UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

CONTRUCCIÓN DE GRADO TOPOLÓGICO PARA EL ESTUDIO DE EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIÓDICAS EN ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

TESIS

Presentado por:

Flores Bustinza, Lucio Elías

Para Optar el Título Profesional de:

Licenciado en Ciencias Físico matemáticas

PROMOCIÓN:

2008

Puno – Perú

2016

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"CONSTRUCCIÓN DE GRADO TOPOLÓGICO PARA EL ESTUDIO DE EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIÓDICAS EN ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS"

TESIS

PRESENTADO POR:

LUCIO ELIAS FLORES BUSTINZA

PARA OPTAR EL TITULO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

APROBADO POR EL JURADO CONFORMADO POR:

Presidente de Jurado : Lic.CELSO WILFREDO CALSIN VELASQUEZ

1er Miembro : Lic. VERONICA ALICIA IBAÑEZ ULLOA

2do Miembro : Lic. VICTOR ROMAN SALINAS

Director de Tesis : M.Sc. JUAN CARLOS BENAVIDES HUANCA

Asesor de Tesis : Mg. JULIO CESAR VILLALTA PACORI

Área: Matemáticas
Tema: Topología
Línea de Investigación: Matemática Pura

DEDICATORIA

A Dios,

por ser nuestro creador.

A mi madre, Marcelina,

por demostrarme su amor, apoyo, comprensión y paciencia

A mi hermana Aracely,

por su apoyo y animo que mostró siempre

AGRADECIMIENTOS

Me es difícil encontrar palabras exactas para agradecer a quienes me ayudaron a lograr la culminación de este largo y arduo trabajo.

En primer lugar quiero agradecer a mi familia, a mi madre Marcelina Bustinza Blanco y mi hermana Aracely por el infinito apoyo que me dieron a lo largo de toda mi formación de pre grado en la UNA-Puno, sin ese apoyo, jamás hubiera podido alcanzar este objetivo.

Seguidamente quiero agradecer a mi Director de tesis Juan Carlos Benavides Huanca y mi Asesor Julio Cesar Villalta Pacori por haberme brindado el apoyo necesario.

A mis profesores que me dieron las bases sólidas de un conocimiento en la parte de pre-grado, y finalmente a todos mis compañeros y amigos de la UNA-Puno, por siempre alentarme a culminar esta parte de mi vida profesional.

RESUMEN

La presente investigación intitulada *Construcción del Grado Topológico para el estudio de existencia de soluciones periódicas en ecuaciones diferenciales ordinarias* describe la construcción del Grado Topológico de Brouwer, para la determinación de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta teoría desarrolla conceptos topológicos y analíticos para aplicarlos al análisis de las ecuaciones diferenciales, específicamente al estudio de existencia de las soluciones de ecuaciones diferenciales.

En la construcción del grado topológico finito dimensional denominado Grado de Brouwer para funciones de clase C^1, es necesario definir una aplicación $\deg:\{(f,\Omega)\to\mathbb{Z}\}$, donde $f:\overline{\Omega}\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, es una aplicación continua definida en $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, con Ω *abierto y acotado*, $y\in\mathbb{R}^n$, tal que $y\notin f(\partial\Omega)$, asociaremos a (f,Ω) un *número entero*, que se denotará por $\deg(f,\Omega)$; además esta aplicación tiene que cumplir la propiedades de normalización, aditividad e invariancia homotópica; para finalmente poder definir la aplicación $\deg$, de la siguiente manera:

$$\deg(f,\Omega)=\sum_{x\in g^{-1}(0)\cap\Omega} sgn\det Dg(x)$$

Como el resultado de la aplicación $\deg:(f,\Omega)\to\mathbb{Z}$ es un valor entero, nos permite saber, según lo obtenido si la aplicación f estudiada tiene o no tiene solución mediante el siguiente criterio: si $\deg=0$ la ecuación diferencial no tiene solución, pero si $\deg\neq 0$ la ecuación diferencial tiene solución.

Finalmente para el caso en que f sea una aplicación diferencial, y la ecuación

$$\dot{x}_i(t)=x_i(t)f_i(x(t)),\qquad 1\le i\le n \tag{1}$$

es una ecuación diferencial ordinaria periódica, se establecerá un teorema que:

Si (1) es permanten, entonces para algún conjunto abierto y acotado U tale que

$$\bigcup_{x \in Int\, \mathbb{R}_{+}^{n}} \omega(x) \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq Int\, \mathbb{R}_{+}^{n}$$

indique que si $\deg(h,U) = (-1)^{n}$, donde $h : \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}^{n}$ es definido por $h_i(x) = x_i f_i(x)$, $1 \le i \le n$, $x \in \mathbb{R}^{n}$. En particular, existe un equilibrio de (1) en $Int\, \mathbb{R}_{+}^{n}$ (es decir un cero de h).

Este teorema garantiza que la ecuación (1) siempre tiene solución debido a la definición del grado $\deg$.

ABSTRACT

This research titled *Construction of Topological Degree to study the existence of solutions periodicals ordinary differential equations* describes the construction of topological degree of Brouwer, to the determination of solutions of ordinary differential equations. This theory topological and analytical concepts developed for application to the analysis of differential equations, specifically to study the existence of solutions of differential equations.

In building the finite dimensional topological degree (Grade de Brouwer) for functions of class C^1, is necessary to define an application $\deg :\{(f,\Omega)\in\mathbb{Z}\}$, where $f:\bar{\Omega}\subset\mathbb{R}^n\in\mathbb{R}^n$, is a continuous open application defined in $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, with Ω *and bounded*, $y\in\mathbb{R}^n$, such that $y\notin f(\partial\Omega)$, associate to (f,Ω) the *integer*, which is denoted by $\deg(f,\Omega)$; This application also has to fulfill certain properties of normalization, additivity and homotopy invariance; to finally define the application $\deg$, as follows:

$$\deg(f,\Omega)=\sum_{x\in g^{-1}(0)\cap\Omega} sgn\det Dg(x)$$

As the result of $\deg(f,\Omega)\in\mathbb{Z}$, an integer value, lets us know, as obtained if the application f studied has or has no solution using the following criteria: if $\deg=0$ the differential equation has no solution, but if $\deg\neq 0$ the differential equation has a solution.

Finally for the case where f is a differential implementation, and the equation

$$\dot{x}_i(t)=x_i(t)f_i(x(t)),\qquad 1\le i\le n \tag{2}$$

is a periodic ordinary differential equation, the following theorem establishes

If (2) is permanent, then for some open set U and bounded such that

$$\bigcup_{x \in Int\,\mathbb{R}^n_+} \omega(x) \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq Int\ \mathbb{R}^n_+$$

$\deg(h,U) = (-1)^n$, then $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is definided for $h_i(x) = x_i f_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, $x \in \mathbb{R}^n$. In particular, there is a balance (2) in $Int\mathbb{R}^n_+$ (i.e. a zero of h).

This theorem guarantees that equation (2) always has a solution because the definition of degree $\deg$.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo está dirigido a la investigación científica en el área de ecuaciones diferenciales ordinarias; para tal fin, se utilizará el análisis y la topología para la construcción de la "Teoría de Grado Topológico" y luego utilizarla como una herramienta para la obtención de información cualitativa de cierto tipo de problemas en ecuaciones diferenciales ordinarias, y determinar la existencia de soluciones periódicas.

En matemáticas, la teoría de grado topológico es una generalización del índice numérico de una curva en el plano complejo. Puede ser utilizado, también para estimar el número de soluciones de una ecuación $f(x)=y$ en un espacio apropiado, y está estrechamente vinculado a los teoremas de punto fijo. Cuando se tiene una solución de una ecuación diferencial, la teoría de Grado Topológico a menudo puede ser utilizado para probar la existencia de una segunda solución no trivial. La teoría de Grado Topológico se ha desarrollado como un medio para examinar este conjunto de soluciones y obtener información sobre la existencia y naturaleza de dichas soluciones.

El objetivo principal de la presente investigación es, que mediante la Teoría de Grado Topológico se pueda establecer la existencia de soluciones periódicas de ecuaciones del tipo $y'=f(x,y)$ que a menudo se usan en física e ingeniería: en el estudio de la mecánica, circuitos eléctricos, oscilaciones con presencia de fuerzas externas, y más recientemente en modelos de ecología debido a cambios de estación . (Mitio, 1952)

Finalmente se presenta la bibliografía que ha sido seleccionada teniendo en cuenta el área donde se desarrolla esta investigación.

CAPÍTULO I

1. Plan de Investigación

1.1. Planteamiento Problema

1.1.1. Descripción del Problema

A menudo las ecuaciones diferenciales lineales son sólo una primera aproximación a fenómenos más complejos que en la realidad están gobernados por ecuaciones no lineales; por ejemplo, si se quiere modelar algún comportamiento mecánico o en circuitos eléctricos se puede obtener la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \quad , t \in [0, +\infty] \\ t(0) = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

la idea es determinar si la ecuación (3) tiene soluciones, y no sólo eso, ¿qué tipo de soluciones tiene (3) que permitan describir un comportamiento del fenómeno estudiado?; si éste problema es lineal, existen herramientas matemáticas como el teorema de dependencia continua que permite garantizar la existencia y unicidad de soluciones de las EDOs que permiten saber de alguna solución a la ecuación(3); pero, ¿qué ocurre si el problema es no lineal?, ¿si es una ecuación de orden superior?, ¿si es un sistema de ecuaciones, y más aún una ecuación diferencial parcial?.

1.1.2. Problema General

Debido a que existen ecuaciones diferenciales, donde no es posible hallarle soluciones explícitas, se hace necesario usar métodos analíticos y topológicos que proporcionan información cualitativa acerca de la solución.

En este sentido la teoría de grado topológico ha sido ampliamente utilizada en el estudio de las soluciones simples y periódicas de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales parciales; así como también permite obtener resultados de gran importancia en el análisis de las ecuaciones diferenciales como son los teoremas de punto fijo, por ejemplo el teorema de punto fijo de Brouwer y el teorema de punto fijo de Leray-Schauder.

En la presente investigación se plantea, responder la siguiente interrogante:

¿La teoría de Grado Topológico determinará la existencia de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales ordinarias?.

1.2. Objetivos de la Investigación

1.2.1. Objetivo General

- Construir el Grado Topológico para determinar la existencia de soluciones periódicas en forma cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Desarrollar la Teoría de Grado Topológico en espacios de dimensión finita, para funciones de clase C^1.
- Mostrar que la Teoría de Grado Topológico se puede aplicar a ecuaciones diferenciales ordinarías, para la determinación de la existencia de soluciones periódicas.

1.3. Antecedentes

Se considera como antecedentes los siguientes trabajos de investigación por la relación que tienen con el presente trabajo.

- HADDAD Julian (2009). Teoría de Grado Topológico y Aplicaciones a las Ecuaciones Eiferenciales. Departamento de Matemáticas FCE y N (UBA), Buenos Aires - Argentina. El objetivo de este trabajo de investigación es el de plantear conceptos del Grado Topológico de Brouwer para la aplicación a ecuaciones diferenciales de tipo resonante y no resonantes, y hace una generalización del Grado en dimensión infinita.
- J. MAWHIN (1991). Topological Degree and Boundary Value Problems for Nonlinear Differential Equations, Institut mathematique, Universite de Louvain, Belgium, En español quiere decir "Grado topológico y problemas de contorno para ecuaciones diferenciales no lineales", este trabajo utiliza problemas de caracter no lineal en ecuaciones diferenciales.
- ORTEGA Rafael (1994). Aplicación del Grado Topológico en la Teoría de Estabilidad de Soluciones Periódicas realiza un estudio del índice de una solución periódica.
- VALQUI HASSE Christian (1992). Grado Topológico y Algunas Aplicaciones. El principal propósito de este trabajo de investigación es de mostrar algunas aplicaciones del grado topológico en forma muy algebraica.
- A. CAÑADA Y S. VILLEGAS (2007). El Teorema de Bolzano en varias Variables, Artículo matemático de la Gaseta de la RSME. El principal objetivo de esta publicación es mostrar que se puede generalizar el Teoremas de Bolzano sin definir el Grado Topológico.

El presente trabajo de investigación, no tiene antecedentes en la Universidad Nacional del Altiplano

CAPÍTULO II

2. Marco Teórico

2.1. Sustento Teórico

En el presente trabajo de investigación se necesitara los siguientes conceptos:

2.1.1. Espacios Topológicos y Conjuntos Abiertos

Definición 1.- *Una topología sobre un conjunto* X *es una colección de* $\mathcal{T}$ *de subconjuntos de* X *con las siguientes propiedades:*

1. $\varnothing$ *y* X *están en* $\mathcal{T}$
2. *La unión de elementos de cualquier subcolección de* $\mathcal{T}$ *está en* $\mathcal{T}$ *.*
3. *La intersección de elementos de cualquier subcolección finita de* $\mathcal{T}$ *está en* $\mathcal{T}$ *.*

Un conjunto X para el que se ha definido una topología $\mathcal{T}$ se llama *espacio topológico*. (Munkres, 2002)

Un espacio topológico es un par ordenado $(X,\mathcal{T})$, formado por conjunto X y una topología $\mathcal{T}$, pero a menudo se omitirá hacer mención de $\mathcal{T}$ si no existe confusión.

Si X es un espacio topológico con una topología $\mathcal{T}$, diremos que un subconjunto \$U\$ de X es un *conjunto abierto* de X si U pertenece a la colección $\mathcal{T}$. Usando terminología, se puede decir que un espacio topológico es un conjunto X junto a una colección de subconjuntos de X, llamados *conjuntos abiertos*, tales que $\varnothing$ y X son ambos abiertos, y tal que las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas de conjuntos abiertos son abiertos.

2.1.2. Conjuntos Cerrados

Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice que es *cerrado* si el conjunto $X - A$ es abierto.

Teorema 1.- Sea X un espacio topológico. Se cumple las siguientes condiciones:

$\varnothing$ y X son cerrados

1. Las intersecciones arbitrarias de conjuntos cerrados son cerradas.
2. Las uniones finitas de conjuntos cerrados son cerradas.

Clausura E Interior De Un Conjunto

Dado un subconjunto A de un espacio topológico X, el *interior* de A se define como la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A, y la *clausura* de A se define como la intersección de todos lo conjuntos cerrados que contienen a A. El interior de \$A\$ se denota por $Int\ A$ y la clausura de \$A\$ se denota mediante $Cl\ A$ o por $\bar{A}$. Obviamente, $Int\ A$ es un conjunto abierto y $\bar{A}$ es un conjunto cerrado, más aún,

$$Int\ A \subset A \subset \bar{A}$$

Si A es abierto, $A = Int\ A$, mientras que, si A es cerrado $A = \bar{A}$. (Munkres, 2002)

Puntos límite

Si A es un subconjunto del espacio topológico X y si x es un punto de X, diremos que x es un *punto límite* (o de acumulación) de A si cada entorno de x interseca a A en algún punto *distinto del propio* x. Dicho de otro modo, x es un punto límite de A si pertenece a la clausura de $A - \{x\}$. El punto x puede o no pertenecer a A. (Munkres, 2002)

Teorema 2.- *Sea A un subconjunto del espacio topológico X y A' el conjunto de todos los puntos límite de A. Entonces:*

$$\bar{A} = A \cup A'$$

(Munkres, 2002)

Corolario 1.- *Un subconjunto de un espacio topológico es cerrado si, y sólo si, contiene a todos sus puntos límites.* (Munkres, 2002)

2.1.3. Funciones Continuas

Sean X e Y espacios topológicos. Una función $f: X \to Y$ se dice que es *continua* si para cada subconjunto abierto V de Y, el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X. (Munkres, 2002)

Recuerde que $f^{-1}(V)$ es el conjunto de todos los puntos x de X para los que $f(x) \in V$; es vacío si V no interseca al conjunto imagen $f(X)$ de f.

Teorema 3.- *Sean X e Y espacios topológicos; sea $f: X \to Y$, entonces son equivalentes:*

1. *f es continua.*
2. *Para cada subconjunto A de X, se tiene que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.*
3. *Para cada conjunto cerrado B de Y, el conjunto $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.*
4. *Para cada $x \in X$ y cada entorno V de $f(x)$, existe un entorno U de x tal que $f(U) \subset V$.*

(Munkres, 2002)

Si se cumple la condición 4. para el punto x de X diremos que f es continua en el punto x.

Frontera de un Conjunto

Si $A \subset X$, definimos la *frontera* de A mediante:

$$Fr\ A = \bar{A} \cap \overline{(X - A)}$$

o también $Fr\ A = \partial A$. (Munkres, 2002)

2.1.4. Espacios Conexos

Definición 2.- *Sea X un espacio topológico. Una separación de X es un par U, V de abiertos disjuntos no triviales de X cuya unión es X. El espacio X se dice que es conexo si no existe una separación de X.* (Munkres, 2002)

La propiedad que nos permite enunciar el teorema del valor intermedio se llama conexión, y otro modo de formular la definición de conexión es la siguiente:

Un espacio X es conexo si, y sólo si, los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados en X son el conjunto vacío y el propio X.

2.1.5. Teorema de extensión de Tietze

Teorema 4 (Teorema de extensión de Tietze).- *Sea X un espacio normal y A un subespacio cerrado de X.*

a) Cualquier aplicación continua de A en el intervalo cerrado $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ se puede extender a una aplicación de todo X en $[a,b]$.

b) Cualquier aplicación continua de A en $\mathbb{R}$ se puede extender a una aplicación continua de todo X en $\mathbb{R}$.

(Munkres, 2002)

Demostración:

La idea de la prueba es construir una sucesión de funciones continuas s_n definida sobre todo el espacio X, tal que la sucesión s_n converge uniformemente, y tal que la restricción de s_n a A se aproxima cada vez mas a f a medida que n aumenta. Entonces la función límite será continua y su restricción a A será igual a f.

Paso 1: El primer paso es construir una función particular g definida sobre todo X tal que g no sea demasiado grande, y tal que g se aproxime a f sobre el conjunto A con una exactitud aceptable. Para ser más precisos, tomemos el caso $f : A \to [-r, r]$. Se puede afirmar que existe una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$|g(x)| \leq \frac{1}{3}r \qquad \text{para todo } x \in X$$

$$|g(a) - f(a)| \leq \frac{2}{3}r \quad \text{para todo } a \in A$$

La función g se construye de la siguiente manera.

Dividimos el intervalo $[-r, r]$ en tres intervalos de igual longitud a $\frac{2}{3}r$.

$$I_1 = \left[-r, -\frac{1}{3}r\right], \qquad I_2 = \left[-\frac{1}{2}r, \frac{1}{3}r\right], \qquad I_3 = \left[\frac{1}{3}r, r\right]$$

Sean B y C los subconjuntos

$$B = f^{-1}(I_1) \qquad \text{y} \qquad C = f^{-1}(I_3)$$

de A. Puesto que f es continua, B y C son subconjuntos cerrados y disjuntos de A. Por tanto, son cerrados en X. Por el lema de Urysohn, sabemos que existe una función continua

$$g : X \to \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right]$$

con la propiedad de que $g(x) = -\frac{1}{3}r$ para cada x de B, y $g(x) = \frac{1}{3}r$ para cada x en C.

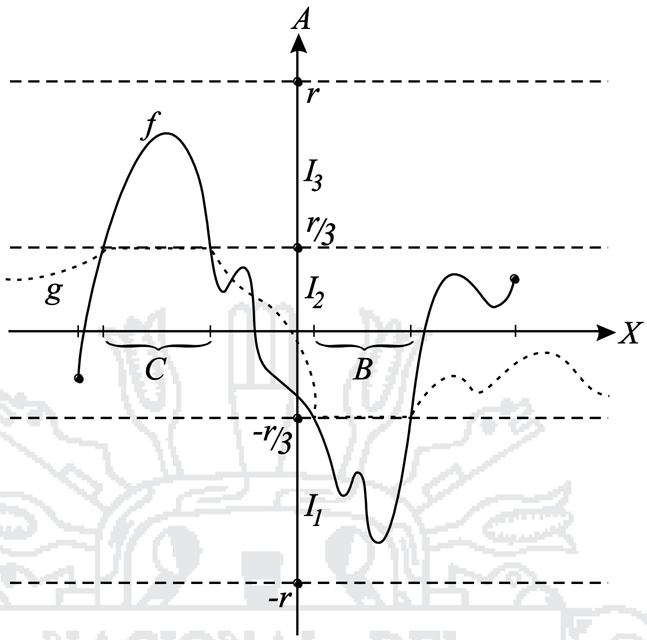


Figura 2.1:

Hay tres casos. Si $a \in B$, entonces $f(a)$ y $g(a)$ pertenecen a I_1. Si $a \in C$, entonces $f(a)$ y $g(a)$ están en I_3. Y si $a \notin B \cup C$, entonces $f(a)$ y $g(a)$ están en I_2. En cada caso, $|g(a) - f(a)| \leq \frac{2}{3} r$ (ver figura 2.1)

Entonces $|g(x)| \leq \frac{1}{3} r$ para todo x. Afirmamos que para cada a en A,

$$|g(a) - f(a)| \leq \frac{2}{3} r.$$

Paso 2: A continuación probaremos la parte (a) del teorema de Tietze. Si pérdida de generalidad, podemos sustituir el intervalo cerrado arbitrario $[a, b]$ de $\R$ por el intervalo $[-1,1]$.

Sea $f: X \to [-1,1]$ una aplicación continua. Entonces f satisface las hipótesis del paso 1, con $r = 1$. Por tanto, existe una función g_1 continua con valores reales definida sobre todo X, tal que:

$$|g_1(x)| \leq \frac{1}{3} \qquad \text{para todo } x \in X$$

$$|f(a) - g_1(a)| \leq \frac{2}{3} \qquad \text{para todo } a \in A$$

Consideremos a continuación la función $f-g_1$. Esta función aplica A en el intervalo $\left[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$, por lo que podemos utilizar el Paso 1 otra vez, haciendo $r=\frac{2}{3}$. Obtenemos una función g_2 con valores reales, definida sobre todo X, tal que

$$|g_2(x)|\leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) \qquad \text{para todo } x\in X$$

$$|f(a)-g_1(a)-g_2(a)|\leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 \qquad \text{para todo } a\in A$$

Después aplicamos el Paso 1 a la función $f-g_1-g_2$. y sucesivamente.

En el paso general, tenemos las funciones con valores reales $g_1,\ldots,g_n$, definidas sobre todo X, tales que:

$$|f(a)-g_1(a)-\cdots-g_n(a)|\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

para $a\in A$. Aplicando el Paso 1 a la función $f-g_1-\cdots-g_n$, con $r=\left(\frac{2}{3}\right)^n$, obtenemos una función g_{n+1} con valores reales, definida sobre todo X, tal que

$$|g_{n+1}(x)|\leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{para todo } x\in X$$

$$|f(a)-g_1(a)-\cdots-g_{n+1}(a)|\leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \qquad \text{para todo } a\in A$$

Por inducción, las funciones g_n están definidas para todo n.

Ahora definimos

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

para todo $x\in X$. Por su puesto, tenemos que saber que esta serie infinita converge. Pero eso se deduce del teorema de comparación del cálculo; converge por comparación con la serie geométrica

$$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Para probar que g es continua, debemos probar que la sucesión s_n converge a g uniformemente. Este hecho se sigue del *test-M de Weierstrass* de análisis. Sin suponer este resultado, se puede observar simplemente que si $k > n$, entonces

$$|x_k(x) - x_n(x)| = \left|\sum_{i=n+1}^{k} g_i(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{3}\sum_{i=n+1}^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$$

$$\leq \frac{1}{3}\sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

Manteniendo n fijo y haciendo $k \to \infty$, vemos que

$$|g(x) - s_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

para todo $x \in X$. Por tanto, s_n converge a g uniformemente.

Se probará ahora que $g(a) = f(a)$ para $a \in A$. Sea $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)$, la n-ésima suma parcial de la serie. Entonces $g(x)$ es, por definición, el límite de la sucesión infinita $s_n(x)$ de sumas parciales. puesto que

$$\left|f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a)\right| = |f(a) - s_n(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

para todo a en A, se sigue que $s_n(a) \to f(a)$ para todo $a \in A$. Por tanto, tenemos que $f(a) = g(a)$, para $a \in A$.

Finalmente, se probará que g aplica X en el intervalo $[-1,1]$. Esta condición satisface, de hecho, automáticamente, puesto que la serie $(1/3)\sum(2/3)^n$ converge a 1. Sin embargo, ésta es sólo una casualidad, más que una parte esencial de la prueba. Si todo lo que supiéramos fuera que g aplica X en $\mathbb{R}$, entonces la aplicación $r \circ g$, donde $r:\mathbb{R}\to[-1,1]$ es la aplicación

$$r(y) = y \qquad \text{si } |y| \le 1,$$

$$r(y) = \frac{y}{|y|} \qquad \text{si } |y| \ge 1,$$

Sería una extensión de f que aplicaría X en $[-1,1]$.

Paso 3: A continuación probaremos que la parte (b) del teorema, en la que f aplica A en $\mathbb{R}$, Podemos sustituir $\mathbb{R}$ por el intervalo abierto $(-1,1)$, ya que este intervalo es homeomorfismo a $\mathbb{R}$.

Para ello, sea f una aplicación de A en $(-1,1)$. La mitad del teorema de Tietze ya probado muestra que podemos extender f a una aplicación continua $g: X \to [-1,1]$ que lleva X al intervalo *cerrado* ¿Cómo podemos encontrar una aplicación h que lleve X al intervalo *abierto*?

Dada g, definamos un subconjunto D de X por la ecuación

$$D = g^{-1}(\{-1\}) \cup g^{-1}(\{1\}).$$

Puesto que g es continua, D es un subconjunto cerrado de X. Como $g(A) = f(A)$, que está contenido en $(-1,1)$, el conjunto A se disjunto de D

Por el lema de Urysohn, existe una función continua $\phi: X \to [0,1]$ tal que

$\phi(D) = \{0\}$ y $\phi(A) = \{1\}$.

Definamos

$$h(x) = \phi(x) g(x)$$

Entonces \$h\$ es continua, por ser el producto de dos funciones continuas. Además, h es una extensión de f, ya que, para a en A.

$$h(a) = \phi(a) g(a) = 1\Delta g(a) = f(a)$$

Finalmente, h aplica todo X en el intervalo abierto $(-1,1)$. Esto es así por que si $x \in D$, entonces $h(x) = 0\Delta g(x) = 0$, y si $x \notin D$, entonces $|g(x)| < 1$. Se sigue que $|h(x)| \le 1\Delta |g(x)| < 1$.

2.1.6. Componentes conexas

Definición 3.- *Dado* X *, se define la siguiente relación de equivalencia en* $X : x \sim y$ *si existe un subespacio conexo de* X *que contiene a ambos puntos. Las clases de equivalencia se denominan componentes (o componentes conexas) de* X . (Munkres, 2002)

2.1.7. Teoría de matrices

Definición 4.- *Dados* $a_{ij} \in K$ *con* $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ *y* $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ *al rectángulo de* $m \times n$ *números ordenados en*

una tabla con m *filas y* n *columnas de la forma:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se le denomina matriz de orden $m \times n$. (Rosa Barbolla, 2002)

Definición 5.- *Sean* V *y* V' *dos* K *-espacios vectoriales. Una aplicación* f *de* V *en* V' *se dice que es lineal si para cualquier* $u, w \in V$ *y* $\alpha, \beta \in K$ *se verifica*

1. $f(u + w) = f(u) + f(w)$
2. $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

o de manera equivalente:

$$f(\alpha u + \beta w) = \alpha f(u) + \beta f(w).$$

(Rosa Barbolla, 2002)

Matriz Asociada A Una Aplicación Lineal

Dada la aplicación lineal f de V en V' y las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_{V'}$ de V y V', respectivamente, la matriz asociada a f respecto a las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_{V'}$ es

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

es decir, la que tiene por columnas las coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}_{V'}$ del espacio de llegada de los factores $f(u_i)$, $i = 1, \ldots, n$ que son los transformados de los elementos de la base $\mathcal{B}_V$ del espacio partida, entonces la matriz A indicada es la matriz asociada a la aplicación lineal f. (Rosa Barbolla, 2002)

Siempre es posible, conocidas las coordenadas x de un vector $u \in V$ respecto de la base $\mathcal{B}_V$, calcular las coordenadas y del vector transformado $f(u)$ respecto de la base $\mathcal{B}_{V'}$, y esto puede denotarse por

$$y = Ax$$

En donde a la matriz A se le denomina *matriz de cambio de base*.

Toda aplicación lineal lleva asociada una matriz. Cuando la aplicación lineal tiene alguna característica especial, es razonable esperar que ésta quede reflejada en la matriz correspondiente. Así por ejemplo, si $V = \mathbb{R}^n$ y $V' = \mathbb{R}^m$ se tiene que:

1. La aplicación identidad de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ dada por $i(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tiene asociada respecto de las bases canónicas una matriz cuadrada de orden n cuyos elementos son:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ,\text{si } i = j \\ 0 & ,\text{si } i \neq j \end{cases} \qquad \text{para } i, j = 1, \ldots, n$$

Por tanto, esta matriz que se denota por I_n está dada por:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

se le denomina *matriz identidad*. (Rosa Barbolla, 2002)

2. La aplicación f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ dada para cada $x \in \mathbb{R}^n$ por

$$f(x_1,\ldots,x_n)=(d_1x_1,d_2x_2,\ldots,d_nx_n)$$

con $d_i \in \mathbb{R}, i=1,\ldots,n$ tiene asociada una matriz de orden n cuyos elementos para $i,j=1,\ldots,n$ son:

$$a_{ij}=\begin{cases} d_i & ,\text{si } i=j \\ 0 & ,\text{si } i\neq j \end{cases}$$

Por tanto la matriz que se denota por D_n es:

$$D_n=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}$$

y dado que los únicos elementos no necesariamente nulos son los a_{ii}, $i=1,\ldots,n$, es decir, los de la diagonal principal, se le denomina *matriz diagonal*. (Rosa Barbolla, 2002)

Observación.- Al grupo de matrices inversibles de orden $n\times n$, definidas sobre un campo F, se le denomina *grupo lineal geneal* y se denota por: $GL_n(F)$. Por ejemplo si V es un espacio vectorial de dimensión n sobre un campo K, se denomina $GL(V)$ al grupo de aplicaciones lineales inversibles de V. Esto es:

$$GL(V)=\{\varphi:V\to V\ /\ \varphi \text{ es lineal e inversible}\}$$

Matrices por Bloques

En ocasiones, resulta útil al operar con matrices, considerarlas escritas por bloques o submatrices, bien sea por que su dimensión es elevada, o bien porque la naturaleza de sus elementos permite simplificar los cálculos al emplear matrices estructuradas de esta forma, como se ilustra a continuación.

Definición 6.- Dada una matriz $A\in\mathcal{M}_{m\times n}$ con $r\leq m$, $s\leq n$ es una submatriz de A si B se ha obtenido prefijando r filas de A y de ellas los elementos de s columnas determinadas. (Rosa Barbolla, 2002)

Ejemplo 1.- Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si consideramos las submatrices de A como:

$$A_{11}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{12}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_{22}=\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

que recogen todos los elementos de A, se puede escribir A mediante estas submatrices en la forma:

$$A=\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

esta es sólo una de las posibles particiones de A que pueden realizarse.

Autovalores y Autovectores

Definición 7.- *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo* K *y* $f:V\to V$ *una aplicación lineal. Se dice que un escalar* $\lambda\in K$ *es un autovalor o valor propio de* f *si existe un vector* $v\in V, v\neq 0_V$, *tal que* *$f(v)=\lambda v$ Al vector* v *se le denomina* autovalor o vector propio *de* f *asociado al autovalor* λ. (Apostol, 2001)

2.1.8. Variedades y Subvariedades

Definición 8.- *Un espacio topológico* M *es llamado una variedad* $n-$ *dimensional de clase* C^r, $r=1,2,\ldots$ *o* $r=\infty$, *o simplemente* C^r-*variedad de dimensión* $\dim M=n$, *si hay una cobertura abierta* $\mathcal{U}=\{U\}_{i i\in\Lambda}$ *de* M *tal que:*

1. *Para cada* $i\in\Lambda$, *existe una aplicación* $\varphi_i:U_i\to\mathbb{R}^n$ *tal que es un homeomorfismo de* U_i *en un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$.

2. *Para cada par de homeomorfismos* $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ *y* $\varphi_j : U_j \to \mathbb{R}^n$, *el cambio de coordenadas* $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ *es una aplicación diferencial de clase* C^r

(Wieslaw Krawcewicz, 1997)

En la definición anterior, el par (φ_i, U_i) es llamado una *carta o sistema coordenado* con dominio en U_i, y el conjunto $\Phi = \{(\varphi_i, U_i)\}_{i\in\Lambda}$ es llamado un *atlas* en M. Además, en el caso 2. decimos que (φ_i, U_i) y (φ_j, U_j) tienen un C^r – superposición. En este caso, el atlas Φ en M es llamado un C^r – atlas α. para cada C^r – atlas Φ en M, existe un único C^r – atlas maximal en M que contiene a Φ, con respecto a la relación de inclusión. Una estructura C^r – diferencial en M es un C^r – atlas maximal α en M. Consecuentemente, una variedad M de clase C^r es un par (M, Φ), donde Φ es un C^r – atlas en M. Se usará también (M, α) para denotar una C^r – variedad, donde α denota una estructura C^r – diferencial en M. una C^∞ – variedad puede ser llamada una variedad suave.

Definición 9.- *Sea* (M, α) *una* C^r *– variedad. Diremos que* M *es orientable si existe un* C^r *– atlas* $\Phi = \{(\varphi_1, U_i)\}$ *tal que* $\phi \subset \alpha$ *y para cada dos cartas superpuestas* (φ_i, U_i) *y* (φ_j, U_j) *de* Φ, *la aplicación del cambio de coordenadas* $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_J)$ *satisface* $\det D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(x) > 0$ *para todo* $x \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$. *Tal que un atlas* Φ *puede ser llamado \emph{orientado}*. (Wieslaw Krawcewicz, 1997)

Se podría también decir que los atlas orientados $\phi = \{(\varphi_i, U_i)\}$ y $\Psi = \{(\varphi_j, U_j)\}$ son equivalentes o determinan la misma orientación en M si para cada dos cartas superpuestas (φ_i, U_i) de Ψ y (φ_j, U_j) de Ψ, se tiene que $\det D(\psi_j \circ \varphi_i^{-1})(x) > 0$ para todo $\varphi_i(U_i \cap V_i)$. La relación anterior es una relación de equivalencia y esta clase de equivalencia podría ser llamada una *orientación* en M. La variedad M junto con la orientación fijada, puede ser llamada *variedad orientada*.

Definición 10.- *Sea* (M,Φ) *una* $C^{\infty}-$*variedad. La variedad* (M,Φ) *es llamada analítica si para cada par de cartas* (φ_i,U_i) *y* (φ_j,U_j), *el cambio de coordenadas* $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}:\varphi_i(U_i\cap U_j)\to\varphi_j(U_i\cap U_j)$ *es una aplicación analítica*. (Wieslaw Krawcewicz, 1997)

Definición 11.- *Un subconjunto* A $n-$*dimensional, la* C^r-*variedad* (M,α) *es llamado una* C^r-*subvariedad de* (M,α) *si para algún* $k\in\mathbb{N}, 0\le k\le n$, *cada punto de* A *pertenece al domino de la carta* (φ,U) *del atlas maximal* α *tal que* $U\cap A=\varphi^{-1}(\mathbb{R}^k\cap\varphi(U))$, *donde* $\mathbb{R}^k\subseteq\mathbb{R}^n$ *es el conjunto de vectores cuyas ultimas* $n-k$ *coordenadas son ceros. podemos llamar a la carta* (φ,U) *una subvariedad de* $A\subseteq M$. (Wieslaw Krawcewicz, 1997)

Teorema 5.- *Sea* $W\subseteq\mathbb{R}^n$ *es un conjunto abierto y* $F:W\to\mathbb{R}^n$ *una* C^r-*aplicación,* $1\le r\le\infty$, *si* z *es un valor regular de* f, *entonces* $f^{-1}(z)=\varnothing$ *o* $f^{-1}(z)$ *es una* C^r-*subvariedad orientable de* $\mathbb{R}^n$ *de codimensión* q. (Wieslaw Krawcewicz, 1997)

2.1.9. Inclusión, Inmersiones y Transversatilidad

En esta sección enunciaremos las nociones de sumersión e inmersión, el objetivo será presentar los conocidos teoremas de Sard y Weierstrass, y adicionalmente se enunciará el muy usual e importante resultado conocido como el teorema de transversatilidad.

Definición 12.- *Sea* $f:M\to N$ *una* C^1-*aplicación entre* C^r-*variedad* M *y* N, $r\ge 1$ *diremos entonces que:*

1. f *es inmersible en* $x\in M$ *si la aplicación lineal* $T_x f:T_xM\to T_{f(x)}N$ *es inyectiva.*

2. *f es submersible en $x \in M$ si $T_x f$ es suryectiva.*
3. *f es una inmersión si f es inmersiva para cada punto de M.*
4. *f es una sumersión si f es subinmersible para cada punto de M.*
5. *f es una inclusión si f es una inmersión y la aplicación M homeomórficamente a su imagen. Podremos escribir $f: M \mapsto N$ y lo denotaremos por f es una inclusión.*

(Deboli, 2005)

En lo que sigue, demostraremos varios métodos útiles para la construcción de sub-variedades. Primero, señalamos que la propiedad de ser un C^r subvariedad si preserva bajo C^r-difeomorfismo, es decir, $A \subseteq M$ es una C^r-subvariedad de M si y sólo si $g(A) \subseteq N'$ es una C^r-subvariedad de N', donde $g: N \to N'$ es un C^r- difeomorfismo.

Teorema 6.- *Sea N un C^r-variedad, $r \geq 1$. Un subconjunto $A \subseteq N$ es una C^r-subvariedad de N si y sólo si A es una imagen de C^r-inclusión.* (Deboli, 2005)

Demostración:
Supongamos que A es una C^r-subvariedad. Entonces A tiene una estructura C^r-diferencial derivada del cubrimiento por subvariedades cartas. Con respecto a esta estructura diferencial, la inclusión de A en N es una C^r-inclusión.

Al contrario, supongamos que $f: M \mapsto N$ es una C^r-inclusión y $A = f(M)$. Sea $\Psi = \{(\psi_i, V_i)\}_{i\in\Lambda}$ es una familia de cartas $\psi_i : B_i \to \mathbb{R}^n$ en N que cubre A. Entonces podríamos encontrar un atlas $\Phi = \{(\varphi_i, W_i)\}_{i\in\Lambda}$ para $M, \varphi_i : W_i \to \mathbb{R}^m$, tal que $f(W_i) \subseteq V_i$. Puesto que f es una inclusión, Φ y Ψ pueden se escogidos tal que $f(W_i) = A \cap V_i$. Por el caracter local (Claramente, si A es una subvariedad de M, entonces la aplicación $\varphi|_{U\cap A}: U \cap A \to \mathbb{R}^k$, donde

(φ, U) es un gráfico de una subvariedad, de un C^r-atlas para A. En consecuencia, A es un C^r-variedad de dimensión k. La codimensión de A en M es $n-k$)

Observación.- Se puede verificar la propiedad de que una C^r-subvariedad es un *caracter local*, en el sentido que un subconjunto A de M es una subvariedad de m si y solo si A_i es una subvariedad de M_i para cada i, donde $\{A_i\}$ es un cubrimiento abierto de A y cada M_i es un subconjunto abierto de M conteniendo a A_i.

y la preservación bajo difemorfismos de subvariedades, basta mostrar que $\psi_i(f(W_i)) \subseteq \mathbb{R}^n$ es un C^r-subvariedad . El conjunto $U_i := \varphi(W_i) \subseteq \mathbb{R}^m$ y $f_i := \psi_i \circ f \circ \varphi_i^{-1} : U_i \to \mathbb{R}^n$. Entonces f_i es una C^r-inclusión y $f_i(U_i) = \psi_i(f(W_i))$. En consecuencia, se podrá reducir la verificación al caso especial donde $n = \mathbb{R}^n$, M es un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, y $f : U \mapsto \mathbb{R}^n$ es una C^r-inclusión. En este caso, el teorema de la función implícita implica que hay una C^r-subvariedad carta para $(\mathbb{R}^n, f(U))$ para cada punto de $f(U)$.

Definición 13.- *La C^1-aplicación $f : M \to N$ es transversal a una subvariedad $A \subseteq N$ en $B \subseteq M$ si $F_{f(x)}A + T_x f(T_x M) = T_{f(x)}N$ para cada $x \in f^{-1}(A) \cap B$. Esto es, el espacio tangente a N en $f(x)$ está atravesado por el espacio tangente a A en $f(x)$ y la imagen del espacio tangente a M en x. Si f es transversal a A en B, podríamos escribir $f \pitchfork_M A$, entonces se podría decir que f es transversal a A y se puede simplificar la escritura como $f \pitchfork A$.* (Deboli, 2005)

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ es una C^1-aplicación y $z \in \mathbb{R}^q$, entonces $f \pitchfork \{z\}$ simplemente significa que z es un valor regular de f.

Teorema 7.- Sea $f: M \to N$ es una C^r-aplicación, $r \geq 1$, y $A \subseteq N$ es una C^r-subvariedad. Si f es transversal a A. entonces $f^{-1}(A)$ es una C^r- subvariedad de M. Por otra parte, la codimensión de $f^{-1}(A)$ en A es la misma que la codimensión de A en N, tal que, $dim\ f^{-1}(A) = dim\ M - dim\ N + dim\ A$. (Deboli, 2005)

Demostración:
Debido al carácter local y la preservación bajo difeomorfismos de subvariedades, basta para demostrar el teorema localmente. Sin pérdida de generalidad, se puede reemplazar el par (N, A) por $(u \times V, U \times \{0\})$, donde $U \times V \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ es una vecindad abierta a $U \times \{0\}$ si y sólo si la aplicación composición $g: M \to V$ definida por $g = \pi \circ f$, donde $\pi: U \times V \to V$ e la proyección sobre V, tiene a 0 como un valor regular. Como $f^{-1}(U \times \{0\}) = g^{-1}(0)$, el teorema se deduce del teorema 5.

Lema 14.- *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y $f: U \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1. Si $X \subset U$ tiene una medida de Lebesgue cero, entonces $f(X)$ también tiene una medida de Lebesgue cero.* (Deboli, 2005)

Teorema 8 (Teorema de Morse-Sard).- *Sean M y N dos C^r-variedades de dimensión m y n, respectivamente, y sea $f: M \to N$ una aplicación de clase C^r, donde $r < \max\{0, m-n\}$. Denotaremos por Σ_f al conjunto de todos los puntos críticos de f. Entonces el conjunto $f(\Sigma_f)$ no es denso en ninguna parte. En particular, el conjunto de todos los valores regulares de f es la segunda categoría de Baire's.* (Wieslaw Krawcewicz, 1997)

esto es una consecuencia inmediata del siguiente lema.

Lema 15 (Teorema de Sard).- *Sea* $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *un conjunto abierto y* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *una aplicación* C^r *tal que* $r > \max\{0, m-n\}$. *Denotemos por* Σ_f *al conjunto de todos los puntos críticos de* f. *Entonces el conjunto* $f(\Sigma_f)$ *de todos los valores críticos de* f *tienen medida de Lebesgue cero*. (Wieslaw Krawcewicz, 1997)

La prueba de este teorema se encuentra en el apéndice A.

Teorema 9 (Teorema de Weierstrass).- *Sea* M *y* N *son dos variedades suaves. Entonces el conjunto* $C^\infty(M,N)$ *de todas las aplicaciones suaves de* M *en* N *es denso en* $C_W^r(M,N)$ *para* $r = 0,1,\ldots$. (Wieslaw Krawcewicz, 1997)

La prueba de este teorema se encuentra en el apéndice A.

Ahora se tiene las condiciones de afirmar el teorema de transversalidad.

Teorema 10 (Teorema de Transversatilidad).- *Sea* M *y* N *dos variedades suaves,* A *una subvariedad compacta de* N, L *un subconjunto compacto de* M, *y* $1 \le r < \infty$ *un entero dado. Entonces el conjunto* $\pitchfork_L^r(M,N;A)$ *es un abierto y denso en* $C_W^r(M,N)$. (Wieslaw Krawcewicz, 1997)

Se utilizara la siguiente notación para un fijo $1 \le r < \infty$ y una subvariedad compacta fija A de N. Para cada conjunto abierto $U \subseteq M$ y $V \subseteq N$ y un subconjunto compacto $L \subseteq U$, dejamos:

$$\mathfrak{L}_L(U,V) := \pitchfork_l^r (U,V;V \cap A) \subseteq C^r(U,V)$$

La demostración de este teorema se encuentra en (Wieslaw Krawcewicz, 1997)

Lema 16.- *Existen revestimientos abiertos* $\{U_\alpha\}$ *y* $\{V_\beta\}$ *de las variedades* M *y* N *respectivamente, tal que si* $L \subseteq U_\infty$ *es un subconjunto compacto,* *entonces* $\mathfrak{L}_L(U_\alpha,V_\beta)$ *es un denso y abierto en* $C^r_W(U_\alpha,V_\beta)$. (Wieslaw Krawcewicz, 1997)

Proposición 1.- Si M es una variedad suave, A una subvariedad compacta de $\mathbb{R}^n$, y L un subconjunto compacto de M. Sea $f\in C^r_W(M;\mathbb{R}^n)$ tal que $f\in\pitchfork^r_{L_0}(M,\mathbb{R}^n;A)$ para algún compacto $L_0\subseteq L$. Entonces para cada vecindad $\mathcal{N}$ de f en $C^r_W(M;\mathbb{R}^n)$ existe $h\in\mathcal{N}\cap\pitchfork^r_L(M;\mathbb{R}^n;A)$ tal que $h|_{L_0}=f|_{L_0}$. (Wieslaw Krawcewicz, 1997)

Corolario 2.- Sea M y N dos variedades suaves, A es una subvariedad compacta de N, y $L_0\subseteq L$ un par de conjuntos compactos de M. Sea $f\in C^r(M,N)\cap\pitchfork^r_{L_0}(M,N;A)$; entonces para cada vecindad $\mathcal{N}$ de f en $C^r(M,N)$, existe $g\in\mathcal{N}\cap\pitchfork^r_L(M,N;A)$ tal que $g|_{L_0}=f|_{L_0}$. (Wieslaw Krawcewicz, 1997)

2.1.10. Homotopías

El concepto topológico de homotopía formaliza el concepto natural de *deformación continua* de un objeto hacia otro.

Definición 17.- Sean f y g funciones continuas de X a Y. Decimos que f es homotópica a g, denotado por $f\simeq g$, si existe una función continua $H:X\times I\to Y$ tal que $H(x,0)=f(x)$ y $H(x,1)=g(x)$ para todo $x\in X$. La aplicación H es llamada una homotopía entre f y g. Para mayor claridad escribiremos como $H:f\simeq g$ cuando H sea una homotopía entre f y g. (Seymur, 1998)

Veamos algunos ejemplos:

1. En $\mathbb{R}^n$, se define $f(x)=x$ para todo x y $g(x)=0$ para todo x. Entonces $f\simeq g$, la homotopía está dado por

$$H(x,t)=(1-t)x$$

2. X algún espacio topológico, Y un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces cualquiera de las dos aplicaciones $f,g: X \to Y$ son homotópicas, y la homotopía es dada por:

$$H(x,t) = t \cdot g(x) + (1-t) \cdot f(x)$$

Nota: Trayectorias Homotópicas: Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f: I \to X$ y $g: I \to X$ dos trayectorias (o caminos) que tiene el mismo punto inicial $p \in X$ y el mismo punto final $q \in X$. Entonces, f es *homotópica* a g, lo que se denota por $f \simeq g$, si existe una función continua

$$H: I^2 \to X$$

tal que

$$H(t,0) = f(t) \qquad H(0,s) = p$$
$$H(t,1) = g(t) \qquad H(1,s) = q$$

como se indica en el figura 2.2 en tal caso, se dice que f se puede deformarse continuamente en g. La función H se denomina *homotopía* de f a g. (Seymur, 1998)

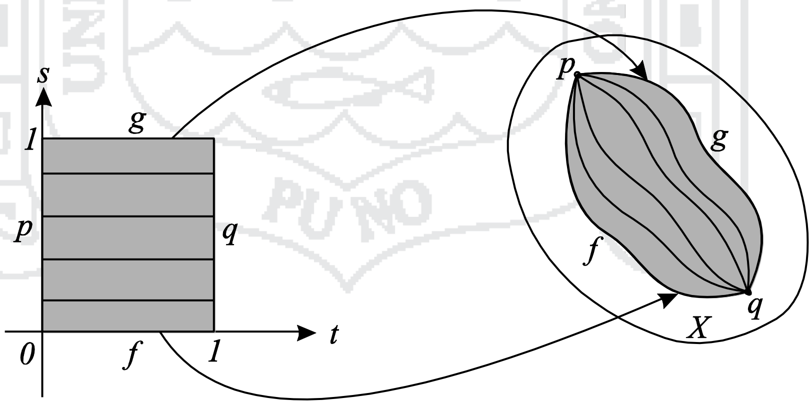
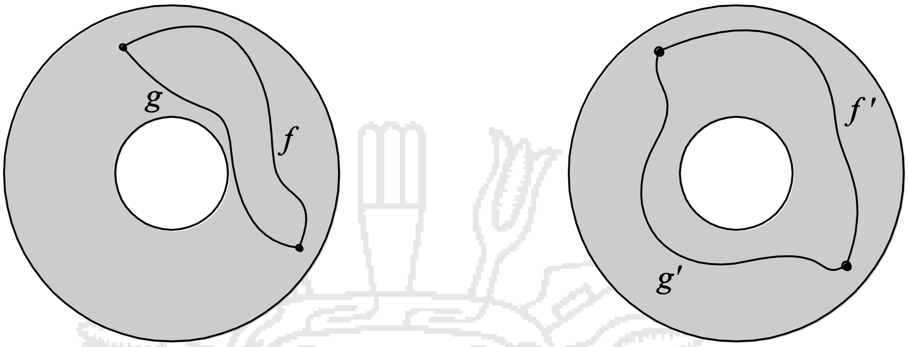


Figura 2.2

Veamos algunos ejemplos:

1. Sea el conjunto de los puntos del plano comprendidos entre dos circunferencias concéntricas (este conjunto se llama anillo o corona). Entonces, las trayectorias f y g que aparecen en el diagrama de la

izquierda, abajo son homotópicas, mientras que las trayectorias f' y g' del diagrama de la derecha no son homotópicas



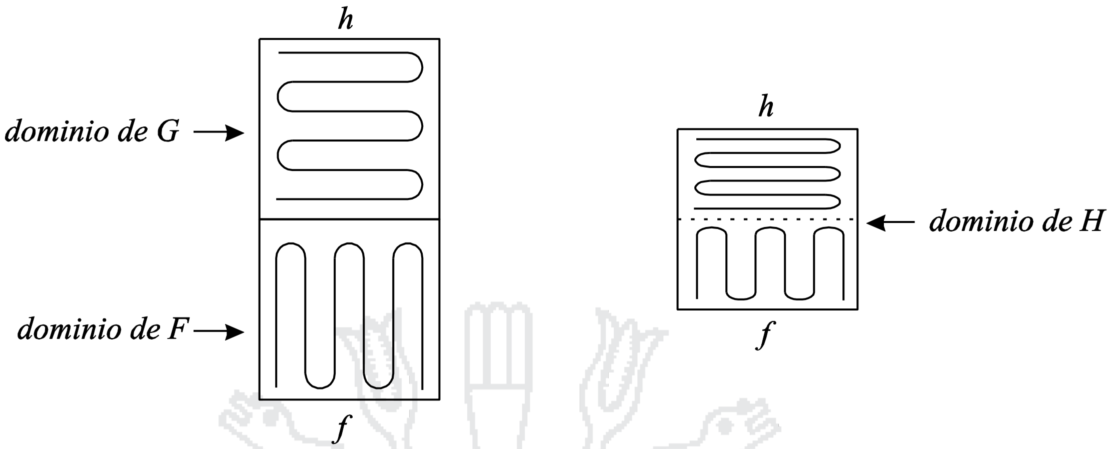
2. Sea $f : I \to X$ una trayectoria cualquiera. Entonces $f \simeq f$, es decir, f es homotópica a si misma porque la función $H : I^2 \to X$ definida por $H(t,s) = f(t)$ es una homotopía.
3. Sea $f \simeq g$ y $H : I^2 \to X$ una homotopía de f a g. Entonces, la función $\hat{H} : I^2 \to X$ definida por:

$$\hat{H}(t,s) = H(t,1-s)$$

es una homotopía de g a f, y, por consiguiente $g \simeq f$
4. Sea $f \simeq g$ y $g \simeq h$, además $F : I^2 \to X$ una homotopía de f a g y $G : I^2 \to X$ una homotopía de g a h. La función $H : I^2 \to X$ definida por:

$$\begin{cases} F(t,2s) & ,\text{si } 0 \le s \le \dfrac{1}{2} \\ G(t,2s-1) & ,\text{si } \dfrac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

es una homotopía de f a h, por consiguiente, $f \simeq h$. La homotopía H puede interpretarse geométricamente como la reducción de los dominios de F y G a un cuadrado.



De las tres relaciones precedentes implican que: *La homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las trayectorias de* p *a* q. (Seymur, 1998)

2.1.11. Ecuaciones diferenciales Ordinarias

Definición 18.- *Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra derivadas de una función desconocida de una o más variables. Si la función desconocida depende sólo de una variable (de tal modo que las derivadas son derivadas ordinarias) la ecuación se llama ecuación diferencial ordinaria. Sin embargo, si la función desconocida depende de más de una variable (de tal modo que las derivadas son derivadas parciales) la ecuación se llama una ecuación diferencial parcial*. (Seymur, 1998)

Observaciones:

1. Una ecuación diferencial ordinaria de orden n se puede expresarse como:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

2. Las ecuaciones diferenciales ordinarias se pueden clasificar según su orden como ecuación diferencial lineal o no-lineal.

Definición 19.- *Una ecuación diferencial ordinaria lineal es una ecuación que puede ser escrita en la forma:*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

donde $F(x)$ *y los coeficientes* $a_1(x),\ldots,a_n(x)$ *son funciones dadas de* x *y* $a_i(x)$ *no es idéntica a cero. Una ecuación diferencial que no se pude escribir de la forma expresada se llama ecuación diferencial no-lineal.* (Seymur, 1998)

Definición 20.- *Un problema de valor inicial es un problema que busca determinar una solución y una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre función desconocida y sus derivadas especificadas en un valor de la variable independiente. Tales condiciones se llaman condiciones iniciales.* (Seymur, 1998)

por ejemplo:

$$\text{Resolver: } \frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{n-1})$$

$$\text{Sujeta a: } y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Definición 21.- Cuando una función ϕ, definida en algún intervalo I, se sustituye en una ecuación diferencial y transforma esa ecuación en una identidad, se dice que es una solución de la ecuación en el intervalo. (Seymur, 1998)

En otras palabras, una solución de una ecuación diferencial ordinaria, como:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

es una función ϕ con al menos n derivadas y

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \qquad \text{para todo } x \in I$$

Se dice que $y = \phi(x)$ satisface la ecuación diferencial. El intervalo I puede ser intervalo abierto, cerrado, infinito, etc. Para nuestros fines, también supondremos que una solución ϕ es una función de valores reales.

2.1.12. Ecuación diferencial ordinaria T-periódica

Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(t, x) \qquad \text{con} \qquad f(t + T, x) = f(t, x) \tag{4}$$

$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua de clase C^1 en la variable x. Debido a la periodicidad de f, las soluciones de la ecuación (4) posee ciertas propiedades. Para tomar ventaja de estas propiedades se va ha suponer que las soluciones de la ecuación (4) están definidas para todo $t\in\mathbb{R}$. Por sustitución directa, se verifica que si $x(t)$ es una solución, entonces para cualquier entero k, $x(t+kT)$ es también una solución de (4).

Denotando por $\varphi(t,t_0,x_0)$ la solución de (4) a través del punto (t_0,x_0) implican que

$$\varphi(t+T,t_0+T,x_0)=\varphi(t,t_0,x_0) \tag{5}$$

$$\varphi(t+T,t_0,x_0)=\varphi(t,t_0,\varphi(t_0+T,t_0,x_0)) \tag{6}$$

Definición 22.- *Una solución* $\varphi(t,t_0,x_0)$ *de la ecuación diferencial ordinaria* $T-$*periódica (4) es una solución* $T-$*periódica si*

$$\varphi(t+T,t_0,x_0)=\varphi(t,t_0,x_0) \qquad \text{para todo } t.$$

(Hadda, 2009)

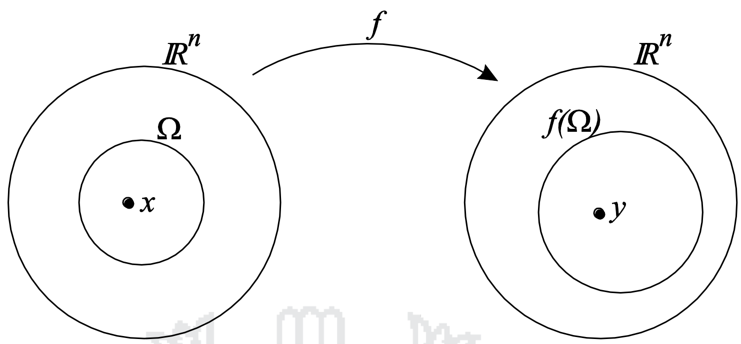
2.2. Grado Topológico en Espacios de Dimensión Finita

En este capítulo se introducirá el concepto de grado topológico, llamado Grado Topológico de Brouwer, en espacios finito dimensionales. Se mencionará una idea intuitiva sobre el grado Topológico, para luego formular axiomas fundamentales, propiedades básicas y la fórmula del cálculo, y mostraremos una construcción analítica. Algunos ejemplos elementales para discutir y demostrar la aplicación del grado topológico. El grado topológico es desarrollado a lo largo de líneas axiomáticas, y seguido de un enfoque analítico para la construcción.

2.2.1. Consideraciones Previas

Dada una función continua f definida sobre un conjunto $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ como:

$$\begin{aligned} f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f(x)=y \end{aligned}$$



donde $x \in \Omega$, $y \in f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^n$, y $\mathbb{R}^n$ esta provista de la Topología euclidiana, la interrogante sería que dado un elemento “ y ”, una función continua f, hallar x en la clausura de Ω tal que $f(x) = y$.

En la ecuación $f(x) = y$, se desea saber si existe o no solución a la misma; en caso afirmativo, nos gustaría saber si ella es única o si hay varias soluciones. Podemos preguntar, además, cómo están distribuidas en $\overline{\Omega}$.

Observación: Supongamos que la ecuación $f(x) = y$ está resuelta, entonces, será interesante averiguar cómo cambia el resultado de la ecuación, para $\tilde{f}$ y y “cercanos”, en algún sentido, a f e y con $\tilde{f}(x) = y$, respectivamente. (Mawhin, 1991)

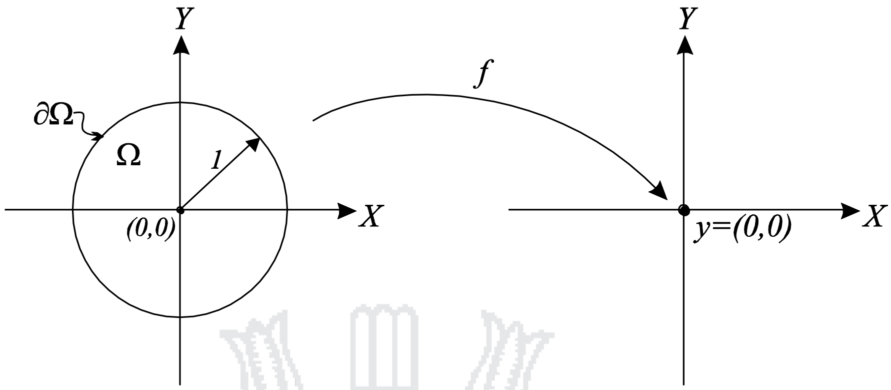
Considerando los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.- Sean $\Omega = B((0,0);1) \subset \mathbb{R}^2$, $y = (0,0)$

$$\begin{aligned} f: \quad & \overline{\Omega} \quad \to \mathbb{R}^2 \\ & x = (x_1, x_2) \mapsto f(x) = (x_1^2 + x_2^2 - 1, 0) = y \end{aligned}$$

f es continua,

$$\begin{aligned} f^{-1}\{y\} &= f^{-1}\{(0,0)\} \\ &= \{x \in \overline{\Omega} : f(x) = (0,0)\} \\ &= \partial\Omega \\ &= S^1 \text{ (esfera unitaria)} \end{aligned}$$



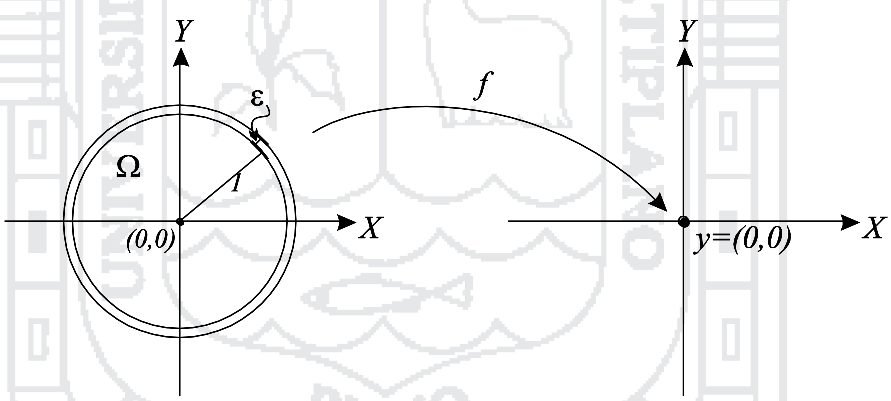
Dado un $\varepsilon > 0, \Omega$ e y anteriormente definidos.

Sea la función

$$\tilde{f} : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^2, \text{ por } f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2 - 1 - \varepsilon, 0)$$

Resulta que $\tilde{f}$ es continua y

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{-1}\{y\} &= \tilde{f}^{-1}\{(0,0)\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \bar{\Omega} : \tilde{f}(x_1, x_2) = (0,0)\} \\ &= \varnothing \end{aligned}$$



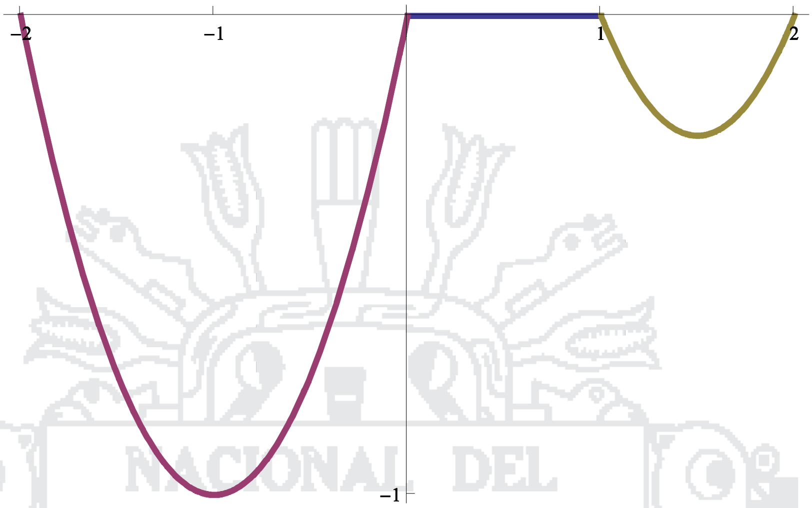
Como podemos tomar $\varepsilon > 0$, tan pequeño como se desea, concluimos que f y $\tilde{f}$ están tan próximas como se desee; sin embargo, las soluciones de las ecuaciones:

$$f(x) = y \quad , \quad \tilde{f}(x) = y$$

son muy diferentes.

Ejemplo 3.- Sean $\mathbb{R}^n$ con $n = 1$. Sean $x \in \mathbb{R}$, $y = 0$ y $\Omega = \langle -2, 2 \rangle$; se define $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ como

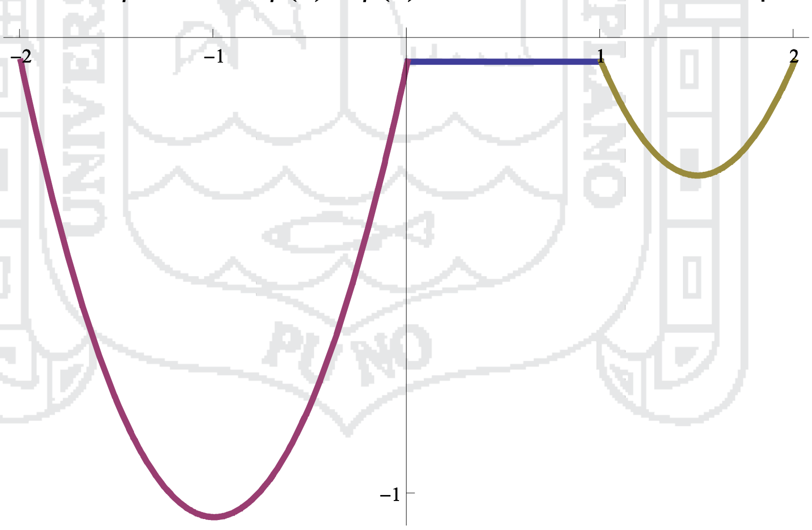
$$f(x)=\begin{cases}0 & ,\text{ si } x\in -2,2\cup[0,1]\\ x^2+2x & ,\text{ si } x\in\langle -2,0\rangle\\ x^2-3x+2 & ,\text{ si } x\in\langle 1,2\rangle\end{cases}$$



De donde

$$f^{-1}\{0\}=\{-2,2\}\cup[0,1] \qquad (7)$$

Definamos ahora $\tilde{f}:\bar{\Omega}\to\mathbb{R},\ \tilde{f}(x)=f(x)-\varepsilon$ con $\varepsilon>0$. Resulta que:



$$\tilde{f}^{-1}\{0\}=\varnothing \qquad (8)$$

Se ve que, a pesar de que f y $\tilde{f}$ están *próximas* una de la otra, o que una es una *deformación continua* de la otra, (7) y (8) indican situaciones bastante diferentes. Observemos también que:

$$\partial\Omega=\{-2,2\}\quad \text{y que}\quad 0\in f(\partial\Omega)$$

Para evitar situaciones como las que acabamos de presentar, se pondrá durante la construcción de la Teoría del Grado Topológico, la condición:

$$y \notin f(\partial\Omega)$$

Recordemos que se quiere construir una herramienta que sea útil al tratar de responder a las preguntas surgidas en relación a la ecuación $f(x) = y$.

Cuando se defina una función $f:\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, continua en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con Ω **abierto y acotado**, $y \in \mathbb{R}^n$, tal que $y \notin f(\partial\Omega)$, diremos que la terna (f, Ω, y) es admisible y asociaremos a dicha terna un **número entero**, que se denotará por $\deg(f, \Omega, y)$. De esta forma obtenemos la aplicación

$$\deg:\{(f, \Omega, y)\} \to \mathbb{Z}$$

la cual nos dé respuestas significativas a las interrogantes planteadas al comienzo del capítulo.

2.2.2. Axiomas y Propiedades Básicas

El principal propósito de esta sección es la formulación fundamental axiomática del grado topológico y derivar algunas propiedades usuales.

Sea el subconjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por ∂D la frontera de D, y por $\bar{D}$ la clausura de D. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío abierto y acotado. Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua. Diremos que f es Ω-admisible si $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \partial\Omega$. Llamaremos al par (f, Ω) admisible. Denotaremos por M al conjunto de todos los pares (f, Ω) admisibles. El objetivo es definir la función de valor entero $\deg: M \to \mathbb{Z}$ llamado grado topológico de Brouwer, que satisface las siguientes propiedades:

P-1) **Normalización.-** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado y no vacío, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_0 \notin \partial\Omega$ entonces

$$\deg(Id - x_0, \Omega) = \begin{cases} 1 & , si\ x_0 \in \Omega \\ 0 & , si\ x_0 \notin \Omega \end{cases}$$

donde $Id:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la aplicación identidad y x_0 denota la aplicación constante con valor x_0.

P-2) Aditividad.- Si $(f,\Omega)\in M$, entonces $\deg(f,\Omega)=\deg(f,\Omega_1)+\deg(f,\Omega_2)$ siempre que Ω_1 y Ω_2 son dos subconjuntos disjuntos abiertos y no vacíos de Ω tal que $f^{-1}(0)\cap\Omega\subset\Omega_1\cup\Omega_2$.

P-3) Invariancia Homotópica.- Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado y no vacío y $h:[0,1]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una aplicación continua, tal que $h(t,x)\neq 0$ para $x\in\Omega$ y $t\in[0,1]$. Entonces $\deg(h(t,\cdot)\Omega)$, es independiente de $t\in[0,1]$.

Note que la propiedad P-1) es una normalización simple, mientras que P-2) es una formulación abstracta del propósito que el $\deg(f,\Omega)$ puede darnos información de la ubicación de ceros de f en Ω en el sentido que si Ω_1 y Ω_2 son subconjuntos abiertos disjuntos de Ω y f tiene ceros en una cantidad finita en $\Omega_1\cup\Omega_2$ pero no tiene ceros en $\bar{\Omega}-(\Omega_1\cup\Omega_2)$, entonces el número de ceros de f en Ω es, en algún sentido, la suma del número de ceros de f en Ω_1 y Ω_2. (Mawhin, 1991)

La propiedad P-3) refleja el propósito que para un f complicado, el entero $\deg(f,\Omega)$ puede ser calculado por $\deg(g,\Omega)$ con un g simple, al menos que si f puede ser continuamente deformado en g por lo que en ningún momento de la deformación obtendremos ceros en la frontera de Ω. Sean $f,g:[0,1]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ dos aplicaciones Ω-admisibles. Si existe una aplicación continua $h:[0,1]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ tal que $h(t,x)\neq 0$ para $(t,x)\in[0,1]\times\partial\Omega$, $h(0,x)=f(x)$ y $h(1,x)=g(x)$ para $x\in\mathbb{R}^n$, entonces podremos decir que f y g son Ω-homotópicas, h es una homotopía $\Omega-$admisible (entre f y g), y lo denotaremos por $f\overset{\Omega}{\sim}g$. Se prueba que $\overset{\Omega}{\sim}$ es una relación de equivalencia. La propiedad P-3) dice que $\deg$ es constante en cada clase de equivalencia de la relación $\overset{\Omega}{\sim}$.

Para una aplicación continua $f:\bar{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ definido solo en $\bar{\Omega}$, podemos aplicar el teorema de extensión de Tietze (sea X un espacio normal de Hausdorff y $A\subset X$ subconjunto cerrado. entonces cada función continua $f:A\to\mathbb{R}$ tiene una extensión continua $\hat{f}:X\to\mathbb{R}$) para obtener una aplicación continua $\hat{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ tal que $\hat{f}\,|_{\bar{\Omega}}=f$. Si asumimos que $f(x)\neq 0$ para $x\in\partial\Omega$, entonces podemos definir $\deg(f,\Omega)=\deg(\hat{f},\Omega)$. Se puede aplicar la invariancia homotópica para mostrar que la definición antes dada de $\deg(f,\Omega)$ es independiente de la elección de la extensión $\hat{f}$ de f. Así, en lo que sigue siempre asumimos que la aplicación considerada es definida en todo el espacio.

Como $P1)-P3)$ involucran sólo conceptos topológicos tales como conjuntos abiertos, aplicaciones continuas y acotadas, y el grupo $\mathbb{Z}$ de los enteros, no es sorprendente que el grado topológico antes mencionado puede ser construido usando varias técnicas en la topología algebraica. El enfoque en la construcción del grado topológico es analítica con el fin de adaptarse mejor a las inclinaciones de los analistas y matemáticos aplicados.

El tratamiento es elemental en el sentido de que sólo algunas herramientas analíticas básicas tales como el teorema de aproximación de Weierstrass y el lema de Sard serán empleadas. Antes de construir el grado topológico, obtenemos algunas propiedades útiles de las propiedades fundamentales P1)-P3).

Proposición 2.- *Asumiendo que* $\deg:M\to\mathbb{Z}$ *es una función que satisface las propiedades P1)-P3). Entonces también satisface:*

P-4) ***Existencia.-*** *Para cada* $(f,\Omega)\in M$, *si* $\deg(f,\Omega)\neq 0$, *entonces* $f^{-1}(0)\cap\Omega\neq\varnothing$, *esto es, existe una solución* $x\in\Omega$ *de la ecuación* $f(x)=0$

P-5) ***Escisión.-*** *Para cada* $(f,\Omega)\in M$, $\deg(f,\Omega)=\deg(f,\Omega_1)$ *siempre que* Ω_1 *es un subconjunto abierto de* Ω *tal que* $f^{-1}(0)\cap\Omega\subset\Omega_1$.

(Ortega R., 1992)

Demostración: (P-4))

Sean $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ y Ω_4 subconjuntos abiertos disjuntos y no vacíos de Ω, y asumamos que $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(0)\cap\bar{\Omega}=\varnothing$. Entonces por la propiedad de aditividad, tenemos que

$$\deg(f,\Omega)=\deg(f,\Omega_1)+\deg(f,\Omega_2)$$
$$\deg(f,\Omega)=\deg(f,\Omega_3)+\deg(f,\Omega_4)$$

Por otro lado, aplicando la propiedad de aditividad también se tiene que:

$$\begin{aligned}\deg(f,\Omega)&=\deg(f,\Omega_1\cup\Omega_2)+\deg(f,\Omega_3\cup\Omega_4)\\&=\deg(f,\Omega_1)+\deg(f,\Omega_2)+\deg(f,\Omega_3)+\deg(f,\Omega_4)\end{aligned}$$

Colocando las cuatro igualdades anteriores juntas se obtiene:

$$\deg(f,\Omega)=2\deg(f,\Omega)$$

de donde se deduce que $\deg(f,\Omega)=0$

Demostración: (P- 5))

Asumamos que $\Omega_1\subset\Omega$ y $f^{-1}(0)\cap\Omega\subset\Omega_1$. Si $\Omega_1\neq\Omega$, entonces consideramos Ω_2 como el interior de $\Omega-\Omega_1$, el cual es evidentemente no vacío. De la propiedad de aditividad y P-4) obtenemos que

$$\deg(f,\Omega)=\deg(f,\Omega_1)+\deg(f,\Omega_2)=\deg(f,\Omega_1)$$

$\blacksquare$

Sea Ω un subconjunto abierto, acotado y no vacío de $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C(\bar{\Omega},\mathbb{R}^n)$ al espacio de todas la aplicaciones continuas $f:\bar{\Omega}\to\mathbb{R}^n$; $C(\bar{\Omega},\mathbb{R}^n)$ provista con la norma del supremo $\|f\|_\infty:=\sup\{|f(x)|;x\in\bar{\Omega}\}$ es un espacio de Banach. Sea $C(\bar{\Omega},\partial\Omega)$ el subconjunto de $C(\bar{\Omega},\mathbb{R}^n)$ de todas las aplicaciones $f:\bar{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ que satisfacen $f(x)\neq 0$ para $x\in\partial\Omega$. Entonces obtenemos una función bien definida $\deg:C(\bar{\Omega},\partial\Omega)\to\mathbb{Z}$

Proposición 2.- *Asumiendo que* $\deg : M \to \mathbb{Z}$ *satisface las propiedades (P1)-P3)), entonces tenemos:*

P-6) ***Continuidad:*** *Para cada conjunto no vacío, abierto y acotado* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *, la aplicación asociada al grado topológico* $\deg : C(\overline{\Omega}, \partial\Omega) \to \mathbb{Z}$ *es continua. Mas precisamente, si* $\| f - g \|_\infty < \min\{| f(x) |; x \in \partial\Omega\}$ *entonces* $\deg(f, \Omega) = \deg(g, \Omega)$

P-7) ***Dependencia de Valores Acotados:*** *Sea* Ω *un conjunto abierto, acotado y no vacío en* $\mathbb{R}^n$*. Entonces para cada* $f, g \in C(\overline{\Omega}, \partial\Omega)$ *que satisface* $f(x) = g(x)$ *para* $x \in \partial\Omega$*, tenemos que* $\deg(f, \Omega) = \deg(g, \Omega)$.

(Ortega R., 1992)

Demostración: (P- 6))

Sea $f \in C(\overline{\Omega}, \partial\Omega)$. Como $\partial\Omega$ es compacto, $\min\{| f(x) |; x \in \partial\Omega\} = \varepsilon > 0$.

Supongamos que para cada $x \in \partial\Omega$, tenemos

$$\begin{aligned} | g(x) | &\geq | f(x) | - | f(x) - g(x) | \geq | f(x) | - \| f - g \|_\infty \\ &\geq \min\{| f(y) |; y \in \partial\Omega\} - \| f - g \|_\infty = \varepsilon - \| f - g \|_\infty > 0 \end{aligned}$$

Consecuentemente, $g \in C(\overline{\Omega}, \partial\Omega)$ y $\deg(g, \Omega)$ está bien definido. Definamos la siguiente homotopía, $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, que llamaremos *homotopía lineal* por:

$$h(t, x) = t g(x) + (1 - t) f(x), \qquad t \in [0,1), \quad x \in \overline{x}$$

Puesto que para cada $x \in \partial\Omega$ y $t \in [0,1]$

$$| h(t, x) | \geq | f(x) | - t | f(x) - g(x) | \geq \varepsilon - t \| f - g \|_\infty > 0$$

la homotopía h es Ω-admisible. Por lo tanto, P-3) implica

$$\deg(f, \Omega) = \deg(g, \Omega).$$

∎

Demostración: (P- 6))

Notamos que $f |_{\partial\Omega} = g |_{\partial\Omega}$ garantiza que la homotopía lineal $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ definida anteriormente es Ω-admisible y por lo tanto $\deg(f, \Omega) = \deg(g, \Omega)$ ∎

Ahora se presenta el teorema del punto fijo de Brouwer, asumiendo que el grado topológico existe.

Teorema 11.- *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto no vacío, acotado y convexo. Entonces cada aplicación continua* $F:\bar{\Omega} \to \bar{\Omega}$ *tiene un punto fijo. Es decir, existe* $x \in \bar{\Omega}$ *tal que* $F(x)=x$. (Mitio, 1952)

Demostración:

Podemos asumir que $F(x) \neq x$ para todo $x \in \partial\Omega$; de lo contrario el resultado es trivial. También podemos asumir sin pérdida de generalidad que $0 \in \Omega$. Definamos la homotopía

$$h:[0,1]\times\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$$

de la siguiente manera

$$h(t,x) = x - tF(x),\ x \in \bar{\Omega},\ t \in [0,1]$$

Evidentemente, h es continua y para $x \in \partial\Omega$ el punto $tF(x)$ pertenece al segmento que une $f(x)$ a 0.

Si $t=1$, entonces por la hipótesis $h(1,x) = x - F(x) \neq 0$. Si $t \in [0,1)$, entonces por la hipótesis de que Ω es convexo y $0 \in \Omega$, $tF(x) \in \Omega$ y consecuentemente para todo $x \in \partial\Omega$, tenemos $tF(x) \neq x$, es decir, $h(t,x) \neq 0$. Esto muestra que h es una homotopía $\Omega-$admisible. Por lo tanto, la invariancia homotópica implica que

$$\deg(h(t,\cdot),\Omega)$$

no depende de $t \in [0,1]$. En particular

$$\deg(Id - F,\Omega) = \deg(Id,\Omega) = 1$$

Aplicando la propiedad de existencia podemos concluir que existe $x \in \Omega$ tal que $x - F(x) = 0$, es decir, x es un punto fijo de F. ∎

2.3. Cálculo del Grado Topológico

En esta sección asumimos que el grado topológico $\deg:\mathcal{M} \to \mathbb{Z}$ existe y satisface los axiomas (P1) - P3)). Lo que se quiere es dar una fórmula de cálculo del grado topológico cuando f es lineal o una aplicación diferenciable que satisface una cierta condición de regularidad. El cálculo del grado topológico para aplicaciones en general se dará en el capítulo de análisis de resultados.

Se utilizará la siguiente notación:

$$GL^{+}(n,\mathbb{R})=\{A\in GL(n,\mathbb{R});\det A>0\}$$
$$GL^{-}(n,\mathbb{R})=\{A\in GL(n,\mathbb{R});\det A<0\}$$

Notemos que $GL(n,\mathbb{R})$ puede ser considerado como un subconjunto de $\mathbb{R}^{n\times n}$, y de ello $GL(n,\mathbb{R})$ es un espacio topológico con la topología inducida de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Lema 23.- *Los conjuntos* $GL^{+}(n,\mathbb{R})$ *y* $GL^{-}(n,\mathbb{R})$ *son componentes abiertos y conexos de* $GL(n,\mathbb{R})$. (Wieslaw Krawcewicz, 1997)

Demostración:

Como $\det : GL(n,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ es una función continua, entonces $GL^{\pm}(n,\mathbb{R})$ son abiertos. Para la prueba de la conexidad de $GL^{\pm}(n,\mathbb{R})$, mostraremos que toda matriz $T\in GL(n,\mathbb{R})$ puede ser conectada por un camino en $GL(n,\mathbb{R})$ j ya sea para la matriz identidad Id o para la matriz J, donde

$$J=\begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, del teorema espectral para operadores lineales en $\mathbb{R}^{n}$ que para cada $T\in GL(n,\mathbb{R})$ fijo, existen dos autoespacios invariantes generalizados X^{-} y X^{0} de $\mathbb{R}^{n}$ tal que $\mathbb{R}^{n}=X^{-}\oplus X^{0}$, $\sigma(T^{-})=\{\lambda\in\sigma(T);\lambda<0\}$, y $\sigma(t^{0})=\sigma(T)-\sigma(T^{-})$, donde $\sigma(\cdot)$ denota el conjunto de todos los autovalores (complejos) de un operador lineal definido en un espacio vectorial finito-dimensional, $T^{-}=T|_{X^{-}}$ y $T^{0}=T|_{X^{0}}$. Denotemos por $T:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{n}$ en la forma de una matriz diagonal por bloques asociada con la descomposición $\mathbb{R}^{n}=X^{-}\oplus X^{0}$:

$$T = \begin{bmatrix} T^{-} & 0 \\ 0 & T^{0} \end{bmatrix}$$

Definamos la siguiente deformación:

$$T_t = \begin{bmatrix} (1-t)T^{-}t\ Id & 0 \\ 0 & (1-t)T^{0} + t\ Id \end{bmatrix}$$

Es claro que $T_t \in GL(n,\mathbb{R})$ para todo $t \in [0,1]$. Evidentemente, T_t, define un camino en $GL(n,\mathbb{R})$ entre la matriz T y la matriz

$$T_1 = \begin{bmatrix} -Id & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix}$$

Fijemos una base en X^{-}. Si $dimX^{-}$ es par (i.e. $2k$) podemos deformar $T_1|_X = -Id$ al operador identidad Id, por la deformación

$$\begin{bmatrix} A(\theta) & & & \\ & A(\theta) & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A(\theta) \end{bmatrix} : \ X^{-} \to X^{-}$$

Donde

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} ; \qquad \theta \in [0,\pi]$$

Si X^{-} tiene una dimensión impar (i.e. $2k+1$), deformación anterior puede ser aplicada al bloque $2k \times 2k$ de la matriz $-Id$ correspondiente a los últimos $2k$ vectores de la base de X^{-}. Esto define un camino en $GL(n,\mathbb{R})$ entre T_1 y la matriz J. $\blacksquare$

Lema 24.- *Sea* Ω *un abierto, vecindad acotada de cero en* $\mathbb{R}^n$ *y* $T \in GL(n,\mathbb{R})$. *Entonces* $\deg(T,\Omega) = sgn\det T$. *Aquí y en lo que sigue, usaremos* $sgn\det T$

para denotar un número real con valor absoluto 1 y sgn *determinado por el* sgn *del* $\det T$*.*

Demostración:

Por la propiedad de esición podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que Ω es una bola abierta $B_2(0)$ de radio 2 y centro cero. Se sigue del **lema 23** que T puede conectarse por un camino T_t en $GL(n,\mathbb{R})$ ya sea para $T_1 = Id$ (si $sgn \det T = 1$) o la matriz $T_1 = J$ (si $sgn \det T = -1$). Es claro que el camino T_t es una homotopía $\Omega-$admisible. Por consiguiente, por la invariancia homotópica, $\deg(T,\Omega) = \deg(T_1,\Omega)$. Si $sgn \det T > 0$, entonces $T_1 = Id$ y la propiedad de normalización implica que $\deg(T,\Omega) = \deg(Id,\Omega) = 1$. Si $\det T < 0$, entonces $\deg(T,\Omega) = \deg(J,\Omega)$. Definamos ahora, la aplicación $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1, x_2, \ldots, x_n), \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Ya que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, resulta de la propiedad de existencia que $\deg(f,\Omega) = 0$. Definamos la siguiente homotopía:

$$h(t,x) = ((1-t) + t\varphi(x_1), x_2, \ldots, x_n), \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

donde

$$\varphi(t) \begin{cases} 1 & ,\text{si\ 1<t\ o\ t<-2} \\ -t-1 & ,si\ -2 \leq t < -\dfrac{1}{2} \\ t & ,si\ -\dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Ver Figura 2.3 es claro que, h es una homotopía Ω-admisible y $h_1(\cdot) := h(1,\cdot)$ satisface

$$h_1^{-1}(0) = \{(-1,0,\ldots,0),(0,0,\ldots,0)\}$$

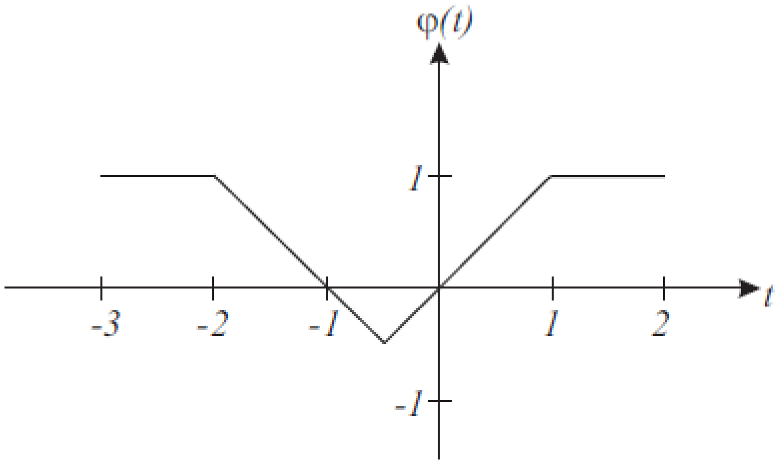


Figura 2.3: La función lineal por tramos φ

Sea Ω_1 y Ω_2 dos bolas disjuntas, abiertas centradas en $x_0=(-1,0,\ldots,0)$ y 0, respectivamente. Entonces, ya que $h_1|_{\Omega_2}=Id$, tenemos

$$\begin{aligned}0&=\deg(f,\Omega)=\deg(h_1,\Omega)\\&=\deg(h_1,\Omega_1)+\deg(h_1,\Omega_2)=\deg(h_1,\Omega_1)+1\\&=\deg(J+x_0,\Omega)+1\end{aligned}$$

Es claro ver que $J+tx_0$ es una homotopía Ω-admisible entre $J+x_0$ y J. Luego, $\deg(J+x_0,\Omega)=\deg(J,\Omega)$. Por lo tanto, $\deg(T,\Omega)=\deg(J,\Omega)=-1$. $\blacksquare$

Para establecer el siguiente resultado, recordemos que cero es un valor regular de una C^1 aplicación $g:\Omega\to\mathbb{R}^n$, donde Ω es un subconjunto abierto, no vacío y acotado de $\mathbb{R}^n$. Si $g^{-1}(0)=\varnothing$, o bien para cada $x\in g^{-1}(0)$ se tiene que $\det Dg(x)\neq 0$.

Teorema 12.- *Sea Ω un subconjunto no vacío, abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y f una C^1 – aplicación Ω – admisible tal que cero es un valor regular de $f|_{\Omega}$. Entonces*

$$\deg(f,\Omega)=\sum_{x\in f^{-1}(0)\cap\Omega} sgn\det Df(x)$$

donde $\sum$ se define como cero sobre un conjunto vacío.

Demostración:

Sea $B_\delta(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^n;|x-x_0|<\delta\}$ que denota la bola de radio $\delta>0$ y centro en $x_0\in\mathbb{R}^n$. El conjunto $f^{-1}(0)\cap\Omega$ es finito. Por consiguiente, se puede encontrar $\delta>0$ tal que para cada $x\in f^{-1}(0)\cap\Omega$, $B_{2\delta}(x)\cap f^{-1}(0)=\{x\}$ y $B_{2\delta}(x)\subseteq\Omega$. Consecuentemente, por la propiedad de aditividad, se tiene

$$\deg(f,\Omega)=\sum_{x\in f^{-1}(0)\cap\Omega}\deg(f,B_\delta(x))$$

Para cada $x\in f^{-1}(0)\cap\Omega$, se define $g_x(v)=Df(x)(v-x)$. Sea $h_x(t,v)=tf(v)+(1-t)Df(x)(v-x)$ que denota la homotopía lineal. Note que

$$\begin{aligned}h_x(t,v)&=t[f(v)-Df(x)(v-x)]+Df(x)(v-x)\\&=t\cdot o(|v-x|)+Df(x)(v-x)\end{aligned}$$

De ello se deduce que si $\delta>0$ es suficientemente pequeño, entonces $|h_x(t,v)|>0$ para todo $t\in[0,1]$ y para todo v tal que $|v-x|=\delta$. Consecuentemente, h_x es una homotopía $B_\delta(x)$-admisible entre f y g_x. Por la propiedad de homotopía, se tiene

$$\deg(f,\Omega)=\sum_{x\in f^{-1}(0)\cap\Omega}\deg(g,B_\delta(x))$$

Sea $R>0$ tal que $\Omega\subseteq B_R(0)$. Entonces por la propiedad de escisión y la propiedad de homotopía implica que

$$\deg(g_x,B_\delta(x))=\deg(g_x,B_R(0))=\deg(Df(x),B_R(0))=sgn\det Df(x)$$

a partir de la cual la conclusión del teorema se sigue. ∎

Ejemplo 4.- *Se puede dar una prueba grado-teórica del teorema fundamental del álgebra*

Teorema 13.- *Cada polinomio*

$$p(z)=z^n+a_n-1z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

tiene por lo menos un cero complejo si $n\geq 1$, *donde* a_i, $0\leq i\leq n-1$, *son números complejos.* (Apostol, 2001)

Demostración:

Para probar esto, primero se identificara el plano complejo en $\mathbb{R}^2$. Entonces p define una aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Sea $\varepsilon>0$ dado y el conjunto

$$H(t,z) = z^n - \varepsilon + t[a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 + \varepsilon]$$

para $t \in [0,1]$. Si ε es suficientemente pequeño y $R > 0$ es suficientemente grande, entonces H es Ω-admisible con $\Omega = B_R(0)$. Consecuentemente

$$\deg(p,\Omega) = \deg(H(1,\cdot),\Omega) = \deg(H(0,\cdot),\Omega)$$

Claramente, $H(0,\cdot):\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una C^1 aplicación

$$H(0,\cdot)^{-1}(0) = \{\varepsilon^{1/n} e^{i(2\pi/n)j}; 0 \le j \le n-1\}$$

y $\det DH(0,z)|_{z=\varepsilon^{1/n}e^{i(2\pi/n)j}} > 0$. Por lo tanto, cero es un valor regular de $H(0,\cdot)|_{\Omega}$ y

$$\deg(H(0,\cdot),\Omega) = \sum_{j=0}^{n-1} sgn \det DH(0,z)|_{z=\varepsilon^{1/n}e^{i(2\pi/n)j}} = n$$

Consecuentemente, $\deg(p,\Omega) = n > 0$ y la conclusión se deduce de la propiedad de existencia del grado topológico. $\blacksquare$

El ejemplo anterior demuestra como el grado topológico es usado en análisis. Primero, un problema de existencia es asociado con el cero de una aplicación f. Segundo, la propiedad de existencia del grado topológico implica que es suficiente mostrar la no trivialidad del grado topológico de aplicación f relativo a un conjunto abierto donde se encuentra el cero esperado. Tercero, se construye una homotopía admisible entre f y una nueva aplicación g tal que grado topológico de g pueda ser fácilmente calculado (o por lo menos estimado).

Sin embargo, la existencia de ceros de f en Ω no necesariamente implica la no trivialidad de $\deg(f,\Omega)$. Por ejemplo, consideremos la aplicación $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$. Sea $\Omega = (-2,2)$. Claramente, f tiene dos cero ± 1 en Ω y ceros es un valor regular de $f|_{\Omega}$. Pero, ya que $sgn\ f'(1) > 0$ y $sgn\ f'(-1) < 0$, se tiene $\deg(f,\Omega) = sgn\ f'(1) + sgn\ f'(-1) = 0$.

2.4. Construcción del Grado Topológico

Se presenta una construcción analítica del grado.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, abierto y acotado y sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación Ω-admisible. Definamos $\deg(f,\Omega)$ como sigue: Sea $\varepsilon = \min\{|f(x)|; x \in \partial\Omega\}$. Por el teorema de Weierstrass (ver el teorema 9), existe $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ tal que $\max\{|f(x)-g(x)|; x \in \bar{\Omega} < \frac{\varepsilon}{2}\}$. Por el teorema de Sard (ver el lema 15), existe un valor regular $y_0 \in \mathbb{R}^n$ de la aplicación $g|_\Omega$ tal que $|y_0| < \frac{\varepsilon}{3}$. Definamos $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \frac{1}{n}$ por $g(x) = g(x) - y_0$. Es claro que $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $\max\{|g(x)-g(x)|; x \in \bar{\Omega} < \frac{\varepsilon}{2}\}$ y 0 es un valor regular de $g|_\Omega$.

Definamos

$$\deg(f,\Omega) = \sum_{x \in g^{-1}(0) \cap \Omega} sgn \det Dg(x) \tag{9}$$

Notar que el lado derecho de (9) está bien definida. En efecto, $\max|f(x)-g(x)|; x \in \bar{\Omega} < \varepsilon$. Por consiguiente, $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es Ω- admisible. En lo que sigue, llamaremos a g una *aproximación regular* de f.

Con el fin de probar que la fórmula (9) no depende de la aproximación regular g, observemos que si g' es otra aproximación regular de f, entonces la homotopía

$$h(t,x) = tg(x) + (1-t)g'(x),\ t \in [0,1],\ x \in \mathbb{R}^n$$

es una homotopía $\Omega -$admisible bien definida entre g y g'. En efecto, puesto que

$$\max\{|f(x)-g(x)|; x \in \bar{\Omega} < \varepsilon\} \quad \text{y} \quad \max\{|f(x)-g'(x)|; x \in \bar{\Omega} < \varepsilon\}$$

Tenemos que para cada $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \min\{|h(t,x)|; x \in \partial\Omega\} &\geq \min\{|f(x)|; x \in \partial\Omega - \max\{|f(x)-(t\,g(x)+(1-t)g'(x))|; x \in \partial\Omega\} \\ &\geq \varepsilon t - \max\{|f(x)-g(x)|; x \in \partial\Omega\} - (1-t)\max\{|f(x)-g'(x)|; x \in \partial\Omega\} \\ &> \varepsilon - t\varepsilon - (1-t)\varepsilon = 0 \end{aligned}$$

para mostrar que la fórmula (9) no depende de la aproximación regular, sólo se necesita el siguiente resultado.

Lema 25.- *Sea* $h:[0,1]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *una homotopía* $\Omega-$*admisible de clase* C^1 *entre* $g_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *y* $g_2:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. *Supongamos que ambas aplicaciones* $g_1|_\Omega$ *y* $g_2|_\Omega$ *tiene al cero como un valor regular. Entonces*

$$\sum_{x\in g_1^{-1}(0)\cap\Omega} sgn\det Dg_1(x)=\sum_{x\in g_2^{-1}(0)\cap\Omega} sgn\det Dg_2(x)$$

(Mawhin, 1991)

Demostración:

Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $h:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$.

Sea $\alpha:\mathbb{R}\to[0,1]$ una función de clase C^∞ tal que:

$$\alpha(t)=\begin{cases}0 & ,\text{si } t\le\dfrac{1}{3}\\ 1 & ,\text{si } t\ge\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Definamos una nueva homotopía h^* entre g y g' por

$$h^*(t,x)=h(\alpha(t),x);\qquad t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n$$

Denotemos $L=[0,q]\times\bar{\Omega}$ y $L_0=\left(\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]\right)\times\bar{\Omega}$. De la definición de h^* y el hecho que $g_1|_{\bar{\Omega}}$ y $g_2|_{\bar{\Omega}}$ son transversales a 0 (esto es, cero es un valor regular de ambos), se sigue que $h^*|_{L_0}$ es transversal a 0. Sea $\delta=\min\{|h^*(t,x)|;(t,x)\in[0,1]\times\partial\Omega\}$.

Del corolario 2 existe $h\in⋔(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R}^n;\ \{0\})$ tal que $\{h\}|_{L_0}\equiv h^*|_{L_0}$ y

$$\max\left\{|h(t,x)-h^*(t,x)|;(t,x)\in[0,1]\times\bar{\Omega}<\delta\right\}$$

Es claro que h es una homotopía $\Omega-$admisible entre g_1 y g_2, además cero es un valor regular de $h|_L$.

En vista del teorema 7, existe una vecindad U de L tal que $M:=h^{-1}(0)\cap U$ es una subvariedad unidimensional de U. observemos que M se encuentra naturalmente orientada por la aplicación h (ver teorema 5). En efecto, el espacio tangente $T_{(t,x)}M$ es exactamente el núcleo $KerD\ h(t,x)$. Sea $P_{(t,x)}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to T_{(t,x)}M$ la proyección ortogonal sobre $T_{(t,x)}M$. es claro que P depende continuamente en (t,x). Elegimos un operador lineal $A_{(t,x)}:T_{(t,x)}M \to \mathbb{R}$ tal que la aplicación lineal $B_{(t,x)}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ definida por $B_{(t,x)}(v)=(A_{(t,x)}P_{(t,x)}(v), D\ h(t,x)v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ para $v\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, preserva la orientación de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, esto es, $\det B_{(t,x)}>0$. La aplicación $A_{(t,x)}^{-1}$ determina la orientación de $T_{(t,x)}M$.\\

Denotemos $h_t:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ por $h_t(x)=h(t,x)$. Sea $x\in h_t^{-1}(0)\cap\Omega$ un punto regular de h_t. Entonces $D\ h_t(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ es un isomorfismo. Si asumimos que $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$ entonces la definición de la función α implica que $T_{(t,x)}=M\mathbb{R}\times\ \{0\}=\mathbb{R}$. Por consiguiente, tenemos la siguiente descomposición en bloques de matrices de $D\ h(t,x):\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$:

$$D\ h(t,x)=\left[0, Dh_t(x)\right]$$

Sea $A:T_{(t,x)}M\to\mathbb{R}$ cualquier isomorfismo; entonces el operador lineal \$ $B(v)=(AP_{(t,x)}(v), D\ h(t,x)(v)):\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ \$ tiene la descomposición en bloque de matrices

$$B=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & h_t(x)\end{pmatrix}$$

Y es claro que B preserva la orientación de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ si y sólo si, $\det D\ h_t(x)\det A>0$. Consecuentemente, si $\det D\ h_t(x)>0$, entonces la orientación de M en (t,x) es la dirección de crecimiento de t, y si $\det D\ h_t(x)<0$, entonces la orientación de M en (t,x) es la dirección de decrecimiento de t. Ver figura 2.4

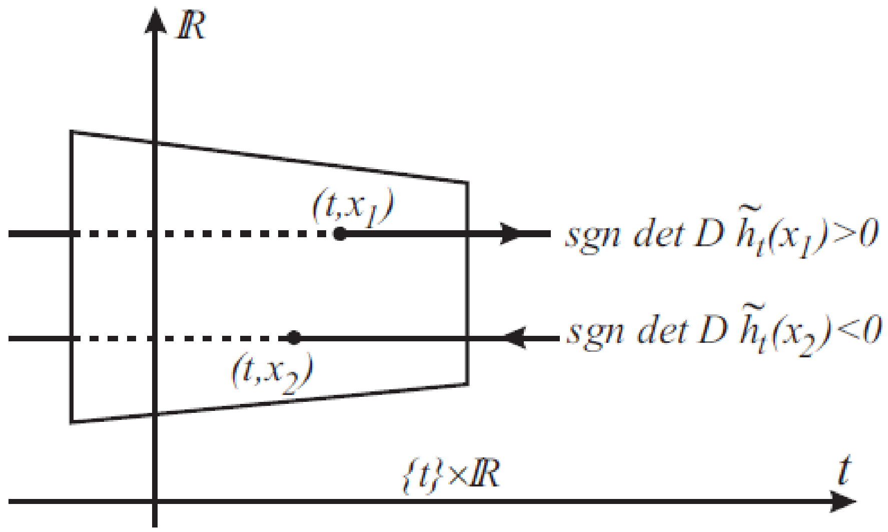


Figura 2.4. La orientación de M

Puesto que h es una homotopía $\Omega-$admisible, los únicos puntos que pertenecen a $M\cap\partial L$ so los puntos $(0,x_1),\, x_1\in g_1^{-1}(0)\cap\Omega$, o bien $(1,x_2),\, x_2\in g_2^{-1}(0)\cap\Omega$. Cada curva orientada de soluciones a $h(t,x)=0$ que empieza en $(0,x_1)$ o bien $(1,x_2)$ es enteramente la región L o la que esta fuera de ella. La porción de aquella curva entro de L tiene que conectarse a otra solución de $h(t,x)=0$ de tipo $(0,x_{1'})$ o bien $(1,x_{2'})$. Ver figura 2.5

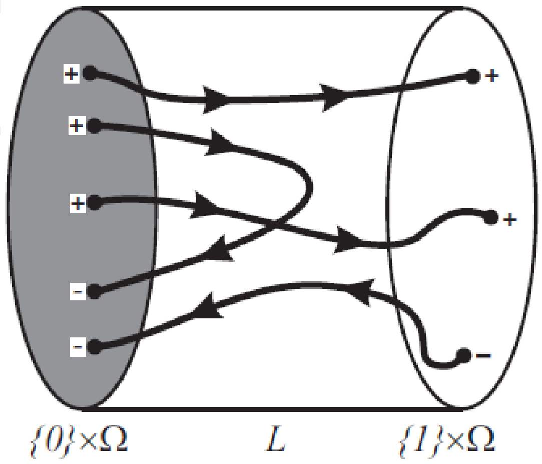


Figura 2.5. Prototipos de curvas orientadas de ceros de una homotopía regular.

Es ahora claro que cualquier curva orientada de $M \cap L$ debe ser uno de los siguientes tipos:

A. Contiene puntos $(0,x_0)$ y $(1,x_1)$ con $x_0 \in g_1^{-1}(0)\cap\Omega$, $x_1 \in g_2^{-1}(0)\cap\Omega$, y $sgn \det Dg_1(x_0) = sgn \det Dg_2(x_1)$.

B. Contiene puntos $(0,x_0)$ y $(0,x_0^*)$ con $x_0, x_0^* \in g_1^{-1}(0)\cap\Omega$, y $sgn \det Dg_1(x_0) = -sgn \det Dg_1(x_0^*)$.

C. Contiene puntos $(1,x_1)$ y $(1,x_1^*)$ con $x_1, x_1^* \in g_2^{-1}(0)\cap\Omega$ y $sgn \det Dg_2(x_1) = -sgn \det Dg_2(x_1^*)$.

D. Está contenido en $(0,1)\times\Omega$ y, de ello, no contiene algún punto $(0,x_0)$ o bien $(1,x_1)$.

Consecuentemente, obtenemos, la siguiente igualdad:

$$\sum_{x\in g_1^{-1}(0)\cap\Omega} sgn \det Dg_1(x) = \sum_{x\in g_2^{-1}(0)\cap\Omega} sgn \det Dg_2(x)$$

Teorema 14.- *El grado definido por la fórmula (9) satisface las propiedades (P1) - P3)).* (Mawhin, 1991)

Demostración:

P-1. Es una consecuencia trivial de la definición.

P-2. A fin de probar la aditividad, consideremos una aplicación $\Omega-$ admisible $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que existen dos subconjuntos, disjuntos, no vacíos y abiertos Ω_1 y Ω_2 de Ω satisfaciendo $f^{-1}(0)\cap\Omega \subseteq \Omega_1\cup\Omega_2$. Sea $\varepsilon = \min\{|f(x)|; x\in\bar{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)\} > 0$ y sea $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aproximación regular de f tal que $\max\{|f(x)-f(x)|; x\in\bar{\Omega}\} < \varepsilon$. Entonces se verifica que $g^{-1}(0)\cap\bar{\Omega} \subseteq \Omega_1\cup\Omega_2$ y, por consiguiente,

$$\begin{aligned}\deg(f,\Omega) &= \sum_{x\in g^{-1}(0)\cap\Omega} sgn \det Dg(x)\\ &= \sum_{x\in g^{-1}(0)\cap\Omega_1} sgn \det Dg(x) + \sum_{x\in g^{-1}(0)\cap\Omega_2} sgn \det Dg(x)\\ &= \deg(f,\Omega_1)+\deg(f,\Omega_2)\end{aligned}$$

Finalmente, probemos la propiedad homotópica

P-3. Se prueba que si f_1 y f_2 son $\Omega-$homotópicas y si g_1 y g_2 son dos aproximaciones regulares de f_1 y f_2, respectivamente, entonces g_1 y g_2 son también $\Omega-$homotópicas. Aplicando el teorema de Weirerstrass, podemos asumir que la homotopía $\Omega-$admisible entre g_1 y g_2 es de clase C^1. Entonces, por el lema **Lema 25** obtenemos $\deg(g_1,\Omega)=\deg(g_2,\Omega)$ de lo cual se sigue que $\deg(f_1,\Omega)=\deg(f_2,\Omega)$.

CAPÍTULO III

3. Análisis de Resultados

3.1. Existencia de Equilibrio en Ecuaciones Diferenciales

En este capítulo se describe como la aplicación $\deg$ definida en la sección 2.4 se puede aplicar a las ecuaciones diferenciales ordinarias (en particular a las ecuaciones periódicas), y así establecer la existencia de soluciones de este tipo de ecuaciones.

La aplicación $\deg$, construida en la sección 2.4, en donde se pudo definir de la siguiente manera:

$$\deg(f,\Omega)=\sum_{x\in g^{-1}(0)\cap\Omega} sgn\det Dg(x) \qquad (10)$$

donde además, dicha aplicación tuvo que cumplir ciertas propiedades contempladas en la sección 2.2.2. que son las propiedades de:

P-1. Normalización:

$$\deg(Id-x_0,\Omega)=\begin{cases}1 & ,si\ x_0\in\Omega\\ 0 & ,si\ x_0\notin\Omega\end{cases}$$

P-2. Aditividad:

$$\deg(f,\Omega)=\deg(f,\Omega_1)+\deg(f,\Omega_2)$$

P-3. Invariancia Homotópica:

Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado y no vacío y $h:[0,1]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una aplicación continua, tal que $h(t,x)\neq 0$ para $x\in\Omega$ y $t\in[0,1]$. Entonces $\deg(h(t,\cdot)\Omega)$, es independiente de $t\in[0,1]$.

Ahora se va a establecer la existencia de ceros (o equilibrio) del siguiente sistema

$$\dot{x}_i(t)=x_i(t)f_i(x(t)), \qquad 1\leq i\leq n \qquad (11)$$

donde $f_i:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable, $1 \le i \le n$. (Este sistema incluye muchos modelos importantes en la teoría ecológica). Claramente, si (11) tiene una única solución, denotada por $\varphi(t,x)$, satisfaciendo $\varphi(0,x)=x$. Esta solución satisface $\varphi(t,x)\in\mathbb{R}_+^n$ para todo $t\ge 0$, siempre que $\varphi(t,x)$ existe. Por otra parte, si $x_i>0$, entonces $\varphi_i(t,x)>0$ para $t\ge 0$.

Diremos que el sistema (11) es permanente si:

(H-1).Para cualquier $x\in\mathbb{R}_+^n$, $\varphi(t,x)$ es definido para todo $t\ge 0$.

(H-2).Existe $\delta>0$ tal que si $x_i>0$ para algún $1\le i\le n$, entonces $\liminf\limits_{t\to\infty}\varphi_i(t,x)>\delta$.

(H-3).Existe $D>0$ tal que si $x\in Int\,\mathbb{R}_+^n$, entonces el $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi_i(t,x)\le D$ para todo $1\le i\le n$

$(H1)$ asegura que $\varphi:[0,\infty)\times\mathbb{R}_+^n\to\mathbb{R}_+^n$ es una aplicación continua. (H2) esta relacionado con la importante cuestión de la extinción en la teoría ecológica y (H3) es la suposición común de disipatividad. Bajo estos supuestos, para cada $x\in Int\,\mathbb{R}_+^n$, el denominado conjunto $\omega-$límite de x definido por $\omega(x):=\{y,\text{existe } t_n\to\infty \text{ para cada } \varphi(t_n,x)\to y \text{ como } n\to\infty\}$ es no vacío, compacto y conexo, e invariante en el sentido de que si $y\in\omega(x)$, entonces $\varphi(t,y)$ existe y $\varphi(t,y)\in\omega(x)$ para todo $t\in\mathbb{R}$. Por otra parte, $\omega(x)\subseteq Int\,\mathbb{R}_+^n$.

Note que si x es un equilibrio, entonces $\omega(x)=\{x\}$, y si x es un punto periódico, es decir, $\varphi(p,x)=x$ para algún $p>0$, entonces $\omega(x)=\bigcup\limits_{0\le t\le p}\{\varphi(t,x)\}$.

Teorema 15.- *Si (11) es permanente, entonces para algún conjunto U abierto y acotado, tal que*

$$\bigcup_{x\in Int\,\mathbb{R}_+^n}\omega(x)\subseteq U\subseteq\bar{U}\subseteq Int\,\mathbb{R}_+^n$$

$\deg(h,U)=(-1)^n$, donde $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ es definido por $h_i(x)=x_i f_i(x)$, $1\le i\le n$, $x\in\mathbb{R}^n$. En particular, existe un equilibrio de (11) en $Int\,\mathbb{R}^n_+$ (i.e. un cero de h). (Wieslaw Krawcewicz, 1997)

Demostración:

Sea $K\subseteq Int\,\mathbb{R}^n_+$ es un conjunto compacto que contiene $\bigcup_{x\in Int\,\mathbb{R}^n_+}\omega(x)$. Definiendo $\tau(x)=\inf\{t\ge 0;\ \varphi(s,x)\in Int\ K \text{ para todo } s\ge t\}$. Esto puede se fácilmente de mostrar que τ es bien definido, acotado localmente, y le máximo valor de $\tau(x)$ a través de $x\in K$ puede ser alcanzando. Sea $T=\max_{x\in K}\tau(x),\ K^+=\{\varphi(t,x);\ x\in K,\ 0\le t\le T\}$. Entonces K^+ es compacto y $\varphi(t,x)\in K$ para todo $t\ge 0$ y $y\in K^+$.\\

Ahora, asumiendo que U es in conjunto convexo, abierto y acotado tal que $\bar{U}\subseteq Int\,\mathbb{R}^n_+$ y $K^+\subseteq U$. Definiendo $s=\max_{x\in\bar{U}}\tau(x)$. Una vez más, dicho valor máximo se puede alcanzado. Considerando la siguiente homotopía $H:[0,s]\times\bar{U}\to\mathbb{R}^n$ definido por

$$H(t,x)=\begin{cases} h(x) & ,\ \text{si } t=0 \\ \dfrac{\varphi(t,x)-x}{t} & ,\ \text{si } i\in(0,s] \end{cases}$$

Claramente, $H(t,x)\ne 0$ para $t\in[0,s]$ y $x\in\partial U$. Ya que ∂U no contiene puntos de equilibrios o periódicas, $\deg(h,U)=\deg(H(s,\cdot),U)$. Por otra parte, si $x\in\partial U$, entonces la definición de s implica que $\varphi(s,x)\in K^+\subseteq U$. Esto implica que no existe $\theta\in[0,1]$ de modo que $\dfrac{\theta x_0+(1-\theta)\varphi(s,x)-x}{s}=0$, donde $x_0\in U$. Consecuentemente, $H(s,\cdot)$ es U-homotópico a $-Id+x_0$. Esto asegura $\deg(H(x,\cdot),U)=\deg(-Id+x_0,U)=(-1)^n$.

■

4. CONCLUSIONES

1. El objetivo de este trabajo fue de construir el Grado topológico, el cual se logró, como se muestra en la sección 2.4, con la ecuación:

$$\deg(f,\Omega)=\sum_{x\in g^{-1}(0)\cap\Omega} sgn\det Dg(x)$$

   donde se probo que que dicha aplicación $\deg$, cumple con las propiedades básicas, con la cual se podrá determinar la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Como resultado de la aplicación $\deg$ es un valor entero, de se concluye que si $\deg=0$ la ecuación no tiene solución (o soluciones) y si $\deg\neq 0$ la ecuación si tiene solución (o soluciones).

2. Se desarrollo la teoría de Grado Topológico en dimensión finita (sección 2.2) llamado en este caso Grado Topológico de Brouwer, donde se muestra que la aplicación $\deg : M\to\mathbb{Z}$, que cumple con la propiedades de normalización, aditividad e invariancia homotópica,

3. Se mostró mediante el teorema 15, que el grado topológico te permite determinar la existencia de soluciones periódicas de una ecuación diferencial ordinaria de la forma (11).

5. RECOMENDACIONES

1. La construcción de Grado Topológico realizado en este trabajo de investigación no sólo funciona para el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, también puede ser utilizado para ecuaciones diferenciales o sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, se recomienda al interesado en desarrollar este último aspecto mencionado leer el artículo de . en el cual generaliza el concepto del teorema del valor intermedio para este caso.

2. El grado topológico analizado en en este trabajo de investigación llamado *Grado Topológico de Brouwer* se desarrollo para casos de dimensión finita, quedando abierta la posibilidad de algún interesado el extender este concepto a casos de dimensión infinita, para ello se recomienda al interesado, ver el caso de grado topológico de Leray-Shouder, donde se verá que la construcción realizada en este trabajo, es de mucha utilidad para desarrollar esta extensión.

3. A diferencia de los teoremas de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias conocidos comúnmente, el grado topológico tiene mayor utilidad cuando se analizan ecuaciones diferenciales no lineales, ya sean ordinarias o no, brindando así información cualitativa de las soluciones.

4. La teoría de grado topológico aplicado en este trabajo de investigación se centro en el estudio de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, se deja a criterio de algún interesado extender este concepto a ecuaciones diferenciales parciales.

Bibliografía

Apostol, T. M. (2001). *Calculus volumen 1.* Reverté S.A.

Deboli, A. F. (2005). *Elementos de la teoría de grado: Aplicaciones a la topología y al análisis.* Universidad de Buenos Aires.

Hadda, J. (2009). *Teoria de grado topológico y aplicaciones a las ecuaciones diferenciales .* Buenos Aires: Departamento de matemáticas FCE.

Mawhin, J. (1991). *Topological degree and boudary value problems for no linear diferential equations.* Belgium: Institut Mathematique.

Mitio, N. (1952). A note on the theory of degree of mapping in euclidean spaces. *Osaca Matematical Journal*, 35, 42.

Munkres, J. R. (2002). *Topology.* Pretince Hall, Inc.

Ortega R. (1992). *Aplicación del Grado Topológico en la Teoría de Estabilidad de Soluciones Periódicas.* Colombia: Deparatamento de Matemática, Universidad Federal.

Rosa Barbolla, P. S. (2002). *Álgebra lineal y teoría de matrices.* Pretince Hall, Inc.

Seymur, L. (1998). *Topologlía general.* (E. norma, Ed.) Mexico: McGRAW-HILL.

Wieslaw Krawcewicz, J. W. (1997). *theory of degrees with aplications to bifurcations and differential equations.* Canadian Mathematical Society.

APENDICE A

DEMOSTRACIÓN DE ALGUNOS TEOREMAS

Lema 16 (Lema de Sard).- *Sea* $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *un conjunto abierto y* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *una aplicación* C^r *tal que* $r > \max\{0, m-n\}$. *Denotemos por* Σ_f *al conjunto de todos los puntos críticos de* f. *Entonces el conjunto* $f(\Sigma_f)$ *de todos los valores críticos de* f *tienen medida de Lebesgue cero*. (Hadda, 2009)

Demostración:

Se presenta la prueba del teorema de Sard sólo para aplicaciones f de clase ∞. Para $m=0$ y/o $n=0$, el teorema es claramente verdadero. Se va a asumir que $m, n \geq 1$. La siguiente prueba está basado en la aplicación del principio de inducción matemática con respecto a m.

Sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ denota un multi-indice con $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup 0$. Se define $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ y $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}}$. Sea $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Se introducirá la siguiente secuencia de conjuntos $\sum_f \supset \overset{1}{\sum} \supset \overset{2}{\sum} \supset \cdots$ por

$$\Sigma^i := \{x \in U; D^\infty f_i(x) = 0 \text{ para } 1 \leq |\alpha| \leq i \text{ y } j = 1, \ldots, n, \ i = 1, 2, \ldots\}$$

En esta prueba se utilizará la siguiente forma del **teorema de Fubini:** *si* $A \subseteq \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ *es un subconjunto tal que la intersección del conjunto* A *con cada hiperplano* $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}, t \in \mathbb{R}^1$, *(n-1)-dimensional tiene medida de Lebesgue cero, entonces* A *n-dimensional tiene medida de Lebesgue cero.*

PASO 1. El conjunto $f(\sum_f \setminus \overset{1}{\sum})$ tiene medida cero. Puesto que para $n=1$ se tiene $\sum_f = \overset{1}{\sum}$, se puede asumir que $n \geq 2$. Supongamos que $x' \in \sum_f \setminus \overset{1}{\sum}$. Para completar la prueba, es suficiente mostrar que existe una vecindad abierta $V \subseteq \mathbb{R}^m$ de x' tal que $f(V \cap \sum_f)$ tiene medida de Lebesgue cero, como el conjunto $\sum_f \setminus \sum^1$ puede estar cubierto por una colección numerable de tales conjuntos V.

Puesto que, $x' \notin \sum^1$, al menos una de las derivadas parciales, por decir, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$, no es igual a cero. Definiendo la aplicación $h: U \to \mathbb{R}^m$ por $h(x) = (f_1(x), x_2, \ldots, x_M)$. Puesto que la derivada $dh(x')$ es un isomorfismo, el teorema de la función implícita implica que una vecindad $V \subset \mathbb{R}^m$ de x' puede ser elegida tal que h aplica a V difeomorficamente sobre una vecindad V' de $h(x')$. Considerando la composición $g := f \circ h^{-1}: V' \to \mathbb{R}^n$. El conjunto $\tilde{\sum}$ de puntos críticos de g coinciden con $h(V \cap \sum_f)$, tal que, $g(\tilde{\sum}) = f(V \cap \Sigma_f)$ es el conjunto de valores críticos para g. La figura A.1 muestra las diversas aplicaciones implicadas.

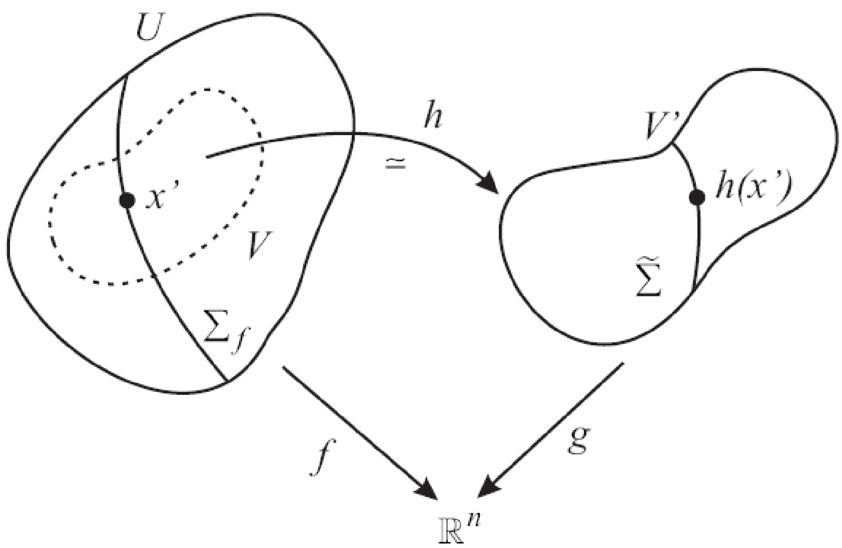


Figura A.1. Diagrama de aplicaciones implicadas en la prueba del Teorema de Sard

Se puede observar que para cada $(t, x_2, \ldots, x_n) \in V'$, $g(t, x_2, \ldots, x_n)$ se encuentra en el hiperplano $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$; en consecuencia, g es la aplicación del hiperplano $\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}$ en el hiperplano $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Vamos a considerar la familia de aplicaciones suaves $g^t:(\{t\}\times\mathbb{R}^{m-1})\cap V'\to\{t\}\times\mathbb{R}^{n-1}$. Se observa que a cada punto $p\in\{t\}\times\mathbb{R}^{m-1}$ es un punto crítico de g^t si y sólo si p es un punto crítico de g. Efectivamente, se tiene la siguiente relación de matrices jacobianas.

$$\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ * & \left[\frac{\partial g_i^t}{\partial x_j}\right]\end{bmatrix}$$

Note que para $m=0$, la afirmación es obvia. Supongamos que la afirmación es válida para $m-1$. Ahora, puesto que la medida de Lebesgue de $g(\tilde{\sum}\cap(\{t\}\times\mathbb{R}^{m-1}))=g^t(\tilde{\sum}\cap(\{t\}\times\mathbb{R}^{m-1}))$ es cero para todo t, se puede ver que la conclusión para m se sigue del teorema de Fubini.

PASO 2. El conjunto $f(\overset{i}{\sum}\setminus\overset{i+1}{\sum})$ tiene medida de Lebesgue cero para $i\geq 1$. Solo se esbozará la aplicación puesto que es análogo al paso 1. para cada punto $x'\in\overset{i}{\sum}\setminus\overset{i+1}{\sum}$, todas las derivadas parciales de f de orden $\leq i$ son zero, pero hay un multi-índice α tal que $|\alpha|=i$ y $\frac{\partial}{\partial x_j}D^\alpha f_k(x')\neq 0$. Denotaremos por w la función $w(x)=D^\alpha f_k(x)$. Entonces $w(x')=0$ y $\frac{\partial w}{\partial x_j}\neq 0$. Se puede asumir por simplicidad que $j=1$. Definiendo $h:U\to\mathbb{R}^m$ por $h(x)=(w(x),x_2,\dots,x_m)$. Entonces h es un difeomorfismo de la vecindad V de x' sobre una vecindad V' de $h(x')$ en $\mathbb{R}^m$. Consideremos el conjunto $h(\Sigma^i\cap V)$. Puesto que $w(x)=D^\alpha f_k(x)$ es una de las funciones coordenadas de h que es cero en $\Sigma^i\cap V$, el conjunto $h(\Sigma^i\cap V)$ es contenido en un hiperplano $\{0\}\times\mathbb{R}^{m-1}$. Consecuentemente, h aplica $\Sigma^i\cap V$ en $\{0\}\times\mathbb{R}^{m-1}$. Similarmente al paso 1, vamos a considerar la composición $g:=f\circ h^{-1}:V'\to\mathbb{R}^n$ y esta restricción $g':(\{0\}\times\mathbb{R}^{m-1})\cap V'\to\mathbb{R}^n$. Sea $\tilde{\Sigma}$ denota el conjunto de puntos críticos de g'. Por inducción en m, la medida de Lebesgue de $g'(\tilde{\Sigma})$ es cero. Puesto que, cada punto x de el conjunto $h(\Sigma^i \cap V)$ es crítico para g' y todas las derivadas parciales de f en x de orden $\leq i$ son ceros (en particular, la dimensión de el rango de $Df(x)$ es pequeño que n), se tiene $g'^{\circ}h(\Sigma^i \cap V) = f(\Sigma^i \cap V)$. Consecuentemente, la medida de Lebesgue de $f(\Sigma^i \cap V)$ en $\mathbb{R}^n$ es igual a cero.

$\blacksquare$

Teorema 9 (Teorema de Weierstrass).- *Sea M y N son dos variedades suaves. Entonces el conjunto $C^\infty(M,N)$ de todas las aplicaciones suaves de M en N es denso en $C_W^r(M,N)$ para $r = 0,1,\ldots$.* (Munkres, 2002)

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$, $f \in C^r(M,N)$, y sea $(\varphi,U), (\psi,V)$ son dos gráficos en M y N, $K \subseteq U$ un subconjunto compacto tal que $f(K) \subset V$. Se necesita mostrar que existe $g \in \mathcal{N}^r(U,V,K,\varepsilon) \cap C^\infty(M,N)$. Asumiremos por simplicidad que $f(U) \subseteq V$. Consideremos

$$\psi f \varphi^{-1} : U' \to V', \qquad U' = \varphi(U), \qquad V'\psi(V)$$

Haciendo $K'\varphi(K)$. Por el siguiente resultado (*Sea M es una C^r-variedad y $A, B \subseteq M$ son dos subconjuntos cerrados tales que $A \cap B = \varnothing$. Entonces existe una C^r- función $\alpha : M \to \mathbb{R}$ separando A y B, tales que si, $\alpha(x) \in [0,1]$ para $x \in M$, $A \subseteq \alpha^{-1}(0)$ y $B \subseteq \alpha^{-1}(1)$*), existe una $C^\infty-$ función $\alpha : U' \to \mathbb{R}$ con soporte compacto tal que $K' \subset \alpha^{-1}(1)$. Entonces por el teorema clásico de Weierstrass, existe $\hat{g} \in \mathcal{N}'(U',V',K',\varepsilon) \cap C^\infty(U',V')$. Pondremos

$$g(v) = \psi f \varphi^{-1}(v) + \alpha(v)[\hat{g}(v) - \psi f \varphi^{-1}(v)], \quad v \in U'$$

Y definiremos $g' : M \to N$ por

$$g'(x) = \begin{cases} \psi^{-1} \circ g \circ \varphi(x) & , si\ x \in U \\ f(x) & , si\ x \notin U \end{cases}$$

Está claro que $g' \in \mathcal{N}'(U,V,V,K,\varepsilon)$. Sea $L = supp(\alpha)$ es el soporte de α y pondremos $\Omega = \varphi^{-1}(Int\ L)$. Entonces $g'|_{\Omega}$ es una $C^{\infty}-$ aplicación. En orden a lo *Corregir* g' hacia una $C^{\infty}-$ aplicación en M, utilizaremos un contador atlas $(\varphi_i, U_i), (\psi_i, V_i)$ en M y N tal que $g'(U_i) \subset V_i$ y que aplicando de nuevo, localmente, el clásico teorema de Weierstrass, para aproximar g' por C^{∞}-aplicación y modificarlo sucesivamente, de la misma manera como se hizo anteriormente con f en U, hacia la C^{∞}-aplicación en otros elementos del cubrimiento $\{U_i\}$. Esta construcción conduce hacia una aplicación $C^{\infty}-$aplicación $g \in \mathcal{N}'(U,V,K,\varepsilon)$