



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA**  
**ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE  
TIPO HIPERBÓLICO DE UNA DIMENSIÓN, MEDIANTE  
DIFERENCIAS FINITAS EN LA ECUACIÓN DE ONDA**

**TESIS**

**PRESENTADA POR:**

**Bach. ROGER AÑACATA MAMANI**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:**

**LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS**

**PUNO - PERÚ**

**2024**



NOMBRE DEL TRABAJO

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIA  
LES PARCIALES DE TIPO HIPERBÓLICO  
DE UNA DIMENSIÓN, MEDIANTE DIFERE  
NCIAS FINITAS EN LA ECUACIÓN DE ON  
DA

AUTOR

ROGER AÑACATA MAMANI

RECUENTO DE PALABRAS

11422 Words

RECUENTO DE CARACTERES

50604 Characters

RECUENTO DE PAGINAS

83 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

2.1MB

FECHA DE ENTREGA

Sep 16, 2024 9:59 PM GMT-5

FECHA DEL INFORME

Sep 16, 2024 10:32 PM GMT-5

● 19% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

- 16% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 8% Base de datos de trabajos entregados
- 2% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

● Excluir del Reporte de Similitud

- Material bibliográfico
- Material citado
- Bloques de texto excluidos manualmente
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 12 palabras)



  
Adelaida Otazu Conza  
LIC. CIENCIAS FÍSICO - MATEMÁTICAS  
Dir. MATEMÁTICA APLICADA

  
Dr. Ruperto Zapana Yerbe

Resumen



## DEDICATORIA

Agradezco profundamente a mis padres, Victoriano y Apolinaria, por su incondicional amor, dedicación y sacrificio a lo largo de los años. Su apoyo ha sido fundamental para llegar a donde estoy hoy. También quiero expresar mi gratitud a mi esposa Brenda, por su amor y apoyo incondicional. A mis amigos, que compartieron conmigo sus conocimientos, alegrías y tristezas sin esperar nada a cambio. A todas las personas que me acompañaron en este camino y me brindaron su apoyo. Y a mi asesor, que con su orientación, sabiduría y aliento me ayudó a culminar este proyecto. Esta tesis es un tributo a todos ustedes, que hicieron posible que este sueño se convirtiera en realidad.



## AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por concederme la vida y la fortaleza necesaria para alcanzar mis objetivos. A mis padres, por su incansable apoyo y su deseo ferviente de verme triunfar. Y de manera especial, quiero expresar mi gratitud al Dr. Ruperto Zapana Yerba, mi asesor, por su valiosa colaboración, motivación y generosidad al dedicarme su tiempo y sabiduría para la realización de esta tesis. Su guía y orientación fueron fundamentales para el éxito de este proyecto.



# ÍNDICE GENERAL

	Pág.
<b>DEDICATORIA</b>	
<b>AGRADECIMIENTOS</b>	
<b>ÍNDICE GENERAL</b>	
<b>ÍNDICE DE TABLAS</b>	
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>	
<b>ÍNDICE DE ACRÓNIMOS</b>	
<b>RESUMEN. . . . .</b>	<b>.10</b>
<b>ABSTRACT . . . . .</b>	<b>.11</b>
<b>CAPÍTULO I</b>	
<b>INTRODUCCIÓN</b>	
<b>1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA . . . . .</b>	<b>12</b>
1.1.1. Descripción del problema . . . . .	12
<b>1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN . . . . .</b>	<b>13</b>
1.5.1. Objetivo general . . . . .	13
1.5.2. Objetivos específicos . . . . .	13
<b>CAPÍTULO II</b>	
<b>REVISIÓN DE LITERATURA</b>	
<b>2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN . . . . .</b>	<b>14</b>
<b>2.2. MARCO TEÓRICO . . . . .</b>	<b>16</b>
2.2.1. Ecuaciones diferenciales . . . . .	16



2.2.2. Clasificación de EDPs de segundo orden . . . . .	26
2.2.3. Diferencias finitas . . . . .	37

### **CAPÍTULO III**

#### **MATERIALES Y MÉTODOS**

<b>3.1. MATERIALES . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>3.2. MÉTODOS . . . . .</b>	<b>54</b>

### **CAPÍTULO IV**

#### **RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

<b>4.1. LA ECUACIÓN DE ONDA . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>4.2. APLICACIÓN DE LAS DIFERENCIAS FINITAS A LA ECUACIÓN DE LA ONDA . . . . .</b>	<b>66</b>
<b>4.3. RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA ONDA EN MATLAB . . . .</b>	<b>70</b>
<b>V. CONCLUSIONES . . . . .</b>	<b>77</b>
<b>VI. RECOMENDACIONES. . . . .</b>	<b>78</b>
<b>VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>79</b>
<b>ANEXOS. . . . .</b>	<b>81</b>

**TEMA:** Diferencias finitas

**ÁREA:** Matemática

**LÍNEA DE INVESTIGACIÓN:** Matemática Aplicada

**FECHA DE SUSTENTACIÓN:** 27 de setiembre de 2024



## ÍNDICE DE TABLAS

	<b>Pág.</b>
<b>Tabla 1</b> Tabla de errores en diferencias finitas para $f'(\bar{x})$ . . . . .	46
<b>Tabla 2</b> Aproximaciones numéricas para $x''(t) = \frac{2t}{1+t^2}x'(t) - \frac{2}{1+t^2}x(t) + 1$ .	50
<b>Tabla 3</b> Muestra las soluciones de la EDP (4.22) pág 66 . . . . .	70
<b>Tabla 4</b> Datos obtenidos con el programa MATLAB . . . . .	73



## ÍNDICE DE FIGURAS

	<b>Pág.</b>
<b>Figura 1</b> Teorema del valor medio . . . . .	38
<b>Figura 2</b> Diferencia hacia adelante . . . . .	40
<b>Figura 3</b> Varias aproximaciones como pendiente de rectas secantes . . . . .	40
<b>Figura 4</b> Diferencia hacia atrás . . . . .	41
<b>Figura 5</b> Diferencia centrada . . . . .	42
<b>Figura 6</b> Aproximación hacia adelante con dos puntos . . . . .	44
<b>Figura 7</b> Función seno . . . . .	45
<b>Figura 8</b> Gráfica de la aproximación numérica, tomando $h = 0.2$ . . . . .	51
<b>Figura 9</b> Vibraciones de una cuerda . . . . .	56
<b>Figura 10</b> Pequeño segmento de la cuerda vibrante . . . . .	57
<b>Figura 11</b> Onda unidimensional . . . . .	60
<b>Figura 12</b> Malla para resolver $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ . . . . .	61
<b>Figura 13</b> Esquema de la ecuación en diferencias para la ecuación de ondas. . . . .	62
<b>Figura 14</b> Captura de pantalla del programa MATLAB tomada en el Laboratorio de Cómputo de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas . . . . .	75
<b>Figura 15</b> Representación gráfica de las soluciones para la ecuación de ondas generada en MATLAB. Captura de pantalla tomada en el Laboratorio de Cómputo de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas . . . . .	76
<b>Figura 16</b> Constancia de Laboratorio de Cómputo . . . . .	81





## ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

- EDO : Ecuación Diferencial Ordinaria
- EDP : Ecuación Diferencial Parcial
- MATLAB : MATrix LABoratory (laboratorio de matrices)
- PVI : Problema de Valor Inicial



## RESUMEN

El objetivo de este trabajo de investigación es determinar la solución numérica de una ecuación diferencial parcial de tipo hiperbólico de una dimensión mediante diferencias finitas y su aplicación a la ecuación de onda, para esta investigación se analizará las ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico de una dimensión en un intervalo acotado, luego analizaremos diferencias finitas, para luego estudiar diferentes métodos de discretización; finalmente utilizar el método discretización de diferencias finitas para resolver la solución de ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico de una dimensión aplicando diferencias finitas en ecuación diferencial de la onda y su software Matlab.

**Palabras clave:** Ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas, método de Diferencias finitas, Ecuación diferencial de la onda, Software Matlab.



## ABSTRACT

The objective of this research work is to determine the numerical solution of a one-dimensional hyperbolic partial differential equation using finite differences and its application to the wave equation. For this research, the one-dimensional hyperbolic partial differential equations will be analyzed. in a limited interval, then we will analyze finite differences, and then study different discretization methods; Finally, use the finite difference discretization method to solve the solution of one-dimensional hyperbolic partial differential equations by applying finite differences in the wave differential equation and its Matlab software.

**Keywords:** Hyperbolic partial differential equations, Finite Difference method, Wave differential equation, Matlab Software.



# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

### 1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

#### 1.1.1. Descripción del problema

En la actualidad hay muchos problemas presentados en matemática aplicada e ingenierías, a través de modelación matemática en el área de Ecuaciones Diferenciales Parciales de tipo Elípticas, Parabólicas e Hiperbólicas; muchas veces no se puede encontrar una solución analítica de una ecuación diferencial parcial mediante los métodos clásicos, además existe poco material bibliográfico del tema y con la investigación se quiere resolver ese problema, motivo por el cual acudimos a métodos aproximados, como por ejemplo a diferencias finitas, para poder determinar la solución de ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico en el cual aplicaremos las diferencias finitas en la ecuación diferencial de la onda , como una herramienta de apoyo con Matlab.

### 1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Es posible determinar la solución numérica de una ecuación diferencial parcial de tipo hiperbólico de una dimensión mediante diferencias finitas en la ecuación diferencial de la onda y su software Matlab?

### 1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

Con el uso de las diferencias finitas es posible determinar la solución numérica de una ecuación diferencial parcial de tipo hiperbólico de una dimensión en la ecuación diferencial de la onda y su software Matlab.



## **1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO**

En el presente trabajo de investigación se dará a conocer la solución de ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico de una dimensión, mediante las diferencias finitas en ecuación diferencial de la onda y su software Matlab, al resolver la ecuación permitirá entender el comportamiento cualitativo de la solución aproximada de la ecuación parcial de tipo hiperbólico de una dimensión en un intervalo acotado y su discretización. El trabajo de investigación aportará la aplicación de diferencias finitas en la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico y sus respectivas aplicaciones en el área de ecuaciones diferenciales.

## **1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN**

### **1.5.1. Objetivo general**

Determinar la solución numérica de una ecuación diferencial parcial de tipo hiperbólico de una dimensión mediante diferencias finitas en ecuaciones diferenciales de la onda.

### **1.5.2. Objetivos específicos**

- Analizar las ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico de una dimensión, y el método de discretización de diferencias finitas para aplicar en la solución de una ecuación diferencial parcial tipo hiperbólico de una dimensión
- Aplicar las diferencias finitas en la solución de una ecuación diferencial parcial tipo hiperbólico de una dimensión.
- Determinar la aplicación de la ecuación de la onda, mediante el método de diferencias finitas y su software Matlab.



## CAPÍTULO II

### REVISIÓN DE LITERATURA

#### 2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Los antecedentes relacionados al trabajo de investigación son:

- Díaz Santamaría J., Flores Nicolalde B. & Flores Nicolalde F. (2016). En este artículo titulado “Modelación matemática de la propagación de calor con el uso de las ecuaciones diferenciales parciales y diferencias finita”, realizado en Escuela Superior Politécnica del Litoral, ESPOL, de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, El objetivo de la investigación es encontrar las soluciones utilizando aproximación numérica, diferencias finitas; la cual resulta ser una herramienta de solución al problema planteado. Un problema particular es la propagación de calor, el análisis se puede realizar a partir de la modelación matemática. El presente trabajo de investigación busca servir de apoyo a estudiantes en el estudio de la resolución de ecuaciones diferenciales parciales mediante el método aproximado como las diferencias finitas.
- Santamaría Sandoval, Alex J. & Ramirez Martinez, José J. (2015). En tesis de pre grado, realizado en la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo de Lambayeque, titulada “Diferencias Finitas Asistido con Matlab en la Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales Hiperbólicas” En el cual el objetivo principal es presentar la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas con el software MATLAB, como caso particular de la ecuación de la Onda. Utilizando el método de aproximación con diferencias finitas, que consiste en definir una versión discreta de la ecuación diferencial parcial hiperbólica reflejada en una ecuación en diferencias.



- Pugarín Díaz, Manuel P. (2015). En tesis de Grado de Maestría en la enseñanza de la 80 matemática de la Universidad de las Fuerzas Armadas de Ecuador, titulado “Desarrollo de las ecuaciones diferenciales parciales parabólicas mediante diferencias finitas, elementos finitos y Meshless”, el objetivo principal es desarrollar paso a paso los métodos aproximados como son las diferencias finitas en la solución de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas. Propone resolver ecuaciones parciales utilizando métodos numéricos: diferencias finitas, elementos finitos y Meshless. El método de diferencias finitas implica discretizar la ecuación utilizando fórmulas de aproximación para derivadas. El método de elementos finitos requiere reformular el problema, construir una formulación débil y aplicar el método Galerkin. El método Meshless se basa en la colocación de puntos en el dominio con funciones de base radial multicuádricas. Se realiza un análisis de error para evaluar la precisión de cada método y compararlos con la solución analítica conocida, con el fin de demostrar su validez y confiabilidad
- Miñano León, Wilder R. (2012). En tesis de Grado de Maestría en computación e informática, trabajo de investigación titulada “Programa del método del elemento finito para ecuaciones diferenciales parciales parabólicas con frontera convexa”. Realizado en Tacna Perú. Este trabajo se centra en el desarrollo de un programa que emplea el método de elementos finitos para resolver eficientemente ecuaciones diferenciales parciales parabólicas con fronteras convexas. Se presenta una implementación en MATLAB que utiliza este método para encontrar la solución de tales ecuaciones, ilustrando la efectividad de esta técnica numérica.



## 2.2. MARCO TEÓRICO

### 2.2.1. Ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales son ecuaciones que contienen funciones y sus derivadas, la idea de resolverlas así como en el álgebra elemental o en la trigonometría que se busca el valor de la incógnita, en las ecuaciones diferenciales la incógnita es una función, que puede ser de una o varias variables.

**Definición 2.1.** Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican por tipo, orden y linealidad.

#### a. Por tipo.

##### i. Ecuación diferencial ordinaria.

Si una ecuación diferencial contiene solamente derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente se dice que es una ecuación diferencial ordinaria (EDO).

ii. **Ecuación diferencial parcial.** Una ecuación diferencial que involucra derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama ecuación diferencial parcial (EDP).

#### b. Por orden.

El orden de una ecuación diferencial, ordinaria o parcial, es el orden de la mayor derivada en la ecuación.

Simbólicamente una ecuación diferencial ordinaria de  $n$ -ésimo orden con una



variable dependiente se expresa por la forma general

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

**c. Por linealidad.**

Una ecuación diferencial ordinaria de  $n$ -ésimo orden se dice que es lineal si  $F$  es lineal en  $y, y', \dots, y^{(n)}$ . Si la forma general de la ecuación diferencial ordinaria, se escribe como

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (2.2)$$

se dice que la ecuación diferencial es de primer orden, si las variables dependientes  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$  son de primer grado y los coeficientes de  $a_0, a_1, \dots, a_n$  dependen a lo más de la variable independiente  $x$ .

Por ejemplo,  $y' + yx = 0$  es una EDO de primer orden cuya incógnita es la función  $y$ , mientras que  $y'' + 2yx + x - 2 = 0$  es una EDO de segundo orden,  $(y'')^3 + x(y')^4 = xy$  es una EDO no lineal de orden 2.

Una ecuación diferencial parcial en  $n$  variables independientes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es una ecuación de la forma

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) = 0 \quad (2.3)$$

La linealidad para ecuaciones diferenciales parciales es semejante a la clasificación de la ecuaciones diferenciales ordinarias. Se dice que una EDP es lineal si es de primer grado en  $u$  y en todas sus derivadas parciales que aparecen en la ecuación, caso contrario

se dice que es no lineal.

La forma general de una ecuación diferencial parcial lineal de primer orden es

$$\sum_{j=1}^n a_j(x)D_j u + b(x)u + c(x) = 0 \quad (2.4)$$

donde alguno de los coeficientes  $a_j$  no es idénticamente nulo. Para ecuaciones de segundo orden, la ecuación diferencial parcial lineal es

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D_i D_j u + \sum_{j=1}^n b_j(x)D_j u + c(x)u + d(x) = 0, \quad (2.5)$$

en donde alguno de los coeficientes  $a_{ij}$  no es idénticamente nulo.

Para dos variables independientes, la EDP tiene ecuación general de la forma

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots, u_{x,\dots,x}, u_{y,\dots,y}) = 0, \quad (2.6)$$

la ecuación lineal de primer orden tiene la forma

$$A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u + D(x, y) = 0, \quad (2.7)$$

y, asumiendo  $u_{xy} = u_{yx}$ , la ecuación diferencial lineal de orden 2 tiene la forma

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0 \quad (2.8)$$

donde  $A, B, C, D, E, F$  y  $G$  son funciones que dependen de  $(x, y)$ .

**Definición 2.2.** Decimos que una EDP lineal es homogénea si el término que no contiene a la variable dependiente es idénticamente nulo.

Las dos últimas ecuaciones, (2.7) y (2.8), son homogéneas si y solamente si las funciones  $D(x, y)$  y  $G$  son idénticamente nulas respectivamente.

La parte principal de una EDP, es la parte de la ecuación que contiene las derivadas de mayor orden. Por ejemplo, las partes principales de las ecuaciones (2.7) y (2.8) son, respectivamente,

$$A(x, y)u_x + B(x, y)u_y \quad (2.9)$$

y

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} \quad (2.10)$$

**Definición 2.3.** Una EDP no lineal, que tiene parte principal lineal es llamada semilineal.

Una ecuación de primer orden semilineal es

$$A(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial z} = F(x, y, z, u) \quad (2.11)$$

y, la forma general de una EDP semilineal de segundo orden es

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u = f(x, u, D_1 u, \dots, D_n u). \quad (2.12)$$

Ejemplos de ecuaciones diferenciales parciales más conocidas son:

a. Ecuaciones lineales



i. Ecuación de Laplace

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0.$$

ii. Ecuación de Helmholtz ( o autovalor)

$$-\Delta u = \lambda u.$$

iii. Ecuación lineal de transporte

$$u_t + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} = 0$$

iv. Ecuación de Liouville

$$u_t - \sum_{i=1}^n (b^i u)_{x_i} = 0$$

v. Ecuación de calor (o difusión)

$$u_t - \Delta u = 0$$

vi. Ecuación de Schrödinger

$$i u_t + \Delta u = 0$$

vii. Ecuación de Kolmogorov

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} = 0$$



viii. Ecuación de Fokker-Planck

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n - \sum_{i=1}^n (b^i u)_{x_i} = 0$$

ix. Ecuación de onda

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

x. Ecuación de Klein-Gordon

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0$$

xi. Ecuación del telégrafo

$$u_{tt} + 2du_t - u_{xx} = 0$$

xii. Ecuación general de la onda

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} = 0$$

xiii. Ecuación de Airy

$$u_t + u_{xxx} = 0$$

xiv. Ecuación Beam

$$u_{tt} + u_{xxxx} = 0$$

b. Ecuaciones no lineales

i. Ecuación Eikonal

$$|Du| = 1$$



ii. Ecuación no lineal de Poisson

$$-\Delta u = f(u)$$

iii. Ecuación p-Laplaciano

$$\operatorname{div} (|Du|^{p-2} Du) = 0$$

iv. Ecuación de la superficie mínima

$$\operatorname{div} \left( \frac{Du}{(1 + |Du|^2)^{1/2}} \right) = 0$$

v. Ecuación de Monge-Ampere

$$\det(D^2u) = f$$

vi. Ecuación de Hamilton-Jacobi

$$u_t + H(Du, x) = 0$$

vii. Ley de la conservación escalar

$$u_t + \operatorname{div} F(u) = 0$$

viii. Ecuación no viscoso de Burger

$$u_t + uu_x = 0$$



ix. Ecuación escalar de reacción-difusión

$$u_t - \Delta u = f(u)$$

x. Ecuación del medio poroso

$$u_t - \Delta(u^\gamma) = 0$$

xi. Ecuación no lineal de la onda

$$u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0$$

xii. Ecuación de Kortwed-de Vries

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

xiii. Ecuación no lineal de Schrödinger

$$iu_t + \Delta u = f(|u|^2)u$$

c. Sistemas lineales

i. Ecuación de equilibrio de elasticidad lineal

$$\mu\Delta u + (\lambda + \mu)D(\operatorname{div} u) = 0$$

ii. Ecuaciones de evolución de elasticidad lineal

$$u_{tt} - \mu\Delta u - (\lambda + \mu)D(\operatorname{div} u) = 0$$



iii. Ecuaciones de Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} E_t = \text{curl } B \\ B_t = -\text{curl } E \\ \text{div } B = \text{div } E = 0 \end{array} \right.$$

d. Sistemas no lineales

i. Ley de sistemas de conservación

$$u_t + \text{div } F(u) = 0$$

ii. Sistemas de reacción-difusión

$$u_t - \Delta u = f(u)$$

iii. Ecuaciones de Euler para flujo no viscoso e incompresible

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + u \cdot Du = -Dp \\ \text{div } u = 0 \end{array} \right.$$

iv. Ecuaciones de Navier-Stokes para flujo viscoso e incompresible

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + u \cdot Du - \Delta u = -Dp \\ \text{div } u = 0 \end{array} \right.$$

Para ver una lista extensa de ecuaciones diferenciales parciales ver Zill et al., 2018.

En la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias aparecen constantes, estas se pueden calcular imponiendo condiciones iniciales, en el caso de intervalos finitos, se



imponen condiciones en los extremos, estas son llamadas condiciones de frontera. En las ecuaciones diferenciales parciales también es posible imponer condiciones de frontera y condiciones iniciales, aunque el tratamiento en estas son diferentes a las ecuaciones diferenciales ordinarias.

**Definición 2.4.** En una ecuación diferencial parcial, cuando se impone condiciones sobre el borde de la región (condiciones de frontera) se dice que es un problema de valores en la frontera o, simplemente, un problema de frontera.

Muchas veces se encuentran condiciones del tipo

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(x), \quad x \in \partial\Omega$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes dadas,  $f$  es una función dada en  $\partial\Omega$  y  $\frac{\partial u}{\partial \eta}$  es la derivada de  $u$  en la dirección normal a  $\partial\Omega$ .

Si  $\beta = 0$ , se conoce como condición de Dirichlet, y si  $\alpha = 0$ , se conoce como condición de Neumann.

Para el caso de las condiciones iniciales en ecuaciones diferenciales parciales, se fija una variable. Si  $n = 2$ , con variables  $x, t$ , se fija, por ejemplo la variable  $t = 0$  que en muchos problemas físicos representa el tiempo, el valor de la solución y de sus derivadas a lo largo de la curva  $t = 0$ , similarmente si  $n = 3$ , con variables  $x, y, t$  fijando  $t = 0$ .

**Definición 2.5.** En una ecuación diferencial parcial, la generalización del concepto de condiciones iniciales imponiendo el valor de la solución y sus derivadas a lo largo de una curva (si  $n = 2$ ), o de una superficie (si  $n = 3$ ) inicial; se dice que el problema



correspondiente es un problema de Cauchy o de valor inicial.

El problema para la ecuación de la onda en un intervalo acotado

$$\begin{aligned}u_{tt} &= c^2 u_{xx} \quad \text{en } (0, l) \times (0, \infty) \\u(0, t) &= 0 = u(l, t), \quad t \geq 0, \\u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [0, l] \\u_t(x, 0) &= g(x), \quad x \in [0, l],\end{aligned}$$

es un problema mixto, con condiciones iniciales  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u_t(x, 0) = g(x)$ ,  $x \in [0, l]$  y condiciones de frontera  $u(0, t) = 0 = u(l, t)$ ,  $t \geq 0$ .

### 2.2.2. Clasificación de EDPs de segundo orden

Sea la ecuación diferencial parcial de segundo orden en la forma

$$Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + F(x, t, u, u_x, u_t) = 0 \quad (2.13)$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son constantes. La expresión

$$Lu \equiv Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt}$$

es la parte principal de la ecuación.

La clasificación de EDPs, está basada en el signo de la cantidad

$$D \equiv B^2 - 4AC$$



que es llamada discriminante.

**Definición 2.6.** Si  $D > 0$ , se dice que (2.13) es hiperbólico; si  $D < 0$ , se dice que (2.13) es elíptico; si  $D = 0$ , se dice que (2.13) es parabólico.

La ecuación de Laplace en dos dimensiones dada por

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

es una ecuación lineal homogénea, donde  $A = 1$ ,  $B = 0$  y  $C = 1$ , y su discriminante es  $D \equiv -4 < 0$ , es decir, la ecuación de Laplace es una ecuación elíptica.

La ecuación del calor en una dimensión dada por

$$u_t - u_{xx} = 0$$

es una ecuación lineal homogénea, donde  $A = B = 0$ , y  $C = -1$ , y su discriminante es  $D \equiv 0$ , es decir, la ecuación del calor, es una ecuación parabólica.

La ecuación de onda en una dimensión dada por

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

es una ecuación lineal homogénea, donde  $A = 1$ ,  $B = 0$  y  $C = -1$ , y su discriminante es  $D \equiv 4 > 0$ , es decir, la ecuación de onda es una ecuación hiperbólica.

Suponiendo que  $A$ ,  $B$  y  $C$  son constantes, definiendo la transformación lineal

$$\begin{aligned}\xi &= ax + bt \\ \tau &= cx + dt\end{aligned}\tag{2.14}$$

para simplificar la EDP. Donde  $\xi$  y  $\tau$  son variables independientes, y  $a, b, c$  y  $d$  serán determinados. Asumiendo que  $ad - bc \neq 0$ , entonces la transformación es invertible, es decir,

$$\begin{aligned}J(x, t) &= \frac{\partial(\xi, \tau)}{\partial(x, t)} \\ &= \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \tau_x & \tau_t \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= ad - bc \neq 0\end{aligned}$$

La función  $u$  en las nuevas variables se denota por  $U = U(\xi, \tau)$ , es decir,  $u(x, t) = U(\xi, \tau) = U(ax + bt, cx + dt)$ . Entonces, las derivadas parciales de primer orden son

$$u_x = U_\xi \xi_x + U_\tau \tau_x = aU_\xi + cU_\tau$$

$$u_t = U_\xi \xi_t + U_\tau \tau_t = bU_\xi + dU_\tau$$

Las derivadas parciales de segundo orden son

$$\begin{aligned}u_{xx} &= (aU_{\xi} + cU_{\tau})_x \\ &= a(U_{\xi\xi}\xi_x + U_{\xi\tau}\tau_x) + c(U_{\xi\tau}\xi_x + U_{\tau\tau}\tau_x) \\ &= a(aU_{\xi\xi} + cU_{\xi\tau}) + c(aU_{\xi\tau} + cU_{\tau\tau}) \\ &= a^2U_{\xi\xi} + 2acU_{\xi\tau} + c^2U_{\tau\tau}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{tt} &= (bU_{\xi} + dU_{\tau})_t \\ &= b(U_{\xi\xi}\xi_t + U_{\xi\tau}\tau_t) + d(U_{\xi\tau}\xi_t + U_{\tau\tau}\tau_t) \\ &= b(bU_{\xi\xi} + dU_{\xi\tau}) + d(bU_{\xi\tau} + dU_{\tau\tau}) \\ &= b^2U_{\xi\xi} + 2bdU_{\xi\tau} + d^2U_{\tau\tau}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{xt} &= (aU_{\xi} + cU_{\tau})_t \\ &= a(U_{\xi\xi}\xi_t + U_{\xi\tau}\tau_t) + c(U_{\xi\tau}\xi_t + U_{\tau\tau}\tau_t) \\ &= a(bU_{\xi\xi} + dU_{\xi\tau}) + c(bU_{\xi\tau} + dU_{\tau\tau}) \\ &= abU_{\xi\xi} + (ad + bc)U_{\xi\tau} + cdU_{\tau\tau}\end{aligned}$$

reemplazando en la parte principal de la EDP, se tiene

$$\begin{aligned}Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} &= A(a^2U_{\xi\xi} + 2acU_{\xi\tau} + c^2U_{\tau\tau}) + B(abU_{\xi\xi} + (ad + bc)U_{\xi\tau} + cdU_{\tau\tau}) \\ &\quad + C(b^2U_{\xi\xi} + 2bdU_{\xi\tau} + d^2U_{\tau\tau}) \\ &= (Aa^2 + Bab + Cb^2)U_{\xi\xi} + (2acA + B(ad + bc) + 2Cbd)U_{\xi\tau} \\ &\quad + (Ac^2 + Bcd + Cd^2)U_{\tau\tau}\end{aligned}\tag{2.15}$$



El discriminante en términos de las nuevas variables es

$$\begin{aligned}
 D(\xi, \tau) &= (2acA + B(ad + bc) + 2Cbd)^2 - 4(Aa^2 + Bab + Cb^2)(Ac^2 + Bcd + Cd^2) \\
 &= 4a^2c^2A^2 + B^2a^2d^2 + 2B^2abcd + B^2b^2c^2 + 4b^2d^2C^2 + 4acAB(ad + bc) \\
 &\quad + 8abcdAB + 4bdBC(ad + bc) - 4a^2c^2A^2 - 4a^2cdA^2B - 4a^2d^2AC - 4abc^2AB \\
 &\quad - 4abcdB^2 - 4abd^2BC - 4b^2c^2AC - 4b^2cdBC - 4b^2d^2C^2 \\
 &= B^2(ad - bc)^2 - 4AC(ad.bc)^2 \\
 &= (B^2 - 4AC)(ad - bc)^2
 \end{aligned}$$

es decir

$$D(\xi, \tau) = D(x, t)[J(x, t)]^2 \quad (2.16)$$

esto implica que una transformación de la forma (2.14), no altera el tipo de ecuación diferencial.

Eligiendo los valores de  $a, b, c$  y  $d$  para eliminar las derivadas de segundo orden en las nuevas variables, este proceso se hace diferente para cada tipo de ecuación, es decir, dependiendo del signo del discriminante. Para ello se asocia a una ecuación diferencial ordinaria homogénea

Sea la ecuación ordinaria homogénea

$$A(dx)^2 + Bdxdt + C(dt)^2 = 0$$



asociada a la ecuación diferencial parcial (2.13), haciendo  $\lambda = \frac{dx}{dt}$ , se tiene

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

Si esta ecuación tiene raíces reales o complejas, entonces se puede factorizar como

$$(\lambda + \lambda_1)(\lambda + \lambda_2) = 0$$

donde  $-\lambda_1$  y  $-\lambda_2$  son sus raíces. Luego

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1; \quad \frac{dx}{dt} = -\lambda_2;$$

Resolviendo

$$x = -\lambda_1 t + c_1; \quad x = -\lambda_2 t + c_2$$

o, equivalentemente

$$x + \lambda_1 t = c_1; \quad x + \lambda_2 t = c_2$$

que representan rectas en el plano cartesiano, llamadas rectas características.

La ecuación ordinaria homogénea asociada a la ecuación parcial en las nuevas variables es

$$A(d\xi)^2 + Bd\xi d\tau + C(d\tau)^2 = 0$$

sus soluciones coinciden con la ecuación diferencial ordinaria en las variables  $x$  y  $t$ , es decir,

$$\begin{aligned} x + \lambda_1 t &= \xi \\ x + \lambda_2 t &= \tau \end{aligned} \tag{2.17}$$



las rectas características de la ecuación transformada son rectas paralelas a los ejes coordenados  $\xi$  y  $\tau$ .

$$\xi = c_1$$

$$\tau = c_2$$

Para anular las derivadas de orden 2 en la ecuación (2.15), se tienen tres casos dependiendo del signo del discriminante.

a. **Caso hiperbólico**,  $D > 0$ .

En la ecuación (2.15) anulando los coeficientes de  $U_{\xi\xi}$  y  $U_{\tau\tau}$ , es decir

$$Aa^2 + Bab + Cb^2 = 0; \quad Ac^2 + Bcd + Cd^2 = 0$$

Usando (2.17)

$$\begin{aligned} x + \lambda_1 t &= \xi = ax + bt \\ x + \lambda_2 t &= \tau = cx + dt \end{aligned} \tag{2.18}$$

de donde,  $a = c = 1$ ,  $b = \lambda_1$  y  $d = \lambda_2$ . Entonces las ecuaciones de los coeficientes de  $U_{\xi\xi}$  y  $U_{\tau\tau}$  son

$$A + Bb + Cb^2 = 0; \quad A + Bd + Cd^2 = 0$$

Como  $D > 0$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , es decir,  $b \neq d$ , resolviendo la ecuación anterior, se tiene

$$b = \frac{-B + \sqrt{D}}{2C}; \quad d = \frac{-B - \sqrt{D}}{2C}$$



La transformación (2.14) tiene la forma

$$\begin{aligned}\xi &= x + \left( \frac{-B + \sqrt{D}}{2C} \right) t, \\ \tau &= x + \left( \frac{-B - \sqrt{D}}{2C} \right) t\end{aligned}\tag{2.19}$$

y transforma la ecuación parcial (2.13) en una ecuación de la forma

$$U_{\xi\tau} + G(\xi, \tau, U, U_{\xi}, U_{\tau}) = 0\tag{2.20}$$

Esta ecuación es llamada la forma canónica de la ecuación hiperbólica, y las coordenadas  $\xi$  y  $\tau$  definidas en (2.19) son llamadas coordenadas características.

Si  $C = 0$ , entonces los valores de  $b$  y  $d$  no son válidos; en este caso  $b = d = 1$  y

$$a = \frac{-B + \sqrt{D}}{2A}; \quad c = \frac{-B - \sqrt{D}}{2A}$$

Análogamente se encuentran las formas canónicas de las ecuaciones de tipo parabólico y elíptico.

b. **Caso parabólico,  $D = 0$ .**

La transformación

$$\begin{aligned}\xi &= x, \\ \tau &= x - \frac{B}{2C}t\end{aligned}$$

transforma la ecuación (2.13) en

$$U_{\xi\xi} + H(\xi, \tau, U, U_{\xi}, U_{\tau}) = 0$$



c. **Caso elíptico**,  $D < 0$ .

Como el discriminante es negativo, se tienen raíces complejas, es decir,  $d = \bar{b}$ , y

la transformación está dada por

$$\xi = x + bt$$

$$\tau = x + \bar{b}t$$

escribiendo la parte real e imaginaria del número complejo, donde  $\tau$  es el conjugado de  $\xi$ , se tiene

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \tau),$$

$$\beta = \frac{1}{2i}(\xi - \tau)$$

En este caso, la forma canónica de la ecuación elíptica es

$$U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} + K(\alpha, \beta, U, U_\alpha, U_\beta) = 0$$

En la ecuación de la onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

donde  $A = c^2$ ,  $B = 0$  y  $C = -1$ , dado que es hiperbólica, reemplazando en la ecuación (2.19), se tiene el siguiente cambio de variable

$$\xi = x - ct$$

$$\tau = x + ct$$

Entonces

$$u_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\tau} + U_{\tau\tau}$$

$$u_{tt} = c^2 U_{\xi\xi} - 2c^2 U_{\xi\tau} + c^2 U_{\tau\tau}$$

reemplazando en la ecuación de la onda

$$c^2 U_{\xi\xi} - 2c^2 U_{\xi\tau} + c^2 U_{\tau\tau} = c^2 U_{\xi\xi} + 2c^2 U_{\xi\tau} + c^2 U_{\tau\tau}$$

Por lo tanto la EDP queda como sigue

$$U_{\xi\tau} = 0$$

Resolviendo esta ecuación diferencial, integrando primeramente con respecto a la variable  $\tau$  y luego con respecto a la variable  $\xi$ , se obtiene

$$U(\xi, \tau) = \varphi(\xi) + \psi(\tau)$$

reemplazando los valores de las variables  $\xi$  y  $\tau$ , se tiene

$$u(x, t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct) \quad (2.21)$$

que es la solución de la ecuación de onda.



Resolviendo para  $c = 2$  y las condiciones

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = f(x) = \text{sen}(\pi x)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = 0$$

Si  $t = 0$ , entonces

$$u(x, 0) = \varphi(x) + \psi(x) = f(x) = \text{sen}(\pi x) \quad (2.22)$$

y

$$\varphi'(x) + \psi'(x) = f'(x) = \pi \cos(\pi x) \quad (2.23)$$

Además

$$u_t(x, t) = 2\varphi'(x + 2t) - 2\psi'(x - 2t) \quad (2.24)$$

Si  $t = 0$

$$u_t(x, 0) = 2\varphi'(x) - 2\psi'(x) = g(x) = 0$$

$$\varphi'(x) - \psi'(x) = 0$$

Reemplazando en (2.23)

$$\psi'(x) = \varphi'(x) = \frac{\pi}{2} \cos(\pi x) \quad (2.25)$$

integrando

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \frac{1}{2} \text{sen}(\pi x) \quad (2.26)$$

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{1}{2} \text{sen}(\pi x) \quad (2.27)$$

Análogamente,

$$\psi(x) = \psi(0) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\pi x) \quad (2.28)$$

De (2.22), en  $x = 0$ ,

$$\varphi(0) + \psi(0) = 0 \quad (2.29)$$

Reemplazando en la ecuación (2.21)

$$u(x, t) = \frac{\operatorname{sen}(\pi x + 2t)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(\pi x - 2t)}{2}.$$

### 2.2.3. Diferencias finitas

Las diferencias finitas tiene por objeto aproximar derivadas para encontrar soluciones a ecuaciones diferenciales, es decir, encontrar una función o alguna aproximación a esta función.

**Definición 2.7.** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida en el intervalo  $I$  y derivable  $n$  veces en el punto  $a \in I$ . El polinomio de Taylor de orden  $n$  de la función  $f$  en el punto  $a$  es:

$$p(h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n.$$

Sea  $p(h)$  el polinomio de Taylor de orden  $n$  de la función  $f$  en el punto  $a$ , donde  $f$  está definida en el intervalo  $I$  de los reales. Entonces, la función  $r(h)$  se define como la diferencia entre el valor de  $f$  en  $a + h$  y el valor del polinomio  $p(h)$ , es decir,  $r(h) = f(a + h) - p(h)$ , y su dominio es el intervalo  $J = \{h \in \mathbb{R} : a + h \in I\}$ , es derivable  $n$  veces en el punto  $0 \in J$ ; además  $r(0) = r'(0) = \dots = r^{(n)}(0) = 0$ .

**Lema 2.1.** Sea  $r : J \rightarrow \mathbb{R}$  derivable  $n$  veces en el punto  $0 \in J$ . Para que  $r^{(i)} = 0$ ,  $i =$

$0, 1, \dots, n$ , es necesario y suficiente que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$$

Como  $r(h) = f(a+h) - p(h)$ , donde  $r$  está asociado al polinomio de Taylor de orden  $n$  y se denota por  $r_n$ , entonces se puede escribir de la siguiente manera

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + r_n(h)$$

donde

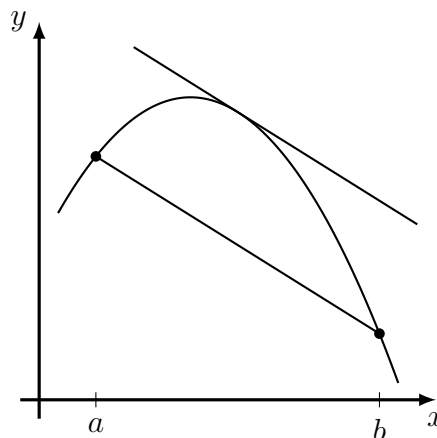
$$r_n(h) = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!} h^{n+1}$$

**Teorema 2.1** (Teorema del valor medio). Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. si  $f$  es derivable en  $(a, b)$ , existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Figura 1**

*Teorema del valor medio*



El teorema del valor medio se interpreta que un arco entre dos puntos, existe al menos un punto en el cual la tangente del arco es paralelo a la secante entre ambos puntos.

Sea la serie de Taylor de primer orden

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot h + r_1$$

donde,  $r_1 = \frac{f''}{2}h^2$ , reemplazando en la anterior ecuación

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} - \frac{r_1}{h}$$

Por lo tanto

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} - \frac{f''h}{2}$$

y se escribe como

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} + \mathcal{O}(h)$$

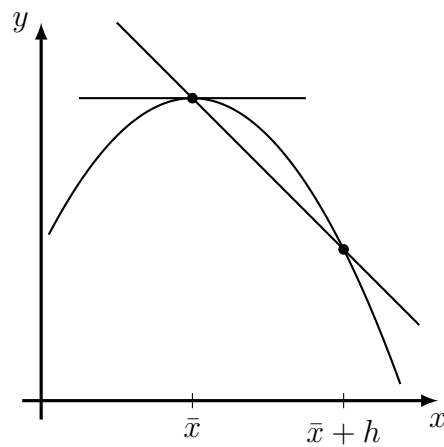
donde  $\mathcal{O}(h)$  representa el error y es de orden  $h$ .

**Definición 2.8** (Diferencia hacia adelante). Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un intervalo  $I$ , se define la aproximación hacia adelante en el punto  $\bar{x}$ , como

$$D_+f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} \tag{2.30}$$

## Figura 2

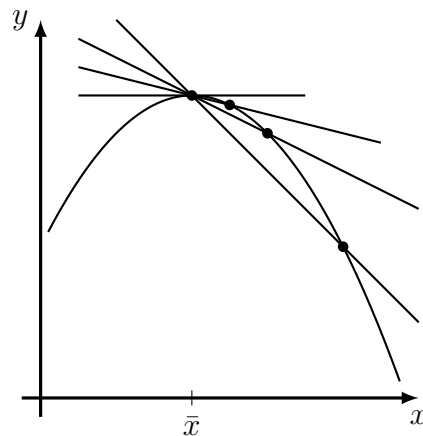
*Diferencia hacia adelante*



La figura muestra como la recta secante que pasa por los puntos  $(\bar{x}, f(\bar{x}))$  y  $(\bar{x} + h, f(\bar{x} + h))$  se aproxima a la recta tangente en el punto  $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ , esta aproximación es mejorada cuando  $h \rightarrow 0$ . Se puede graficar varias rectas secantes reduciendo  $h$ .

## Figura 3

*Varias aproximaciones como pendiente de rectas secantes*



De la gráfica, se puede observar que, mientras que  $h$  se hace más pequeño la aproximación a la recta tangente es cada vez mejor, es decir, que la derivada se aproxima mejor con  $h \rightarrow 0$ .



Para la aproximación de diferencia hacia atrás, se analiza la serie de Taylor como sigue

$$f(\bar{x} - h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot (-h) + r_1$$

donde,  $r_1 = \frac{f''}{2}h^2$ , reemplazando en la ecuación

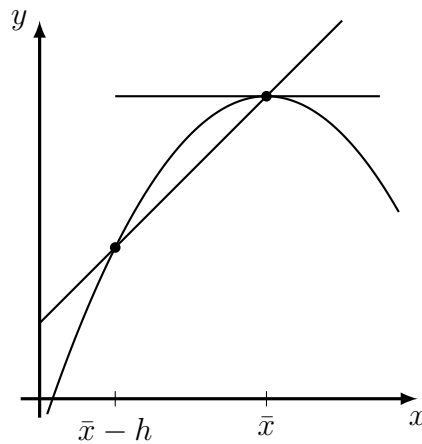
$$f'(x) = \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x} - h)}{h} + \frac{r_1}{h}$$

**Definición 2.9** (Diferencia hacia atrás). Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un intervalo  $I$ , se define la aproximación hacia atrás en el punto  $\bar{x}$ , como

$$D_-f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x} - h)}{h} \quad (2.31)$$

#### Figura 4

*Diferencia hacia atrás*



De las series de Taylor de las aproximaciones de las diferencias hacia adelante y

hacia atrás

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot h + r_1$$

$$f(\bar{x} - h) = f(\bar{x}) - f'(\bar{x}) \cdot h + r_1$$

se tiene

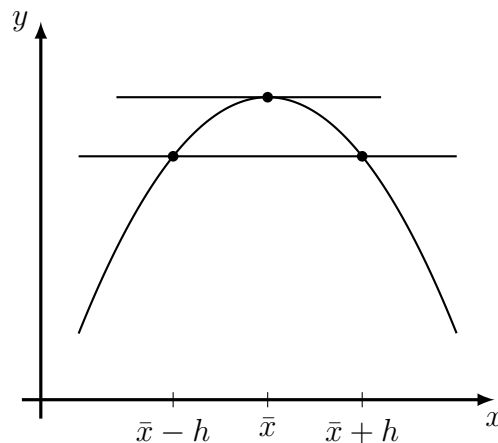
$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x} - h)}{2h}$$

**Definición 2.10** (Diferencia centrada). Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un intervalo  $I$ , se define la aproximación centrada en el punto  $\bar{x}$ , como

$$D_0f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x} - h)}{2h} \quad (2.32)$$

**Figura 5**

*Diferencia centrada*



La relación entre las aproximaciones hacia adelante, hacia atrás y centrada es la siguiente

$$D_0f(\bar{x}) = \frac{1}{2}(D_+f(\bar{x}) + D_-f(\bar{x}))$$

En las aproximaciones, es posible utilizar más de un punto y en ese caso la aproximación será mejor.

Por ejemplo, haciendo aproximaciones con dos puntos hacia adelante  $D_{+2}$ , dos puntos hacia atrás  $D_{-2}$  y con tres puntos en aproximación centrada  $D_3$ . Esto se hace con la serie de Taylor, como sigue:

- $D_{+2}f(\bar{x})$

Sean las ecuaciones, obtenidas por el desarrollo de Taylor de orden 2

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{1}{2}f''(\bar{x})h^2 + r_2 \quad (2.33)$$

$$f(\bar{x} + 2h) = f(\bar{x}) + 2f'(\bar{x})h + 2f''(\bar{x})h^2 + r_2 \quad (2.34)$$

Multiplicando por 4 a la ecuación (2.33) y restando (2.34), se tiene

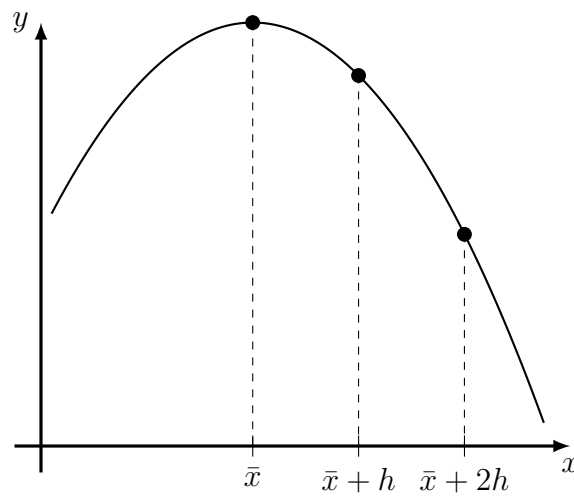
$$f'(\bar{x}) = \frac{1}{2h}(-f(\bar{x} + 2h) + 4f(\bar{x} + h) - 3f(\bar{x})) - \frac{3r_2}{2h}$$

El error es  $\mathcal{O}(h^2)$ , es decir es de orden  $h^2$ . Por lo tanto, la aproximación con dos puntos hacia adelante es

$$D_{+2}f(\bar{x}) = \frac{1}{2h}(-f(\bar{x} + 2h) + 4f(\bar{x} + h) - 3f(\bar{x})) \quad (2.35)$$

## Figura 6

*Aproximación hacia adelante con dos puntos*



- $D_{-2}f(\bar{x})$

Para la aproximación con dos puntos hacia atrás, se resuelve el sistema

$$f(\bar{x} - h) = f(\bar{x}) - f'(\bar{x})h + \frac{1}{2}f''(\bar{x})h^2 + r_2 \quad (2.36)$$

$$f(\bar{x} - 2h) = f(\bar{x}) - 2f'(\bar{x})h + 2f''(\bar{x})h^2 + r_2 \quad (2.37)$$

de donde

$$f'(\bar{x}) = \frac{1}{2h}(3f(\bar{x}) - 4f(\bar{x} - h) + f(\bar{x} - 2h)) + \frac{3r_2}{h}$$

Por lo tanto, la aproximación con dos puntos hacia atrás es

$$D_{-2}f(\bar{x}) = \frac{1}{2h}(3f(\bar{x}) - 4f(\bar{x} - h) + f(\bar{x} - 2h)) \quad (2.38)$$

- $D_3f(\bar{x})$

La aproximación centrada con tres puntos, se obtiene resolviendo el sistema

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{1}{2}f''(\bar{x})h^2 + \frac{1}{6}f'''(\bar{x})h^3 + r_3 \quad (2.39)$$

$$f(\bar{x} - h) = f(\bar{x}) - f'(\bar{x})h + \frac{1}{2}f''(\bar{x})h^2 - \frac{1}{6}f'''(\bar{x})h^3 + r_3 \quad (2.40)$$

$$f(\bar{x} - 2h) = f(\bar{x}) - 2f'(\bar{x})h + 2f''(\bar{x})h^2 - \frac{4}{3}f'''(\bar{x})h^3 + r_3 \quad (2.41)$$

de donde se obtiene

$$f'(\bar{x}) = \frac{1}{6h}(2f(\bar{x} + h) + 3f(\bar{x}) - 6f(\bar{x} - h) + f(\bar{x} - 2h)) + \frac{r_3}{2h}$$

Por lo tanto, la aproximación centrada con tres puntos es

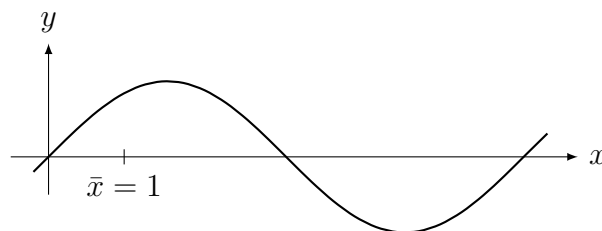
$$D_3f(\bar{x}) = \frac{1}{6h}(2f(\bar{x} + h) + 3f(\bar{x}) - 6f(\bar{x} - h) + f(\bar{x} - 2h)) \quad (2.42)$$

Aplicando las aproximaciones hacia adelante, atrás y centradas, para la función

$$f(x) = \text{sen}(x), \quad \text{y} \quad \bar{x} = 1$$

### Figura 7

*Función seno*



Aproximando la derivada de  $f$ , es decir  $f'(x) = \cos x$ , en  $\bar{x} = 1$ , la derivada es

$$f'(1) = \cos(1) \equiv 0.540302$$

**Tabla 1***Tabla de errores en diferencias finitas para  $f'(\bar{x})$* 

h	$D_+f(\bar{x})$	$D_-f(\bar{x})$	$D_0f(\bar{x})$	$D_{+2}f(\bar{x})$	$D_{-2}f(\bar{x})$	$D_3f(\bar{x})$
0.1	0.042939	0.041138	9.00E-04	2.00E-03	1.58E-03	6.82E-05
0.05	0.021257	0.020807	2.25E-04	4.76E-04	4.24E-04	8.65E-06
0.01	0.004216	0.004198	9.00E-06	1.82E-05	1.78E-05	6.99E-08
0.005	0.002106	0.002101	2.25E-06	4.53E-06	4.48E-06	8.75E-09
0.001	0.000421	0.000421	9.01E-08	1.80E-07	1.80E-07	7.00E-11

Para aproximar la derivada de segundo orden, se escribe la serie de Taylor hacia adelante para  $f(\bar{x} + 2h)$  y  $f(\bar{x} + h)$ ,

$$f(\bar{x} + 2h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot (2h) + \frac{f''(\bar{x})}{2}(2h)^2 + r_2 \quad (2.43)$$

y

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot (h) + \frac{f''(\bar{x})}{2}(h)^2 + r_2 \quad (2.44)$$

resolviendo, (2.43) y (2.44).

$$f(\bar{x} + 2h) - 2f(\bar{x} + h) = -f(\bar{x}) + f''(\bar{x})h^2 - r_2$$

Por lo tanto, la diferencia de segundo orden hacia adelante es:

$$D_+^2 f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + 2h) - 2f(\bar{x} + h) + f(\bar{x})}{h^2} \quad (2.45)$$

Análogamente, se obtiene la diferencia de segundo orden hacia atrás

$$D_-^2 f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}) - 2f(\bar{x} - h) + f(\bar{x} - 2h)}{h^2} \quad (2.46)$$

Y, la diferencia de segundo orden centrada

$$D_0^2 f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + h) - 2f(\bar{x}) + f(\bar{x} - h)}{h^2} \quad (2.47)$$

En adelante, se usará la siguiente notación

$$\bar{x} = x_i$$

$$\bar{x} + h = x_{i+1}$$

$$\bar{x} - h = x_{i-1}$$

Análogamente, para  $f(x_i) = f_i$ .

Para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias en problemas de contorno de segundo orden se utilizan el método de diferencias finitas que proporcionan aproximaciones a las derivadas. Sea la ecuación lineal

$$x'' = p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t) \quad (2.48)$$

En  $[a, b]$  con  $x(a) = \alpha$  y  $x(b) = \beta$ . Haciendo una partición de  $[a, b]$  usando los nodos  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ , siendo  $h = \frac{b-a}{N}$  y  $t_j = a + jh$  para  $j = 0, 1, \dots, N$ .

Reescribiendo las fórmulas de diferencias centradas de primer y segundo orden





siendo

$$e_0 = \left( \frac{h}{2} p_1 + 1 \right) \alpha \quad (2.54)$$

y

$$e_N = \left( \frac{-h}{2} p_{N-1} + 1 \right) \beta \quad (2.55)$$

Sea el problema de contorno

$$x''(t) = \frac{2t}{1+t^2} x'(t) - \frac{2}{1+t^2} x(t) + 1 \quad (2.56)$$

con  $x(0) = 1.25$  y  $x(4) = -0.95$  en el intervalo  $[0, 4]$ .

Donde,  $p(t) = 2t/(1+t^2)$ ,  $q(t) = -2/(1+t^2)$  y  $r(t) = 1$ , respectivamente.

Resolviendo el correspondiente sistema de ecuaciones lineales (2.52), el método de diferencias finitas proporciona las soluciones numéricas  $\{x_j\}$ . En la Tabla 2 se muestra las aproximaciones  $\{x_{j,1}\}$ ,  $\{x_{j,2}\}$ ,  $\{x_{j,3}\}$  y  $\{x_{j,4}\}$  correspondientes a los tamaños de paso  $h_1 = 0.2$ ,  $h_2 = 0.1$ ,  $h_3 = 0.05$  y  $h_4 = 0.025$ .

La sucesión  $\{x_{j,2}\}$  generada tomando  $h_2 = 0.1$  contiene 41 términos de los que sólo se muestra cada uno de cada dos, los que corresponden a los 21 valores de  $(t_j)$  dados en la Tabla 2 y que son los generados tomando  $h_1 = 0.2$ . Análogamente, lo que se muestra de las sucesiones  $(x_{j,3})$  y  $(x_{j,4})$  es sólo una porción de todos los valores generados tomando los tamaños de paso  $h_3 = 0.05$  y  $h_4 = 0.025$ , respectivamente, y corresponden a los mismos 21 nodos  $(t_j)$ . En la Figura 8, se muestran las gráficas de la poligonal formada con los puntos  $\{(t_j, x_{j,1})\}$  para el caso  $h_1 = 0.2$ .



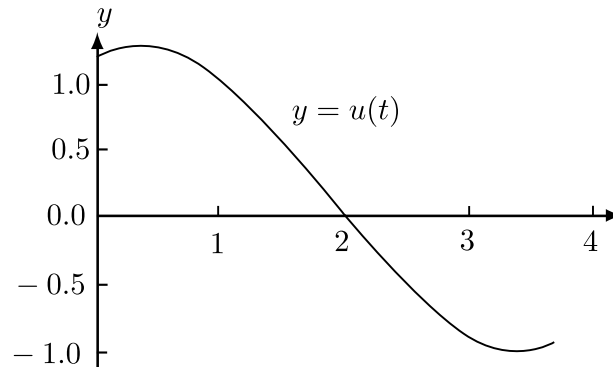
**Tabla 2**

*Aproximaciones numéricas para  $x''(t) = \frac{2t}{1+t^2}x'(t) - \frac{2}{1+t^2}x(t) + 1$*

$t_j$	$x_{j,1}$ $h = 0.2$	$x_{j,2}$ $h = 0.1$	$x_{j,3}$ $h = 0.05$	$x_{j,4}$ $h = 0.025$	$x(t_j)$ exacto
0.0	1.250000	1.250000	1.250000	1.250000	1.250000
0.2	1.314503	1.316646	1.317174	1.317306	1.317350
0.4	1.32060i	1.325045	1.326141	1.326414	1.326505
0.6	1.272755	1.279533	1.281206	1.281623	1.281762
0.8	1.177399	1.186438	1.188670	1.189227	1.189412
1.0	1.042106	1.053226	1.055973	1.056658	1.056886
1.2	0.874878	0.887823	0.891023	0.891821	0.892086
1.4	0.683712	0.698181	0.701758	0.702650	0.702947
1.6	0.476372	0.492027	0.495900	0.496865	0.497187
1.8	0.260264	0.276749	0.280828	0.281846	0.282184
2.0	0.042399	0.059343	0.063537	0.064583	0.064931
2.2	-0.170616	-0.153592	-0.149378	-0.148327	-0.147977
2.4	-0.372557	-0.355841	-0.351702	-0.350669	-0.350325
2.6	-0.557565	-0.541546	-0.537580	-0.536590	-0.536261
2.8	-0.720114	-0.705188	-0.701492	-0.700570	-0.700262
3.0	-0.854988	-0.841551	-0.838223	-0.837393	-0.837116
3.2	-0.957250	-0.945700	-0.942839	-0.942125	-0.941888
3.4	-1.022221	-1.012958	-1.010662	-1.010090	-1.009899
3.6	-1.045457	-1.038880	-1.037250	-1.036844	-1.036709
3.8	-1.022727	-1.019238	-1.018373	-1.018158	-1.018086
4.0	-0.950000	-0.950000	-0.950000	-0.950000	-0.950000

## Figura 8

Gráfica de la aproximación numérica, tomando  $h = 0.2$



Comparando las soluciones numéricas de la Tabla 2 con la exacta

$$x(t) = 1.25 + 0.486089652t - 2.25t^2 + 2t \arctan(t) + \frac{1}{2} (t^2 - 1) \ln(1 + t^2) \quad (2.57)$$

La Tabla 2 muestra que eso es lo que ocurre, por ejemplo, en el punto  $t_j = 1.0$  los errores de las aproximaciones correspondientes a los tamaños de paso  $h_1, h_2, h_3$  y  $h_4$  son  $e_{j,1} = 0.014780$ ,  $e_{j,2} = 0.03660$ ,  $e_{j,3} = 0.0000913$  y  $e_{j,4} = 0.000228$ , respectivamente; los cocientes sucesivos de estos errores son  $e_{j,2}/e_{j,1} = 0.0003660/0.014780 = 0.2476$ ,  $e_{j,3}/e_{j,2} = 0.0000913/0.03660 = 0.2495$ ,  $e_{j,4}/e_{j,3} = 0.0000228/0.0000913 = 0.2497$ , que se acercan a  $\frac{1}{4}$ .

Usando el esquema de mejora de Richardson para extrapolar los valores poco aproximados  $\{x_{j,1}\}$ ,  $\{x_{j,2}\}$ ,  $\{x_{j,3}\}$  y  $\{x_{j,4}\}$  y conseguir seis cifras decimales de precisión. Eliminando los términos de orden  $O(h^2)$  y  $O((h/2)^2)$  en las aproximaciones  $\{x_{j,1}\}$  y  $\{x_{j,2}\}$  generamos los valores extrapolados correspondientes  $\{z_{j,1}\} = \{(4x_{j,2} - x_{j,1})/3\}$ . De manera parecida, eliminando los términos del error de orden  $O((h/2)^2)$  y  $O((h/4)^2)$  en  $\{x_{j,2}\}$  y  $\{x_{j,3}\}$  se generan los valores extrapolados  $\{z_{j,2}\} = \{(4x_{j,3} - x_{j,2})/3\}$ . Puede



probarse que se puede aplicar el segundo nivel del esquema de mejora de Richardson a las sucesiones  $\{z_{j,1}\}$  y  $\{z_{j,2}\}$  y generar una tercera mejora  $\{(16z_{j,2} - z_{j,1})/15\}$ . Vamos a ilustrar la situación hallando los valores extrapolados que corresponden a  $t_j = 1.0$ . El primer valor extrapolado es

$$\frac{4x_{j,2} - x_{j,1}}{3} = \frac{4(1.053226) - 1.042106}{3} = 1.056932 = z_{j,1} \quad (2.58)$$

El segundo valor extrapolado es

$$\frac{4x_{j,3} - x_{j,2}}{3} = \frac{4(1.055973) - 1.053226}{3} = 1.056889 = z_{j,2} \quad (2.59)$$

Finalmente, la tercera extrapolación involucra los términos  $z_{j,1}$  y  $z_{j,2}$  :

$$\frac{16z_{j,2} - z_{j,1}}{15} = \frac{16(1.056889) - 1.056932}{15} = 1.056886 \quad (2.60)$$

Este último valor tiene ya seis cifras decimales de precisión. Los valores mejorados en los demás puntos se recogen en la siguiente tabla



$t_j$	$x(t_j) - x_{j,1}$ $= e_{j,1}$	$x(t_j) - x_{j,2}$ $= e_{j,2}$	$x(t_j) - x_{j,3}$ $= e_{j,3}$	$x(t_j) - x_{j,1}$ $= e_{j,1}$
	$h_1 = 0.2$	$h_1 = 0.1$	$h_3 = 0.05$	$h_1 = 0.025$
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.002847	0.000704	0.000176	0.000044
0.4	0.005898	0.001460	0.000304	0.000091
0.6	0.009007	0.002229	0.000556	0.000139
0.8	0.012013	0.002974	0.000712	0.000185
1.0	0.014780	0.003660	0.000913	0.000228
1.2	0.017208	0.004263	0.001063	0.000265
1.4	0.019235	0.004766	0.001189	0.000297
1.6	0.020815	0.005160	0.001287	0.000322
1.8	0.021020	0.005135	0.001350	0.000338
2.0	0.022533	0.005588	0.001394	0.000348
2.2	0.022639	0.005615	0.001401	0.000350
2.4	0.022232	0.005516	0.001377	0.000344
2.6	0.021304	0.005285	0.001319	0.000329
2.8	0.019852	0.004926	0.001230	0.000308
3.0	0.017872	0.004435	0.001107	0.000277
3.2	0.015362	0.003812	0.000951	0.000237
3.4	0.012322	0.003059	0.000763	0.000191
3.6	0.008749	0.002171	0.000541	0.000135
3.8	0.004641	0.001152	0.000287	0.000072
4.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000



## CAPÍTULO III

### MATERIALES Y MÉTODOS

#### 3.1. MATERIALES

En este trabajo de investigación los materiales que se utilizó fueron:

- La investigación se basó en una amplia variedad de fuentes de información, incluyendo textos, artículos y papers online, revistas científicas de prestigio y tesis de repositorios nacionales e internacionales. Especialmente, se consultaron fuentes bibliográficas especializadas en Ecuaciones Diferenciales Parciales y Diferencias Finitas, cuya revisión bibliográfica se detalla en la sección correspondiente.
- Otros materiales que también fueron de gran utilidad: el internet, la laptop, software MATLAB, hojas, pizarra, lapiceros y plumones.

#### 3.2. MÉTODOS

- **Tipo de Investigación.**

El tipo de investigación es teórica básica y aplicada (Chávez, 2007), ya que la investigación se basa en aplicación de las diferencias finitas en la solución de una ecuación diferencial parcial tipo hiperbólico de una dimensión en la ecuación diferencial de la onda y su software Matlab.

- **Método.**

El método que se usa es deductivo (Rojas, 2004), explorativo ya que la ejecución del proyecto consistirá en el análisis de los conceptos y teoremas que engloba la teoría de ecuaciones diferenciales parciales y diferencias finitas, para aplicarlos en la solución de una ecuación diferencial parcial tipo hiperbólico de una dimensión en diferencias finitas en ecuación diferencial de la onda y su software Matlab.



- **Técnica.**

Lectura y análisis de materiales de consulta para la asimilación así también el uso de método de diferencias finitas para la solución de las ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico en la investigación.

- **Estrategias.**

La estrategia de esta investigación es elegir un problema, plantear la solución teórica, es difícil plantear la solución aproximada en donde se ejecuta el programa de aproximación.

## CAPÍTULO IV

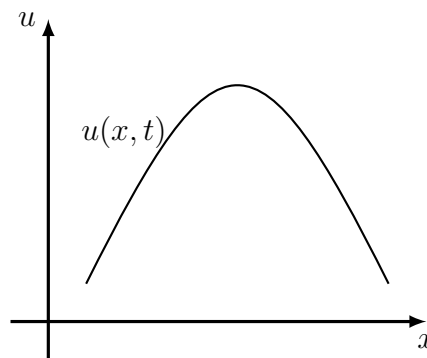
### RESULTADOS Y DISCUSIÓN

#### 4.1. LA ECUACIÓN DE ONDA

Considerando pequeñas vibraciones de una cuerda que está sujeta en los extremos. Suponiendo que la cuerda está hecha de un material homogéneo, en donde no afecta la gravedad, las vibraciones tienen lugar en un plano y que no hay fuerzas externas.

#### Figura 9

*Vibraciones de una cuerda*

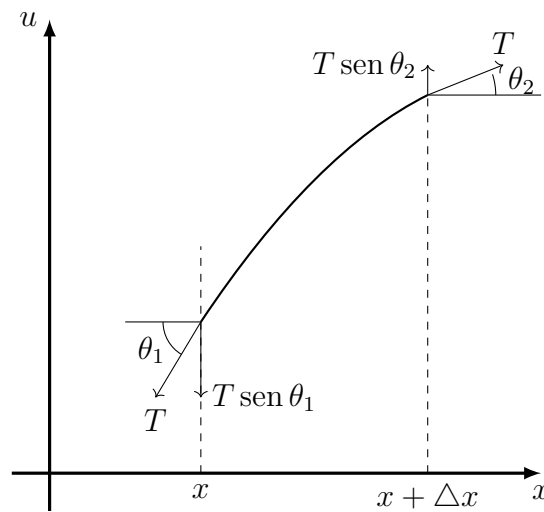


Para describir matemáticamente las vibraciones de la cuerda, se considera una pequeña sección de la cuerda.



## Figura 10

*Pequeño segmento de la cuerda vibrante*



Para pequeños ángulos  $\theta$ , se tiene

$$\text{sen } \theta = \theta \quad \text{y} \quad \text{cos } \theta = 1$$

Entonces

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} = \frac{\theta}{1} = \theta$$

Puesto que la derivada se relaciona con la tangente, entonces

$$\tan \theta = u_x$$

es decir

$$\tan \theta_1 = u_x(x)$$

$$\tan \theta_2 = u_x(x + \Delta x)$$



Ahora, analizando la fuerza de tensión vertical

$$\begin{aligned} T \sen \theta_2 - T \sen \theta_1 &= T \tan \theta_2 - T \tan \theta_1 \\ &= T u_x(x + \Delta x) - T u_x(x) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Para aplicar la segunda ley de Newton, se necesita la masa por la aceleración, en donde la masa está expresada mediante la densidad por variación de longitud, es decir,

$$m = \rho \Delta x \quad (4.2)$$

y la aceleración es la segunda derivada respecto al tiempo, es decir,

$$a = u_{tt} \quad (4.3)$$

Por la segunda ley de Newton, se tiene

$$T u_x(x + \Delta x) - T u_x(x) = \rho \Delta x u_{tt}$$

Dividiendo, entre  $T \Delta x$

$$\frac{u_x(x + \Delta x) - u_x(x)}{\Delta x} = \frac{\rho}{T} u_{tt}$$

Tomando límite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_x(x + \Delta x) - u_x(x)}{\Delta x} = \frac{\rho}{T} u_{tt}$$

por la definición de derivada, se concluye

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

donde  $c^2 = \frac{T}{\rho}$ , que es la ecuación de la onda.

En seguida, se presenta la ecuación diferencial parcial de tipo hiperbólico, como problema de valores en la frontera de la ecuación de la onda, está dada por:

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < a; \quad 0 < t < b \quad (4.4)$$

Sujeto a condiciones de contorno

$$u(0, t) = u(a, t) = 0; \quad 0 < t < b \quad (4.5)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad 0 \leq x \leq a$$

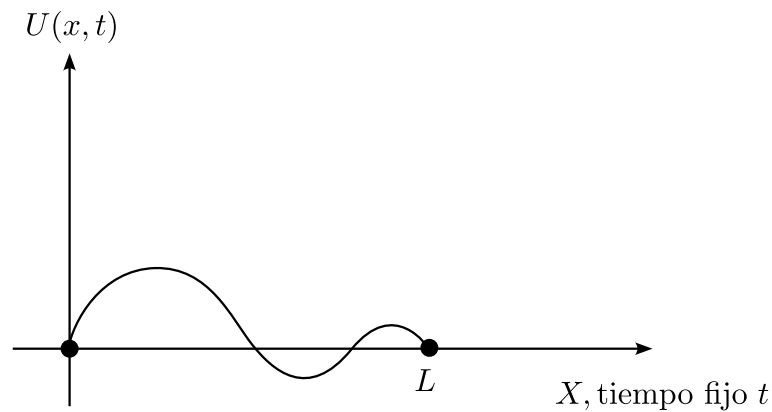
Es una ecuación hiperbólica; ya que  $A = 1$ ;  $B = 0$ ;  $C = -1/c^2$ ;

$$B^2 - 4AC = 0^2 - 4(1) \left(-1/c^2\right) = \frac{4}{c^2} > 0 \quad (4.6)$$

La ecuación de onda es un modelamiento matemático del desplazamiento de la función  $u$  desde su posición de equilibrio, de una cuerda elástica cuyos extremos son  $x = 0$  y  $x = a$ , ésta ecuación está dada por la segunda derivada del desplazamiento de onda  $u$  respecto a la coordenada  $x$  es igual al inverso de la velocidad de propagación al cuadrado por la segunda derivada del desplazamiento de esta con respecto al tiempo.

## Figura 11

### *Onda unidimensional*

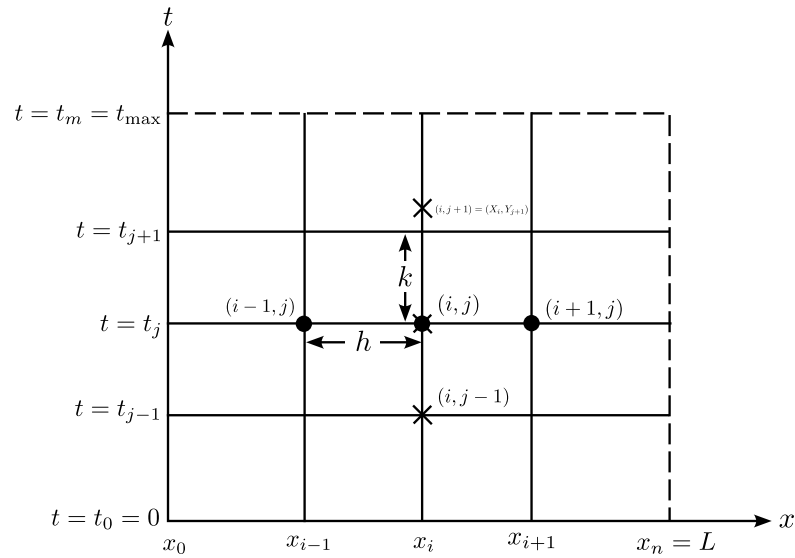


Se realiza una partición al rectángulo  $R$  en una malla compuesta por  $n - 1$  por  $m - 1$  rectángulos, cada uno con dimensiones  $\Delta x = h$  y  $\Delta t = k$ . La malla se construye de manera que se inicia en la fila inferior, donde  $t = t_0 = 0$ , y se avanza hacia arriba. En la fila inicial, se conoce la solución  $u(x_i, t_1) = f(x_i)$ . A partir de esta fila, se utiliza una ecuación en diferencias finitas para calcular las aproximaciones a la solución exacta en los puntos de la malla, es decir,  $u(x_i, t_j)$ , en las filas sucesivas. O sea, para cada  $j = 2, 3, \dots, m$ , se calcula

$$\{u_{i,j} \approx u(x_i, t_j) : i = 1, 2, \dots, n\} \quad (4.7)$$

**Figura 12**

Malla para resolver  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$



Por la ecuación (2.47) de diferencias centradas de segundo orden, se tienen

$$u_{xx}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} \quad (4.8)$$

$$u_{tt}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i, t_j + k) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_j - k)}{k^2} \quad (4.9)$$

Los rectángulos en la malla entre los puntos son uniformes en todas las filas:

$x_{i+1} = x_i + h$  (y  $x_{i-1} = x_i - h$ ) y también es uniforme en todas las columnas:

$t_{j+1} = t_j + k$  (y  $t_{j-1} = t_j - k$ ).

Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación de onda (4.4) y denotando  $u_{i,j}$  en lugar de  $u(x_i, t_j)$ , de lo cual se tiene

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = c^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (4.10)$$

esta es la ecuación en diferencias finitas que se usará para aproximar la ecuación de la onda unidimensional (4.4).

Haciendo

$$r = \frac{ck}{h}, \quad \text{entonces} \quad r^2 = \left(\frac{ck}{h}\right)^2 \quad (4.11)$$

La ecuación queda como:

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = r^2 (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \quad (4.12)$$

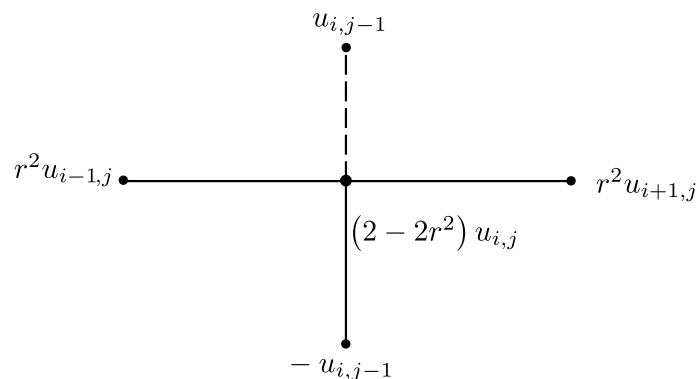
Reordenando convenientemente

$$u_{i,j+1} = 2(1 - r^2) u_{i,j} + r^2 (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} \quad (4.13)$$

para  $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ . En la Figura 13 se muestra la posición en la malla de los cuatro valores conocidos que aparecen en el miembro derecho de la relación (4.12), los que se usan para determinar la aproximación  $u_{i,j+1}$ .

### Figura 13

*Esquema de la ecuación en diferencias para la ecuación de ondas.*



Usando la ecuación (4.13), se obtiene la forma matricial haciendo variar  $i$ .

Si  $i = 1$ , la ecuación (4.13) se escribe como

$$u_{1,j+1} = 2(1 - r^2)u_{1,j} + r^2(u_{2,j} + u_{0,j}) - u_{1,j-1}$$

y, por las condiciones  $u(0, t) = u(a, t) = 0$ , es decir,  $u_{0,j} = 0$ , entonces

$$u_{1,j+1} = 2(1 - r^2)u_{1,j} + r^2u_{2,j} - u_{1,j-1}$$

Si  $i = 2$ , se tiene

$$u_{2,j+1} = 2(1 - r^2)u_{2,j} + r^2(u_{3,j} + u_{1,j}) - u_{2,j-1}$$

de donde

$$u_{2,j+1} = 2(1 - r^2)u_{2,j} + r^2u_{3,j} + r^2u_{1,j} - u_{2,j-1}$$

Análogamente, para los valores de  $i$ , hasta que  $i = n - 1$ .

$$u_{n-1,j+1} = 2(1 - r^2)u_{n-1,j} + r^2u_{n,j} + r^2u_{n-2,j} - u_{n-1,j-1}$$

Estas ecuaciones se pueden escribir como un sistema de  $n - 1$  ecuaciones

$$u_{1,j+1} = 2(1 - r^2)u_{1,j} + r^2u_{2,j} - u_{1,j-1}$$

$$u_{2,j+1} = 2(1 - r^2)u_{2,j} + r^2u_{3,j} + r^2u_{1,j} - u_{2,j-1}$$

$\vdots$

$$u_{n-1,j+1} = 2(1 - r^2)u_{n-1,j} + r^2u_{n,j} + r^2u_{n-2,j} - u_{n-1,j-1}$$

y, éste sistema se puede escribir matricialmente como

$$\begin{bmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-r^2) & r^2 & 0 & \cdots & 0 \\ r^2 & 2(1-r^2) & r^2 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & r^2 & 2(1-r^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{1,j-1} \\ u_{2,j-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1,j-1} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Para utilizar las condiciones iniciales, sea  $x = x_i$  fijo en la frontera inferior de  $R$  y aplicando la fórmula de Taylor de orden uno para el desarrollo de  $u(x, t)$  alrededor de  $(x_i, 0)$ ; para el valor  $(u_i, k)$  se verifica

$$u(x_i, k) = u(x_i, 0) + u_t(x_i, 0)k + O(k^2) \quad (4.15)$$

Usando las condiciones iniciales, se obtienen las aproximaciones de la primera fila

$$u(x_i, 0) = f(x_i) = f_i \quad \text{y} \quad u_t(x_i, 0) = g(x_i) = g_i \quad (4.16)$$

en la ecuación (4.15) sea  $t_2 = k$ , con esto se obtiene la fórmula para las aproximaciones numéricas en los puntos de la segunda fila

$$u_{i,2} = f_i + kg_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (4.17)$$

Esta ecuación está dada en diferencias finitas y proporciona una aproximación para la segunda fila. Para evitar los valores  $u_{i,2}$  calculados con la fórmula (4.17) en el proceso de error de truncamiento apreciable, es recomendable tomar un tamaño de paso muy pequeño  $k$ .



La función dos veces derivable  $f(x)$  en el contorno implica que  $u_{xx}(x, 0) = f''(x)$ , esta igualdad permite utilizar el desarrollo de Taylor de orden  $n = 2$  con el cual obtener una aproximación mejorada a los valores de la segunda fila de la malla. Para ello, en la ecuación de la onda, se tiene

$$u_{tt}(x_i, 0) = c^2 u_{xx}(x_i, 0) = c^2 f''(x_i) = c^2 \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \quad (4.18)$$

Por la formula de Taylor de orden 2, se tiene

$$u(x, k) = u(x, 0) + u_t(x, 0)k + \frac{u_{tt}(x, 0)k^2}{2} + O(k^3) \quad (4.19)$$

y aplicando esta expresión (4.19) en el punto  $x = x_i$  y con (4.17) y (4.18), se obtiene

$$u(x_i, k) = f_i + kg_i + \frac{c^2 k^2}{2h^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) + O(h^2) O(k^2) + O(k^3) \quad (4.20)$$

Como  $r = ck/h$ , de la expresión (4.20) se obtiene la siguiente fórmula de diferencias que proporciona aproximaciones numéricas mejoradas a los elementos de la segunda fila:

$$u_{i,2} = (1 - r^2) f_i + kg_i + \frac{r^2}{2} (f_{i+1} + f_{i-1}) \quad (4.21)$$

para  $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ .

## 4.2. APLICACIÓN DE LAS DIFERENCIAS FINITAS A LA ECUACIÓN DE LA ONDA

Usando el método de las diferencias finitas para resolver la ecuación de ondas de una cuerda vibrante:

$$u_{tt}(x, t) = 4u_{xx}(x, t), \text{ para } 0 < x < 1 \text{ y } 0 < t < 0.5 \quad (4.22)$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad u(1, t) = 0 & \text{ para } 0 \leq t \leq 0.5 \\ u(x, 0) = f(x) = \text{sen}(\pi x) & \text{ para } 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x, 0) = g(x) = 0 & \text{ para } 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Para  $n = 11$ , entonces  $h = \frac{1-0}{11-1} = 0.1$  y  $m = 21$  entonces  $k = \frac{1-0}{21-1} = 0.05$ . Puesto que  $c = 2$ , entonces  $r = ck/h = 2(0.05)/0.1 = 1$ . Como  $g(x) = 0$  y  $r = 1$ , reemplazando en la fórmula (4.21) para calcular los valores de la segunda fila

$$u_{i,1} = \frac{f_{i-1} + f_{i+1}}{2} \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, 9 \quad (4.24)$$

Sustituyendo  $r = 1$  en la ecuación (4.13) se obtiene la ecuación en diferencias,

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1} \quad (4.25)$$

Usando las fórmulas dadas en (4.24) y, sucesivamente, en (4.25) se generan las aproximaciones a los valores  $u(x, t)$  que están en la Tabla 3 para  $0 < x_i < 1$  y  $0 \leq t_j \leq 0.50$ .



Para calcular los valores de la primera fila, con la condición de contorno

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

y la condición inicial

$$u(x, 0) = \text{sen}(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \text{y} \quad u_t(x, 0) = 0$$

que indica el valor inicial al desplazarse  $x$ , es decir, para  $j = 0$ , se tiene

$$u_{i,0} = f_i = \text{sen}(\pi x_i)$$

los valores de  $u_{i,0}$ , para  $i = 1, \dots, 9$ , se tienen, para la primera fila

$$u(x_1, 0) = u_{1,0} = \text{sen}(\pi \times 0.1) = 0.309017$$

$$u(x_2, 0) = u_{2,0} = \text{sen}(\pi \times 0.2) = 0.587785$$

$$u(x_3, 0) = u_{3,0} = \text{sen}(\pi \times 0.3) = 0.809017$$

$$u(x_4, 0) = u_{4,0} = \text{sen}(\pi \times 0.4) = 0.951057$$

$$u(x_5, 0) = u_{5,0} = \text{sen}(\pi \times 0.5) = 1.000000$$

$$u(x_6, 0) = u_{6,0} = \text{sen}(\pi \times 0.6) = 0.951056$$

$$u(x_7, 0) = u_{7,0} = \text{sen}(\pi \times 0.7) = 0.809017$$

$$u(x_8, 0) = u_{8,0} = \text{sen}(\pi \times 0.8) = 0.587785$$

$$u(x_9, 0) = u_{9,0} = \text{sen}(\pi \times 0.9) = 0.309017$$



Para los valores de la segunda fila, usando la ecuación (4.24), o sea,

$$u_{i,1} = \frac{f_{i-1} + f_{i+1}}{2}$$

$$\begin{aligned}u(x_1, 1) = u_{1,1} &= \frac{f_0 + f_2}{2} = 0.293893 \\u(x_2, 1) = u_{2,1} &= \frac{f_1 + f_3}{2} = 0.559017 \\u(x_3, 1) = u_{3,1} &= \frac{f_2 + f_4}{2} = 0.769421 \\u(x_4, 1) = u_{4,1} &= \frac{f_3 + f_5}{2} = 0.904509 \\u(x_5, 1) = u_{5,1} &= \frac{f_4 + f_6}{2} = 0.951057 \\u(x_6, 1) = u_{6,1} &= \frac{f_5 + f_7}{2} = 0.904509 \\u(x_7, 1) = u_{7,1} &= \frac{f_6 + f_8}{2} = 0.769421 \\u(x_8, 1) = u_{8,1} &= \frac{f_7 + f_9}{2} = 0.559017 \\u(x_9, 1) = u_{9,1} &= \frac{f_8 + f_{10}}{2} = 0.293893\end{aligned}$$

Para el resto de filas, se tienen

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}$$

Para  $j = 1$

$$u_{i,2} = u_{i+1,1} + u_{i-1,1} - u_{i,0}$$



de donde

$$\begin{aligned}u_{1,2} &= u_{2,1} + u_{0,1} - u_{1,0} \\ &= 0.559017 + 0 - 0.309017 \\ &= 0.181636\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{2,2} &= u_{3,1} + u_{1,1} - u_{2,0} \\ &= 0.769721 + 0.293893 - 0.587785 \\ &= 0.345492\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{3,2} &= u_{4,1} + u_{2,1} - u_{3,0} \\ &= 0.904509 + 0.559017 - 0.809017 \\ &= 0.475528\end{aligned}$$

⋮

Los resultados se muestran en la tabla 3.

**Tabla 3***Muestra las soluciones de la EDP (4.22) pág 66*

$t_j$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_3$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$
0	0.309017	0.587785	0.809017	0.951057	1.000000	0.951057	0.809017	0.587785	0.309017
0.05	0.293891	0.559017	0.769421	0.904508	0.951057	0.904508	0.769421	0.559017	0.293893
0.1	0.250000	0.475528	0.654508	0.769421	0.809017	0.769421	0.654508	0.475528	0.250000
0.15	0.181636	0.345492	0.475528	0.559017	0.587785	0.559017	0.475528	0.345492	0.181636
0.2	0.095492	0.181636	0.250000	0.293893	0.309017	0.293893	0.250000	0.181636	0.095492
0.25	0	-0.000000	0	0	0.000000	0	-0.000000	0.000000	0
0.3	-0.095492	-0.181636	-0.250000	-0.293893	-0.309017	-0.293893	-0.250000	-0.181636	-0.095492
0.35	-0.181636	-0.345492	-0.475528	-0.559017	-0.587785	-0.559017	-0.475528	-0.345492	-0.181636
0.4	-0.250000	-0.475528	-0.654508	-0.769421	-0.809017	-0.769421	-0.654508	-0.475528	-0.250000
0.45	-0.293893	-0.559017	-0.769421	-0.904508	-0.951057	-0.904508	-0.769421	-0.559017	-0.293893
0.5	-0.309017	-0.587785	-0.809017	-0.951057	-1.000000	-0.951057	-0.809017	-0.587785	-0.309017

### 4.3. RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA ONDA EN MATLAB

```
function U=finedif(f, g, a, b, c, n, m)
```

```
% Resuelve numericamente la ecuacion de ondas
```

```
mediante diferencias finitas.
```

```
% Datos de entrada
```

```
% -f=u(x, 0) la condicion inicial u(x,0) como una cadena de  
caracteres 'f'
```

```
% - g=ut(x,0) la condicion de contorno dada como cadena de  
caracteres 'g'
```

```
% - a y b son limites superiores de [0,a] y [0,b]
```



```
% - c : la constante de la ecuacion de la onda
% - n y m   el numero de nodos en los intervalo [0,a] y [0,b]
% Y devuelve la matriz U, que contiene la solucion numerica
    en una tabla similar a una matriz.
% Inicializacion de los parametros y de U
h=a/(n-1);
k=b/(m-1);
r=c*k/h;
r2=r^2;
r22=r^2/2;
s1=1-r^2;
U=zeros(n,m);
% Calculo de las dos primeras filas
for i=2:n-1
U(i,1)=feval(f,h*(i-1));
U(i,2)=s1*feval(f,h*(i-1))+k*feval(g,h*(i-1))
        +r22*(feval(f,h*i)+feval(f,h*(i-2)));
end
% Calculo de las demas filas
for j=3:m,
for i=2:(n-1),
U(i,j) = s2*U(i,j-1)+r2*(U(i-1,j-1)-U(i,j-2));
end
end
U=U';
```



surf (U)

Para compilar en MATLAB, en la ventana principal, se declara los valores de  $f = \text{sen}(\pi x)$ ,

$g = 0$ ,  $a = 1$ ,  $b = 0.5$ ,  $c = 2$ ,  $n = 11$  y  $m = 11$ , de la siguiente forma:

```
>> format long  
>> f=@(x) sin(pi*x);  
>> g=@(x) 0;  
>> finedif(f,g,1,0.5,2,11,11)
```



**Tabla 4**

*Datos obtenidos con el programa MATLAB*

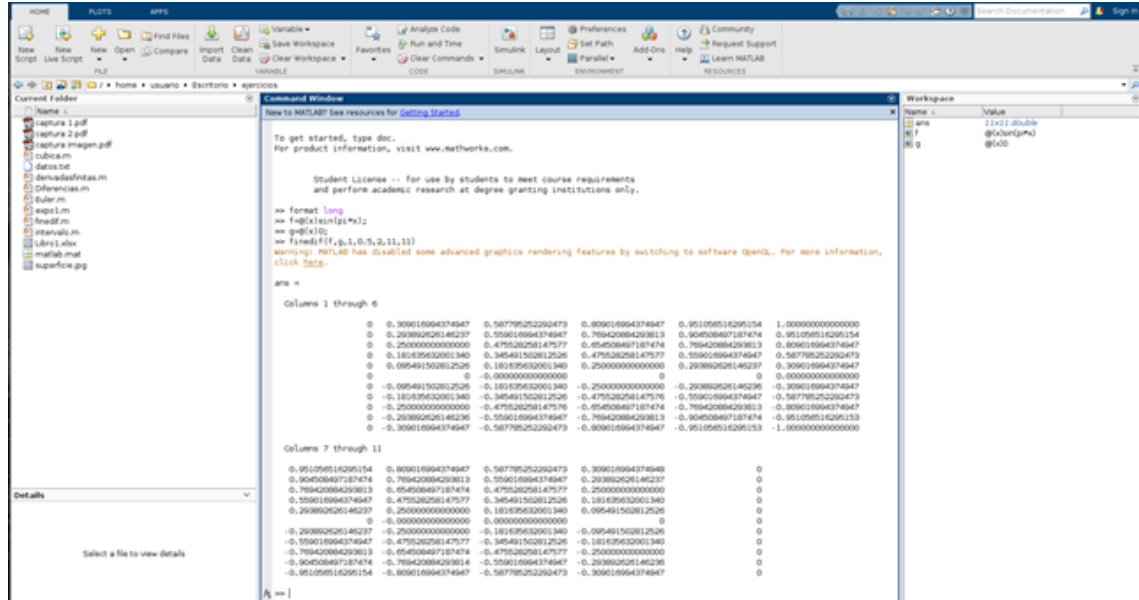
Columns	1	through	6
0	0.309016994374947	0.587785252292473	0.809016994374947 0.951056516295154 1.000.000.000.000.000
0	0.293892626146237	0.559016994374947	0.769420884293813 0.904508497187474 0.951056516295154
0	0.250000000000000	0.475528258147577	0.654508497187474 0.769420884293813 0.809016994374947
0	0.181635632001340	0.345491502812526	0.475528258147577 0.559016994374947 0.587785252292473
0	0.095491502812526	0.181635632001340	0.250000000000000 0.293892626146237 0.309016994374947
0	0	-0.000000000000000	0 0 0.000000000000000
0	-0.095491502812526	-0.181635632001340	-0.250000000000000 -0.293892626146236 -0.309016994374947
0	-0.181635632001340	-0.345491502812526	-0.475528258147576 -0.559016994374947 -0.587785252292473
0	-0.250000000000000	-0.475528258147576	-0.654508497187474 -0.769420884293813 -0.809016994374947
0	-0.293892626146236	-0.559016994374947	-0.769420884293813 -0.904508497187474 -0.951056516295153
0	-0.309016994374947	-0.587785252292473	-0.809016994374947 -0.951056516295153 -1.000.000.000.000.000

Columns	7	through	11
0.951056516295154	0.809016994374947	0.587785252292473	0.309016994374948
0.904508497187474	0.769420884293813	0.559016994374947	0.293892626146237
0.769420884293813	0.654508497187474	0.475528258147577	0.250000000000000
0.559016994374947	0.475528258147577	0.345491502812526	0.181635632001340
0.293892626146237	0.250000000000000	0.181635632001340	0.095491502812526
0	-0.000000000000000	0.000000000000000	0
-0.293892626146237	-0.250000000000000	-0.181635632001340	-0.095491502812526
-0.559016994374947	-0.475528258147577	-0.345491502812526	-0.181635632001340
-0.769420884293813	-0.654508497187474	-0.475528258147577	-0.250000000000000
-0.904508497187474	-0.769420884293814	-0.559016994374947	-0.293892626146236
-0.951056516295154	-0.809016994374947	-0.587785252292473	-0.309016994374947

Los datos obtenidos en MATLAB fueron tomados en el Laboratorio de Cómputo de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas el cual cuenta con licencia de MATLAB, y se tomaron las capturas necesarias.

## Figura 14

Captura de pantalla del programa MATLAB tomada en el Laboratorio de Cómputo de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas

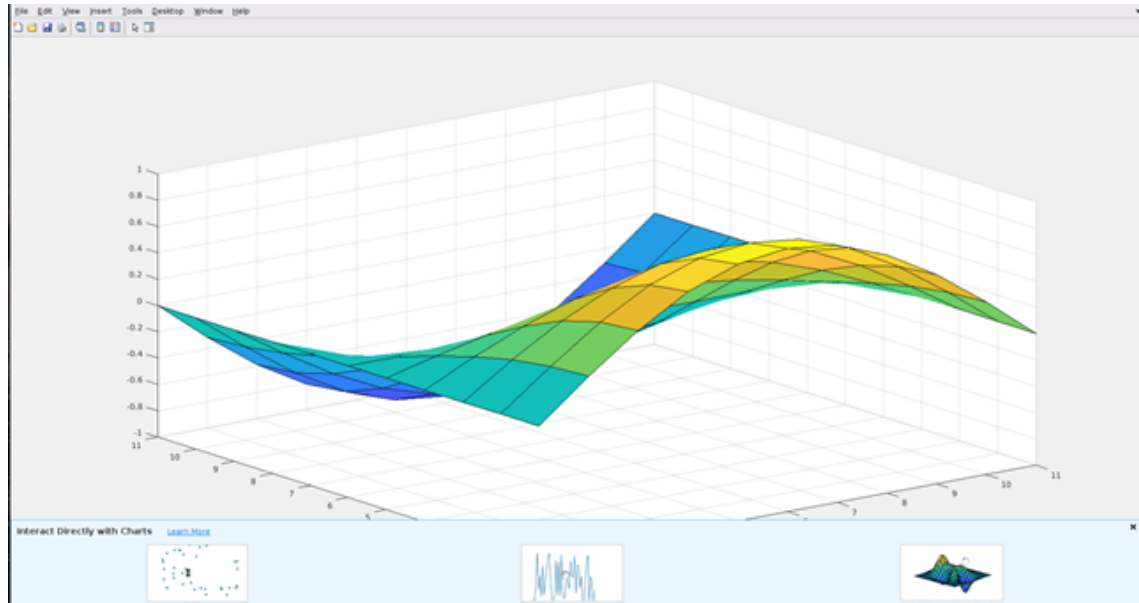


Los datos coinciden con los de la tabla 3, y su gráfica generada por MATLAB, es la siguiente

## Figura 15

*Representación gráfica de las soluciones para la ecuación de ondas generada en MATLAB.*

*Captura de pantalla tomada en el Laboratorio de Cómputo de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas*





## V. CONCLUSIONES

Las conclusiones del presente trabajo de investigación son las siguientes:

- Se ha estudiado las ecuaciones diferenciales parciales y su solución mediante diferencias finitas. La cual ha permitido determinar la solución numérica de una ecuación diferencial parcial de tipo hiperbólico de una dimensión en ecuaciones diferenciales de la onda.
- Se analizó las ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico de una dimensión y el método de diferencias finitas para resolver diferenciación y ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Se obtuvo la solución mediante las diferencias finitas de la ecuación de la onda de una dimensión y los datos se muestran en la Tabla 3.
- Considerando la ecuación diferencial parcial tipo hiperbólico, de la onda en una dimensión, se realizaron simulaciones utilizando el software MATLAB.



## VI. RECOMENDACIONES

Las recomendaciones del presente trabajo de investigación son las siguientes:

- En esta investigación se aplicó el método de las diferencias finitas para resolver una ecuación diferencial parcial tipo hiperbólico en una dimensión. Se recomienda estudiar bajo el mismo análisis la solución de ecuaciones en dimensiones mayores.
- Se recomienda estudiar ecuaciones diferenciales parciales utilizando el método de las diferencias finitas y modelar en softwares como MATLAB u otros, para tener soluciones con más precisión.
- Se puede aplicar otras técnicas de aplicación como variables aleatorias.



## VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arnold, V. I. (2004). *Lectures on partial differential equations*. Springer.
- Burden, R. L., & Faires, J. (2002). *Análisis numérico. 7aed. México, Thomson Learning.*  
839p.
- Evans, L. C. (2022). *Partial differential equations* (Vol. 19). American Mathematical Society.
- Farlow, S. J. (1993). *Partial differential equations for scientists and engineers*. Courier Corporation.
- Ferragut Canals, L., et al. (2021). *Análisis numérico del método de diferencias finitas para ecuaciones en derivadas parciales*.
- Garza, G. L., & Ortiz, F. H. M. (2013). *Ecuaciones diferenciales parciales*.
- Giordano, C. M. (2016). *Ecuaciones diferenciales parciales. Series: Libros de Cátedra*.
- Jiménez Bedolla, J. C. (2022). *Métodos numéricos usando Python*.
- Jost, J. (2012). *Partial differential equations* (Vol. 214). Springer Science & Business Media.
- LeVeque, R. J. (2014). *Finite difference methods for ordinary and partial differentialequations: steady-state and time-dependent problems*. SIAM.
- Lima, E. L. (2004). *Análise real, vol. 1. Publicações IMPA*.
- Logan, J. D. (2014). *Applied partial differential equations*. Springer.
- Mathews, J., & Fink, K. (s.f.). *Métodos numéricos con Matlab, 2000*.
- Mijailov, V. (1982). *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*. Mir.
- Valéria Iório, E. (1989). *um Curso de Graduação. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada*.
- Zill, D. G., El-Iraki, A., Hernández, A. E. G., & López, E. F. (2018). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Cengage Learning.



Zwillinger, D., & Dobrushkin, V. (2021). *Handbook of differential equations*. CRC Press.





## ANEXOS

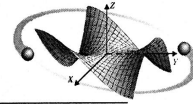
### ANEXO 1:

#### Figura 16

#### *Constancia de Laboratorio de Cómputo*



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO-PUNO  
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL Y ARQUITECTURA  
DIRECCIÓN DE LA E.P. CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
Coordinación de Laboratorio de Cómputo EPCFM.



### CONSTANCIA

EL QUE SUSCRIBE, COORDINADOR DE LABORATORIO DE CÓMPUTO DE LA ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO-PUNO.

#### HACE CONSTAR:

Que, el Señor **ROGER AÑACATA MAMANI**, identificado con DNI. N° 40877866 egresado de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas - Programa de Estudios Ciencias Físico Matemáticas: MATEMATICAS, ha hecho uso de Laboratorio de Cómputo, se otorga el presente documento para fines de adjuntar en su Proyecto de su Tesis.

Puno, C.U., 12 de Julio del 2024.

  
  
Dr. Richar M. Robinson Chura  
COORDINADOR DE LABORATORIO DE CÓMPUTO  
UNA PUNO

C.c.  
Arch. "2024"  
RMMCH/ocf.-



### DECLARACIÓN JURADA DE AUTENTICIDAD DE TESIS

Por el presente documento, Yo Roger Añacata Mamani  
identificado con DNI 40877866 en mi condición de egresado de:

Escuela Profesional,  Programa de Segunda Especialidad,  Programa de Maestría o Doctorado  
Ciencias Físico Matemáticas

informo que he elaborado el/la  Tesis o  Trabajo de Investigación denominada:  
" Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales de tipo  
hiperbólico de una dimensión, mediante diferencias  
finitas en la ecuación de onda. "

Es un tema original.

Declaro que el presente trabajo de tesis es elaborado por mi persona y **no existe plagio/copia** de ninguna naturaleza, en especial de otro documento de investigación (tesis, revista, texto, congreso, o similar) presentado por persona natural o jurídica alguna ante instituciones académicas, profesionales, de investigación o similares, en el país o en el extranjero.

Dejo constancia que las citas de otros autores han sido debidamente identificadas en el trabajo de investigación, por lo que no asumiré como tuyas las opiniones vertidas por terceros, ya sea de fuentes encontradas en medios escritos, digitales o Internet.

Asimismo, ratifico que soy plenamente consciente de todo el contenido de la tesis y asumo la responsabilidad de cualquier error u omisión en el documento, así como de las connotaciones éticas y legales involucradas.

En caso de incumplimiento de esta declaración, me someto a las disposiciones legales vigentes y a las sanciones correspondientes de igual forma me someto a las sanciones establecidas en las Directivas y otras normas internas, así como las que me alcancen del Código Civil y Normas Legales conexas por el incumplimiento del presente compromiso

Puno 17 de setiembre del 2024

FIRMA (obligatoria)



Huella



### AUTORIZACIÓN PARA EL DEPÓSITO DE TESIS O TRABAJO DE INVESTIGACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL

Por el presente documento, Yo Roger Añacata Mamani  
identificado con DNI 40877866 en mi condición de egresado de:

Escuela Profesional,  Programa de Segunda Especialidad,  Programa de Maestría o Doctorado  
Ciencias Físico Matemáticas

informo que he elaborado el/la  Tesis o  Trabajo de Investigación denominada:

“ Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales de tipo  
hiperbólico de una dimensión, mediante diferencias  
finitas en la ecuación de onda. ”

para la obtención de  Grado,  Título Profesional o  Segunda Especialidad.

Por medio del presente documento, afirmo y garantizo ser el legítimo, único y exclusivo titular de todos los derechos de propiedad intelectual sobre los documentos arriba mencionados, las obras, los contenidos, los productos y/o las creaciones en general (en adelante, los “Contenidos”) que serán incluidos en el repositorio institucional de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno.

También, doy seguridad de que los contenidos entregados se encuentran libres de toda contraseña, restricción o medida tecnológica de protección, con la finalidad de permitir que se puedan leer, descargar, reproducir, distribuir, imprimir, buscar y enlazar los textos completos, sin limitación alguna.

Autorizo a la Universidad Nacional del Altiplano de Puno a publicar los Contenidos en el Repositorio Institucional y, en consecuencia, en el Repositorio Nacional Digital de Ciencia, Tecnología e Innovación de Acceso Abierto, sobre la base de lo establecido en la Ley N° 30035, sus normas reglamentarias, modificatorias, sustitutorias y conexas, y de acuerdo con las políticas de acceso abierto que la Universidad aplique en relación con sus Repositorios Institucionales. Autorizo expresamente toda consulta y uso de los Contenidos, por parte de cualquier persona, por el tiempo de duración de los derechos patrimoniales de autor y derechos conexos, a título gratuito y a nivel mundial.

En consecuencia, la Universidad tendrá la posibilidad de divulgar y difundir los Contenidos, de manera total o parcial, sin limitación alguna y sin derecho a pago de contraprestación, remuneración ni regalía alguna a favor mío; en los medios, canales y plataformas que la Universidad y/o el Estado de la República del Perú determinen, a nivel mundial, sin restricción geográfica alguna y de manera indefinida, pudiendo crear y/o extraer los metadatos sobre los Contenidos, e incluir los Contenidos en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.

Autorizo que los Contenidos sean puestos a disposición del público a través de la siguiente licencia:

Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visita: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

En señal de conformidad, suscribo el presente documento.

Puno 17 de setiembre del 20 24

FIRMA (obligatoria)



Huella