{g'(x)}{g(x)}$$

Donde m y n son funciones conocidas y además las $f(x)$ y $g(y)$ se puede determinar rápidamente.

Cuarto caso: Cuando el factor integrante está dado por $\mu(x,y)=x^n y^m$ donde m y n se determina por la condición necesaria y suficiente de la ecuación diferencial exacta.

Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden

Definición 2.1.14. Una ecuación diferencial de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

donde $a_1(x)\neq 0$, en I y $a_1(x), a_0(x), g(x)$ son continuas en I, se le llama ecuación diferencial lineal en y, de primer orden.

Dividiendo por $a_1(x)$, se obtiene la llamada ecuación en forma canónica ó forma estándar:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x) \tag{2.15}$$

donde $p(x)=\dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$ y $Q(x)=\dfrac{g(x)}{a_1(x)}$

El objetivo es determinar una solución de (2.15) en un intervalo I ambas funciones p y Q son continuas. La ecuación (2.15) es la suma de dos soluciones

$$y=y_c+y_p$$

Donde y_c es una solución de la ecuación homogénea asociada

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \quad (2.16)$$

y y_p es una solución particular de la ecuación no- homogénea (2.15), la ecuación homogénea (2.16) es separable

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + C$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx \Leftrightarrow y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$$

se obtiene $y_c = Ce^{-\int p(x)dx}$ con la finalidad de simplificar la ecuación se define la variable $y_1 = e^{-\int P(x)dx}$ la solución será $y_c = cy_1(x)$ se utiliza $\frac{dy_1}{dx} + p(x)y_1 = 0$ para determinar y_p

Se tiene la solución y_c, se puede encontrar la solución particular de la ecuación (2.15) mediante una técnica que se conoce como variación de parámetros. La idea básica es encontrar una función $u(x)$ (factor integrante)

$$y_p = u(x)y_1(x)$$
$$= u(x)e^{-\int p(x)dx}$$

sea una solución de (2.15). Se observa la definición de y_p es la misma que para y_c excepto que c se sustituye por la variable u. Al sustituir $y_p = uy_1$ en (2.15), se tiene

$$u\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{du}{dx} + p(x)uy_1 = Q(x)$$

agrupar términos $u[\frac{dy_1}{dx} + p(x)y_1] + y_1\frac{du}{dx} = Q(x)$ y como $\frac{dy_1}{dx} + p(x)y_1 = 0$, se obtiene $y_1\frac{du}{dx} = Q(x)$ separar variables e integrar,

$$du = \frac{Q(x)}{y_1(x)}dx$$

$$u = \int \frac{Q(x)}{y_1(x)}dx$$

Como $y_1(x) = e^{-\int p(x)dx}$ se deduce a $\frac{1}{y_1(x)} = e^{\int p(x)dx}$ por lo tanto

$$
\begin{aligned}
y_p &= uy_1 \\
&= \Big(\int \frac{Q(x)}{y_1(x)}dx\Big)e^{-\int p(x)dx} \\
&= e^{-\int p(x)dx}\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx
\end{aligned}
$$

la solución completa es

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)d}x\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx \tag{2.17}$$

El primer término de la ecuación (2.17) corresponde a la solución y_C, el segundo término a la solución y_p . La solución (2.15) debe ser de la forma (2.17).

Ecuación de Bernoulli

Definición 2.1.15. A una ecuación diferencial de la forma.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^n, n \in \mathbb{R} \wedge n \neq 1 \tag{2.18}$$

es llamado ecuación diferencial de Bernoulli. [18].

Si $n = 0$, (2.18) es una ecuación diferencial lineal no homogénea. Además si $n = 1$ se trata de una ecuación de la forma

$$\frac{dy(x)}{dx} = y(x)\big[Q(x) - p(x)\big]$$

es de variables separables. Entonces, es la presencia del término y^n lo que hace que la ecuación no sea lineal.

Leibniz, en 1696, indicó que mediante un cambio de variable $v = y^{1-n}$ se convierte la ecuación (2.18) en una ecuación diferencial lineal. [18].

Los pasos necesarios para resolver una ecuación diferencial de Bernoulli son:

- Luego de que la ecuación diferencial tenga la forma $\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)y^{n}$ (se considera $n\neq 1$), multiplicar por y^{-n} , se tiene

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)yy^{-n}=Q(x)y^{n}y^{-n}$$
$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=Q(x)$$

- Realizar el cambio de variable de la forma $v=y^{1-n}$, con lo cual al derivar se tiene que $\frac{dv}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$, y al sustituir en la ecuación diferencial se obtiene

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}+p(x)v=Q(x)$$
$$\frac{dv}{dx}+(1-n)p(x)v=(1-n)Q(x)$$

- suponer que $p_1(x)=(1-n)p(x)$ y $Q_1(x)=(1-n)Q(x)$, la ecuación diferencial se transforma en una ecuación lineal

$$\frac{dv}{dx}+p_1(x)v=Q_1(x)$$

- Al resolver se obtiene la solución general de la ecuación diferencial de Bernoulli, al final se debe sustituir y^{1-n} por v

2.1.10. Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Se desarrolla teóricamente la estructura de la solución para la Ecuación Diferencial Ordinaria de Segundo Orden y la forma de conseguir cuando se tienen E.D. lineales. Por último, se extienden los resultados para ecuaciones de orden mayor que dos homogéneas y no-homogéneas.

La ecuación diferencial de segundo orden, pueden escribirse de forma general mediante la ecuación

$$y''=f(x,y,y') \tag{2.19}$$

y depende de f, la relación entre las variables x, y y y' puede generar una ecuación diferencial lineal ó no-lineal. (2.1.5). [18]

Ecuaciones lineales de segundo orden

Una ecuación diferencial lineal de orden dos es de la forma

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=b(x) \tag{2.20}$$

Si los coeficientes $a_i(x)$ son constantes, se dice que la ecuación es de coeficientes constantes; en caso contrario se llama ecuación de coeficientes variables.

- Si $b(x)=0$, se dice que la ecuación es homogénea.
- Si $b(x)\neq 0$, se llama ecuación no homogénea y el término $b(x)$ se denomina término no homogéneo.

Se restringe el estudio de la ecuación a los intervalos donde los coeficientes son funciones continuas. Asumir que $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ y $b(x)$ son continuas en algún intervalo I, además que $a_2(x)\neq 0$ en dicho intervalo, podemos expresar la ecuación (2.20) en forma canónica.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=g(x) \tag{2.21}$$

con $p(x), q(x)$ y $g(x)$ continuas en I.

La solución de la ecuación diferencial de segundo orden homogéneo se apoya en dos resultados básicos: la combinación lineal de dos soluciones es otra solución, y toda solución es combinación lineal de dos soluciones independientes.

Definición 2.1.16. Dada dos funciones $y_1, y_2 \in C^1(I)$, se define el Wronskiano de y_1 e y_2 como la función. [18]

$$W[y_1,y_2]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_1'y_2 \tag{2.22}$$

las funciones $y_1(x), y_2(x)$ sea linealmente independiente garantiza que

$$W[y_1, y_2] \neq 0$$

Ecuaciones Diferenciales Lineales con Coeficientes Constantes

Se sabe que $\frac{dy}{dx} + ay = 0$ es lineal de primer orden, donde $p(x) = a$. Luego el $F.I. = e^{\int adx} = e^{ax}$ y su solución es.

$$ye^{ax} = C \rightarrow y = Ce^{-ax}$$

Considere la ecuación de segundo orden con coeficiente constante

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (2.23)$$

tiene por solución una función exponencial de la forma: $y = e^m x$, derivar dos veces

$$y' = me^{mx}, y'' = m^2 e^m x$$

y sustituir en la ecuación diferencial (2.23)

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

luego

$$e^{mx}(am^2 + bm + c)$$

se tiene

$$am^2 + bm + c = 0$$

se llama ecuación característica o ecuación auxiliar de la ecuación diferencial. [3].

Con las raíces de la ecuación característica suceden tres casos:

- **Caso 1.** Raíces reales y diferentes

  Si las raíces son m_1 y m_2 , con $m_1 \neq m_2$, luego $y_1 = e^{m_1 x}$ y $y_2 = e^{m_2 x}$ X son linealmente independientes y por tanto la solución general es

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

- **<u>Caso 2.</u>** Raíces reales e iguales: en este caso las raíces son de multiplicidad dos.

Sea m (con multiplicidad 2) entonces $y_1 = e^{m_1 x}$ es una solución. Utilice el método de $D'Alembert$ para hallar la segunda solución de

$$ay'' + by' + cy = 0$$

dividir por a para conseguir la forma canónica, se tiene

$$y'' + \frac{b}{a} y' + \frac{c}{a} y = 0$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx = e^{mx} \int \frac{e^{-\int \frac{b}{a}dx}}{e^{2mx}} dx$$

Como $ay'' + by' + cy = 0 \rightarrow am^2 + bm + c = 0$ (ecuación característica) y sus raíces son

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

pero las raíces son iguales, entonces el discriminante $b^2 - 4ac = 0$, por lo tanto

$$m_{1,2} = m = -\frac{b}{2a}$$

luego:

$$y_2 = e^{mx} \int \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{e^{2(-\frac{b}{2a}x)}} dx = e^{mx} \int dx = xe^{mx}$$

luego la solución general es

$$y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx}$$

- **Caso 3.** Raíces complejas y conjugadas Suponer que $m_1 = \alpha + \beta i$ es una raíz de la ecuación auxiliar y por tanto su conjugada $m_2 = \alpha - \beta i$, es la otra raíz, donde α es la parte real y β es la parte imaginaria; recordar que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ (Fórmula de Euler) entonces la solución general es

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x} = C_1 e^{\alpha x} e^{\beta i x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-\beta i x} \\ &= e^{\alpha x}(C_1 e^{\beta i x} + C_2 e^{-\beta i x}) \\ &= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2) sen \beta x] \\ &= e^{\alpha x}[k_1 \cos\beta x + k_2 \mathrm{sen}\,\beta x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x} = C_1 e^{\alpha x} e^{\beta i x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-\beta i x} \\ &= e^{\alpha x}(C_1 e^{\beta i x} + C_2 e^{-\beta i x}) \\ &= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2) sen \beta x] \\ &= e^{\alpha x}[k_1 \cos\beta x + k_2 \mathrm{sen}\,\beta x] \end{aligned}$$

Ecuación Diferencial no Homogenea

Una ecuación diferencial lineal no homogénea tiene la forma: [3].

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x)$$

con $g(x) \neq 0$

La solución de la ecuación está conformada por la suma de dos soluciones, llamadas solución complementaria (y_c) y solución particular (y_p).

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

La ***solución complementaria***, es la solución que se obtiene luego de transformar la ecuación diferencial no homogénea en una ecuación homogénea.

$$y_c(x) = c_1 y_{(x)} + c_2 y_2 x$$

La ***solución particular***, es una solución dada de la ecuación diferencial no homogénea, la cual depende de la acción de la función $g(x)$ sobre la ecuación. Ahora es la determinación de la solución $y_p(x)$.

Método de Variación de Parámetros

Esta sección desarrolla otro método para determinar solución particular de ecuación diferencial no homogénea, esta vez, sin importar la naturaleza de la función que expresa el término no homogéneo de la ecuación. La única dificultad a la hora de aplicar el método, radica en la complejidad de integrales que debe resolver para encontrar la solución deseada. El nombre del método se refleja en el proceso que se sigue para conseguir la solución particular y aplica el mismo concepto que se utilizó en la sección (2.1.9).

El matemático Joseph Lagrange, descubrió un método muy ingenioso y poderoso para resolver ecuación diferencial no homogénea, es importante aclarar, que éste método es posible utilizar tanto en ecuaciones diferenciales con coeficiente constante como variable.

Considere la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{2.24}$$

y sea $y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ la solución general de la ecuación homogénea asociada a (2.24). Para determinar una solución particular de la ecuación (2.24), se hace variar los parámetros C_1 y C_2 de y_h, es decir, se asume una solución particular de la forma

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

y se determina la forma de u_1 y u_2 . Vea:

Si $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$, entonces $y_p' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'$, como también se requiere calcular y_p'' y lo que se necesita es determinar a u_1 y u_2; se asume la condición

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \rightarrow y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2' \tag{2.25}$$

volver a derivar

$$y_p'' = u_1 y_1'' + u_1' y_1' + u_2 y_2'' + u_2' y_2' \tag{2.26}$$

sustituir estos valores en (2.24)

$$u_1 y_1'' + u_1' y_1' + u_2 y_2'' + u_2' y_2' + p(x)[u_1 y_1' + u_2 y_2'] + q(x)[u_1 y_1 + u_2 y_2] = g(x) \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{[y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1]}_{0} u_1 + \underbrace{[y_2'' + p(x) y_2' + q(x) y_2]}_{0} u_2 + u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x) \Leftrightarrow$$

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x) \tag{2.27}$$

Luego, la condición (2.25) y la ecuación (2.27) forman un sistema de ecuaciones para u_1' y u_2'; el cual se expresa por medio de

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

Aplicar la Regla de Cramer para el sistema (2.28), se tiene la solución para u_1' y u_2' son:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2]} = -\frac{y_2 g(x)}{W[y_1, y_2]}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2]} = \frac{y_1 g(x)}{W[y_1, y_2]}$$

y W es el Wronskiano de y_1, y_2, viene dado por

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

De donde se obtiene u_1 y u_2, después de integrar respecto a x. Es decir,

$$u_1 = -\int \frac{y_2 g(x)}{W[y_1, y_2]} dx$$
$$u_2 = \int \frac{y_1 g(x)}{W[y_1, y_2]} dx$$

Luego, la solución particular que genera el método de variación de parámetros es

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 g(x)}{W[y_1, y_2]} dx + y_2 \int \frac{y_1 g(x)}{W[y_1, y_2]} dx \qquad (2.29)$$

Ecuaciones de Cauchy-Euler

Una ecuación de Cauchy-Euler es la ecuación diferencial que tiene la forma

$$ax^2 \frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0 \qquad (2.30)$$

Donde a, b y c son constantes; homogéneo de segundo orden, la transformación $|x| = e^t$

Transforma a la ecuación $ax^2 \frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0$ en una ecuación con coeficientes constantes, también puede resolverse suponiendo que la solución es de la

Forma $y(x) = x^r$, lo que conduce a una ecuación auxiliar en r.

- Si $x > 0$, entonces $x = e^t$ o $t = \ln x$ tiene derivadas $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$ sustituyendo en (2.30)

$$ax^2 \frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0$$
$$a[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}] + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

Es decir $a\frac{d^2y}{dx^2} + (b-a)\frac{dy}{dx} + cy = 0$ ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. El caso homogéneo $ax^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+bx\dfrac{dy}{dx}+cy=h(x)$ requiere el uso de variación de parámetros.

- La ecuación homogénea asociada $ax^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+bx\dfrac{dy}{dx}+cy=0$ como el exponente de x coincide con el orden de la derivada en cada sumando, que las soluciones son de la forma

$y=x^r$, con r a determinar. La primera y segunda derivada son, respectivamente

$$y'=rx^{r-1}$$
$$y'=rx^{r-1}$$
$$y''=r(r-1)x^{r-2}$$

en consecuencia las derivadas se sustituye en (2.30), se tiene

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=0$$
$$ax^2r(r-1)x^{r-2}+bxrx^{r-1}+cx^r=0$$
$$x^r(ar(r-1))+br+c)=0$$

la ecuación $x^r(ar(r-1))+br+c)=0$ es una ecuación auxiliar de la ecuación de Cauchy-Euler, llamada ecuación indicial. Hay tres casos distintos por considerar, en función de si las raíces de esta ecuación cuadrática son reales y distintas, reales repetidas (o iguales) o complejas conjugadas.

Caso 1: raíces reales distintas, Sean r_1 y r_2 las raíces reales de $x^r(ar(r-1))+br+c)=0$, con $r_1\neq r_2$. Entonces $y_1=x^{r_1}$ y $y_2=x^{r_2}$ forman un conjunto fundamental de soluciones. Por consiguiente, la solución general es:

$$y=c_1x^{r_1}+c_2x^{r_2}$$

Caso 2: raíces reales repetidas, Si las raíces de $x^r(ar(r-1))+br+c)=0$ son repetidas (esto es, si $r_1=r_2$), la solución general es de la forma

$$y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_1} \ln x$$

Caso 3: Si la ecuación característica de $x^r(ar(r-1)) + br + c) = 0$ tiene las raíces complejas conjugadas, entonces $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$, con $\alpha, \beta > 0$ entonces una solución es

$$\begin{aligned} y &= c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} \\ &= c_1 x^{\alpha+i\beta} + c_2 x^{\alpha-i\beta} \\ &= x^{\alpha}(c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)) \end{aligned}$$

luego la solución general es:

$$y = x^{\alpha}(c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta \ln x))$$

Reducción de orden

La reducción de orden es un método mediante el cual se puede resolver una ecuación lineal de orden n, reduciendo a una ecuación de orden $n-1$.

- Sea y_1 una solución no trivial de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$\begin{aligned} ax^2 \frac{d^2y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{b}{a}\frac{dy}{dx} + \frac{c}{a} y = 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \end{aligned}$$

Donde $P(x) = \dfrac{b}{a}$ y $Q(x) = \dfrac{c}{a}$ son continuas en algún intervalo I.

- Si definimos a y_2 como $y = u(x)y_1(x)$ entonces al ser solución de la ecuación, podemos derivar y sustituir en la ecuación diferencial de la forma siguiente:

$$y' = uy_1' + y_1u'$$
$$y'' = uy_1'' + 2y_1'u' + y_1u''$$

de donde

$$y'' + Py' + Qy = uy_1'' + 2y_1'u' + y_1u'' + P(uy_1' + y_1u') + Quy_1$$

reacomodando la ecuación diferencial.

$$u(y_x'' + Py_1' + Qy_1) + y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0$$

donde $y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0$, se conoce y_1 es solución de la ecuación

$y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0$, haciendo que $w = u'$ la ecuación diferencial tiene la forma

$y_1w' + (2y_1' + Py_1)w = 0$ es una ecuación lineal y separable.

$$\frac{dw}{w} = -(\frac{2y_1'}{y_1} + P)dx$$

Obtenemos

$$\int \frac{dw}{w} = -\int (\frac{2y_1'}{y_1} + P)dx$$
$$\ln w = -2\ln(y_1) - \int Pdx$$
$$w = \frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}$$

Como $w = u'$

$$u' = \frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}$$
$$u = \int \frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}$$

recordando que $y_2 = u(x)y_1$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}$$

es una segunda solución linealmente independiente de la ecuación diferencial lineal de orden dos, entonces la solución general es

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

2.2. Hipótesis

2.2.1. Hipótesis general

La transformación convencional y la nueva transformación se analizan de las ecuaciones diferenciales no lineales de Riccati mediante la transformación de prueba.

2.2.2. Hipótesis específico

- La transformación convencional y la nueva transformación no puede reducir a una ecuación diferencial no lineal no homogénea de primer orden de grado superior a uno.
- Se Generaliza la ecuación diferencial no lineal de Riccati mediante la transformación convencional y la nueva transformación.

CAPÍTULO 3

MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

3.1. Tipo de Investigación

La investigación es de tipo científico básico, este tipo de investigación sirve para ampliar y profundizar el caudal de conocimiento del tema de investigación. En consecuencia incrementa la base teórica en que se sustenta sus resultados, además de mostrar en forma clara y precisa su desarrollo lógico.

Según Hernandez et al.(2006), las investigaciones básicas se caracterizan por que los resultados son conocimientos que describen, explican o producen la realidad investigada.

3.2. Diseño de Investigación

El diseño de investigación utilizado en el presente trabajo de investigación, es el descriptivo- demostrativo.

3.3. Métodos y Técnicas

3.3.1. Métodos

El Método de investigación es inductivo - deductivo, dado que se reduce la hipótesis, que consiste en exploración, interpretación, análisis y síntesis.

3.3.2. Técnicas

Se utilizó la técnica de lectura analítica, que consiste en leer el texto en forma pausada, reflexiva y minuciosa, con el propósito de comprender e interpretar los resultados encontrados en los libros, página web, artículos, etc.

- Se reunió todo el material publicado, libros y web.
- Se hizo una lectura rápida para ubicar definiciones y teoremas principales.
- Análisis de resultados mediante ejemplos

CAPÍTULO 4

EXPOSICIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Nota Histórica

Jacobo Francesco Riccati, nació en Venecia, Italia el 28 de mayo de 1676. vivió parte de su vida en Venecia y en Treviso, estudio en Padua, en este mismo País y se graduó en 1696 como matemático, en 1758 logra algunas publicaciones sobre la matemática, Física(estudió detalladamente la hidrodinámica sobre la base de la mecánica newtoniana) y Filosofía. En su época fue muy respetado en el círculo de científicos, hasta le ofrecieron la presidencia de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, pero rechazó el honor en aras de su retirada y aristocrática vida.

En 1724 se le recuerda por el estudio de ecuaciones que llevan su nombre, un tipo de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y+Q(x)y^2=R(x)$$

sin lograr sus soluciones. Es importante resaltar la investigación de la ecuación de Riccati convocó el esfuerzo de varios matemáticos: Leibniz, Goldbach, Juan Bernoulli y sus hijos Nicolás y Daniel Bernoulli, y posteriormente, a Euler. Esta ecuación se resuelve si previamente se conoce una solución particular, sea $y_1(x)$ conocida dicha solución, se hace el cambio $y(x)=z(x)+y_1(x)$ al sustituir este cambio en la ecuación de Riccati obtenemos de manera semejante una ecuación de Bernoulli obsérvese que si se hace la sustitución: $y(x)=y_1(x)+\frac{1}{z(x)}$ propuesta por Euler en la década de 1760, esto lleva directamente a una ecuación lineal diferencial de primer orden.

4.1. Ecuación de Riccati

La ecuación de Riccati es de la forma.

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y+Q(x)y^2=R(x) \tag{4.1}$$

No hay un método general de resolver una ecuación de (4.1), pero si por algún procedimiento se halla una solución particular $y_1(x)$ de (4.1), entonces la transformación

$$y(x)=y_1(x)+\frac{1}{z(x)} \tag{4.2}$$

se convierte la ecuación de Riccati en una ecuación lineal para $z(x)$. [1] luego derivar (4.2) con respecto a x se obtiene:

$$\frac{dy}{dx}=y_1'-z^{-2}\frac{dz}{dx}$$

sustituyendo esta expresión junto con (4.2) en (4.1) tenemos

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y+Q(x)y^2=R(x)$$

$$y_1'-z^{-2}\frac{dz}{dx}+P(y_1+\frac{1}{z})+Q(y_1^2+2\frac{y_1}{z}+\frac{1}{z^2})=R(x)$$

$$y_1'-z^{-2}\frac{dz}{dx}+P(y_1)+P(\frac{1}{z})+Q(y_1^2)+Q(2\frac{y_1}{z}+\frac{1}{z^2})=R(x)$$

$$\underbrace{[y_1'+P(y_1)+Q(y_1^2)-R(x)]}_{0}-z^{-2}\frac{dz}{dx}+P(\frac{1}{z})+Q(2\frac{y_1}{z}+\frac{1}{z^2})=0 \tag{4.3}$$

si y_1 es solución de la ecuación diferencial, se cumple

$$y_1'+P(y_1)+Q(y_1^2)-R(x)=0$$

se reduce (4.3)

$$P(\frac{1}{z})+Q(2\frac{y_1}{z}+\frac{1}{z^2})=\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$
$$P(\frac{1}{z})+Q(2\frac{zy_1+1}{z^2})=\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$
$$Pz+Q(2zy_1+1)=\frac{dz}{dx}$$

es decir, z satisface la ecuación

$$\frac{dz}{dx}+(P+2Qy_1)z+Q=0$$

que es una ecuación diferencial lineal se puede resolver por el método de factor integrante.

4.2. La Transformación Convencional y la Nueva Transformación

La ecuación de Riccati es dada por:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y+Q(x)y^2=R(x) \tag{4.4}$$

donde $P=P(x), Q=Q(x)$ y $R=R(x)$ son funciones continuas en un intervalo I y $R\neq 0$ en I . Se tiene la siguiente transformación: [15].

$$y=\frac{z'}{Qz} \tag{4.5}$$

donde $Q\neq 0$ en I ; $z=z(x)$ y $z'=\frac{dz}{dx}$

Esta transformación fue descubierta por Riccati y que llamaremos transformación convencional. La transformación permite reducir la ecuación diferencial ordinaria no-lineal (4.4) a una ecuación diferencial lineal. [15].

Se deriva la transformación $y = \frac{z'}{Qz}$ se obtiene

$$y' = \frac{z''Qz - z'(Q'z + Qz')}{Q^2 z^2}$$

al simplificar se tiene

$$y' = \frac{z''}{Qz} - \frac{Q'z'}{Q^2 z} - \frac{(z')^2}{Qz^2}$$

se sustituye $y = \frac{z'}{Qz}$ y y' en ecuación de Riccati, resulta que

$$\frac{z''}{Qz} - \frac{Q'z'}{Q^2 z} - \frac{(z')^2}{Qz^2} + \frac{Pz'}{Qz} + \frac{(z')^2}{Qz^2} = R$$

$$\frac{z''}{Qz} - \frac{Q'z'}{Q^2 z} + \frac{Pz'}{Qz} = R$$

Se multiplica a la ecuación por Qz y al reorganizar los términos, se obtiene

$$z'' - \frac{Q'z'}{Q} + Pz' = QRz$$

se puede escribir como

$$z'' + [P - \frac{Q'}{Q}]z' - QRz = 0 \tag{4.6}$$

A continuación, se ve como Riccati obtuvo la transformación convencional, para ello se utiliza la transformación prueba:

Sean u, f y g funciones continuas en un intervalo I, tales que

$$y(x) = \frac{u(x)f(x)}{g(x)}$$

donde $g(x) \neq 0$ y $x \in I$. La derivada de la transformación prueba es de la forma

$$y' = \frac{u'fg + uf'g - ufg'}{g^2}$$

se reemplaza los valores de la transformación prueba y su derivada en la ecuación de Riccati $\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$, se tiene

$$\frac{u'fg + uf'g - ufg'}{g^2} + P(\frac{uf}{g}) + Q(\frac{uf}{g})^2 = R$$
$$\frac{u'f}{g} + \frac{uf'}{g} - \frac{ufg'}{g^2} + \frac{Puf}{g} + \frac{Qu^2f^2}{g^2} = R$$

al multiplicar la ecuación por g^2, queda de la forma

$$g^2(\frac{u'f}{g} + \frac{uf'}{g} - \frac{ufg'}{g^2} + \frac{Puf}{g} + \frac{Qu^2f^2}{g^2} = R)$$

$$u'fg + uf'g - ufg' + Pufg + Qu^2f^2 = Rg^2 \tag{4.7}$$

A partir de la ecuación (4.7) se obtiene la transformación convencional y la nueva transformación.

- ***Idea de Riccati:*** Si

$$-ufg' + Qu^2f^2 = 0$$
$$ufg' = Qu^2f^2$$
$$g' = \frac{Qu^2f^2}{uf}$$

Entonces

$$f = \frac{g'}{Qu} \tag{4.8}$$

si evalua (4.8) en la transformación prueba, se tiene

$$y=\frac{uf}{g}$$

$$y=\frac{\frac{ug'}{Qu}}{g}$$

$$y=\frac{g'}{Qg} \tag{4.9}$$

El resultado (4.9) es la transformación convencional.

- ***Idea de Sugai:*** Se iguala el segundo término del lado izquierdo de (4.7) y el término del lado derecho de la misma ecuación, se tiene

$$uf'g=Rg^2$$

$$\frac{uf'g}{Rg}=g$$

donde $R\neq 0$, Luego

$$g=\frac{uf'}{R} \tag{4.10}$$

cuando se sustituye (4.10) en la transformación prueba, se obtiene

$$y=\frac{uf}{\frac{uf'}{R}}$$

entonces,

$$y=\frac{Rf}{f'} \tag{4.11}$$

la ecuación (4.11) es llamada la nueva transformación. además,

$$y^2=\frac{R^2f^2}{(f')^2} \tag{4.12}$$

además al derivar (4.11) resulta

$$y' = \frac{(R'f + Rf')f' - Rff''}{(f')^2}$$

$$y' = \frac{R'ff'}{(f')^2} + \frac{Rf'f'}{(f')^2} - \frac{Rff''}{(f')^2}$$

Luego simplificar

$$y' = \frac{R'f}{f'} + R - \frac{Rff''}{(f')^2} \tag{4.13}$$

se sustituye la ecuación (4.11) y (4.13) en ecuación de Riccati, y se tiene

$$\frac{dy}{dx} + Py + Qy^2 = R$$

$$R + \frac{R'f}{f'} - \frac{Rff''}{(f')^2} + \frac{PRf}{f'} + \frac{QR^2 f^2}{(f')^2} = R$$

$$-Rff'' + R'ff' + PRff' + QR^2 f^2 = 0$$

$$f'' - \frac{R'f'}{R} - Pf' - QRf = 0$$

$$f'' - [P + \frac{R'}{R}]f' - QRf = 0 \tag{4.14}$$

Se observa la ecuación de la forma:

$$z'' + [P - \frac{Q'}{Q}]z' - QRz = 0 \text{ y } f'' - [P + \frac{R'}{R}]f' - QRf = 0$$

- Las dos ecuaciones diferenciales son homogéneas y de segundo orden con coeficientes variables. Mediante el método de variación de parámetros (2.1.10) se puede encontrar sus respectivas soluciones.
- El rol de $P(x)$ no influye en la ecuación (4.6) y (4.14).
- En la ecuación (4.6) debe ser $Q(x) \neq 0$, ya que ocasiona problema al utilizar la transformación convencional.

4.2.1. La Transformación Convencional

Se ve una ecuación diferencial de orden superior no-lineal que puede ser reducida a una ecuación diferencial lineal mediante la transformación convencional $y = \frac{g'}{Qg}$ se puede hacer énfasis en ecuaciones diferenciales de segundo orden no-lineal como:

$$y'' + A(x)yy' + B(x)y'y^2 + C(x)y + D(x)y^2 = E(x)$$

donde A, B, C, D y E son funciones continuas en un intervalo I y $E \neq 0$ en I [9].

Se observa que, al derivar la transformación convencional $y = \frac{g'}{Qg}$ se obtiene

$$y' = \frac{g''Qg - g'(Q'g + Qg')}{Q^2g^2}$$

$$y' = \frac{g''Qg - g'Q'g - g'Qg'}{Q^2g^2}$$

por lo tanto

$$y' = \frac{g''}{Qg} - \frac{Q'g'}{Q^2g} - \frac{(g')^2}{Qg^2}$$

Además , la segunda derivada $y = \frac{g'}{Qg}$ es

$$y'' = [\frac{g''}{Qg}]' - [\frac{Q'g'}{Q^2g}]' - [\frac{(g')^2}{Qg^2}]'$$

al calcular la derivada del lado derecho de la ecuación se obtiene

$$y'' = \frac{(g'')'Qg - g''(Qg)'}{(Qg)^2} - [\frac{(Q'g')'Q^2g - Q'g'(Q^2g)'}{(Q^2g)^2}] - [\frac{[(g')^2]'Qg^2 - (g')^2(Qg^2)'}{(Qg^2)^2}]$$

sin embargo

$$y'' = \frac{g'''Qg - g''(Q'g + Qg')}{Q^2g^2} - [\frac{(Q''g' + Q'g'')Q^2g - Q'g'(2QQ'g + Q^2g')}{Q^4g^2}]$$
$$-[\frac{2g'g''Qg^2 - (g')^2(Q'g^2 + 2Qgg')}{Q^2g^4}]$$

se tiene

$$y'' = \frac{g'''Qg - Q'gg'' - Qg'g''}{Q^2g^2} - [\frac{Q''g' + Q'g''}{Q^2g} - \frac{2Q(Q')^2gg'}{Q^4g^2} - \frac{Q^2Q'(g')^2}{Q^4g^2}]$$
$$-[\frac{2g'g''Qg^2 - Q'g^2(g')^2 - 2Qg(g')^3}{Q^2g^4}]$$

Al simplificar se obtiene

$$y'' = \frac{g'''}{Qg} - \frac{Q'g''}{Q^2g} - \frac{g'g''}{Qg^2} - \frac{Q''g'}{Q^2g} - \frac{Q'g''}{Q^2g} + \frac{2(Q')^2g'}{Q^3g} + \frac{Q'(g')^2}{Q^2g^2}$$
$$-\frac{2g'g''}{Qg^2} + \frac{Q'(g')^2}{Q^2g^2} + \frac{2(g')^3}{Qg^3}$$

$$y'' = \frac{g'''}{Qg} - (\frac{Q'g''}{Q^2g} + \frac{Q'g''}{Q^2g}) - (\frac{g'g''}{Qg^2} + \frac{2g'g''}{Qg^2}) - \frac{Q''g'}{Q^2g} + \frac{2(Q')^2g'}{Q^3g}$$
$$+(\frac{Q'(g')^2}{Q^2g^2} + \frac{Q'(g')^2}{Q^2g^2}) + \frac{2(g')^3}{Qg^3}$$

se elimina los términos semejantes se tiene,

$$y'' = \frac{g'''}{Qg} - \frac{2Q'g''}{Q^2g} - \frac{3g'g''}{Qg^2} - \frac{Q''g'}{Q^2g} + \frac{2(Q')^2g'}{Q^3g} + \frac{2Q'(g')^2}{Q^2g^2} + \frac{2(g')^3}{Qg^3}$$

Considere la ecuación diferencial de segundo orden de grado uno no-lineal

$$y'' + 3Qyy' + (\frac{W}{Q})y' + Py + (Q' + W)y^2 + Q^2y^3 = R \qquad (4.15)$$

donde Q, R y W son funciones continuas en un intervalo I con $Q \neq 0$ y $R \neq 0$ en I. En la ecuación (4.15) se sustituye la transformación convencional (4.9), su primera y segunda derivada para obtener una ecuación diferencial lineal de orden tres.

$$\frac{g'''}{Qg}-(\frac{2Q'g''+Q''g}{Q^2g})-\frac{3Qg'g''}{Q^2g^2}+\frac{2(Q')^2g'}{Q^3g}+\frac{2Q'(g')^2}{Q^2g^2}+\frac{2(g')^3}{Qg^3}+$$
$$3Q(\frac{g'}{Qg})(\frac{g''}{Qg}-\frac{Q'g'}{Q^2g}-\frac{(g')^2}{Qg^2})+(\frac{W}{Q})(\frac{g''}{Qg}-\frac{Q'g'}{Q^2g}-\frac{(g')^2}{Qg^2})+$$
$$P(\frac{g'}{Qg})+(Q'+W)(\frac{(g')^2}{Q^2g^2})+Q^2(\frac{(g')^3}{Q^3g^3})=R$$

Luego

$$\frac{g'''}{Qg}-\frac{2Q'g''}{Q^2g}-\frac{Q''g'}{Q^2g}-\frac{3Qg'g''}{Q^2g^2}+\frac{2(Q')^2g'}{Q^3g}+\frac{2Q'(g')^2}{Q^2g^2}+\frac{2(g')^2}{Qg^3}+\frac{3Qg'g''}{Q^2g^2}-\frac{3Q'(g')^2}{Q^2g^2}-$$
$$\frac{3(g')^3}{Qg^3}+\frac{Wg''}{Q^2g}-\frac{WQ'g'}{Q^3g}-\frac{W(g')^2}{Q^2g^2}+\frac{Pg'}{Qg}+\frac{Q'(g')^2}{Q^2g^2}+\frac{W(g')^2}{Q^2g^2}+\frac{(g')^3}{Qg^3}=R$$

al eliminar los términos semejantes

$$\frac{g'''}{Qg}-\frac{2Q'g''}{Q^2g}-\frac{Q''g'}{Q^2g}+\frac{2(Q')^2g'}{Q^3g}+\frac{Wg''}{Q^2g}-\frac{WQ'g'}{Q^3g}+\frac{Pg'}{Qg}=R$$

luego multiplicar por Qg la ecuación se obtiene

$$g'''-\frac{2Q'g''}{Q}-\frac{Q''g'}{Q}+\frac{2(Q')^2g'}{Q^2}+\frac{Wg''}{Q}-\frac{WQ'g'}{Q^2}+Pg'-QRg=0$$

luego agrupar los términos con g'' y g' se tiene

$$g'''-\frac{1}{Q}(2Q'-W)g''+\frac{1}{Q}[PQ-Q''+Q'(\frac{2Q'}{Q}-\frac{W}{Q})]g'=QRg$$

Es importante resaltar que la transformación convencional no puede linealizar ecuación diferencial no-homogénea de primer orden y de segundo grado.

Nota: construir una ecuación diferencial de primer orden a la cual se aplica la transformada convencional.

Sea

$$g''=0$$

Entonces

$$g' = a$$

Para algún $a \in \mathbb{R}$, por tanto

$$g(x) = a(x+b)$$

Donde a y b son constantes.

Se sustituye g y g' en $y = \frac{g'}{Qg}$, se obtiene

$$y(x) = \frac{a}{Q(x)a(x+b)}$$

$$y(x) = \frac{1}{Q(x)(x+b)} \tag{4.16}$$

donde Q es una función continua y $Q \neq 0$ en I. Se deriva (4.16)

$$y' = \frac{1'Q(x)(x+b) - (Q(x)(x+b))'}{Q^2(x)(x+b)^2}$$

$$y' = -[\frac{Q'(x)(x+b) + Q(x)(1)}{Q^2(x)(x+b)^2}]$$

$$y'(x) = -\frac{Q'(x)}{Q^2(x)(x+b)} - \frac{1}{Q(x)(x+b)^2}$$

elevar al cuadrado y'

$$(y')^2(x) = (-\frac{Q'(x)}{Q^2(x)(x+b)} - \frac{1}{Q(x)(x+b)^2})^2$$

por lo tanto

$$(y')^2(x) = \frac{(Q')^2(x)}{Q^4(x)(x+b)^2} + \frac{2Q'(x)}{Q^3(x)(x+b)^3} + \frac{1}{Q^2(x)(x+b)^4}$$

al reducir $(y')^2$ se utiliza (4.16), se tiene

$$(y')^2(x)=[\frac{Q'}{Q}]^2\frac{1}{Q^2(x+b)^2}+2Q'\frac{1}{Q^3(x+b)^3}+Q^2\frac{1}{Q^4(x+b)^4}$$

$$(y')^2-(\frac{Q'}{Q})^2y^2-2Q'y^3-Q^2y^4=0 \tag{4.17}$$

La ecuación (4.17) es homogénea. Además, se puede decir en general que mediante la transformación convencional no podemos reducir una ecuación diferencial no-lineal no-homogénea de primer orden de grado superior a uno.

4.2.2. La Nueva Transformación

La nueva transformación $y=\frac{Rf}{f'}$ dada al calcular el cuadrado de (4.13) se obtiene

$$y'=\frac{R'f}{f'}+R-\frac{Rff''}{(f')^2}$$

$$(y')^2=(R+\frac{R'f}{f'}-\frac{Rff''}{(f')^2})(R+\frac{R'f}{f'}-\frac{Rff''}{(f')^2})$$

Luego

$$(y')^2=R^2+\frac{RR'f}{f'}-\frac{R^2ff''}{(f')^2}+\frac{RR'f^2}{(f')^2}-\frac{RR'f^2f''}{(f')^3}-\frac{R^2ff''}{(f')^2}-\frac{RR'f^2f''}{(f')^3}+\frac{R^2f^2(f'')^2}{(f')^4}$$

al simplificar

$$(y')^2=R^2+\frac{2RR'f}{f'}-\frac{2R^2ff''}{(f')^2}+\frac{(R')^2f^2}{(f')^2}-\frac{2RR'f^2f''}{(f')^3}+\frac{R^2f^2(f'')^2}{(f')^4}$$

si del lado derecho de la ecuación anterior suma y resta R^2, y multiplicar el cuarto término por R^3ff' tanto en el numerador como en el denominador

$$(y')^2=2R^2+\frac{2RR'f}{f'}-\frac{2R^2ff''}{(f')^2}+\frac{(R')^2R^3f^3f'}{RR^2f(f'^3)}-\frac{2RR'f^2f''}{(f')^3}+\frac{R^2f^2(f'')^2}{(f')^4}-R^2$$

Entonces

$$(y')^2 = 2R(R + \frac{R'f}{f'} - \frac{Rff''}{(f')^2}) + (\frac{R'}{R})^2 \frac{R^2 f^2}{(f')^2} - \frac{2RR'f^2 f''}{(f')^3} + \frac{R^2 f^2 (f'')^2}{(f')^4} - R^2 \qquad (4.18)$$

queda de la forma

$$-\frac{2RR'f^2 f''}{(f')^3} + \frac{R^2 f^2 (f'')^2}{(f')^4} = 0$$

$$\frac{2RR'f^2 f''}{(f')^3} = \frac{R^2 f^2 (f'')^2}{(f')^4}$$

$$2R' = \frac{Rf''}{f'}$$

Se obtiene

$$f'' = 2\frac{R'}{R} f'$$

Por otro lado, al sustituir (4.12) y (4.13) en (4.18), se toma en cuenta la suposición anterior

$$(y')^2 - 2Ry' - (\frac{R'}{R})^2 y^2 = -R^2$$

además al derivar (4.13) resulta

$$y' = \frac{R'f}{f'} + R - \frac{Rff''}{(f')^2}$$

$$y'' = \frac{(R'f)' f' - R'ff''}{(f')^2} + R' - \{\frac{(Rff'')'(f')^2 - Rff''[(f')^2]'}{(f')^4}\}$$

sin embargo

$$y'' = \frac{(R''f + R'f')f'}{(f')^2} - \frac{R'ff''}{(f')^2} + R' - \{\frac{[(Rf)' f'' + Rf(f'')'](f')^2 - Rff''[2f'(f')']}{(f')^4}\}$$

de donde

$$y'' = \frac{(R''f + R'f')\,f'}{(f')^2} - \frac{R'ff''}{(f')^2} + R' - [\frac{(R'ff'' + Rf'f'' + Rff''')(f')^2}{(f')^4}] + \frac{Rff''(2f'f'')}{(f')^4}$$

en seguida

$$y'' = \frac{R''ff' + R'(f')^2}{(f')^2} - \frac{R'ff''}{(f')^2} + R' - [\frac{R'f(f')^2 f'' + R(f')^3 f'' + Rf(f')^2 f'''}{(f')^4}] + \frac{Rff''(2f'f'')}{(f')^4}$$

al reducir los términos semejantes

$$y'' = \frac{R''f}{f'} + r' - \frac{R'ff''}{(f')^2} + R' - \frac{R'ff''}{(f')^2} - \frac{Rf'f''}{(f')^2} - \frac{Rff'''}{(f')^2} + \frac{2Rff'(f'')^2}{(f')^4}$$

por consiguiente

$$y'' = 2R' + \frac{R''f}{f'} - \frac{2R'ff''}{(f')^2} - \frac{Rf'f''}{(f')^2} - \frac{Rff'''}{(f')^2} + \frac{2Rf(f'')^2}{(f')^3} \qquad (4.19)$$

La nueva transformación también resuelve ecuación diferencial no-lineal de ordenes mayores que uno; para ello, se toma la ecuación diferencial no lineal de segundo orden:

$$yy'' - 2(y')^2 + 5Ry' - 3R'y = 3R^2$$

La sustitución de (4.11), (4.13) y (4.19) en la ecuación diferencial no-lineal $yy'' - 2(y')^2 + 5Ry' - 3R'y = 3R^2$ da el siguiente resultado

$$\begin{aligned} &\frac{Rf}{f'}(2R' + \frac{R''ff'}{(f')^2} - \frac{2R'ff''}{(f')^2} - \frac{Rf'f''}{(f')^2} - \frac{Rff'''}{(f')^2} + \frac{2Rf(f'')^2}{(f')^3}) \\ &\quad - 2(R^2 + \frac{2RR'f}{f'} - \frac{2R^2 ff''}{(f')^2} + \frac{(R')^2 f^2}{(f')^2} - \frac{2RR'f^2 f''}{(f')^3} + \frac{R^2 f^2 (f'')^2}{(f')^4}) \\ &\quad + 5R(R + \frac{R'f}{f'} - \frac{Rff''}{(f')^2}) - \frac{3R'Rf}{f'} = 3R^2 \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{2RR'f}{f'}+\frac{RR''f^2}{(f')^2}-\frac{2RR'f^2f''}{(f')^3}-\frac{R^2ff'f''}{(f')^3}-\frac{R^2f^2f'''}{(f')^3}+\frac{2R^2f^2(f'')^2}{(f')^4}-2R^2-\frac{4RR'f}{f'}+$$
$$+\frac{4R^2ff'f''}{(f')^3}-\frac{2(R')^2f^2}{(f')^2}+\frac{4RR'f^2f''}{(f')^3}-\frac{2R^2f^2(f'')^2}{(f')^4}+5R^2+\frac{5RR'f}{f'}-$$
$$-\frac{5R^2ff'f''}{(f')^3}-\frac{3RR'f}{f'}=3R^2$$

al simplificar

$$\frac{RR''f^2}{(f')^2}+\frac{2RR'f^2f''}{(f')^3}-\frac{2R^2ff'f''}{(f')^3}-\frac{R^2f^2f'''}{(f')^3}-\frac{2(R')^2f^2}{(f')^2}=0$$

al multiplicar cada término de la ecuación por

$$-\frac{(f')^3}{R^2f^2}$$

resulta

$$f'''-(\frac{2R'}{R})f''-[\frac{R''}{R}-\frac{2(R')^2}{R^2}]f'+\frac{2ff''}{f}=0$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de orden tres homogénea con coeficientes variables.

Hay ecuaciones diferenciales ordinarias que la nueva transformación que no puede linealizar, para ello construir una ecuación diferencial de primer orden, y ver lo que ocurre al aplicarle la nueva transformación.

Suponer

$$f''=0$$

Entonces

$$g''+[P(1-k)+\frac{R'}{R}]g'=0 \quad f'=a$$

Para algún $a\in\mathbb{R}$, por lo tanto $f(x)=a(x+b)$ donde a y b son constantes. Al sustituir g y g' en (4.11), se obtiene

$$y = \frac{Rf}{f'}$$

$$y = \frac{Ra(x+b)}{a}$$

$$y(x) = R(x + b) \tag{4.20}$$

donde R es una función continua en I . Al derivar (4.20)

$$y'(x) = R'(x+b) + R$$

luego, al elevar al cuadrado y'.

$$(y')^2(x) = [R'(x+b) + R]^2$$

En seguida

$$(y')^2(x) = (R')^2(x+b)^2 + 2RR'(x+b) + R^2$$

al multiplicar y dividir el primer término del lado derecho la ecuación anterior por R^2 se obtiene

$$(y')^2(x) = \frac{(R')^2 R^2 (x+b)^2}{R^2} + 2R'R(x+b) + R^2$$

por consiguiente $(y')^2$ al utilizar (4.20), resulta

$$(y')^2 - (\frac{R'}{R})^2 y^2 - 2R'y - R^2 = 0 \tag{4.21}$$

la ecuación (4.21) es no-homogénea.

4.3. Extensión de la Ecuación de Riccati

Sean P, Q y R funciones continuas en un intervalo I y $R \neq 0$ en I . Se Considera las ecuaciones: [14]

$$y' + P(x)y + Q(x)y^k = R(x) \tag{4.22}$$

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)y^k \qquad (4.22)$$

En caso particular estas ecuaciones producen la ecuación generalizada de Riccati, para $k = 2$ en (4.22) y para $k = 0$ en (4.23).

4.3.1. Transformación Convencional Extendida

Sea a, l, m y n constantes que se calcula, Q es una función continúa en un intervalo I y $Q \neq 0$ en I, considere transformación:

$$y = \frac{a(g')^n}{Q^l g^m} \qquad (4.24)$$

La derivada de (4.24) es:

$$y' = \frac{a[n(g')^{n-1} g'' Q^l g^m - (g')^n (Q^l g^m)']}{Q^{2l} g^{2m}}$$

por tanto

$$y' = \frac{anQ^l g^m (g')^{n-1} g'' - alQ^{l-1} Q' g^m (g')^n - amQ^l g^{m-1} (g')^{n+1}}{Q^{2l} g^{2m}}$$

al sustituir (4.24) y su derivada en (4.22), se obtiene que

$$\frac{anQ^l g^m (g')^{n-1} g'' - alQ^{l-1} Q' g^m (g')^n - amQ^l g^{m-1} (g')^{n+1}}{Q^{2l} g^{2m}} + \frac{aP(g')^n}{Q^l g^m} + \frac{a^k Q(g')^{kn}}{Q^{kl} g^{km}} = R(x)$$

si multiplica la ecuación anterior por $Q^{2l} g^{2m}$, resulta

$$anQ^l g^m (g')^{n-1} g'' - alQ^{l-1} Q' g^m (g')^n - amQ^l g^{m-1} (g')^{n+1} + aPQ^l g^m (g')^n + a^k Q^{(2-k)l+1} g^{(2-k)m} (g')^{kn} = RQ^{2l} g^{2m}$$

Si

$$amQ^l g^{m-1} (g')^{n+1} = a^k Q^{(2-k)l+1} g^{(2-k)m(g')^{kn}}$$

entonces

$$\begin{aligned} am &= a^{k} \\ Q^{l} &= Q^{(2-k)l+1} \\ g^{m-1} &= g^{(2-k)m} \\ (g')^{n+1} &= (g')^{kn} \end{aligned}$$

la segunda de estas cuatro ecuaciones, se deduce

$$l = \left(2-k\right)l+1$$

se obtiene

$$l = \frac{1}{k-1}$$

de manera análoga se calcula para los valores de m y n, para obtener el mismo resultado,

$$l = m = n = \frac{1}{k-1} \tag{4.25}$$

Al sustituir (4.25) en la primera de las cuatro ecuaciones anteriores, se tiene que

$$\frac{a}{k-1} = a^{k}$$

Entonces

$$a = (k-1)^{\frac{-1}{k-1}} \tag{4.26}$$

al remplazar (4.25) y (4.26) en (4.24), se convierte en

$$y = \frac{(k-1)^{\frac{-1}{k-1}}(g')^{\frac{1}{k-1}}}{Q^{\frac{1}{k-1}}g^{\frac{1}{k-1}}}$$

De donde

$$y = [\frac{g'}{Qg(k-1)}]^{\frac{1}{k-1}}$$

al resultado se denomina ***transformación convencional extendida*** . Derivar la ecuación, se obtiene

$$y' = \frac{1}{k-1}[\frac{g'}{Qg(k-1)}]^{\frac{2-k}{k-1}}[\frac{g'}{Qg(k-1)}]'$$

Luego

$$y' = \frac{1}{k-1}[\frac{g'}{Qg(k-1)}]^{\frac{2-k}{k-1}}[\frac{g''}{Qg(k-1)} - \frac{g'Q'}{Q^2 g(k-1)} - \frac{(g')^2}{Qg^2(k-1)}]$$

Por lo tanto

$$y' = \frac{(g')^{\frac{2-k}{k-1}} g''}{g^{\frac{1}{k-1}} Q^{\frac{1}{k-1}} (k-1)^{\frac{k}{k-1}}} - \frac{Q'(g')\frac{1}{k-1}}{g^{\frac{1}{k-1}} Q^{\frac{k}{k-1}} (k-1)^{\frac{k}{k-1}}} - \frac{(g')^{\frac{k}{k-1}}}{g^{\frac{k}{k-1}} Q^{\frac{1}{k-1}} (k-1)^{\frac{k}{k-1}}}$$

se evalúa la transformación convencional extendida y su derivada en (4.22), se ve que

$$\frac{(g')^{\frac{2-k}{k-1}} g''}{g^{\frac{1}{k-1}} Q^{\frac{1}{k-1}} (k-1)^{\frac{k}{k-1}}} - \frac{Q'(g')\frac{1}{k-1}}{g^{\frac{1}{k-1}} Q^{\frac{k}{k-1}} (k-1)^{\frac{k}{k-1}}} - \frac{(g')^{\frac{k}{k-1}}}{g^{\frac{k}{k-1}} Q^{\frac{1}{k-1}} (k-1)^{\frac{k}{k-1}}} + \frac{P(g')^{\frac{1}{k-1}}}{g^{\frac{1}{k-1}} Q^{\frac{1}{k-1}} (k-1)^{\frac{1}{k-1}}} +$$

$$\frac{Q(g')^{\frac{k}{k-1}}}{g^{\frac{k}{k-1}} Q^{\frac{k}{k-1}} (k-1)^{\frac{k}{k-1}}} = R$$

se multiplica la ecuación anterior por

$$\frac{g^{\frac{1}{k-1}} Q^{\frac{1}{k-1}} (k-1)\frac{k}{k-1}}{(g')^{\frac{2-k}{k-1}}}$$

<u>resulta</u>

$$g'' + [P(k-1) - \frac{Q'}{Q}]g' - R[Qg(g')^{k-2}(k-1)^k]^{\frac{1}{k-1}} = 0$$

Si para la ecuación anterior se toma $k = 2$ y $R \neq 0$ entonces la ecuación es lineal. Por otra parte, si $k \neq 1$ ó $k \neq 2$ para que la ecuación anterior sea lineal $R = 0$, en este caso

$$g'' - [P(k-1) - \frac{Q'}{Q}]g' = 0$$

4.3.2. La Nueva Transformación Extendida

La transformación

$$y=\frac{gR^{l}g^{n}}{(g')^{m}} \tag{4.28}$$

donde b,l,m y n son constantes que se determina, R una función continua en un intervalo I y $R\neq 0$ en I.

Si deriva la transformación anterior (4.9), resulta

$$y'=b[\frac{(R''g^{n})'(g')^{m}-mR^{l}g^{n}(g')^{m-1}g''}{(g')^{2m}}]$$

Por tanto

$$y'=b[\frac{(lR^{l-1}R'g^{n}+nR^{l}g^{n-1})(g')^{m}-mR^{l}g^{n}(g')^{m-1}g''}{(g')^{2m}}]$$

se simplifica y se obtiene

$$y'=\frac{blR^{l-1}R'g^{n}}{(g')^{m}}+\frac{bnR^{l}g^{n-1}}{(g')^{m-1}}-\frac{bmR^{l}g^{n}g''}{(g')^{m+1}} \tag{4.29}$$

al sustituir (4.28) y su derivada en (4.23) se tiene:

$$\frac{blR^{l-1}R'g^{n}}{(g')^{m}}+\frac{bnR^{l}g^{n-1}}{(g')^{m-1}}-\frac{bmR^{l}g^{n}g''}{(g')^{m+1}}+\frac{bPR^{l}g^{n}}{(g')^{m}}+\frac{Qb^{2}R^{2l}g^{2n}}{(g')^{2}m}=\frac{b^{k}RR^{kl}g^{kn}}{(g')^{km}}$$

si multiplica por $(g')^{2m}$ en la ecuación, se tiene

$$blR^{l-1}R'g^{n}(g')^{m}+bnR^{l}g^{n-1}(g')^{m+1}-bmR^{l}g^{n}(g')^{m-1}g''+$$
$$bPR^{l}g^{n}(g')^{m}+b^{2}QR^{2l}g^{2n}=b^{k}R^{lk+1}g^{nk}(g')^{m(2-k)}$$

al igualar el segundo término del lado izquierdo de ecuación anterior con el lado derecho de la misma ecuación, es decir

$$bnR^{l}g^{n-1}(g')^{m+1}=b^{k}R^{lk+1}g^{nk}(g')^{m(2-k)}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} bn &= b^k \\ R^l &= R^{lk+1} \\ g^{n-1} &= g^{kn} \\ (g')^{m+1} &= (g')^{m(2-k)} \end{aligned}$$

se usa la segunda de las cuatro ecuaciones, se obtiene

$$l = \frac{1}{k-1}$$

se calcula los valores de m y n; el resultado obtenido es el mismo que el valor de l, por tanto

$$l = m = n = \frac{1}{k-1} \tag{4.30}$$

se evalua (4.30) en primera de las cuatro ecuaciones, se obtiene

$$\frac{b}{1-k} = b^k$$

Entonces

$$b = (1-k)^{\frac{1}{1-k}} \tag{4.31}$$

al sustituir (4.30), (4.31) en (4.28) el valor de la transformada se convierte en

$$y = \frac{(1-k)^{\frac{1}{k-1}} R^{\frac{1}{k-1}} g \dfrac{1}{k-1}}{(g') \dfrac{1}{k-1}}$$

de manera que

$$y = [\frac{Rg(1-k)}{g'}]^{\frac{1}{k-1}} \tag{4.32}$$

al resultado se denomina la ***nueva transformación extendida*** .

La derivada de (4.32) es

$$y' = \frac{1}{1-k}\left[\frac{R^{\frac{k}{1-k}} g^{\frac{k}{1-k}} (1-k)^{\frac{k}{1-k}}}{(g')^{\frac{k}{1-k}}}\right]\left[\frac{Rg(1-k)}{g'}\right]'$$

ordenando los términos resulta que

$$y' = \left[\frac{Rg(1-k)}{g'}\right]^{\frac{k}{1-k}}\left[\frac{R'g}{g'} + R - \frac{Rgg''}{(g')^2}\right]$$

si sustituye los valores de (4.32) y su derivada en (4.23), se tiene

$$\frac{R^{\frac{k}{1-k}} g^{\frac{k}{1-k}} (1-k)^{\frac{k}{1-k}}}{(g')^{\frac{k}{1-k}}} + \frac{R^{\frac{1}{1-k}} g^{\frac{k}{1-k}} (1-k)^{\frac{k}{1-k}}}{(g')^{\frac{k}{1-k}}} - \frac{R^{\frac{1}{1-k}} g^{\frac{1}{1-k}} g''(1-k)^{\frac{k}{1-k}}}{(g')^{\frac{2-k}{1-k}}} +$$
$$\frac{PR^{\frac{1}{1-k}} g^{\frac{1}{1-k}} (1-k)^{\frac{1}{1-k}}}{(g')^{\frac{1}{1-k}}} + \frac{QR^{\frac{2}{1-k}} g^{\frac{2}{1-k}} (1-k)^{\frac{2}{1-k}}}{(g')^{\frac{2}{1-k}}} = \frac{R^{\frac{1}{1-k}} g^{\frac{k}{1-k}} (1-k)^{\frac{k}{1-k}}}{(g')^{\frac{k}{1-k}}}$$

al multiplicar la ecuación anterior por

$$-\frac{(g')^{\frac{2-k}{1-k}}}{R^{\frac{1}{1-k}} g^{\frac{1}{1-k}} (1-k)^{\frac{k}{1-k}}}$$

y luego al simplificar se obtiene la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$g'' - \left[P(1-k) + \frac{Q'}{Q}\right]g' - Q\left[R(1-k)^{2-k} g(g')^{-k}\right]^{\frac{1}{1-k}} = 0 \tag{4.33}$$

- Si $k = 0$ y $Q \neq 0$ la ecuación (4.33) se transforma en una ecuación lineal.
- Si $Q = 0$ en (4.23) la ecuación es la de Bernoulli.

$$y' + P(x)y = R(x)y^k \tag{4.34}$$

Para resolver (4.34) se utiliza la transformación descubierta por Leibnitz:

$$z = y^{1-k} \tag{4.35}$$

Se calcula la inversa de (4.35) se obtiene:

$$y = z^{\frac{1}{1-k}}$$

Y al derivar se tiene

$$y' = \frac{z^{\frac{k}{1-k}} z'}{1-k}$$

si sustituye la inversa de (4.35) y su derivada en (4.34) resulta:

$$\frac{z^{\frac{k}{1-k}} z'}{1-k} + Pz^{\frac{1}{1-k}} = Rz^{\frac{k}{1-k}}$$

al multiplicar por

$$\frac{1-k}{z^{\frac{k}{1-k}}}$$

se obtiene la ecuación de la forma:

$$z' + (1-k)Pz = (1-k)R \tag{4.36}$$

La ecuación diferencial de primer orden y de primer grado (4.36) no es homogénea, y esta ecuación debe resolverse por el método de factor integrante. Se evalúa la transformación (4.32) y su derivada en (4.34) proporciona el siguiente resultado:

$$g'' + [P(1-k) + \frac{R'}{R}]g' = 0 \tag{4.37}$$

La ecuación (4.37) es lineal y homogénea

4.4. Ejemplos de la Transformación Convencional

***Ejemplo* 1**. Resolver la ecuación diferencial no lineal

$$y' - (2 + \frac{1}{x})y + y^2 = -(1 + \frac{1}{x})$$

Solución. La ecuación de Riccati es de la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$ con

$$P(x) = -(2 + \frac{1}{x}); \quad Q(x) = 1 \text{ y } R(x) = -(1 + \frac{1}{x})$$

Se tiene la siguiente transformación $y = \frac{z'}{Qz}$ permite reducir la ecuación diferencial ordinaria no-lineal a una ecuación diferencial lineal.

Sea $y = \frac{z'}{Qz} = \frac{z'}{z}$ se deriva la transformación

$$y' = \frac{z''z - z'(z)'}{z^2}$$

$$y' = \frac{z''z - (z')^2}{z^2}$$

la derivada se sustituye en ecuación de Riccati

$$\frac{z''z - (z')^2}{z^2} - (2 + \frac{1}{x})(\frac{z'}{z}) + (\frac{z'}{z})^2 = -1 - \frac{1}{x}$$

$$\frac{z''}{z} - (\frac{z'}{z})^2 - (2 + \frac{1}{x})\frac{z'}{z} + (\frac{z'}{z})^2 = -1 - \frac{1}{x}$$

$$\frac{z''}{z} - (2 + \frac{1}{x})\frac{z'}{z} = -1 - \frac{1}{x}$$

se multiplica a la ecuación por z y al reorganizar los términos, se tiene

$$z'' - (2 + \frac{1}{x})z' + (1 + \frac{1}{x})z = 0$$

La ecuación diferencial es homogénea y de segundo orden con coeficientes variables.

Me- diante el método de reducción de orden se puede encontrar su respectiva solución.

Si $z_1 = e^x$ es solución de la ecuación diferencial

$$xz'' - (2x+1)z' + (x+1)z = 0$$
$$z'' - \frac{2x+1}{x}z' + \frac{x+1}{x}z = 0$$

Además

$$z_2 = z_1 \int \frac{e^{-\int P_1(x)}dx}{z_1^2} \cdots (*)$$

Con $P_1(x) = -\frac{2x+1}{x}$ entonces

$$-\int P_1(x)dx = -\int (-\frac{2x+1}{x})$$
$$-\int P_1(x)dx = \int (2+\frac{1}{x})$$
$$-\int P_1(x)dx = 2x + \ln x$$

reemplazando en $(*)$ resulta

$$z_2 = z_1 \int \frac{e^{-\int P_1(x)}dx}{z_1^2}$$
$$z_2 = e^x \int \frac{e^{2x+\ln x}}{(e^x)^2}dx$$
$$z_2 = e^x \int \frac{e^{2x}e^{\ln x}}{e^{2x}}dx$$
$$z_2 = e^x \int xdx$$
$$z_2 = e^x \frac{x^2}{2}$$

luego la solución general es $z = c_1 z_1 + cy_2$

$$z = c_1 e^x + \frac{cx^2 e^x}{2}$$
$$\therefore z = c_1 e^x + c_2 x^2 e^x$$

***Ejemplo* 2.** Resolver la ecuación diferencial no lineal

$$y' - \frac{3}{x} y + y^2 = -\frac{4}{x^2}$$

Solución. La ecuación de Riccati es de la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$, con

$P(x) = -\frac{3}{x}$; $Q(x) = 1$ y $R(x) = -\frac{4}{x^2}$, reemplazar en la ecuación diferencial reducida

$$z'' + [P - \frac{Q'}{Q}]z' - QRz = 0$$
$$z'' + (-\frac{3}{x})z' - (-\frac{4}{x^2})z = 0$$

La ecuación diferencial es homogénea y de segundo orden con coeficientes variables. Mediante el método de Cauchy- Euler se puede encontrar su respectiva solución

Suponemos que la solución es de la forma $z(x) = x^r$, derivar

$$z = x^r$$
$$z' = rx^{r-1}$$
$$z'' = r(r-1)x^{r-2}$$

y sustituir en la ecuación $x^2 z'' - 3xz' + 4z = 0$ se tiene

$$x^2 r(r-1)x^{r-2} - 3x(rx^{r-1}) + 4x^r = 0$$
$$r(r-1)x^r - 3rx^r + 4x^r = 0$$
$$x^r(r(r-1)) - 3r + 4) = 0$$
$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

la ecuación auxiliar tiene una raíz doble $r = 2$, el conjunto fundamental de solución es: $\{x^2; x^2 \ln x\}$ y la solución de la ecuación homogénea es

$$z(x) = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$$

CONCLUSIONES

- Con transformación convencional y la nueva transformación analizada se obtiene ecuaciones diferenciales lineales de orden dos y homogénea de la forma $z'' + [P - \frac{Q'}{Q}]z' - QRz = 0$ y $f'' - [P + \frac{R'}{R}]f' - QRf = 0$ es analiza mediante la transformación de prueba $y(x) = \frac{u(x)f(x)}{g(x)}$.

- La transformación convencional y la nueva transformación permite linealizar ecuaciones no-lineales de órdenes superiores tales como

$$y'' + A(x)yy' + B(x)y'y^2 + C(x)y + D(x)y^2 = E(x)$$

y no se pueden linealizar ecuaciones no lineales homogéneas de primer orden y de grado dos con la transformación convencional de la forma:

$$(y')^2 - (\frac{Q'}{Q})^2 y^2 - 2Q'y^3 - Q^2 y^4 = 0$$

Y la nueva transformación

$$(y')^2 - (\frac{R'}{R})^2 y^2 - 2R'y - R^2 = 0$$

- La transformación convencional generalizada y la nueva transformación generalizada linealizan las generalizaciones de la ecuaciones diferenciales no lineales de Riccati para cierto valores como k, Q y R.

RECOMENDACIONES

- Realizar el estudio de ecuación de Riccati en la teoría de las funciones de Bessel.
- En trabajos futuros se desea presentar algoritmos de programación numérica en MatLab usando los métodos de solución presentados en la investigación para las EDOs no lineales de Riccati.
- Finalmente, es posible realizar el estudio de la ecuación en diferencias finitas de Riccati en el cálculo de baterías de extractores

BIBLIOGRAFÍA

[1] BECERRIL E, José. (2004). Ecuaciones Diferenciales,Tecnicas de Solución y Aplicaciones. Primera edición.

[2] BRAUN, Martin. (1990). Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones. Grupo Edito- rial Iberroamerica. Nueva York.

[3] CASTILLO, Cristian J.P. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Segunda edición. Editorial Iberoamericana.

[4] CÁNOVAS P, Jose S. (2004) Apuntes de Ecuaciones Diferenciales.

[5] CAMPOS, Beatriz & CHIRALT M, Cristina. (2011). Ecuaciones Diferenciales. Universitat Jaume(http://www. sapientia.uji.es)

[6] EDWARDS C. Henry & PENNEY, David E. (2009). Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera. Cuarta Edición. Editorial Pearson Educación de México.

[7] GUÍÑES V, LABARCA & MARTÍNEZ, M. Ecuaciones Diferenciales. Edicion Pre- liminar. Universidad de Santiago de Chile (Facultad de Ciencias).

[8] HERNÁNDEZ, Hector & NUÑES, Luis. Revista Matemática (Ecuaciones Diferen- ciales Ordinarias de Orden Uno). Universidad de los Andes. Mérida.

[9] INCE, Edward L.(1956). Ordinary Differential Equation Ecuaciones. Universal Library.

[10] LANGER, Rudolph E. (1954) . A First Course in Odinary Differntial Equations. The University of Michigan.

[11] LABUTE, John & JUN XU, Jian.Fundamentals of Ordinary Differential Equation. Department of Mathematics and Statistics. McGill University.

[12] MUÑOZ G. José A.& AGUILAR L. Omar.(2010).Ecuaciones Diferenciales Ordina- rias .Universidad de Guadalajara. (campus CUCSur).

[13] SIMMONS, George F. (1991). Differential Equations with Applications and Historical Notes. Second Edition. (McGraw-Hill).

[14] SUGAI, I. (1960). Riccati's Nonlinear Differential Equations. American Mathemati- cal Monthly.

[15] SUGAI, I. (1961). Exact Solutions for Ordinary Nonlinear Differential Equations. (Electrical Comunication).

[16] TEJERO C, Álvaro & RUIZ M, Pablo. (2002). Ecuaciones diferenciales ordinarias.

[17] TRENCH, William.(2002). Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera .

[18] WIRKUS, Stephen A & SWIFT,Randall J. (2014). A Course in Ordinary Differential Equations. Second Edition.

[19] ZILL, Dennis. (1988). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. Segunda edición. Editorial Iberoamericana.

REFERENCIAS WEB

- https://www.google.com.pe/webhp?sourceid=chrome-instant&ion=1&espv=2&ie=UTF-8#q=ejercicios+de+ecuacion+de+riccati
- https ://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/ART I C U LOS$_V$ 15$_N$ 2$_2$015/RevistaDigital$_J$ imenez$_V$ 15$_n$ 2$_2$015.pdf
- http://dv.ujaen.es/docencia/data/docencia/lm$_d$ ata/lm$_7$4449/3,6.htm.
- https://mat-web.upc.edu/people/narciso.roman/docs/edteor.pdf
- http://cms.dm.uba.ar/depto/public/Curso %20de %20grado/fascgrado1.pdf
- http://www.cimat.mx/ mmoreno/notes/EDD2.

ANEXOS

Ecuación diferencial ordinaria y parcial

Ejemplos. Cuáles de las siguientes ecuaciones son ecuaciones diferenciales ordinarias (E.D.O). y cuáles son ecuaciones en derivadas parciales.

1. $\frac{dy}{dx} + 4y = 7$
2. $\frac{dy}{dx} - \frac{dv}{dx} = x$
3. $y\frac{d^2}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0$
4. $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (E.D. de la onda unidimensional)
5. $a^2(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}) = \frac{\partial w}{\partial t}$ (E.D. del calor)
6. $(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}) = 0$ donde $w = f(x, y, z)$ (E.D de Laplace)

Solución. Las ecuaciones diferenciales (1), (2) y (3) son ordinarias mientras que las ecuaciones dadas en (4), (5) y (6) son ecuaciones en derivadas parciales

Clasificación de las ecuaciones diferenciales según su orden y grado

Ejemplos. Determinar el orden y grado de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $\frac{d^3y}{dx^3}+2(\frac{d^2y}{dx^2})^3+\frac{dy}{dx}=\tan x$, es una E.D. de tercer orden y de primer grado.

2. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-4\frac{\partial u}{\partial t}$, es una E.D.P. de tercer orden.

3. $(\frac{d^2y}{dx^2})^2-3y\frac{dy}{dx}+xy=0$, es una E.D.O. de segundo orden y de segundo grado.

4. $x\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^4y}{dx^4}$, es una E.D. de cuarto grado.

5. $(\frac{d^2y}{dx^2})^4=[1+(\frac{dy}{dx})^3]^3$, es una E.D. de segundo orden y cuarto grado.

6. $(\frac{d^2y}{dx^2})^4=[1+(\frac{dy}{dx})^3]^3$, Es una E.D. de segundo orden y cuarto grado.

Clasificación según la linealidad

Ejemplos. Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $y''-2y'+y=0$
2. $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}=e^x$
3. $x^3y'''-x^2y''+3xy'+5y=x$
4. $\frac{d^2y}{dx^2}+(x+1)\frac{dy}{dx}+2=0$
5. $yy''-2y'=x$
6. $\frac{d^2y}{dx^2}+\operatorname{sen} y=0$

Solución. Las ecuaciones diferenciales (1) y (2) son lineales con coeficientes constantes, las ecuaciones diferenciales (3) y (4) son lineales con coeficientes variables. Las ecuaciones diferenciales (5) y (6) son no lineales.

Método para resolver ecuaciones exactas

- Luego de escribir la ecuación de la forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se verifica que cumpla con:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

- $x^2 - y = Cx$ Como $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ se determina F luego se integra $M(x,y)$ con respecto a x, manteniendo "y" constante.

$$F(x,y) = \int M(x,y) + \phi(y) \tag{4.22}$$

donde $\phi(y)$ es la constante de integración, que es una función que depende sólo de la variable y, puesto que la integración es con respecto a x.

- Deriva la ecuación (4.22) con respecto a la variable y se tiene:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \phi'(y)$$

- Como $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ entonces se tiene $N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \phi'(y)$ de dónde.

$$\phi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

- Luego se integra con respecto a y. Es importante verificar que esta ecuación debe

ser una función que debe depender solo de la variable y (o constante), entonces

$$\phi(y) = \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \right] dy + C \tag{4.23}$$

- Por último se sustituye (4.23) en la solución (4.22), con la cual se obtiene la solución general de la ecuación diferencial, recuerde que es de tipo implícita, es decir, $F(x, y) = C$,

$$\int M(x, y)dx + \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx \right] dy = C$$

- En forma análoga se hace para el otro caso cuando se toma $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$ es decir, en vez de integrar con respecto a x se hace con respecto a y, en lugar de derivar con respecto a y se deriva con respecto a x, y así sucesivamente, hasta llegar a la solución que debe tener la forma.

$$\int N(x, y)dy + \int \left[M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \int N(x, y)dy \right] dx = C$$

Ejemplo 1. Se tiene la ecuación diferencial

$$(2xy^2 + 2y)dx + (2x^2y + 2x)dy$$

Solución. Probar si es o no una ecuación diferencial exacta

$$\begin{cases} M(x, y) = 2xy^2 + 2y \\ N(x, y) = 2x^2y + 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 4xy + 2 \\ \dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 4xy + 2 \end{cases}$$

de donde $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N()x, y}{\partial x} = 4xy + 2$ son iguales, por tanto es una ecuación diferencial exacta.

Ahora, se resuelve la ecuación diferencial siguiendo el orden dado por el método para resolver ecuaciones exactas, entonces $\exists \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, tal que $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$, de donde $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 2xy^2 + 2y$, integrando respecto a "x" se tiene:

$$F(x,y)=\int(2xy^2+2y)dx+g(y)$$
$$F(x,y)=x^2y^2+2xy+g(y)$$

ahora nuestro problema es hallar $\mathbf{g(y)}$ derivar F con respecto a "y".

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=2x^2y+2x+g'(y),\ \text{pero como}$$
$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$$
$$N(x,y)=2x^2y+2x+g'(y)$$
$$2x^2y+2x=2x^2y+2x+g'(y)$$
$$g'(y)=0\ \text{ integrar conrespecto a } y$$
$$\Rightarrow g(y)=C\ \text{ finalmente}$$
$$F(x,y)=x^2y^2+2xy+C$$

se obtiene la solución general

$$x^2y^2+2xy=K$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación diferencial

$$(3x\cos 3x+\sin 3x-3)dx+(2y+5)dy$$

Solución. Probar si es o no una ecuación diferencial exacta

$$\begin{cases}M(x,y)=3x\cos 3x+\sin 3x-3\\ N(x,y)=2y+5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=0\end{cases}$$

De donde $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial X}$ son iguales, por tanto es una ecuación diferencial exacta. Se resuelve la ecuación diferencial, entonces existe $F(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$, de donde $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}=2y+5$, integrando respecto a y se tiene

$$F(x,y)=\int(2y+5)dy+g(x)$$
$$F(x,y)=y^2+5y+g(x)$$

Ahora nuestro problema es encontrar $g(x)$, derivar F con respecto a x.

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=g'(x), \quad \text{pero como } \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$$
$$M(x,y)\&=\&g'(x)$$
$$3x\cos 3x+\operatorname{sen}3x-3=g'(x)$$

por último se integra con respecto a x para conocer $g(x)$

$$g(x)=x\operatorname{sen}3x-3x+C_1$$

Finalmente, se obtiene la solución general

$$F(x,y)=y^2+5y+x\operatorname{sen}3x-3x+C_1$$

Procedimiento para hallar si existe el factor integrante

Para obtener el procedimiento general que permita obtener el factor integrante, si existe, se tiene cuando la ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{4.24}$$

no sea exacta, esto es $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$, es posible convertir en una ecuación exacta, multiplicar

a la ecuación (4.24) por una función $\mu(x,y)$ llamada ***factor integrante,*** esto significa que la ecuación se transforma en:

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0 \tag{4.25}$$

El factor integrante $\mu(x,y)$ puede ser una función que depende solo de x o de y, la notación $\mu(x,y)$ incluye las dos posibilidades. Como la ecuación (4.25) es exacta, entonces se cumple

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)N(x,y))$$

De donde

$$M(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y} + \mu(x,y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = N(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x} + \mu(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Al agrupar se tiene

$$M(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y} - N(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x} = (\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y})\mu(x,y) \tag{4.26}$$

***Ejemplo* 1.** Resuelva la ecuación diferencial

$$(x^2 + y)dx - xdy = 0$$

Solución. Probar, si es exacta

$$\begin{cases} M(x,y) = x^2 + y \\ N(x,y) = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -1 \end{cases}$$

Estas dos expresiones difieren en un signo, por lo tanto no se trata de una ecuación diferencial exacta es decir $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

¿*Qué hacer*? se llega a proponer el factor integrante (F.I.), sea:

$$p(x) = \frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = -\frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx}$$

$$ln\mu(x) = \int -\frac{2}{x}dx$$

$$\ln\mu(x) = -2\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \mu(x) = \frac{1}{x^2}$$

Multiplicar a la ecuación diferencial original por $\frac{1}{x^2}$ entonces la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{x^2+y}{x^2}dx - \frac{x}{x^2}dy = 0$$

$$(1+\frac{y}{x^2})dx - \frac{1}{x}dy = 0$$

Probar si es ecuación diferencial exacta

$$\begin{cases} M(x,y) = 1+\frac{y}{x^2} \\ N(x,y) = -\frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

Es una ecuación diferencial exacta, suponer que la solución sea:

$F(x,y) = \int N(x,y) + g(x)$ entonces existe $F(x,y)$ tal que

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{x}$ al integrar respecto a y se tiene

$$F(x,y) = -\frac{y}{x} + g(x)$$

Nuestro problema es encontrar $g(x)$ derivar $F(x,y)$ con respecto a x.

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{x^2} + g'(x)$, pero como $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$

$$1+\frac{y}{x^2} = \frac{y}{x^2} + g'(x)$$

$$g'(x) = 1$$

Por ultimo integrar con respecto a x para conocer $g(x)$.

$g(x) = x$ al final se encuentra $F(x,y) = -\frac{y}{x} + x$, por lo tanto la solución general es

$$x^2 - y = Cx$$