

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO – PUNO
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y
SISTEMAS
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA



**“DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROLADOR
ADAPTATIVO AUTOSINTONIZADO PARA EL CONTROL
DE UN PÉNDULO TRIPLE”**

TESIS

PRESENTADO POR:
WILSON BETO MENDOZA CCOA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
INGENIERO ELECTRÓNICO

PUNO – PERÚ
2013

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO PUNO

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y SISTEMAS

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROLADOR ADAPTATIVO
AUTOSINTONIZADO PARA EL CONTROL DE UN PÉNDULO TRIPLE

TESIS PRESENTADA POR:

Wilson Beto Mendoza Ccoa

PARA OPTAR EL TÍTULO DE:

INGENIERO ELECTRÓNICO

Aprobada por el jurado revisor, conformado por:

PRESIDENTE


Mg. Ing. Midwar Elías Valencia Vilca

PRIMER MIEMBRO


M.Sc. Ing. David Salinas Mendoza

SEGUNDO MIEMBRO


Ing. Edwin Wilber Chambi Mamani

DIRECTOR


Mg. Ing. Marco Antonio Quispe Barra

ASESOR


M.Sc. Ing. Pedro Bejar Muñoz

PUNO – PERÚ

2013

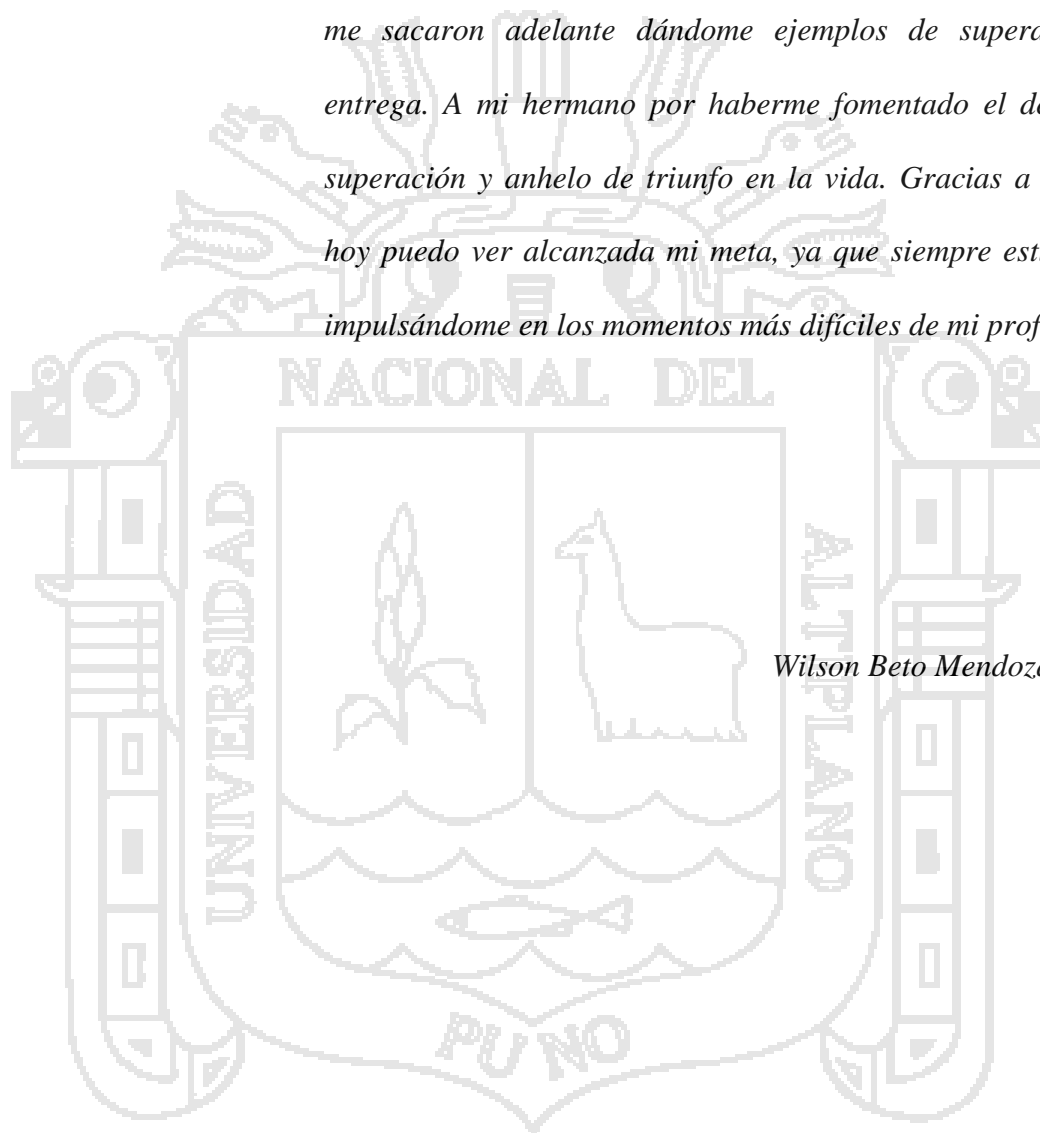
ÁREA: Automatización e instrumentación

TEMA: Instrumentación y control de procesos

DEDICATORIA

A Dios por haberme dado la vida y permitirme haber llegado hasta este momento tan importante de mi formación profesional .A mis padres porque siempre confiaron en mí y me sacaron adelante dándome ejemplos de superación y entrega. A mi hermano por haberme fomentado el deseo de superación y anhelo de triunfo en la vida. Gracias a ustedes hoy puedo ver alcanzada mi meta, ya que siempre estuvieron impulsándome en los momentos más difíciles de mi profesión.

Wilson Beto Mendoza Ccoa.



AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por protegerme durante todo mi camino y darme fuerzas para superar obstáculos y dificultades a lo largo de toda mi vida.

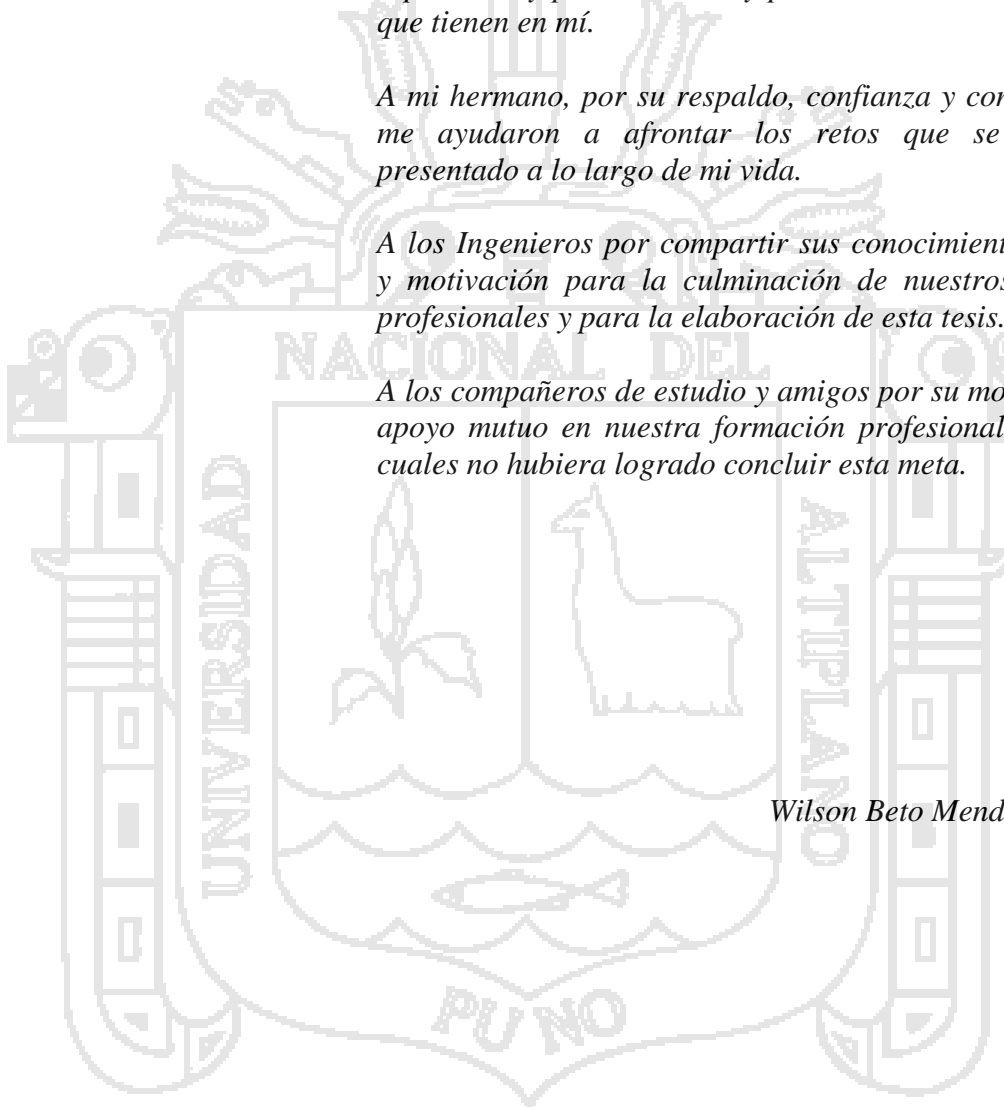
A mis padres por su demostración constante de superación y perseverancia y por demostrarme la gran fe que tienen en mí.

A mi hermano, por su respaldo, confianza y consejos que me ayudaron a afrontar los retos que se me han presentado a lo largo de mi vida.

A los Ingenieros por compartir sus conocimientos, apoyo y motivación para la culminación de nuestros estudios profesionales y para la elaboración de esta tesis.

A los compañeros de estudio y amigos por su motivación y apoyo mutuo en nuestra formación profesional y sin los cuales no hubiera logrado concluir esta meta.

Wilson Beto Mendoza Ccoa.



ÍNDICE

Índice de Figuras.....	i
Índice de Cuadros	iv
Nomenclatura.....	v
Resumen	vi
Abstract.....	vii
Introducción.....	viii

CAPÍTULO I

1. PLANTEAMIENTO Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

1.1 Descripción del Problema	1
1.2 Formulación del Problema.....	2
1.3 Antecedentes de Investigación.....	2
1.4 Justificación	5
1.5 Objetivos de la Investigación.....	6
1.5.1 Objetivo General	6
1.5.2 Objetivos Específicos	6
1.6 Hipótesis.....	6
1.6.1 Hipótesis General	6
1.6.2 Hipótesis Específicas.....	6
1.7 Operacionalización de Variables	7
1.7.1 Variable Dependiente	7
1.7.2 Variables Independientes	7
1.8 Limitaciones de la Investigación.....	7

CAPÍTULO II

2 FUNDAMENTO TEÓRICO

2.1 Sistemas de Control Automático.	8
2.1.1 Tipos de Sistemas de Control	9
2.1.1.1 Sistemas de control en lazo abierto.....	9
2.1.1.2 Sistemas de control en lazo cerrado.....	11

2.2 Control Digital	14
2.2.1 Función de transferencia pulso	15
2.2.2 Modelo en el espacio de estados	15
2.2.3 Representación en el espacio de estados de sistemas en tiempo discreto.....	16
2.2.4 Discretización de las ecuaciones en espacio de estados en tiempo continuo	18
2.3 Control Adaptativo.....	19
2.3.1 Programación de Ganancias	20
2.3.2 Control Adaptativo por Modelo de referencia.....	21
2.3.2.1. Enfoque de sensibilidad.....	22
2.3.2.2. Método de Lyapunov	23
2.3.2.3. Método de Hiperestabilidad	24
2.3.3 Regulador autoajutable	25
2.3.3.1 Asignación de polos y ceros	28
2.3.3.2 Predicción Optima	30
2.3.3.3 Regulación de mínima varianza	32
2.3.3.4 Control predictivo generalizado.....	33
2.4 Identificación de Sistemas	34
2.4.1 Modelo ARX	34
2.4.2 Procedimiento de identificación de sistemas.....	35
2.4.3 Validación del modelo	36
2.4.4 El bucle de identificación de sistemas	37
2.4.5 Métodos recursivos de estimacion de parámetros	38
2.4.6 El algoritmo de los mínimos cuadrados recursivos.....	39
2.4.6.1 Algoritmo recursivo	39
2.4.6.2 Matriz de inversión eficiente	40
2.4.6.3 Caso multivariable	41
2.5 Mecánica analítica de Euler - Lagrange - Hamilton	41
2.5.1 Sistemas con ligaduras	42
2.5.1.1 Ligaduras holónomas	43
2.5.1.2 Ligaduras no holónomas.....	43

2.5.2	Coordenadas generalizadas	44
2.5.3	El principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas	47
2.5.4	Ecuaciones de Lagrange	48

CAPÍTULO III

3 MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

3.1	Tipo y Diseño de Investigación	50
3.1.1	Tipo de Investigación	50
3.1.2	Nivel de Investigación.....	51
3.1.3	Diseño de Investigación	52
3.1.4	Tema de Investigación.....	52
3.2	Técnicas e instrumentos de recolección de datos.....	52
3.3	Fases de la Investigación.....	53
3.4	Condiciones de Prueba y Evaluación del Sistema	54
3.5	Ámbito de Estudio	55
3.6	Recursos.....	56
3.6.1	Recursos Humanos	56
3.6.2	Recursos Materiales	56
3.7	Financiamiento del Proyecto.....	57

CAPÍTULO IV

4 EXPOSICIÓN, DISEÑO Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1	Generalidades.....	61
4.2	Modelamiento matemático del péndulo triple	61
4.2.1	Modelamiento matemático del subsistema carro – péndulo triple	61
4.2.2	Modelamiento matemático del subsistema Motor - Polea	67
4.2.3	Modelamiento matemático en MATLAB	70
4.2.4	Variables y parámetros del proceso	74
4.2.5	Linealización del sistema	75
4.2.6	Modelo en espacio de estado discreto	77

4.3 Estimador de parámetros del Proceso.	78
4.3.1 Pasos para la estimación en Matlab.....	80
4.4 Diseño del controlador Adaptativo	82
4.4.1 Diseño del controlador en Matlab	85
4.4.2 Respuestas Gráficas.....	86
4.4.3 Prueba de la adaptabilidad del controlador	89
4.4.4 Diseño del observador de estados.....	92
4.4.4.1 Diseño del observador de estados en Matlab.....	94
4.4.5 Simulación en Simulink	97
4.4.6 Programa completo del controlador Adaptativo	107
4.5 Diseño del sistema mecánico del péndulo triple	114
4.6 Diseño electrónico del controlador	117
4.7 Diseño del software de control	121
4.7.1 Interfaz de usuario	121
4.7.2 Comunicación entre LabVIEW y PIC.....	125
4.7.3 Programación del PIC 18F4550	129
4.8 Resultados de la investigación	136
Prueba 1: Correcciones en el hardware y software	138
Prueba 2: Mejora del diseño del controlador – observador.....	139
Prueba 3: Probando la adaptabilidad del controlador diseñado	139
4.8.1 Resultados finales del controlador	140
4.8.2 Comparación del controlador adaptativo frente a otro control.....	141
4.8.3 Diferencias entre modelo completo no lineal y modelo Linealizado.	144
4.9 Validación de Hipótesis	147
CONCLUSIONES	149
RECOMENDACIONES	151
REFERENCIAS BIBLIOGRAFÍAS	152
ANEXOS	154
GLOSARIO DE TÉRMINOS	169

ÍNDICE DE FIGURAS

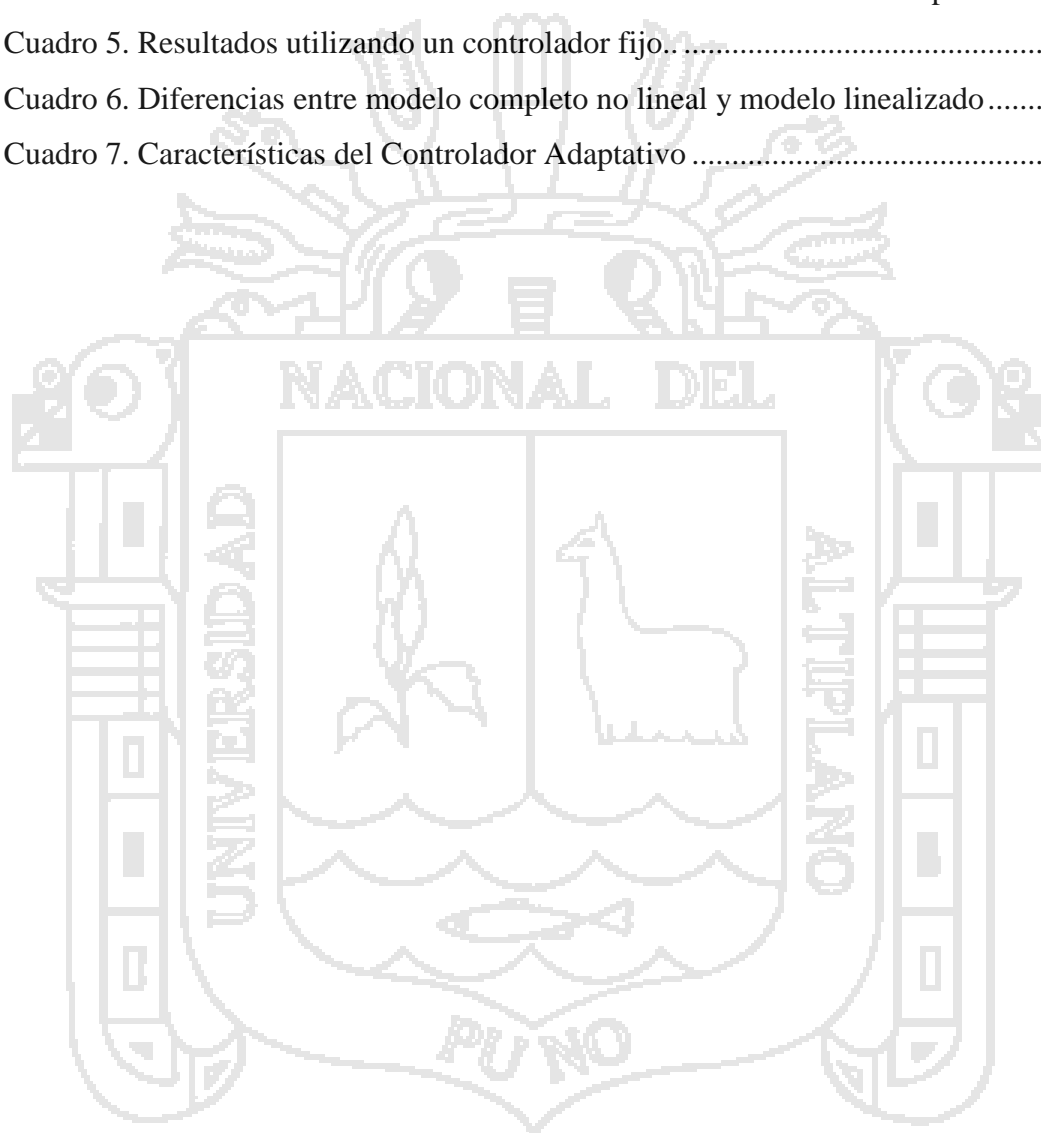
Figura 1. Sistema de Control en lazo abierto.....	9
Figura 2. Sistema de Control en lazo abierto con actuador.	9
Figura 3. Sistema de Control en lazo abierto para el alumbrado público.....	10
Figura 4. Sistema de Control en lazo cerrado.....	11
Figura 5. Sistema de Control en lazo cerrado realimentado con un captador	12
Figura 6. Sistema de control en tiempo continuo.	14
Figura 7. Sistema de control digital.....	15
Figura 8. Configuración básica del control Adaptivo.....	20
Figura 9. Sistema de programación de ganancias.....	20
Figura 10. Esquema del MRAC.....	21
Figura 11. Esquema del STR.....	25
Figura 12 Estructura de control por asignación de polos y ceros.....	28
Figura 13. Interpretación como modelo de referencia.....	30
Figura 14. El bucle de identificación de sistemas.....	38
Figura 15. El método adaptativo.....	39
Figura 16. El movimiento del sólido articulado	45
Figura 17. Subsistema carro – péndulo triple.....	61
Figura 18. Subsistema motor polea.....	67
Figura 19. Identificación de parámetros.....	81
Figura 20. Estructura del sistema de control Adaptativo del Péndulo Triple.....	82
Figura 21. Respuestas del sistema Péndulo Triple	86
Figura 22. Posición y velocidad lineal del carro	87
Figura 23. Posición y velocidad angular de la primera varilla.....	87
Figura 24. Posición y velocidad angular de la segunda varilla.....	87
Figura 25. Posición y velocidad angular de la tercera varilla.....	88
Figura 26. Acción integral y señal de control $u(k)$	88
Figura 27. Estimador de parámetros.....	89
Figura 28. Sistema lineal variable con control Adaptativo (carro).....	89
Figura 29. Sistema lineal variable con control Adaptativo (péndulo 1).....	90

Figura 30. Sistema lineal variable con control Adaptativo (péndulo 2).	90
Figura 31. Sistema lineal variable con control Adaptativo (péndulo 3).	91
Figura 32. Sistema lineal variable con control Adaptativo(control).....	91
Figura 33. Sistema de regulación con observador de estados.....	92
Figura 34. Simulación del sistema de control adaptativo usando Simulink de Matlab... ..	97
Figura 35. Modelo no lineal del Péndulo Triple.	97
Figura 36. Identificador del sistema.	100
Figura 37. Diseño del controlador.	102
Figura 38. Respuestas del controlador Adaptativo a una entrada variable.	104
Figura 39. Sistema lineal variable con control Adaptativo (péndulo 1).	105
Figura 40. Sistema lineal variable con control Adaptativo (péndulo 2).	105
Figura 41. Sistema lineal variable con control Adaptativo (péndulo 3).	105
Figura 42. Sistema lineal variable con control Adaptativo (control).....	106
Figura 43. Cantidad y tiempos en que varían los parámetros	106
Figura 44. Estimador de parámetros	107
Figura 45. Diseño mecánico del Péndulo Triple (vista frontal)	114
Figura 46. Diseño mecánico del Péndulo Triple (vista superior).	115
Figura 47. Sistema mecánico del Péndulo Triple.	116
Figura 48. Fuente de alimentación para el controlador	117
Figura 49. Fuente de alimentación para el driver de potencia	117
Figura 50. Controlador del sistema, compuesto por los PIC16F877, PIC 18F4550 y enlazado vía el puerto USB con el LabVIEW 2012	118
Figure 51. Circuito equivalente del driver STK 6875 de SANYO.....	119
Figura 52. Etapa de potencia.....	119
Figura 53. Circuito electrónico de control del péndulo triple.....	120
Figure 54. Ventana principal de la interfaz de usuario	121
Figura 55. Variables y Dinámica del sistema	122
Figura 56. Estructura del Controlador Adaptativo	122
Figure 57. Diagrama de bloque del Controlador Adaptativo autosintonizado para controlar el péndulo triple.....	123
Figura 58. Diagrama de bloques para el modelo lineal en tiempo continuo y discreto..	124
Figura 59. Diagrama de bloque para la ley de control.....	124

Figura 60. Diagrama de bloque para la comunicación entre LabVIEW y el PIC.....	125
Figura 61. Diagrama de bloque para el MPUSBGETDEVICECOUNT del mpusbapi.dll	126
Figura 62. Configuración de parámetros para el MPUSBGETDEVICECOUNT del mpusbapi.dll	126
Figura 63. Diagrama de bloque para el MPUSBREAD del mpusbapi.dll	127
Figura 64. Configuración de parámetros para el MPUSBREAD del mpusbapi.dll	127
Figura 65. Diagrama de bloque para el MPUSBWRITE del mpusbapi.dll	128
Figura 66. Configuración de parámetros para el MPUSBWRITE del mpusbapi.dll ..	128
Figura 67. Compilación del programa en PICC	132
Figura 68. Grabador PICKIT 2 de Microchip.....	132
Figura 69. Programación del PIC usando PICKIT 2 de Microchip.....	133
Figura 70. Conexión del PIC 18F4550 a la PC.....	133
Figura 71. Instalación del Driver mchpushb	134
Figura 72. Instalación del software de control	135
Figura 73. Instalación exitosa del driver para la comunicación entre PIC y PC	135
Figura 74. Reconocimiento de la DAQ	136
Figura 75. Respuesta del controlador Adaptativo frente a una señal de entrada variable.....	137
Figura 76. Evolución temporal de los ángulos frente a una señal de entrada variable .	137
Figura 77. Controlador fijo : PI óptimo cuadrático	141
Figura 78. Respuestas cuando los parámetros varían en 5%	142
Figura 79. Respuestas cuando los parámetros varían en 50%	142
Figura 80. Respuesta cuando se incremento 500 gr a la varilla 3.....	143
Figura 81. Respuesta cuando se incremento 1000 gr a la varilla 3.....	143
Figura 82. Simulación usando el modelo no lineal del péndulo triple.	144
Figura 83. Simulación usando el modelo linealizado del péndulo triple.....	145
Figura 84. Error entre la posición.	145
Figura 85. Error entre los ángulos.	146
Figura 86. Error entre las velocidades	146

ÍNDICE DE CUADROS

Cuadro 1. Técnicas e instrumentos de recolección de datos.....	52
Cuadro 2. Financiamiento de la Investigación.....	58
Cuadro 3. Variables y parámetros del Péndulo Triple.	74
Cuadro 4. Cuadro de resultados obtenidos utilizando el Controlador Adaptativo..	140
Cuadro 5. Resultados utilizando un controlador fijo.....	144
Cuadro 6. Diferencias entre modelo completo no lineal y modelo linealizado.....	147
Cuadro 7. Características del Controlador Adaptativo.....	147



NOMENCLATURA

ARMA	Modelo autoregresivo de media móvil
ARMAX	Modelo autoregresivo de media móvil con entrada externa
ARX	Modelo autoregresivo con entrada externa
BJ	Estructura Box - Jenkins
DC	Corriente Directa
GPC	Controlador Predictivo Generalizado
LabVIEW	Laboratory Virtual Instrumentation Engineering Workbench
LQR	Regulador cuadrático lineal
MATLAB	MATrix LABoratory
MCR	Mínimos cuadrados recursivos
MCRM	Mínimos cuadrados recursivos mejorados
MIMO	Sistema de múltiples entradas y múltiples salidas
MOSFET	Transistor de efecto de campo metal-óxido-semiconductor
MRAC	Controlador Adaptativo por modelo de referencia
PID	Controlador Proporcional Integral Derivativo
PIC	Controlador de interfaz periférico
PWM	Modulación por anchura de pulso
SISO	Sistema de una entrada y una salida
STR	Regulador Autoajustable
USB	Bus Serie Universal
VID&PID	Identificador de Vendedor y producto.
x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8	Variables de estado
uc	Señal de control

RESUMEN

El proyecto de investigación desarrollado propone diseñar e implementar un controlador adaptativo autosintonizado para controlar la estabilidad de un péndulo triple invertido lineal utilizando conocimientos de la ingeniería de control, electrónica analógica y digital, mecánica analítica y la programación.

Para modelar el sistema no se hizo uso de la mecánica clásica de Newton, sino se utilizó la mecánica analítica de Euler – LaGrange, como método de estimación de parámetros se empleó el método de los mínimos cuadrados recursivos mejorados, además se diseñó un observador de estados de orden mínimo para garantizar la realimentación de todos los estados, la ley de control utilizada fue un regulador proporcional integral óptimo cuadrático con realimentación de estados, las simulaciones se realizaron en el software de MATLAB®.

El sistema mecánico diseñado se construyó a base de aluminio, los sensores utilizados para la medición del desplazamiento del carro así como para los desplazamientos angulares de las varillas son potenciómetros, como elemento actuador se usó un motor DC de imán permanente de 24 voltios.

Se desarrolló un software en el programa LabVIEW 2012 para el monitoreo y control del péndulo triple, para la comunicación entre el sistema mecánico y el software de control se diseñó una tarjeta de adquisición y envío de datos con el PIC18F4550 de Microchip vía el puerto USB, además se empleó un PIC16F877 con la finalidad de compartir parte del algoritmo de control con el fin de minimizar el tiempo de retardo en el envío, recepción y procesamiento de datos.

Se comprobó la adaptabilidad del controlador diseñado frente a cambios en la dinámica del sistema, demostrando la eficacia del regulador adaptativo, además se realizó comparaciones entre el controlador diseñado y un controlador óptimo, se observó que un simple regulador óptimo no responde correctamente a medida que la dinámica del sistema varía del punto en el cual fue diseñado, de esta forma se demostró la ventaja de utilizar un control más inteligente frente a uno fijo, sin embargo los recursos computacionales requeridos son más elevados, por lo que se debe de tomar en cuenta al momento de diseñar un controlador para un sistema determinado.

ABSTRACT

The developed research project aims to design and implement an adaptive controller autotuning to control the stability of the triple inverted pendulum using knowledge of control engineering, analog and digital electronics, analytical mechanics and programming.

To model the system does not use classical mechanics of Newton, but we used the analytical mechanics of Euler - LaGrange, as parameter estimation method we used the recursive least squares algorithm, and it was designed a state observer to ensure every state feedback, the control law used was proportional integral optimal quadratic regulator with state feedback, simulations were performed in MATLAB ® software.

The mechanical system designed is constructed of aluminum, the sensors used for measuring the displacement of the car and rods are potentiometers, as actuator we used a permanent magnet DC motor of 24 volts.

Software was developed in LabVIEW 2012 for monitoring and control of the triple pendulum, for communication between the mechanical system and the control software it designed a data acquisition card with the PIC18F4550 by USB port, also used a PIC16F877 in order to share some of the control algorithm in order to minimize the time delay in the sending, receiving and processing data.

The adaptability of the controller designed was tested for changes in the system dynamics, demonstrating the effectiveness of the adaptive controller, I made comparisons between the controller designed and an optimal controller, was observed that a simple optimal regulator does not respond correctly as the system dynamics varies the point at which it was designed, thus demonstrated the benefit of using a more intelligent control against one fixed, however the computational resources needed are higher, so this should be taken into account when designing a controller for a given system.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad la mayoría de industrias combina el uso del control PID para el control básico de los procesos con el uso de técnicas de control predictivo basado en modelo para aplicaciones de control avanzado, sin embargo existe ausencia de un mecanismo de adaptación que permita a los controladores ajustarse a los cambios de la dinámica del proceso, por ello la disponibilidad de una solución de control adaptativo, capaz de operar de manera eficaz y robusta en entornos industriales y mejorar el rendimiento de control de los sistemas, por lo tanto, es de gran interés considerarlos por razones económicas y de seguridad en su aplicación en la industria.

Entre las últimas estrategias de control que buscan obtener un mejor rendimiento están aquellas que se basan en conocimientos de la inteligencia artificial, lógica difusa y últimamente el control adaptativo predictivo experto, en todas estas nuevas estrategias se toma gran interés en diseñar mecanismos de adaptación que sean capaces de responder adecuadamente frente a cambios dinámicos del proceso e incertidumbres no modeladas.

El control adaptativo se divide en tres grandes esquemas que son: La programación de ganancias o gain scheduling, por modelo de referencia y el regulador autoajustable, siendo este último capaz de estimar en línea los parámetros y estados del proceso, por tanto, debido a la gran importancia del control adaptativo y su mecanismo de adaptación, el presente proyecto de investigación busca diseñar e implementar un controlador adaptativo autoajustable aplicado a un proceso altamente no lineal e inestable con el fin de observar los beneficios de usar un control variable frente a uno fijo .

El sistema en el que se aplicará el controlador adaptativo autoajustable es el péndulo triple invertido, este proceso es altamente inestable y presenta características no lineales que los hacen idóneo para el estudio, las aplicaciones del péndulo triple se presentan en distintos campos de investigación como la robótica, la estabilización de misiles, estudios sobre vibraciones sísmicas entre otras.

El presente proyecto de investigación consta de seis capítulos, distribuidos de la siguiente manera:

El *CAPÍTULO I: Planteamiento y formulación del problema*; describe la problemática de estudio, se plantea las soluciones que se pueden alcanzar con la realización del proyecto, tomando como base, investigaciones ya hechas. Así mismo, se tiene la justificación respectiva de la ejecución del proyecto, sus objetivos, hipótesis y limitaciones correspondientes.

En el *CAPÍTULO II: Fundamento Teórico*; se tienen: los conceptos, enunciados, fórmulas, teoremas, etc., aplicados al estudio del tema de investigación de manera clara y precisa, en las áreas de: teoría de control analógico y digital, estrategias de los controladores adaptativos, métodos de estimación de parámetros y mecánica analítica.

El *CAPÍTULO III: Método de investigación*; detalla específicamente el tipo y diseño de la investigación realizada, las técnicas e instrumentos de recolección de datos, fases de la investigación y condiciones de prueba, se analiza el ámbito de estudio en donde se aplicará el proyecto de investigación, además de los recursos y financiamiento del proyecto.

El *CAPÍTULO IV: Exposición, diseño y análisis de resultados*; es la parte principal del proyecto de investigación, en este capítulo realizamos el modelamiento matemático completo no lineal y el modelo linealizado del sistema motor - péndulo triple, además utilizamos el método de los mínimos cuadrados recursivos mejorados (MCRM) como estimador de parámetros del proceso, como ley de control utilizamos un regulador proporcional integral óptimo cuadrático con realimentación de estados, realizamos el diseño mecánico, controlador electrónico y el software de control en LabVIEW, mediante la técnica de prueba y error realizamos las pruebas con el fin de probar nuestro diseño, por último hacemos una comparación entre el regulador adaptativo diseñado y un controlador fijo.

Finalmente se exponen las conclusiones a las cuales se llegaron en la realización del presente proyecto de investigación, así mismo damos recomendaciones y sugerencias para futuras investigaciones y trabajos relacionados que se puedan llevar más adelante.

El Autor



CAPITULO I

PLANTEAMIENTO Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

1.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Uno de los problemas clásicos en el área de ingeniería de control es controlar la estabilidad de un péndulo invertido lineal, pero existen variantes de este como el péndulo rotacional o de Furuta, así como añadir más articulaciones al péndulo como son el péndulo doble y el péndulo triple, este último presenta características importantes ya que mimetiza el movimiento del cuerpo humano y su mecanismo de balanceo, investigaciones han demostrado un progreso en esta área y sus aplicaciones se dan en el campo de la robótica humanoide, proyectos militares para la estabilización de misiles, en estudios referentes a sistemas de aislamiento de vibración sísmica donde se estudia la frecuencia y respuesta de la función de transferencia.

La mayoría de sistemas de control utilizados actualmente en las industrias son los PID, sin embargo este presenta limitaciones en su correcto funcionamiento a medida que los parámetros del proceso se alejan del punto de operación en la cual fueron diseñados, además de estas variaciones, las incertidumbres en el modelado y los posibles fallos por parte de los sensores y actuadores obligan a elaborar nuevas estrategias de control que garanticen un correcto funcionamiento ante incertidumbres en el modelo y perturbaciones sobre este, para solucionar esto existen dos enfoques, la primera es utilizar un controlador adaptativo el cual estima los parámetros y basándose en estos calcula la señal de control y la segunda es considerar las incertidumbres del sistema, esto nos lleva a un esquema de control robusto, la metodología más adecuada para resolver estos problemas son los reguladores autoajustables.

Por tanto esta tesis se propone diseñar e implementar un controlador adaptativo autosintonizado para controlar la estabilidad de un péndulo triple invertido lineal; por otra parte se pretende hacer una comparación de la eficacia del control adaptativo y un controlador diseñado con otra estrategia de control y así comparar las respuestas en estado transitorio y estacionario así como la estabilidad del sistema, adicionalmente a esto se realizara una interfaz gráfica de usuario que permita visualizar en tiempo real los cambios en el comportamiento del péndulo triple.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Los factores que determinan el funcionamiento del péndulo triple son el algoritmo de control, la precisión de los sensores, la rapidez y capacidad de procesamiento de los dispositivos electrónicos usados en la adquisición y envío de datos y la calidad del prototipo físico diseñado.

Por lo tanto debido a la gran importancia, complejidad del problema y la poca información referente al control del péndulo triple nos preguntamos si:

¿Es posible controlar la estabilidad de un péndulo triple empleando un controlador adaptativo autosintonizado?

¿La respuesta de un controlador adaptativo autosintonizado tiene un mejor comportamiento que usar otras estrategias de control?

¿Las ventajas de emplear un controlador adaptativo son mayores a las desventajas producidas por el costo computacional necesario para realizar los algoritmos de control?

1.3. ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

Para resolver el problema planteado en esta investigación, se recurrió a diversas investigaciones en el área de la ingeniería electrónica y de control, microcontroladores, comunicación con ordenador, sistemas computacionales, matemáticas avanzadas y mecánica analítica. Se tuvo en consideración los siguientes antecedentes:

Título: *Levantamiento y estabilización del péndulo invertido lineal.*

Autores: Fernando Castaños Luna (Facultad de Ingeniería UNAM)

Técnicas empleadas: Algoritmo de control usando LQR .

Conclusión principal: Esta investigación tiene por objetivo diseñar un algoritmo de control usando un regulador cuadrático lineal - LQR y observadores de Luenberger para el control de estabilidad del péndulo, además toma la iniciativa de realizar un algoritmo de autolevantamiento, los resultados de este trabajo muestran que el controlador diseñado es capaz de compensar adecuadamente tanto perturbaciones como variaciones en los parámetros del

sistema; en tanto el algoritmo de autolevantamiento no garantiza que el péndulo llegue a la posición de equilibrio con velocidad angular nula, esto causa que no siempre se logre levantar en la totalidad de los intentos.

Título: *Péndulo triple invertido.*

Autores: Víctor Hernández Santamaría, José Rojo Ramírez.

Técnicas empleadas: Control adaptativo y robusto.

Conclusión principal: Este proyecto tenía como finalidad desarrollar un sistema completo, desde el sistema mecánico, hasta la implementación de un controlador adaptable y otro robusto; para el modelamiento del sistema utilizó mecánica analítica de Euler-Lagrange, esta formulación es más sistemática que la Newtoniana lo que facilita enormemente la formulación de un modelo complejo como es el péndulo triple, para el sistema de identificación usa el algoritmo de los mínimos cuadrados y como estrategia de control o ley de control usa el método de asignación de polos; las respuestas dadas por el sistema muestran una adaptabilidad del controlador a los cambios de los parámetros del sistema.

Título: *Comportamiento dinámico de un péndulo triple plano.*

Autores: Iván de Jesús Rivas campero y José Manuel Sausedo Solorio.

Técnicas empleadas: Análisis no lineal.

Conclusión principal: El proyecto pretende hacer un estudio del comportamiento no lineal del péndulo triple, así como muestra que este puede extenderse al estudio del péndulo de “N” eslabones, se hace un análisis de la frecuencia de resonancia así como los cambios en la dinámica al variar la magnitud, frecuencia de perturbación y rozamiento en los eslabones, demostrando que los estados del péndulo pueden ser periódicos, cuasi - periódicos y caóticos; muestra que el comportamiento de los desplazamientos angulares tanto en función del tiempo como de la frecuencia definen la frecuencia de perturbación así como los coeficientes de resonancia definen zonas de respuesta con estados periódicos, cuasi - periódicos y respuestas caóticas, se detectan errores en el sistema linealizado en las zonas cercanas a la de resonancia.

Título: *Comparison of techniques for stabilization of a triple inverted pendulum.*

Autores: Érick Lee, James Perkins.

Técnicas empleadas: Métodos LQR y Q-Learning.

Conclusión principal: Esta investigación tiene por objetivo realizar un sistema de control de balanceo del péndulo triple empleando las técnicas de LQR y Q - learning, donde muestra que el sistema diseñado usando LQR obtiene buenos resultados mientras que el Q - Learning muestra respuestas insatisfactorias debido a la gran cantidad de recursos consumidos por el algoritmo diseñado.

Título: *Control avanzado – diseño y aplicaciones en tiempo real .*

Autores: Arturo Rojas Moreno.

Técnicas empleadas: Control óptimo, adaptativo, predictivo, robusto y no lineal.

Conclusión principal: Este libro muestra distintas técnicas empleadas en el diseño de sistemas de control no tradicional, como control óptimo cuadrático, adaptativo, predictivo, robusto y no lineal, con simulaciones hechas en el software de Matlab, así como programas de control en tiempo real desarrolladas en C++, mostrando aplicaciones en tiempo real que guardan estrecha relación entre la teoría – simulación y la práctica.

Título: *System identification – Theory for the user.*

Autores: Lennart Ljung.

Técnicas empleadas: Técnicas de identificación de sistemas.

Conclusión principal: Este libro muestra los distintos métodos y técnicas usadas en la identificación de sistemas, propiedades y usos que son muy necesarios a la hora de modelar un sistema dinámico basado en la observación de datos del sistema, además de los métodos de estimación de parámetros, muestra otras técnicas que pueden servir para solucionar problemas mucho más complejos que los vistos en el presente proyecto.

Título: *Control de péndulo invertido.*

Autores: Universidad Carnige Mellon.

Técnicas empleadas: Control PID, respuesta en frecuencia, etc.

Conclusión principal: Muestra distintos ejemplos de sistemas de control aplicando los criterios de diseño de control clásico y avanzado, además cuenta con algoritmos desarrollados en Matlab que hacen más práctico el estudio de esta área de la ingeniería.

1.4. JUSTIFICACIÓN

El péndulo triple plano es utilizado para estudiar el comportamiento de distintos campos de la ciencia e ingeniería como el control de estabilidad de los misiles para investigaciones militares, en estudios del comportamiento del cuerpo humano, ya que el péndulo triple mimetiza el movimiento del cuerpo humano y su mecanismo de balanceo, además varios estudios sobre vibraciones sísmicas utilizaron un péndulo triple para estudiar la frecuencia y las respuestas en el tiempo así como su función de transferencia, también se utilizó para estudiar sistemas pistón-biela-manivela de un motor monocilindro de combustión, así como en la estabilidad de satélites y de robots humanoides. Como podemos ver las aplicaciones del péndulo triple son diversas e importantes.

En la vida real la dinámica de un proceso no se conoce completamente, por lo que el modelo de la planta solo puede considerarse como una aproximación a la descripción exacta, además las perturbaciones desconocidas influyen en el comportamiento del sistema ocasionando que el controlador trabaje fuera del entorno al cual fue diseñado, ocasionando un funcionamiento inadecuado del sistema, esto lleva a pensar en diseñar un controlador que sea capaz de variar su comportamiento frente a cambios en su dinámica y a las perturbaciones externas, estos problemas son resueltos si utilizamos un controlador adaptativo autosintonizado que presenta una solución en tiempo real tratando de alcanzar un control óptimo, sujeto a una ley de control y obteniendo información del proceso y sus señales.

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.5.1. Objetivo General

- Diseñar e implementar un sistema para el control de estabilidad de un péndulo triple invertido lineal mediante un controlador adaptativo autosintonizado.

1.5.2. Objetivos Específicos

- Determinar las diferencias de los modelos matemáticos del sistema del péndulo triple en su forma lineal y su modelo completo no lineal.
- Determinar las diferencias de la respuesta transitoria y estacionaria entre el controlador adaptativo diseñado y un controlador fijo como es el óptimo cuadrático.
- Realizar una interfaz de usuario que permita controlar el Set Point así como monitorear las señales provenientes del sistema.

1.6. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

1.6.1. Hipótesis General.

El controlador adaptativo autosintonizado controla eficazmente la estabilidad de un péndulo triple invertido lineal.

1.6.2 Hipótesis Específicas.

H.1. El controlador adaptativo autosintonizado atenúa las perturbaciones externas y tiene una mejor respuesta que otros métodos de control.

H.2. Las ventajas de emplear un controlador adaptativo son mayores a las desventajas producidas por el costo computacional requerido para realizar los algoritmos de control.

1.7. OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES

1.7.1. Variable Independiente

La variable independiente de la presente investigación es el controlador adaptativo.

1.7.2. Variables Dependientes

Con el fin de alcanzar el objetivo las variables dependientes son:

- Estabilidad del péndulo triple.
- Error de los Ángulos de las varillas de los péndulos.
- Tiempo de respuesta del controlador.
- Sensibilidad a las perturbaciones y cambios en la dinámica del sistema.

1.8. LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

La complejidad de los algoritmos de identificación de parámetros y control en tiempo real empleados consumen muchos recursos del sistema computacional, esto causa un retardo en el envío de la señal de control, además al ser este un prototipo se puso limitaciones en la parte económica que no permitieron el uso de dispositivos mejor dotados en adquisición y procesamiento de datos; creando limitaciones en el correcto desempeño del sistema; por otra parte el módulo mecánico del péndulo triple así como los sensores y actuador usados son de bajo costo, generando comportamientos inesperados que afectan al óptimo desempeño total de la planta.

El péndulo triple muestra ser como se esperaba, un sistema muy complejo de controlar, si bien las simulaciones indican un correcto funcionamiento del controlador adaptativo, en la vida práctica aparecen varios factores que no permiten alcanzar el estado óptimo del sistema, sin embargo utilizando la técnica de prueba y error se consiguió que el controlador tenga un comportamiento aceptable.



CAPITULO II

FUNDAMENTO TEÓRICO

2.1. SISTEMAS DE CONTROL AUTOMÁTICO

Un sistema automático de control es un conjunto de componentes físicos conectados o relacionados entre sí, de manera que regulen o dirijan su actuación por sí mismos, es decir sin intervención de agentes exteriores (incluido el factor humano), corrigiendo además los posibles errores que se presenten en su funcionamiento [9]¹.

Actualmente, cualquier mecanismo, sistema o planta industrial presenta una parte actuadora, que corresponde al sistema físico que realiza la acción, y otra parte de mando o control, que genera las órdenes necesarias para que esa acción se lleve o no a cabo.

Un ejemplo sencillo de sistema automático lo constituye el control de temperatura de una habitación por medio de un termostato, en el que se programa una temperatura de referencia que se considera idónea. Si en un instante determinado la temperatura del recinto es inferior a la deseada, se producirá calor, lo que incrementará la temperatura hasta el valor programado, momento en que la calefacción se desconecta de manera automática [9].

En la actualidad los sistemas automáticos juegan un gran papel en muchos campos, mejorando nuestra calidad de vida:

En los procesos industriales:

- Aumentando las cantidades y mejorando la calidad del producto, gracias a la producción en serie y a las cadenas de montaje.

- Reduciendo los costes de producción.

- Fabricando artículos que no se pueden obtener por otros medios.

- En los hogares: Mejorando la calidad de vida. Podríamos citar desde una lavadora hasta un control inteligente de edificios (domótica).

- Para los avances científicos: Un claro ejemplo lo constituyen las misiones espaciales.

- Para los avances tecnológicos: por ejemplo en automoción es de todos conocidos los limpiaparabrisas inteligentes, etc.

¹ Teoría de control –Diseño Electrónico. Spartacus Gomarís.

Como se puede observar las aplicaciones son innumerables, de esta manera surge toda una teoría denominada la regulación automática, dedicada al estudio de los sistemas automáticos de control.

2.1.1. Tipos de Sistemas de Control

Los sistemas de regulación se pueden clasificar en:

- Sistemas de bucle o lazo abierto: son aquellos en los que la acción de control es independiente de la salida.
- Sistemas de bucle o lazo cerrado: son aquellos en los que la acción de control depende en cierto modo, de la salida [15]².

2.1.1.1.- Sistemas de control en lazo abierto

Un sistema de control en lazo o bucle abierto es aquél en el que la señal de salida no influye sobre la señal de entrada. La exactitud de estos sistemas depende de su calibración, de manera que al calibrar se establece una relación entre la entrada y la salida con el fin de obtener del sistema la exactitud deseada [9]. El diagrama de bloque de un sistema en lazo abierto es:

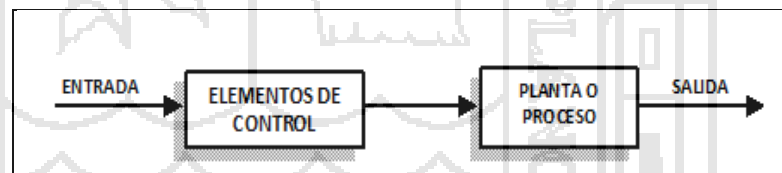


Figura 1: Sistema de Control en lazo abierto.

El sistema se controla bien directamente, o bien mediante un transductor y un actuador. El esquema típico del sistema será, en este caso:

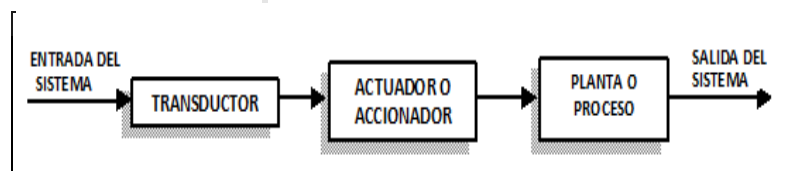


Figura 2: Sistema de Control en lazo abierto con actuador.

² Ingeniería de control moderna. Katsuhiko Ogata.

El transductor modifica o adapta la naturaleza de la señal de entrada al sistema de control.

En el caso del sistema de control de la temperatura de una habitación, para que sea un sistema abierto es necesario que no exista termostato, de manera que siga funcionando permanentemente. La entrada del sistema sería la temperatura ideal de la habitación; la planta o proceso sería la habitación y la salida sería la temperatura real de la habitación. El transductor podría ser un dial en el que definamos el tiempo de funcionamiento y el actuador el propio foco de calefacción (caldera o radiador) [9].

El actuador o accionador modifica la entrada del sistema entregada por el transductor (normalmente amplifica la señal).

Una lavadora automática sería un claro ejemplo de sistema de control en lazo abierto. La blancura de la ropa (señal de salida) no influye en la entrada. La variable tiempo presenta una importancia fundamental: si está bien calibrada, cada proceso durará el tiempo necesario para obtener la mejor blancura, otro ejemplo de sistema en lazo abierto sería el alumbrado público controlado por interruptor horario. El encendido o apagado no depende de la luz presente, sino de los tiempos fijados en el interruptor horario.

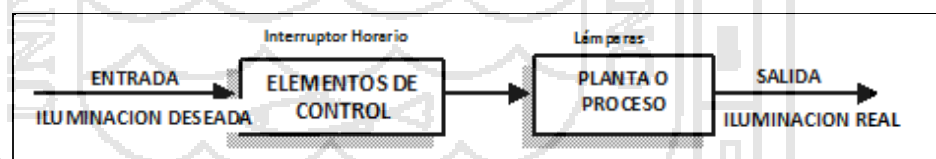


Figura 3: Sistema de Control en lazo abierto para el alumbrado público.

Como vemos los sistemas de lazo abierto dependen de la variable tiempo y la salida no depende de la entrada, el principal inconveniente que presentan los sistemas de lazo abierto es que son extremadamente sensibles a las perturbaciones. Por ejemplo si en una habitación se ha conseguido una temperatura idónea y se abre una puerta o ventana (perturbación) entraría aire frío, de manera que el tiempo necesario para obtener dicha temperatura sería diferente.

2.1.1.2.- Sistemas de control en lazo cerrado

Si en un sistema en lazo abierto existen perturbaciones, no se obtiene siempre la variable de salida deseada. Conviene, por tanto, utilizar un sistema en el que haya una relación entre la salida y la entrada [9].

Un sistema de control de lazo cerrado es aquél en el que la acción de control es, en cierto modo, dependiente de la salida. La señal de salida influye en la entrada. Para esto es necesario que la entrada sea modificada en cada instante en función de la salida. Esto se consigue por medio de lo que llamamos realimentación o retroalimentación (feedback).

La realimentación es la propiedad de un sistema en lazo cerrado por la cual la salida (o cualquier otra variable del sistema que esté controlada) se compara con la entrada del sistema (o una de sus entradas), de manera que la acción de control se establezca como una función de ambas [9] y [15].

A veces también se le llama a la realimentación transductor de la señal de salida, ya que mide en cada instante el valor de la señal de salida y proporciona un valor proporcional a dicha señal.

Por lo tanto podemos definir también los sistemas de control en lazo cerrado como aquellos sistemas en los que existe una realimentación de la señal de salida, de manera que ésta ejerce un efecto sobre la acción de control.

El diagrama de bloques correspondiente a un sistema de control en lazo cerrado es:

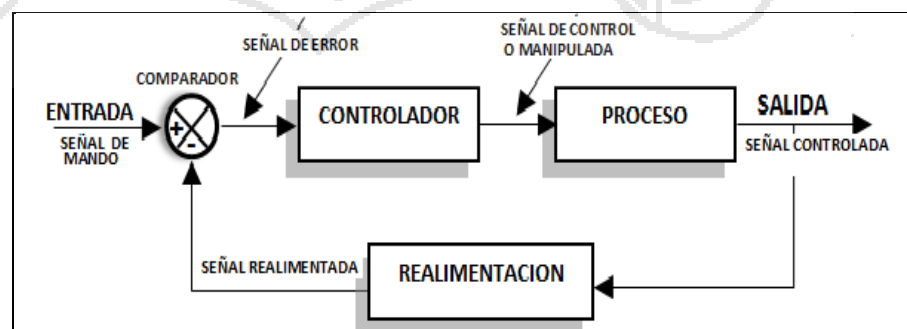


Figura 4: Sistema de Control en lazo cerrado.

El controlador está formado por todos los elementos de control y a la planta también se le llama proceso.

En este esquema se observa cómo la salida es realimentada hacia la entrada. Ambas se comparan, y la diferencia que existe entre la entrada, que es la señal de referencia o consigna (señal de mando), y el valor de la salida (señal realimentada) se conoce como error o señal de error. La señal que entrega el controlador se llama señal de control o manipulada y la entregada por la salida, señal controlada.

El error, o diferencia entre los valores de la entrada y de la salida, actúa sobre los elementos de control en el sentido de reducirse a cero y llevar la salida a su valor correcto. Se intenta que el sistema siga siempre a la señal de consigna [9].

El diagrama de bloques anterior se puede sustituir por el siguiente:

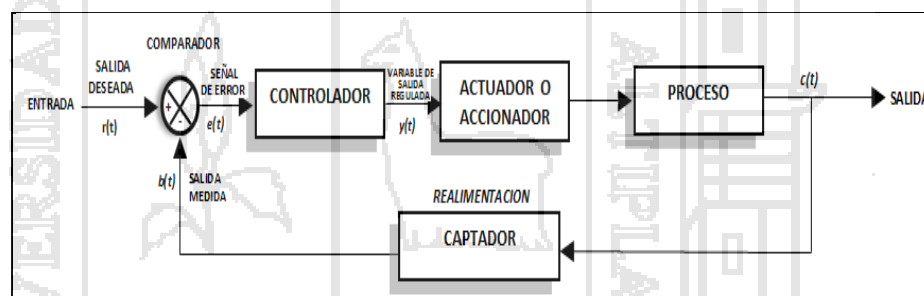


Figura 5: Sistema de Control en lazo cerrado realimentado con un captador.

La salida del sistema de regulación se realimenta mediante un captador. En el comparador o detector de error, la señal de referencia (salida del transductor) se compara con la señal de salida medida por el captador, con lo que se genera la siguiente señal de error:

$$e(t) = r(t) - b(t) \quad (2 - 1)$$

Donde $e(t)$ es la señal de error, $r(t)$ la señal de referencia y $b(t)$ la variable realimentada. Pueden suceder dos casos:

- *Que la señal de error sea nula;* en este caso la salida tendrá exactamente el valor previsto.

- *Que la señal de error no sea nula*; esta señal de error actúa sobre el elemento regulador que a su salida proporciona una señal que, a través del elemento accionador, influye en la planta o proceso para que la salida alcance el valor previsto y de esta manera el valor se anule.

En el ejemplo de control de temperatura de una habitación, el sistema, planta o proceso es la habitación que se quiere calentar, el transductor puede ser un dial con el que se define el grado de calentamiento, el actuador o accionador una caldera o un radiador y el captador puede ser un termómetro, este último actúa como sensor midiendo la temperatura del recinto, para que pueda ser comparada con la de referencia [9].

El regulador o controlador es el elemento que determina el comportamiento del bucle, por lo que debe ser un componente diseñado con gran precisión. Es el cerebro del bucle de control.

Mientras que la variable controlada se mantenga en el valor previsto, el regulador no actuará sobre el elemento accionador, pero si el valor de la variable se aleja del prefijado, el regulador modifica su señal, ordenando al accionador que actúe sobre la planta o proceso, en el sentido de corregir dicho alejamiento. El termostato del ejemplo anterior realizaría esta función.

Los sistemas en lazo cerrado son mucho menos sensibles a las perturbaciones que los de lazo abierto, ya que cualquier modificación de las condiciones del sistema afectará a la salida, pero este cambio será registrado por medio de la realimentación como un error que es en definitiva la variable que actúa sobre el sistema de control. De este modo, las perturbaciones se compensan, y la salida se independiza de las mismas [9].

2.2. CONTROL DIGITAL

La aplicación del control por computadora ha hecho posible el movimiento inteligente en robots industriales, la optimización de economía en combustible en automóviles y el refinamiento en la operación de enseres y máquinas de uso doméstico, entre otros.

La capacidad en la toma de decisiones y la flexibilidad en los programas de control son las mayores ventajas de los sistemas de control digital [16]³.

La figura 6 de abajo muestra el típico sistema continuo realimentado que hemos considerado hasta ahora. Casi la totalidad de los controladores continuos pueden implementarse usando electrónica analógica.

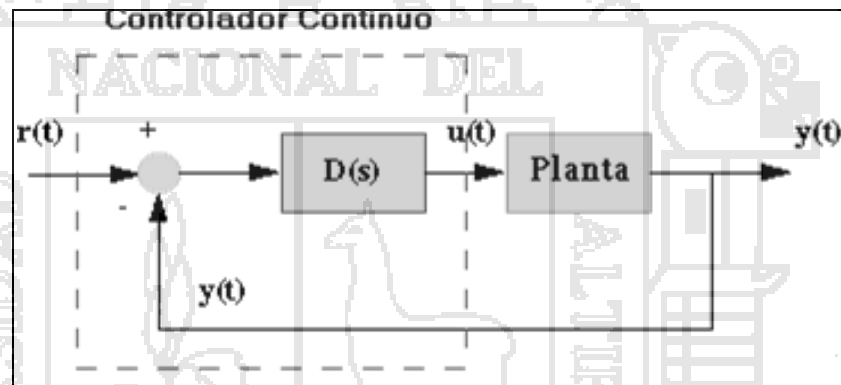


Figura 6: Sistema de control en tiempo continuo.

El controlador analógico, encerrado en el cuadrado a trazos, puede reemplazarse por un controlador digital, como se muestra abajo, el cual hace la misma tarea de control que el controlador analógico. La diferencia básica entre estos controladores es que el sistema digital opera con señales discretas (o muestras de la señal censada) en lugar de señales continuas [16].

³ Sistemas de control en tiempo discreto . Katsuhiko Ogata.

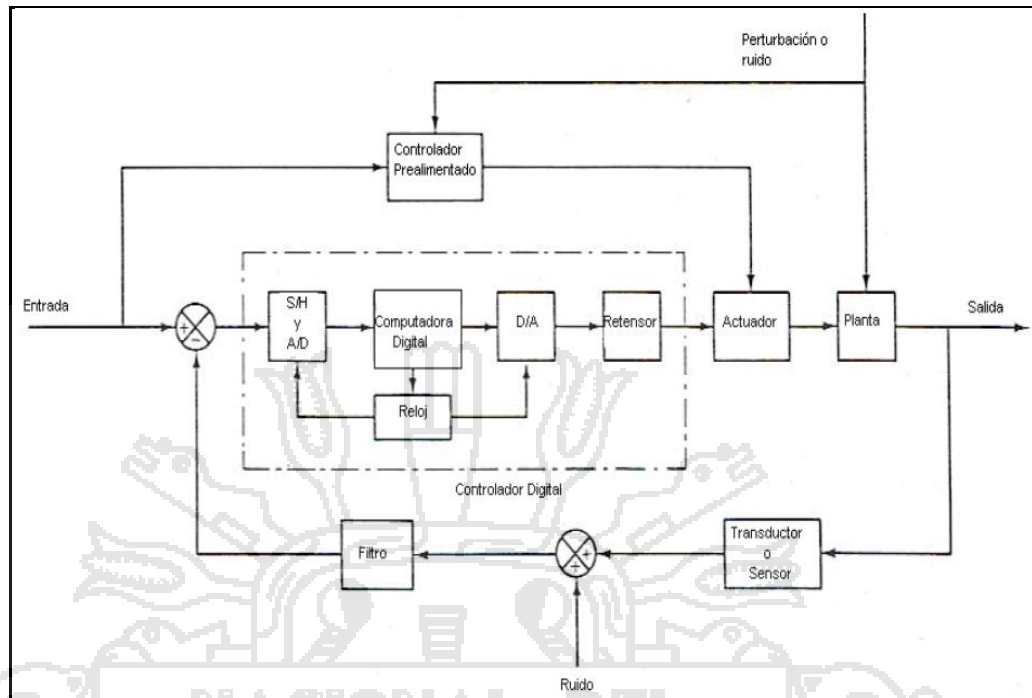


Figura 7: Sistema de control digital.

2.2.1. Función de transferencia pulso

La función de transferencia pulso [16] relaciona la transformada Z de la salida en los instantes de muestreo con la correspondiente entrada muestreada. Conociendo la función de transferencia $G(s) = y(s)/u(s)$ de un sistema, la correspondiente función de transferencia de pulso se determina de la relación:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = Z[G_{r0}G(s)] = Z\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{G(s)}{s}\right] \quad (2-2)$$

Para el caso multivariables, la matriz de transferencia de pulso $G(z)$ se determina empleando la relación (2-2) para cada elemento de la matriz de transferencia $G(s)$. Para derivar la función de transferencia de pulso para el caso de procesos en cascada o formando lazos cerrados, debemos proceder con cautela, porque no siempre es posible encontrar una relación de la forma $y(z) = G(z)u(z)$ [16].

2.2.2. Modelo en el espacio de estados.

Para sistemas de tiempo discreto variantes en el tiempo la ecuación de estado [16] se puede escribir como:

$$x(k + 1) = f[x(k), u(k), k] \quad (2 - 3)$$

Y la ecuación de salida como:

$$y(k) = g[x(k), u(k), k] \quad (2 - 4)$$

Si el sistema es lineal, la ecuación de estado y salida se representan como:

$$x(k + 1) = G(k)x(k) + H(k)u(k) \quad (2 - 5)$$

$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) \quad (2 - 6)$$

donde :

$x(k)$ = vector de estado n

$y(k)$ = vector de salida m

$u(k)$ = vector de entrada r

$G(k)$ = matriz de estado de orden $n \times n$

$H(k)$ = matriz de entrada de orden $n \times r$

$C(k)$ = matriz de salida de orden $m \times n$

$D(k)$ = matriz de transferencia directa de orden $m \times r$

Si el sistema es invariante en el tiempo, entonces:

$$x(k + 1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (2 - 7)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (2 - 8)$$

2.2.3. Representación en el espacio de estados de sistemas en tiempo discreto.

Formas canónicas para las ecuaciones en espacio de estado de sistemas discretos [16].

Consideremos el siguiente sistema en tiempo discreto:

$$y(k) + a_1y(k - 1) + a_2y(k - 2) + \dots + a_ny(k - n) = b_0u(k) + \dots + b_nu(k - n) \quad (2-9)$$

Donde $u(k)$ es la entrada y $y(k)$ es la salida en el instante de muestreo k , al escribir en forma de función de transferencia pulso tenemos:

$$\frac{Y(k)}{U(k)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_nz^{-n}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}} \quad (2 - 10)$$

Dentro de las formas de expresar representaciones en espacio de tiempo discreto tenemos:

Forma canónica Controlable .Se expresa mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (2-11)$$

$$y = [b_n - a_n b_0 \quad | \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad | \quad \dots \quad | \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u \quad (2-12)$$

Forma Canónica observable .La siguiente representación en el espacio de estados discreto se denomina forma canónica observable:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(k) \quad (2-13)$$

$$y = [0 \quad | \quad 0 \quad | \quad \dots \quad | \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u \quad (2-14)$$

Observe que la matriz de estado de nxn de la ecuación de estado obtenida mediante la ecuación (2-11) es la transpuesta de la ecuación de estado definida mediante la ecuación (2-13) [16].

Forma canónica diagonal. Si los polos de la función de transferencia pulso son todos distintos entonces la representación en el espacio se puede representar como sigue:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (2-15)$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u \quad (2-16)$$

2.2.4. Discretización de las ecuaciones en espacio de tiempo continuo.

En el control digital de procesos es necesario convertir la ecuación en el espacio de estados en tiempo continuo en ecuaciones en el espacio de estados en tiempo discreto, se puede realizar dicha conversión si se introducen muestreadores y dispositivos de retención ficticios, el error introducido por la discretización se puede hacer despreciar utilizando un periodo de muestreo suficientemente pequeño en comparación con la constante más significativa del sistema [1]⁴.

Analizando el sistema tenemos:

$$x(k+1) = e^{AT} x(kT) + e^{AT} \int_0^T e^{-AT} B u(kT) dt \quad (2-17)$$

haciendo $\lambda = T - t$.

$$x(k+1) = e^{AT} x(kT) + e^{AT} \int_0^T e^{\lambda T} B u(kT) d\lambda \quad (2-18)$$

Por tanto:

$$G(T) = e^{AT} \quad (2-19)$$

$$H(T) = (\int_0^T e^{\lambda T} d\lambda) B \quad (2-20)$$

⁴ Control Avanzado - Diseño y aplicaciones en tiempo real. Arturo Rojas Moreno.

Entonces la ecuación (2 – 18) se convierte en:

$$x((k + 1)T) = G(T)x(kT) + H(T)u(kT) \quad (2 - 21)$$

Y la ecuación de salida se convierte en :

$$y(kT) = Cx(kT) + Du(kT) \quad (2 - 22)$$

Donde C y D son matrices constantes y no dependen del periodo de muestreo T.

2.3. CONTROL ADAPTATIVO

Los sistemas de control adaptativo ajustan su comportamiento a las cambiantes propiedades del proceso controlado y de las señales que interactúan sobre dicho proceso. Por el contrario, los sistemas de control fijos se caracterizan por la presencia de una ley de control invariable con el tiempo [23]⁵. La investigación sobre controladores adaptativos se ha centrado en dos grupos principales: controladores adaptativos con un modelo referencial (MRAC) y controladores con autosintonización (STR) [14],[23].

La característica fundamental que distingue a los controladores adaptativos es la presencia de un bucle de control en el que se compara un índice de funcionamiento. En la figura 8 puede verse que está compuesto de un bucle principal de realimentación negativa, en el que actúa al igual que en los sistemas convencionales un regulador y de otro bucle que mide un cierto índice de funcionamiento el cual es comparado con índice deseado y se procesa el error en un mecanismo de adaptación que ajusta los parámetros del regulador [5],[14]⁶, [23] y [25].

⁵ Control Adaptivo y Robusto. Rodríguez Rubio Francisco, Manuel Jesús López Sánchez.

⁶ Adaptive Control. Karl J. Astrom, Bjorn Wittenmark .

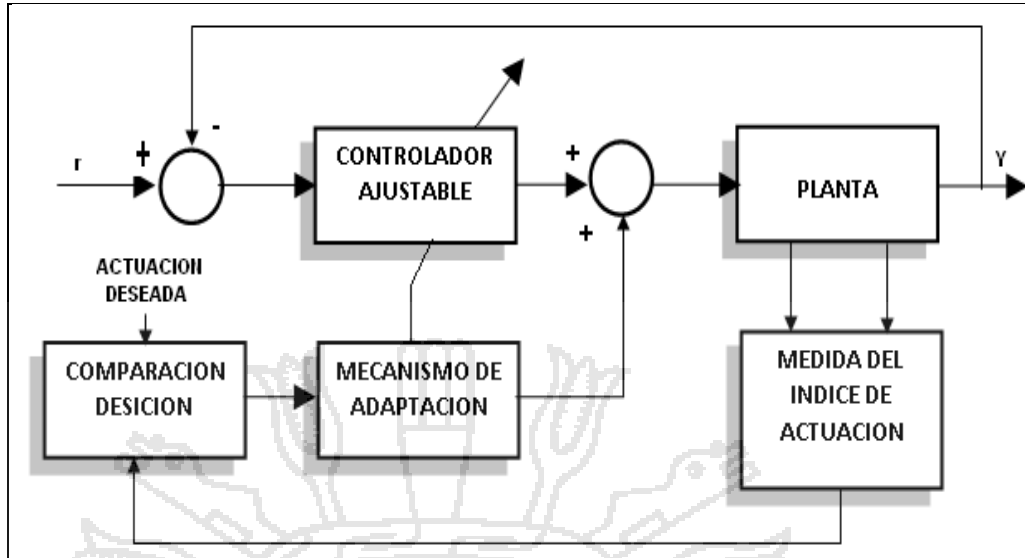


Figura 8: Configuración básica del control Adaptivo.

Los esquemas básicos más utilizados se presentan a continuación:

2.3.1. Programación de ganancias.

En algunos sistemas existen variables auxiliares que describen bien las características de la dinámica del proceso. Si estas variables pueden ser medidas, estas variables pueden ser usadas para cambiar los parámetros del regulador, es decir se utilizan para acomodar los cambios en la ganancia del proceso. Este método de programar ganancias se presenta en la figura 9 [5], [14],[23].

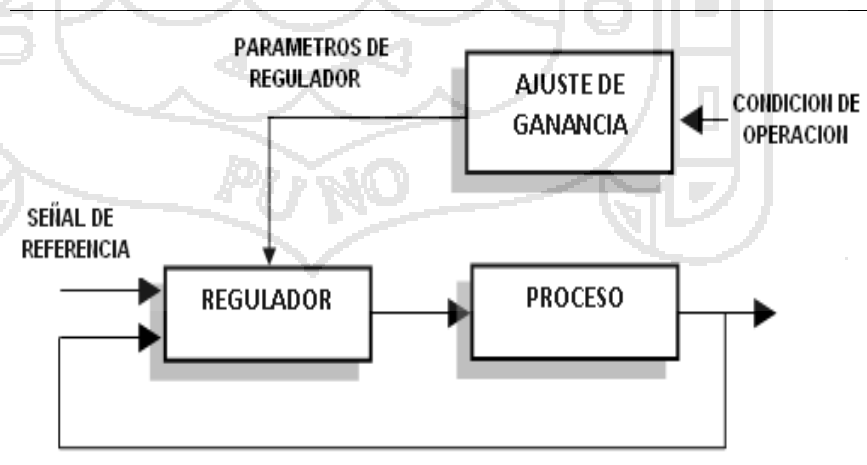


Figura 9: Sistema de programación de ganancias.

El ajuste de ganancia es una compensación en lazo abierto y puede ser visto como un sistema con control de realimentación en el cual el lazo de realimentación es ajustado en compensación directa. Esto reduce los efectos de la variación de parámetros.

2.3.2. Control Adaptativo con referencia a modelo (MRAC)

Los controladores adaptativos con modelo de referencia intentan alcanzar para una señal de entrada definida, un comportamiento en bucle cerrado dado por un modelo de referencia, estos fueron diseñados primeramente para sistemas continuos por minimización de un índice de actuación. Las especificaciones del diseño del controlador son dadas en términos de un modelo de referencia donde la salida deberá seguir a la referencia. El esquema que representa el control MRAC se presenta en la figura 10 [5], [23].

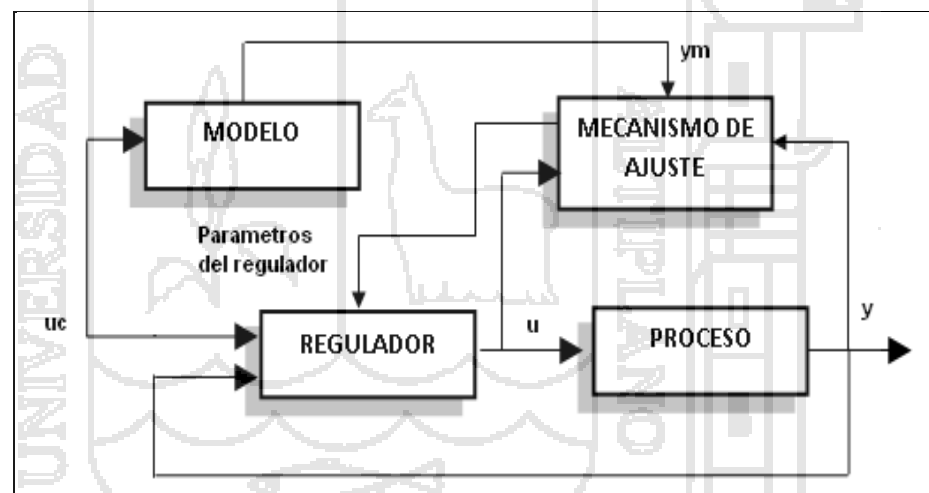


Figura 10: Esquema del MRAC.

En este caso el modelo está en paralelo con el sistema. El regulador está formado por dos lazos: un lazo interno de realimentación ordinaria compuesta por la planta y el regulador y un lazo externo que ajusta los parámetros del regulador de tal forma que el error entre la salida de la planta y , y la referencia Y_m sea pequeño, convirtiendo al lazo externo en un lazo regulador. El problema clave es determinar un mecanismo de ajuste tal que el sistema sea estable y lleve el error a cero.

2.3.2.1.- Enfoque de sensibilidad

Este método está basado en el uso de los modelos de sensibilidad para adaptar los parámetros en la dirección correcta [23]. La deducción de este método comienza con el planteamiento de un índice de actuación, normalmente cuadrático:

$$J(t + T) = \int_t^{t+T} e^2(\tau) d\tau \quad (2 - 23)$$

En esta ecuación $e_1 = y_p - y_m$ y el índice J se evalúa sobre el periodo T fijo, en el cual los parámetros permanecen constantes. En el instante $(t + T)$ los parámetros son ajustados en la dirección decreciente de J .

$$\theta(t + T) = \theta(t) - \Gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} = \theta(t) - \Gamma \int_t^{t+T} 2e_1(\tau) \frac{\partial e_1(\tau)}{\partial \theta} d\tau \quad (2 - 24)$$

Γ Debe ser una matriz cuadrada definida positiva, que representa la ganancia de adaptación, usualmente es diagonal, teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial e_1(\tau)}{\partial \theta} = \frac{\partial y_p}{\partial \theta} \quad (2 - 25)$$

La ecuación (2 - 25) queda:

$$\frac{\theta(t+T) - \theta(t)}{T} = -\frac{1}{\Gamma} \int_t^{t+T} 2e_1(\tau) \frac{\partial y_p}{\partial \theta} d\tau \quad (2 - 26)$$

Que en el límite para $T \rightarrow 0$ da la ley de adaptación:

$$\frac{d\theta}{dt} = -2\Gamma e_1 \frac{\partial y_p}{\partial \theta} \quad (2 - 27)$$

El factor $\frac{\partial y_p}{\partial \theta}$ representa la sensibilidad de la salida del proceso a las variaciones en θ , y puede ser generado por un modelo de sensibilidad. Como puede observarse esta ley de adaptación es la misma que la denominada regla del MIT [5], [23].

El modelo de sensibilidad anterior se sustituye por la sensibilidad del modelo de referencia, dado que normalmente el modelo del proceso se desconoce. Esta suposición se hace en base a que pasado un tiempo la respuesta del sistema converge a la respuesta del modelo de referencia.

La principal desventaja de este método, es la ausencia de un criterio que garantice la estabilidad del sistema de control. El sistema puede hacerse inestable si el modelo de referencia no se escoge adecuadamente o si la ganancia de adaptación se elige demasiado grande.

2.3.2.2.- Método de Lyapunov

Dado el carácter no lineal y variable en el tiempo de los sistemas adaptativos por modelo de referencia MRAC, no son válidos los criterios de estabilidad de sistemas lineales. Un método bien conocido es el método directo de Lyapunov [23].

Este método establece que un sistema tiene un equilibrio $x = 0$, asintóticamente estable, si existe una función, llamada de Lyapunov, $V(x)$ que satisface:

$$\begin{aligned}
 V(x) &> 0 \text{ para } x \neq 0 \text{ definida positiva} \\
 \dot{V}(x) &< 0 \text{ para } x \neq 0 \text{ definida negativa} \\
 V(x) &\rightarrow \infty \text{ para } \|x\| \rightarrow \infty \\
 V(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2-28}$$

Como la función de Lyapunov es similar a una función de energía, esta debe decrecer con el tiempo. Utilizando este método en el diseño de sistemas adaptativos, se trasladan las especificaciones de estabilidad directamente en la ley de adaptación, siguiendo los pasos:

1. El primer paso es encontrar la ecuación de error, bien en la salida ($y_p - y_m$) o en las variables de estado ($x_p - x_m$).

2. Encontrar una función de Lyapunov como una función del error entre las señales y del error en los parámetros ($\varphi = \hat{\theta} - \theta$).

En su forma más simple esta función toma la forma:

$$V = e^T P e + \varphi^T \Gamma^{-1} \varphi \quad (2-29)$$

Donde las matrices P y Γ^{-1} deben ser definidas positivas.

3. Calcular la derivada de la función de Lyapunov. La derivada debe ser definida negativa. Generalmente toma la forma:

$$\dot{V} = -e^T Q e + \text{algunos terminos incluyendo } \varphi \quad (2-30)$$

El primer término garantiza que la derivada es definida negativa, por lo que, haciendo el resto igual a cero se tiene una posible solución. La matriz Q es definida positiva. Las matrices P y Q, para un sistema gobernado por una matriz A, están relacionadas por la ecuación de Lyapunov:

$$-Q = A^T P + P A \quad (2-31)$$

4. Haciendo el término extra igual a cero se obtiene la ley de adaptación, normalmente tiene la forma:

$$\dot{\theta} = -\Gamma \varepsilon \xi \quad (2-32)$$

ε Está directamente relacionado con el error e y ξ es una versión modificada del vector de señales (referencia, salida, etc.) [23].

2.3.2.3.- Método de Hiperestabilidad

Con este método también se consigue una ley de adaptación estable. Como en el método de Lyapunov, en primer lugar se formulan las ecuaciones de error. Estas ecuaciones se dividen en una parte lineal invariable con el tiempo y otra no lineal y variable con el tiempo. La primera parte contiene usualmente al modelo de referencia y su salida es la señal de error que es utilizada para la ley de adaptación. La segunda parte contiene la ley de adaptación y su salida negada es la entrada a la parte lineal [23].

La teoría de hiperestabilidad garantiza la estabilidad asintótica si ambas partes (lineal y no lineal), satisfacen las condiciones de pasividad (Landau 1979):

1. La parte lineal (llámese $G(s)$), debe ser estrictamente positiva.

Ello significa que:

- (a) $G(s)$ debe ser real si s es real.
- (b) los polos de $G(s)$ deben tener parte real negativa, y
- (c) la parte real de $G(j\omega)$ de ser mayor que cero para $-\infty < \omega < \infty$.

2. La parte no lineal debe cumplir la desigualdad de Popov.

$$\int_0^T v^T \omega dt \geq -\gamma^2 \quad ; \quad \forall t > 0 \quad (2-33)$$

Siendo v el vector de entrada y w el vector de salida de la parte no lineal, y una constante finita positiva que no depende de t .

2.3.3. Regulador Auto-sintonizable.

Estos reguladores tratan de alcanzar un control óptimo sujeto a un tipo de controlador y a obtener información del proceso [23], este regulador está compuesto por dos lazos:

Un lazo interno de realimentación ordinaria y un lazo externo que actualiza los parámetros del proceso o del regulador por medio de identificación de sistemas. Pueden ser aplicados a muchos problemas de control que no son formulados como un problema de control estocástico [14]. El diagrama de bloques se muestra en la figura 11.

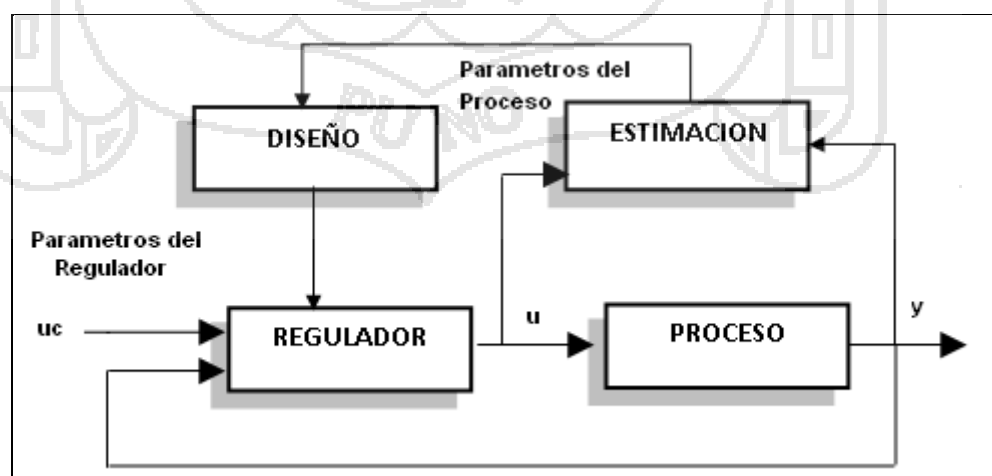


Figura 11: Esquema del STR.

Si los parámetros del proceso varían con el tiempo, ya sea por derivas o desgastes de las constantes físicas, o bien porque el proceso es no lineal y se modifica el punto de funcionamiento en el que estamos trabajando, el controlador calculado para un punto de funcionamiento concreto, no será el adecuado para este tipo de situaciones.

Cuando nos enfrentamos con este tipo de problemas, podemos plantear una estructura de control que además del bucle principal de regulación que existe en todo sistema de control, incorpore un segundo bucle de control, en el que a partir de la información recogida del proceso y con un determinado criterio de diseño, se modifiquen los parámetros del regulador [23].

En este caso, se comienza con un método de diseño para sistemas con parámetros conocidos, sustituyendo posteriormente los parámetros conocidos por sus estimados y recalculando el controlador en cada paso. La aplicación de esta idea es lo que se conoce como el principio de equivalencia cierta [23], [35].

El diagrama de bloques de estos controladores se puede ver en la figura 11; en el que se distinguen tres partes claramente diferenciadas:

- ❖ Un algoritmo recursivo de estimación de parámetros
- ❖ Un mecanismo de adaptación que desarrolla la tarea de diseño del regulador y
- ❖ Un regulador con parámetros ajustables.

Estos reguladores conforman una estructura sub óptima basada en el principio de separación de las tareas de control e identificación [5],[23].

La idea de los reguladores autoajustables puede ser aplicada a muchos problemas de control que no son formulados como un problema de control estocástico. Dada la modularidad y la separación del control e identificación, pueden formarse muchas clases de reguladores autoajustables por combinación de diferentes métodos de diseño e identificadores.

En cuanto al modelo de la planta, supondremos en general, que sobre el sistema actúan perturbaciones estocásticas, por lo que el proceso estará descrito por su modelo ARMAX [17], de la siguiente forma:

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} u(k) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} v(k) \quad (2-34)$$

Donde los distintos polinomios y variables tienen el siguiente significado:

$$\begin{aligned}
 A(z^{-1}) &= 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n} \\
 B(z^{-1}) &= b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_nz^{-n} \\
 C(z^{-1}) &= 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_nz^{-n}
 \end{aligned}
 \tag{2-35}$$

Siendo $y(k)$ la secuencia de salida, $u(k)$ la señal de control del sistema, $v(k)$ una señal aleatoria independiente con distribución gaussiana $N(0, \varphi)$, d es el retardo del sistema y z^{-1} es el operador retardo tal que $y(k) = z^{-1}y(k+1)$.

En cuanto al criterio de diseño, pueden dividirse en dos tipos, según el planteamiento del problema sea: estocástico o no estocástico. Cuando el planteamiento es estocástico, se consideran sistemas cuyas señales no se pueden conocer exactamente y tampoco se pueden predecir.

En el diseño con planteamiento estocástico, normalmente se minimiza un cierto índice de actuación, como por ejemplo para el caso de mínima varianza, se trata de minimizar las variaciones con respecto a cero, ya que se trata de un problema de regulación.

$$J = E\{y^2(k+d+1)\} \tag{2-36}$$

O bien puede plantearse un índice más general de la forma:

$$J = E\{(Py(k+d+1) + Qu(k) - Rr(k))^2\} \tag{2-37}$$

Mediante el planteamiento no estocástico, se considera que las perturbaciones que inciden sobre un sistema son exactamente conocidas, pudiéndose describir estos sistemas analíticamente por medio de un sistema dinámico determinista.

En este caso el índice de actuación se da en función de unas especificaciones que debe cumplir la salida del sistema, lo que normalmente se traduce en especificar una función de transferencia deseada en bucle cerrado, como es el caso de asignación de polos. En la actualidad, se ha demostrado en numerosos casos, que ambos planteamientos conducen a resultados similares [23].

2.3.3.1.- Asignación de Polos y ceros

Astrom y Wittenmark (1980) proponen una estructura de control con diseño por asignación de polos como la dada en la figura 12. Esta estructura puede interpretarse como un compensador en adelanto y un compensador en bucle cerrado.

También puede demostrarse que dicha estructura corresponde a un controlador lineal por realimentación del estado y a un observador. La ley de control puede diseñarse para unos polos deseados del sistema en bucle cerrado, preservando los ceros inestables del sistema en bucle abierto [5], [23].

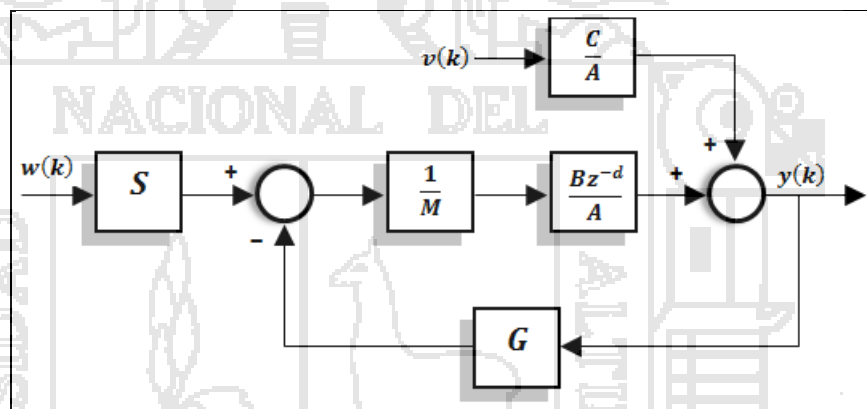


Figura 12: Estructura de control por asignación de polos y ceros.

El problema que se plantea consiste en hacer que la función de transferencia, desde la salida a la referencia, del sistema (figura 12), sea de la forma:

$$y(k) = \frac{R_m}{P_m} z^{-d} w(k) \tag{2 - 38}$$

Donde los polinomios R_m y P_m no tienen factores comunes y el grado de P_m es mayor o igual a R_m . Esto permitirá dar las especificaciones del problema de seguimiento en términos de la respuesta deseada a una señal de referencia. También habrá que especificar la dinámica del observador mediante el polinomio A_o .

El método de diseño elegido es el de síntesis algebraica directa. La solución consiste básicamente en resolver una ecuación polinomial con ciertas restricciones en los órdenes de los polinomios para asegurar que el regulador propuesto sea causal y con realización mínima [23].

A partir de la figura 12, la función de transferencia en bucle cerrado que se obtiene es:

$$y(k) = \frac{SBZ^{-d}}{AM+BGZ^{-d}}w(k) + \frac{CM}{AM+BGZ^{-d}}v(k) \quad (2-39)$$

Factorizando B como B^-B^+ , donde el superíndice $-$ corresponde a los ceros inestables y el $+$ a los ceros estables, tenemos:

$$\begin{aligned} R_m &= B^-R_{m1} \\ M &= M_1B^+ \\ S &= A_0R_{m1} \end{aligned} \quad (2-40)$$

La ecuación característica del bucle cerrado es de la forma:

$$AM + BGZ^{-d} = AM_1B^+ + B^-B^+GZ^{-d} = B^+A_0P_m \quad (2-41)$$

Luego dicha ecuación tiene como ceros suyos, los ceros estables del sistema en bucle abierto, los ceros del observador y los polos del modelo deseado. La estructura del regulador diseñado puede interpretarse como seguimiento a un modelo de referencia, para obtener S/M y sustituyendo en la expresión del regulador [23].

$$u(k) = \frac{1}{M}(Sw(k) - Gy(k)) \quad (2-42)$$

Se tiene que:

$$u(k) = \frac{A}{B}y_r(k+d) + \frac{G}{M}(y_r(k) - y(k)) \quad (2-43)$$

Que corresponde a la estructura de la figura:

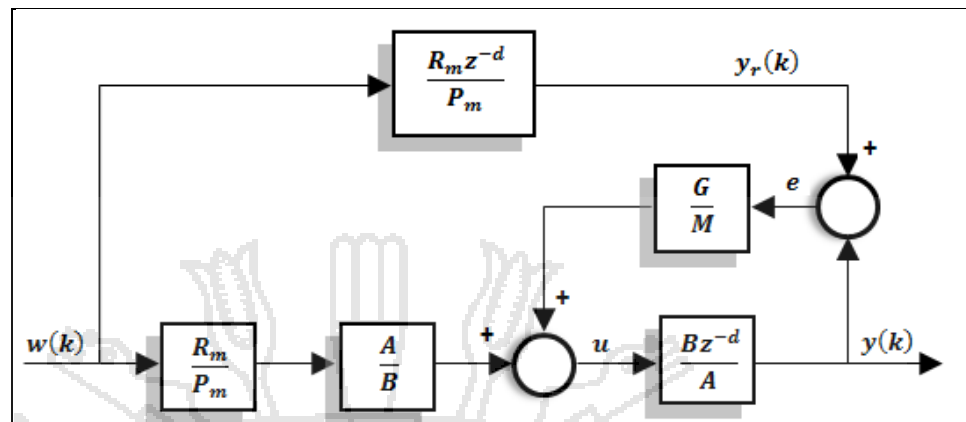


Figura 13: Interpretación como modelo de referencia.

En dicha estructura se puede observar que el regulador está compuesto de dos partes, un controlador en adelante (feedforward) y un controlador en bucle cerrado.

Si la señal e es igual a cero, la acción del bloque G/M desaparece y la relación que liga la entrada con la salida es justamente el modelo de referencia (2-38). Por otro lado es de notar que el bloque A/B no es realizable pero sí lo es $R_m A/P_m B$ [23].

2.3.3.2.- Predicción Óptima

El problema de control estocástico está íntimamente ligado con el de predicción. Por ello vamos a desarrollar el predictor óptimo (Astrom 1970, Wittenmark 1974), de d pasos de la salida de un sistema, el cual será necesario posteriormente [23].

Dado el proceso estocástico en tiempo discreto:

$$A(z^{-1})y(k + d) = B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})v(k + d) \quad (2 - 44)$$

Dónde:

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n} \\ B(z^{-1}) &= b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_nz^{-n} \\ C(z^{-1}) &= 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_nz^{-n} \end{aligned} \quad (2 - 45)$$

Consideramos el problema de encontrar la predicción de la salida en el instante $k + d$ con la información disponible en el instante k , tal que la esperanza matemática de $y(k + d) - \hat{y}(k + d/k)$ al cuadrado sea mínima, siendo $y(k)$ la secuencia de salida, $u(k)$ la señal de control del sistema y $v(k)$ una señal aleatoria independiente con distribución gaussiana $N(0, \sigma)$ [23].

Predictor Óptimo [23]

La ecuación del sistema 2-44 puede escribirse como:

$$y(k + d) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}v(k + d) \quad (2-46)$$

Tomando la esperanza matemática del error de predicción.

$$\begin{aligned} E(y(k + d) - \hat{y}(k + d/k))^2 &= \\ E\left(Fv(k + d) + \frac{z^{-1}G}{C}y(k) + \frac{BF}{C}u(k) - \hat{y}(k + d/k)\right)^2 &= \\ = E(Fv(k + d))^2 + E\left(\frac{z^{-1}G}{C}y(k) + \frac{BF}{C}u(k) - \hat{y}(k + d/k)\right)^2 + \\ 2E\left(Fv(k + d)\left(\frac{z^{-1}G}{C}y(k) + \frac{BF}{C}u(k) - \hat{y}(k + d/k)\right)\right) & \quad (2-47) \end{aligned}$$

El último termino es cero puesto que $v(k + d)$ es independiente, y sobre el primer término no podemos influir, luego la mejor predicción de la salida se obtiene igualando a cero el segundo término, con lo que resulta que:

$$\hat{y}(k + d/k) = \frac{z^{-1}G(z^{-1})}{C(z^{-1})}y(k) + \frac{B(z^{-1})F(z^{-1})}{C(z^{-1})}u(k) \quad (2-48)$$

O bien

$$\hat{y}(k + d/k) = \frac{G(z^{-1})}{C(z^{-1})}y(k) + \frac{zB(z^{-1})F(z^{-1})}{C(z^{-1})}u(k) \quad (2-49)$$

siendo el error de predicción .

$$y(k + d + 1) - \hat{y}(k + d + 1/k) = F(z^{-1})v(k + d + 1) \quad (2-50)$$

2.3.3.3.- Regulación de mínima Varianza.

Este regulador óptimo pretende reducir el efecto de las perturbaciones sobre la salida. Para ello la estrategia de control consiste en calcular la señal de control $u(k)$, como una función de los valores disponibles en ese instante, o sea, $u(k-1), u(k-2), \dots, y(k), y(k-1), \dots$, de tal forma que se minimice el criterio:

$$J = E \left(y^2 \left(k + d/k \right) \right) \quad (2-51)$$

Se supone que sobre el sistema actúan perturbaciones estocásticas, por lo que el proceso estará descrito por su modelo ARMA [17], [23], de la siguiente forma:

$$A(z^{-1})y(k+d) = B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})v(k+d) \quad (2-52)$$

Donde los distintos polinomios y variables tienen el significado dado en el apartado anterior.

El mínimo valor se obtendrá cuando:

$$u(k) = - \frac{z^{-1}G(z^{-1})}{F(z^{-1})B(z^{-1})} y(k) \quad (2-53)$$

o bien

$$u(k) = - \frac{G(z^{-1})}{zB(z^{-1})F(z^{-1})} y(k) \quad (2-54)$$

A la vista de las expresiones obtenidas y comparándolas con la deducción del predictor óptimo en el apartado anterior, se puede interpretar el problema del regulador de mínima varianza como la determinación del predictor y busca la señal de control tal que la predicción coincida con la salida, en este caso $\hat{y}(k+d/k) = 0$.

2.3.3.4.- Control Predictivo Generalizado

El Control predictivo generalizado (GPC) fue propuesto por Clarke et al. (Clarke 1987a) [14],[23], y se ha convertido en uno de los métodos más populares en el ámbito del Control Predictivo tanto en el mundo industrial como en el académico. Se ha empleado con éxito en numerosas aplicaciones industriales (Clarke 1988), mostrando buenas prestaciones, a la vez que un cierto grado de robustez respecto a sobreparametrización o retardos mal conocidos. Puede resolver muchos problemas de control diferentes para un amplio campo de procesos con un número razonable de variables de diseño que son especificadas por el operario dependiendo del conocimiento previo del proceso y de los objetivos de control.

Pero a pesar de este éxito en la práctica, este método adolece de la ausencia de un análisis teórico completo que estudie la influencia de los parámetros de diseño (horizontes, secuencias de ponderación) sobre la estabilidad del bucle cerrado así como de resultados de robustez.

La idea básica del GPC es calcular una secuencia de futuras acciones de control de tal forma que minimice una función de coste multipaso. El índice a minimizar es la esperanza matemática de una función cuadrática que mide por un lado la distancia entre la salida predicha del sistema y una cierta trayectoria de referencia hasta el horizonte de predicción, y por otro el esfuerzo de control necesario para obtener dicha salida. Esta idea ha sido usada para la obtención de un controlador por asignación de polos generalizado que pertenece a la clase de los controladores de horizonte extendido y es una extensión de los bien conocidos controladores por asignación de polos.

El GPC tiene muchas ideas en común con otros controladores predictivos, ya que está basado en las mismas ideas pero posee a su vez algunas diferencias. Es capaz de proporcionar una solución explícita (en ausencia de restricciones), puede trabajar con procesos inestables o de fase no mínima e incorpora el concepto de horizonte de control así como la consideración en la función de coste de ponderación de los

incrementos en las acciones de control. Las diversas posibilidades disponibles para el GPC conducen a una gran variedad de objetivos de control comparado con otras realizaciones, algunas de las cuales pueden ser consideradas como subconjuntos o casos límites del GPC [23].

2.4. IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS

Cuando nosotros interactuamos con un sistema necesitamos algunos conceptos de como las variables se relacionan unas a otras, llamaremos a las relaciones entre las señales observadas un *modelo* del sistema [17]⁷. Los modelos matemáticos pueden ser caracterizados con varios adjetivos (de tiempo continuo o discreto, lineal o no lineal, determinístico o estocástico, total o distribuido, etc.) [5]⁸ significando el tipo de ecuación diferencial o en diferencias usado, el uso de los modelos matemáticos es inherente en todos los campos de la ingeniería y la física.

El modelo usado en una simulación por computador es un programa, para sistemas complejos donde un modelo es construido por muchos programas, tablas y subrutinas interconectadas se llama más apropiadamente un modelo software.

2.4.1. Modelo ARX [17]

La relación más básica entre la entrada y la salida es la ecuación diferencial lineal:

$$y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_ny(k-n) = b_1u(k-1) + \dots + b_mu(k-m) \quad (2-55)$$

Una forma pragmática de ver la ecuación (2-55) es como una forma de determinar el siguiente valor de la salida a partir de las observaciones previas.

$$y(k) = -a_1y(k-1) - \dots - a_ny(k-n)$$

⁷ System Identification – Theory for the User. Lennart Ljung .

⁸ Apuntes de Ingeniería de Control – Identificación de Sistemas ,Control Adaptativo ,Control Predictivo

$$+ b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m) \quad (2-56)$$

Para una notación más compacta, definimos los vectores:

$$\theta = [a_1 a_2 \dots a_n b_1 \dots b_m]^T \quad (2-57)$$

$$\varphi(k) = [-y(k-1) \dots -y(k-n) u(k-1) \dots u(k-m)]^T \quad (2-58)$$

Así podemos escribir:

$$y(k) = \varphi^T(k)\theta \quad (2-59)$$

Para realizar el cálculo de $y(k)$ a partir de los datos pasados, depende de los parámetros en θ , nosotros llamaremos este cálculo como $\hat{y}(k|\theta)$ y escribiremos como:

$$\hat{y}(k|\theta) = \varphi^T(k)\theta \quad (2-60)$$

2.4.2. Procedimiento de identificación de sistemas

La construcción de un modelo de datos [5], [17] consta de tres pasos:

1. Un conjunto de datos.
2. Un conjunto de modelos candidatos.
3. Una regla por la cual los modelos candidatos pueden ser evaluados utilizando los datos.

1. El registro de datos .- Los datos de entrada – salida son algunas veces registradas durante un específico experimento de identificación, donde el usuario puede determinar específicamente cual señal medir y cuando medir, así como también puede elegir la señal de entrada, el objetivo del experimento de diseño es hacer que los datos elegidos contengan la mayor información posible del sistema.

2. El conjunto de modelos o estructura del modelo.- Un conjunto de modelos candidatos son obtenidos por especificar dentro de cual colección de modelos nosotros vamos a buscar uno adecuado. Esto es sin duda lo más importante y al mismo tiempo la elección más difícil del proceso de identificación de sistemas. Algunas veces el conjunto de modelos son obtenidos después de un cuidadoso modelado. En este caso un modelo con

algunos parámetros físicos desconocidos es construido a partir de leyes de física básica y otras relaciones establecidas. En otros casos, los modelos lineales estándar se pueden emplear, sin referencia al fondo físico. Tal conjunto de modelos cuyos parámetros son básicamente vistos como vehículos para ajustar el ajuste a los datos y no reflejan las consideraciones físicas en el sistema, se llaman modelos de caja negra. El conjunto de modelos con parámetros ajustables con interpretación física pueden en consecuencia ser llamados de caja gris. Generalmente hablando una estructura del modelo es una aplicación con parámetros de entrada y salida pasadas Z^{t-1} [17].

3. Determinando los mejores modelos en el conjunto guiado por los datos. este es el método de identificación. La evaluación de la calidad del modelo se basa generalmente en la forma en que los modelos realizan cuando intentan reproducir los datos de medición.

2.4.3. Validación del Modelo

Después de haber realizado las tres elecciones anteriores, tenemos por lo menos implícitamente un modelo en particular: el que está en el conjunto que mejor describe los datos de acuerdo con el criterio elegido, queda entonces a la prueba de si este modelo es lo suficientemente bueno, es decir si es válido para su fin. Estas pruebas se conocen como la validación del modelo, involucran a varios procedimientos para evaluar cómo el modelo se refiere a los datos observados para el conocimiento previo, y para el uso previsto. Un comportamiento deficiente del modelo en estos aspectos hace que rechacemos el modelo, mientras que un buen rendimiento desarrollará una cierta confianza en él. Un modelo no puede ser aceptado como una descripción definitiva y verdadera del sistema, más bien, se puede en el mejor de los casos ser considerado como una buena descripción suficiente de ciertos aspectos que son de especial interés para nosotros [5], [6],[17].

2.4.4. El bucle de identificación de sistemas

El procedimiento de identificación de sistemas tiene un flujo lógico natural: primero recopilar datos, a continuación, elegir un modelo, a continuación, elegir el mejor modelo de esta serie. Es bastante probable que el primer modelo obtenido no pasará la prueba de validación del modelo. Nosotros debemos volver atrás y realizar las distintas etapas del procedimiento [5], [17].

El modelo puede ser deficiente por varias razones:

- El procedimiento numérico no puede encontrar el mejor modelo de acuerdo a nuestro criterio.
- El criterio no fue bien elegido.
- El conjunto de modelos no fue apropiado, ya que no contiene una descripción lo suficientemente buena para el sistema.
- El conjunto de datos no era lo suficientemente informativo para orientar en la selección de buenos modelos.

La mayor parte de una aplicación de identificación, de hecho, consiste en hacer frente a estos problemas, en particular, la tercera, de una manera iterativa guiado por la información previa y los resultados de los intentos anteriores [17].

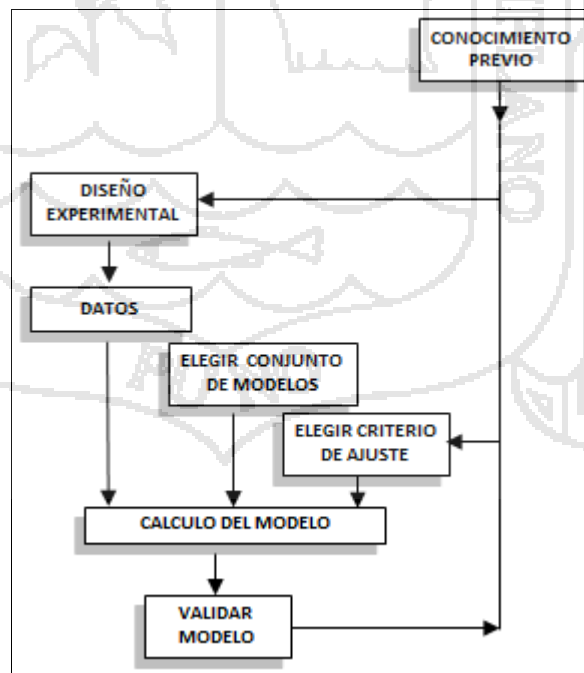


Figura 14: El bucle de identificación de sistemas.

2.4.5. Métodos recursivos de estimación de parámetros

En muchos casos es necesario tener un modelo del sistema disponible on-line mientras que el sistema está en funcionamiento. El modelo se debe basar en observaciones del momento actual. La necesidad de construir un modelo on-line típicamente surge ya que se requiere un modelo con el fin de tomar alguna decisión sobre el sistema [1], [5], [6][14] ,[17],. Esto podría ser:

- Qué entrada debe aplicarse en el siguiente instante de muestreo.
- Cómo deben ajustarse los parámetros de un filtro adaptable?
- Cuál es la mejor predicción de las siguientes salidas?
- Ha ocurrido alguna falla? de que tipo ?

Los métodos para hacer frente a estos problemas mediante un modelo ajustado en línea de algún tipo se llaman adaptativos, estos se aplican en el control adaptativo, filtrado adaptativo, procesamiento de señal adaptativo, predicción adaptativa [17].

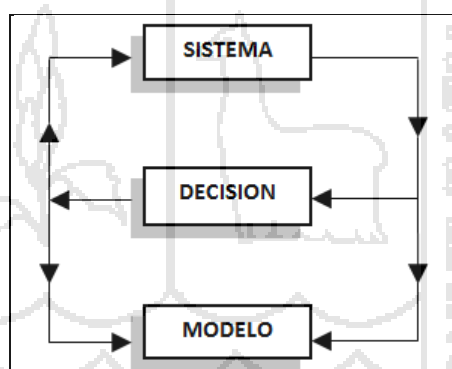


Figura 15:El método adaptativo.

El cálculo on-line del modelo tiene que ser hecho de tal forma que el que el procesamiento de la medición de una muestra con certeza pueda ser completado durante un intervalo de muestreo, de lo contrario la construcción del modelo no podrá mantener la correspondencia con el flujo de información.

Las técnicas de identificación que cumplen con este requisito se llaman métodos de identificación recursiva, ya que los datos de entrada y salida de medición se procesan de forma recursiva (secuencialmente) a medida que estén disponibles [1], [17].

Otros términos comúnmente usados para estas técnicas son la identificación on-line o en tiempo real, la estimación de parámetros adaptativos, o estimación de parámetros secuencial. Además de la utilización de métodos recursivos en los sistemas adaptativos, estos son importantes por las dos razones siguientes:

1.-Típicamente como nosotros veremos estos tomarán su propia estimación de la varianza de parámetros [5], [17]. Esto significa que los datos pueden ser completados desde el sistema y procesados hasta que se haya alcanzado un suficiente grado de exactitud del modelo.

2.-Los algoritmos de estimación on-line también servirán para la estimación de parámetros off-line.

2.4.6. El algoritmo de los mínimos cuadrados recursivos.

Para calcular el criterio que minimiza la estimación de los mínimos cuadrados ponderados [17], hacemos:

$$\hat{\theta}_t = \arg_{\theta} \min \sum_{k=1}^t \beta(t, k) [y(k) - \varphi^T(k)\theta]^2 \quad (2-61)$$

Si hacemos que

$$\hat{\theta}_t = \bar{R}^{-1}(t)f(t) \quad (2-62a)$$

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^t \beta(t, k)\varphi(k)\varphi^T(k) \quad (2-62b)$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^t \beta(t, k)\varphi(k)y(k) \quad (2-62c)$$

Para calcular Ec. 2-62, debemos formar la matriz y el vector en el tiempo t a partir de Z^t y resolver Ec. 2-62a. Si hemos calculado previamente $\hat{\theta}_{t-1}$ esto no será una ayuda inmediata, sin embargo está claro que $\hat{\theta}_t$ y $\hat{\theta}_{t-1}$ están muy relacionados.

2.4.6.1. Algoritmo Recursivo [17]

Supongamos que la secuencia de pesos tiene la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} \beta(t, k) &= \lambda(t)\beta(t-1, k) & 0 \leq k \leq t-1 \\ \beta(t, t) &= 1; \end{aligned} \quad (2-63)$$

Esto significa que:

$$\beta(t, k) = \prod_{k+1}^t \lambda(j) \quad (2-64)$$

Esto implica que:

$$\bar{R}(t) = \lambda(t)\bar{R}(t-1) + \varphi(t)\varphi^T(t) \quad (2-65a)$$

$$f(t) = \lambda(t)f(t-1) + \varphi(t)y(t) \quad (2-65b)$$

Entonces:

$$\hat{\theta}_t = \bar{R}^{-1}(t)f(t) = \bar{R}^{-1}(t)[\lambda(t)f(t-1) + \varphi(t)y(t)]$$

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \bar{R}^{-1}(t)\varphi(t)[y(t) - \varphi^T(k)\hat{\theta}_{t-1}] \quad (2-66)$$

Y luego tenemos:

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \bar{R}^{-1}(t)\varphi(t)[y(t) - \varphi^T(k)\hat{\theta}_{t-1}] \quad (2-67a)$$

$$\bar{R}(t) = \lambda(t)\bar{R}(t-1) + \varphi(t)\varphi^T(t) \quad (2-67b)$$

El cual es el algoritmo recursivo.

2.4.6.2. Usando una Matriz de inversión eficiente

Para evitar invertir $\bar{R}(t)$ en cada paso, es conveniente introducir:

$$P(t) = \bar{R}^{-1}(t) \quad (2-68)$$

Y aplicar el lema de inversión de matrices [1], [17]:

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[DA^{-1}B + C^{-1}]^{-1}DA^{-1} \quad (2-69)$$

A la Ec. 2-66, haciendo que $A = \lambda(t)\bar{R}(t-1)$; $B = D^T = \varphi(t)$ y $C=1$, nos da:

$$P(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \left[P(t-1) - \frac{P(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)P(t-1)}{\lambda(t) + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)} \right] \quad (2-70)$$

$$\bar{R}^{-1}(t)\varphi(t) = \frac{1}{\lambda(t)} P(t-1)\varphi(t) - \frac{1}{\lambda(t)} \frac{P(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)}{\lambda(t) + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)}$$

$$= \frac{P(t-1)\varphi(t)}{\lambda(t) + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)} \quad (2-71)$$

Resumiendo tenemos:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + L(t)[y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)] \quad (2-72a)$$

$$L(t) = \frac{P(t-1)\varphi(t)}{\lambda(t) + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)} \quad (2-72b)$$

$$P(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \left[P(t-1) - \frac{P(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)P(t-1)}{\lambda(t) + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)} \right] \quad (2-72c)$$

2.4.6.3. Caso Multivariable

Consideremos el caso para sistemas multivariables [17]:

$$\hat{\theta}_t = \arg_{\theta} \min \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t \beta(t,k) [y(k) - \varphi^T(k)\theta]^T \Lambda_k^{-1} [y(k) - \varphi^T(k)\theta] \quad (2-73)$$

Análogamente al caso de una sola variable, tenemos:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + L(t)[y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)] \quad (2-74)$$

$$L(t) = P(t-1)\varphi(t)[\lambda(t)\Lambda_t + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)]^{-1} \quad (2-75)$$

$$P(t) = \frac{P(t-1) - P(t-1)\varphi(t)[\lambda(t)\Lambda_t + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)]^{-1}\varphi^T(t)P(t-1)}{\lambda(t)} \quad (2-76)$$

2.5. Mecánica analítica de Euler-LaGrange-Hamilton

La dinámica analítica [10]⁹, [26]¹⁰ comprende una serie de métodos cuya característica principal es el tratamiento puramente abstracto, analítico, de los sistemas mecánicos. De esta forma, se separan al máximo las consideraciones físicas y geométricas necesarias para definir el movimiento, de las puramente matemáticas para plantear y solucionar las ecuaciones. Las

⁹ Comportamiento dinámico de un péndulo triple plano. Iván Jesús Rivas Campero, José Manuel Salcedo Solorio .

¹⁰ Introducción a la mecánica de Lagrange Hamilton. Terencio Soldovieri C.

primeras son necesarias para formular las coordenadas, enlaces y magnitudes cinéticas de un sistema dado; una vez realizada definición de un sistema mediante la adecuada selección de las magnitudes anteriores, los métodos de la mecánica analítica permiten obtener las ecuaciones de la dinámica (o las condiciones de la estática en su caso) de forma casi automática [26].

2.5.1. Sistemas con ligaduras

Los sistemas de partículas están, en general, sujetos a tres tipos de condiciones que determinan su movimiento en el espacio y en el tiempo [26]. Hasta ahora hemos considerado solamente dos tipos de estas condiciones:

- Las condiciones dinámicas expresadas mediante las fuerzas que actúan sobre el sistema mediante las ecuaciones del movimiento.
- Las condiciones iniciales expresadas habitualmente por los valores iniciales de la posición y la velocidad y/o por los valores de ciertas cantidades dinámicas conservadas.
- Las leyes de Newton están perfectamente diseñadas para investigar el comportamiento de sistemas sujetos a los dos tipos de condiciones anteriores. La situación es completamente distinta cuando el sistema está sujeto a ligaduras.
- Las condiciones geométricas o ligaduras aparecen cuando las coordenadas están sujetas a restricciones independientes de las fuerzas actuantes (por ejemplo partículas obligadas a moverse sobre una curva). Aparecen así fuerzas llamadas fuerzas de ligadura.

Si tales fuerzas fueran conocidas, bastaría sumarlas a las fuerzas del sistema para determinar su comportamiento. Sin embargo lo más frecuente es que conozcamos las ligaduras pero no las fuerzas resultantes. El procedimiento de LaGrange se adapta perfectamente a estos casos. Supongamos que el sistema tiene n grados de libertad y que lo hemos descrito por m coordenadas generalizadas. Existirán por tanto $k = m - n$ ligaduras. Las ligaduras son susceptibles de clasificarse desde distinto puntos de vista, aquí adoptaremos los siguientes:

2.5.1.1.- Ligaduras holónomas

Son las que pueden expresarse como una relación entre las coordenadas.

$$f_i(q_j, t) = 0 \quad i = 1 \dots k \quad j = 1 \dots m \quad (2 - 77)$$

En tal caso, estas k ecuaciones permiten eliminar k coordenadas [26].

2.5.1.2.- Ligaduras no holónomas

Son aquellas en que las ligaduras sólo pueden expresarse en términos de las velocidades, es decir:

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \dot{q}_j = a_i \quad i = 1 \dots k \quad (2 - 78)$$

Para trabajar con este tipo de ligaduras empleamos los multiplicadores de LaGrange definidos como k coeficientes λ_i tales que:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} = 0 \quad (2 - 79)$$

y por tanto :

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \sum_{j=1}^m a_{ij} \delta q_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \delta q_j = 0 \quad (2 - 80)$$

Teniendo en cuenta que el principio de Hamilton es:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \left(\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j dt = 0 \quad (2 - 81)$$

Podemos introducir (2 -79) en (2 -81) como:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \left(\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \right] \delta q_j dt = 0 \quad (2 - 82)$$

Tenemos pues las m ecuaciones:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \left(\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} = 0 \quad j = 1 \dots m \quad (2 - 83)$$

Que junto con las k ligaduras (2 -78) determinan las m coordenadas q_j y los k multiplicadores λ_i [26].

Conocidos los multiplicadores se pueden determinar las fuerzas de ligadura como:

$$(F_l)_j = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \quad (2 -84)$$

2.5.2. Coordenadas generalizadas

Un planteamiento básico de la mecánica analítica es la descripción de los sistemas mediante «coordenadas generalizadas». Se denominan coordenadas generalizadas a un conjunto cualquiera de parámetros $\{q_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, que sirven para determinar de manera unívoca la configuración del sistema [26].

Estos parámetros en principio pueden ser cualesquiera, sin necesitar ser homogéneos en cuanto a dimensiones. Por ejemplo, se pueden mezclar longitudes, ángulos, etc. Una idea clave, subyacente en la elección de coordenadas generalizadas, es que éstas pueden englobar en su propia elección los enlaces del sistema (todos o al menos una parte de ellos). De esta forma se consigue una doble ventaja: por una parte, el número de parámetros es menor que el correspondiente directamente a las coordenadas de todas las partículas. Por otra parte, el número de ecuaciones de enlace se ve igualmente reducido.

Un conjunto de coordenadas $\{q_i\}$ se denomina «libre» cuando se pueden variar de forma independiente entre sí; es decir, si las variaciones de las mismas, $\{\delta q_i\}$ se pueden escoger de forma arbitraria. Caso de que no sea así, será porque existe alguna ligadura que relacione dichas coordenadas, bien de tipo holónomo o no holónomo.

Cuando las coordenadas generalizadas no sean libres, se deberá a que subsisten condiciones de enlace formuladas de manera explícita. Estas se traducirán en relaciones entre las q_i (y también sus derivadas \dot{q}_i para enlaces no holónomos). Debido a estas ligaduras el número de grados de libertad es en realidad menor que n . Por el contrario, si las coordenadas son libres, su número es precisamente el número de grados de libertad del sistema [26].

Por ejemplo, en el sistema plano rígido de la **figura 16**, al tener una articulación, basta con una única coordenada angular ($n = 1 ; q_1 \equiv \theta$).

En esta elección ya quedan englobados implícitamente los enlaces, tanto los internos (ligaduras de sólido rígido) como los externos (articulación). El sistema tiene un grado de libertad.

Supongamos ahora el caso general de un sistema con un número finito de partículas (N), sujeto a m ligaduras holónomas y k no holónomas. Será posible su descripción mediante un conjunto más reducido de $n = 3N - m$ parámetros o coordenadas generalizadas.

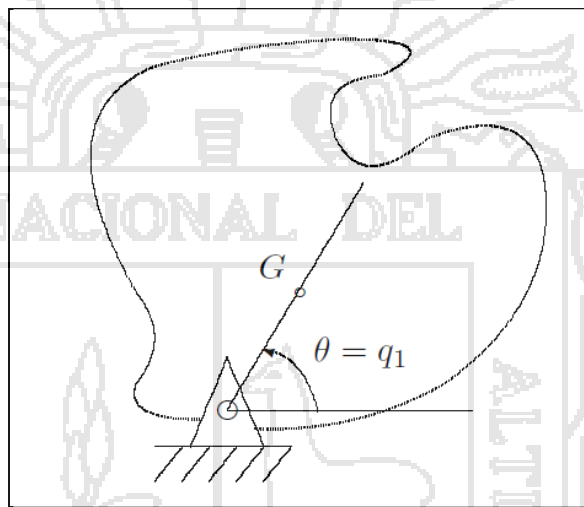
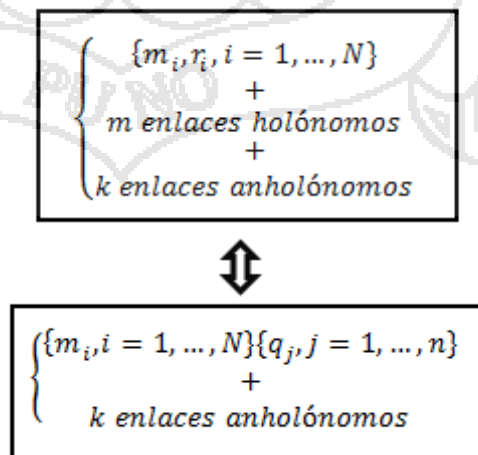


Figura 16: El movimiento del sólido articulado de la figura queda descrito por una única coordenada generalizada, el ángulo θ . De esta forma se engloban todos los enlaces, tanto internos (ligaduras de sólido rígido) como externos (rótula cilíndrica en O).

Esquemáticamente:



Esta reducción en el número de coordenadas se efectúa gracias a la eliminación de los m enlaces holónomos, que quedarán implícitos en la elección de las coordenadas generalizadas. Por el contrario, los k enlaces anholónomos no es posible eliminarlos, debiendo quedar planteados de forma expresa [26].

Un caso extremo de reducción en el número de coordenadas es el del sólido rígido. Considerado como un medio continuo, es infinitamente subdivisible, teniendo por tanto un número infinito de partículas y por tanto de coordenadas. Sin embargo, recordemos que los enlaces internos del sólido (distancia constante entre dos partículas cualesquiera) permiten reducir el número de coordenadas generalizadas del sólido a 6.

En general, existirán unas relaciones entre los vectores de posición de cada partícula y las coordenadas generalizadas del tipo:

$$r_i = r_i(q_j, t) \quad (i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n) \quad (2 - 85)$$

A los vectores de posición de cada partícula los denominaremos, por extensión, «coordenadas vectoriales». Está claro que éstas son equivalentes a definir las $3N$ coordenadas cartesianas correspondientes. Por otra parte, éstas sólo serán libres para un sistema sin ligadura ninguna; en cualquier otro caso, no formarán un conjunto libre.

Podrá existir dependencia del tiempo en la definición de las coordenadas generalizadas (2 - 85) cuando se hayan tomado sistemas de coordenadas móviles, o bien cuando haya enlaces móviles.

A partir de las relaciones (2 - 85), las velocidades se obtienen derivando:

$$v_i = \frac{dr_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad (2 - 86)$$

Llamadas «velocidades generalizadas» a los términos $\frac{dq_j}{dt} = \dot{q}_j$ [26].

2.5.3. El principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas

El **principio de d'Alembert** [35]¹¹, enunciado por Jean d'Alembert en su obra maestra *Tratado de dinámica* de 1743, establece que la suma de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo y las denominadas fuerzas de inercia forman un sistema de fuerzas en equilibrio. A este equilibrio se le denomina *equilibrio dinámico*, expresado por:

$$\sum_i (\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{0} \quad (2-87)$$

$$\sum_{i=1}^N (f_i - m_i \ddot{r}_i) \cdot \delta r_i = \mathbf{0}, \forall \{\delta r_i\} \text{ compatibles.} \quad (2-88)$$

Donde la suma se extiende sobre todas las partículas del sistema, siendo:

\mathbf{p}_i : Momentum de la partícula i -ésima.

\mathbf{F}_i : Fuerza externa sobre la partícula i -ésima.

$\delta \mathbf{r}_i$: Cualquier campo vectorial de desplazamientos.

El principio de d'Alembert es realmente una generalización de la segunda ley de Newton en una forma aplicable a sistemas con ligaduras, ya que incorpora el hecho de que las fuerzas de ligadura no realizan trabajo en un movimiento compatible. Por otra parte el principio equivale a las ecuaciones de Euler-LaGrange. LaGrange usó este principio bajo el nombre de *principio de velocidades generalizadas*, para encontrar sus ecuaciones, en la memoria sobre las libraciones de la Luna de 1764, abandonando desde entonces el principio de acción y basando todo su trabajo en el principio de D'Alembert durante el resto de su vida y de manera especial en su *Mécanique Analytique*. Tal cambio de actitud pudo estar influido por dos razones:

- En primer lugar, el principio de acción estacionaria está ligado a la existencia de una función potencial, cuya existencia no requiere en el principio de d'Alembert.
- En segundo lugar, el principio de acción se presta a interpretaciones filosóficas y teleológicas que no le gustaban a Lagrange.

¹¹ http://es.wikipedia.org/wiki/Principio_de_d'Alembert

Finalmente debe señalarse que el principio de d'Alembert es peculiarmente útil en la mecánica de sólidos donde puede usarse para plantear las ecuaciones de movimiento y cálculo de reacciones usando un campo de desplazamientos virtuales que sea diferenciable. En ese caso el cálculo mediante el principio de D'Alembert, que también se llama en ese contexto principio de los trabajos virtuales es ventajoso sobre el enfoque más simple de la mecánica newtoniana.

El principio de D'Alembert queda expresado en coordenadas generalizadas como:

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0, \forall \{ \delta q_j \} \text{ compatibles} \quad (2-89)$$

Esta expresión, al tratarse del principio de D'Alembert, puede ser considerada por tanto como ecuación fundamental de la dinámica [26].

Conviene notar que en (2-89) no se emplean fuerzas físicas en ningún término. Tan sólo entran los coeficientes Q_j , fuerzas generalizadas, calculadas directamente, o como coeficientes del trabajo virtual δW . Al igual que en el principio de D'Alembert, en la definición de Q_j tampoco intervienen las fuerzas de reacción de los enlaces lisos, que no realizan trabajo virtual [26], [35].

2.5.4. Forma básica de las ecuaciones de LaGrange

La expresión (2-89) es completamente general por lo que se puede aplicar a cualquier sistema, tanto con enlaces holónomos como no holónomos. En el caso en que todos los enlaces sean holónomos, será posible siempre establecer un conjunto de coordenadas libres $\{q_j\}$, en el que las variaciones $\{\delta q_j\}$ se puedan escoger de manera arbitraria, manteniendo la compatibilidad con los enlaces. En este caso, (2-89) equivale a enunciar que cada uno de los coeficientes de las $\{\delta q_j\}$ ha de anularse:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (2-90)$$

Estas expresiones son las llamadas ecuaciones de LaGrange, en su forma básica [26].

CAPITULO III

MÉTODO DE INVESTIGACIÓN



3.1. TIPO Y DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

El presente proyecto tiene un enfoque de investigación **cuantitativo**, ya que presenta un proceso secuencial y probatorio siguiendo un orden riguroso en los pasos para resolver el problema de investigación, realizando la recolección de datos, mediciones numéricas y análisis estadísticos con el fin de probar las hipótesis y teorías que explican el comportamiento del proceso estudiado. [31]

3.1.1. Tipo de Investigación.

Esta investigación, es del tipo **Experimental- Aplicada**, la investigación experimental se caracteriza por ser el más complejo y eficaz de los métodos empíricos, por lo que a veces se utiliza erróneamente como sinónimo de método empírico. Algunos lo consideran una rama tan elaborada que ha cobrado fuerza como otro método científico independiente con su propia lógica, denominada lógica experimental. Se emplea cuando la ciencia requiere de la experimentación para comprobar sus hipótesis y el investigador interviene, manipula las variables independientes y prepara las condiciones para abordar el problema.

Una investigación experimental tiene dos requisitos, el primero es la manipulación intencional de una o más variables independientes, y el segundo consiste en medir el efecto que la variable o variables independientes tienen en la variable dependiente. Esto es igualmente importante y como en la variable dependiente se observa el efecto, la medición debe de ser válida y confiable.

Una investigación experimental comprende los siguientes pasos principales a seguir durante su proceso de ejecución:

- Delimitar y definir el objeto de la investigación o problema.
- Plantear una hipótesis de trabajo.
- Elaborar el diseño experimental.
- Realizar el experimento.
- Analizar los resultados.
- Obtener conclusiones.
- Elaborar un informe por escrito.

Además, una investigación experimental se lleva a cabo para analizar si una o más variables independientes afectan a una o más variables dependientes, y por qué; considerando que una variable dependiente se mide, no se manipula. También en una investigación experimental pura, se permite la consulta de experimentos anteriores similares a lo que se está desarrollando, para poder verificar y validar el análisis que se va a efectuar, así como el de realizar un control interno de la situación experimental, con la finalidad de conocer la relación causal entre las variables propias al proyecto de investigación.

Es del tipo **Aplicada**, es la utilización de los conocimientos en la práctica, para aplicarlos, en la mayoría de los casos, en provecho de la sociedad, también conocida como práctica o empírica, busca la aplicación o utilización de los conocimientos que se adquieren, depende de los avances y resultados de la investigación básica, lo que le interesa a investigador son las consecuencias prácticas, esta investigación tiene aplicaciones en el campo de la robótica, estabilización de misiles ,estudio de vibraciones sísmicas, etc.

3.1.2. Nivel de Investigación.

El nivel de la investigación es del tipo Analítica y Descriptiva, porque se fundamenta en base a las teorías y formulaciones estudiadas y establecidas anteriormente por otros investigadores.

La investigación descriptiva se refiere a la etapa preparatoria del trabajo científico que permita ordenar el resultado de las observaciones de las conductas, las características, los factores, los procedimientos y otras variables de fenómenos y hechos. Este tipo de investigación no tiene hipótesis exacta. Ya que se fundamenta en una serie de análisis y prueba para llevar a cabo la valoración de la física. La investigación descriptiva busca especificar propiedades, características y rasgos importantes de cualquier fenómeno que se analice (Hernández, Fernández y Baptista [22], 2003, pp. 119).

La investigación analítica es un procedimiento que es más complejo con respecto a la investigación descriptiva, que consiste fundamentalmente en establecer la comparación de variables entre grupos de estudio y de control sin aplicar o manipular las variables, estudiando éstas según se dan naturalmente en

los grupos. Sin embargo, se refiere a la proposición de hipótesis que el investigador trata de probar o negar.

3.1.3. Diseño de Investigación.

Es una investigación experimental, en el que se manipulan deliberadamente una o más variables independiente (supuestas causa), para analizar las consecuencias de esa manipulación sobre una o más variables dependientes (supuestos efectos), dentro de una situación de control para el investigador. Es un procedimiento metodológico en el cual un grupo de individuos o conglomerado, son divididos en forma aleatoria en grupos de estudio, control y son analizados con respecto a un factor o medida que el investigador introduce para estudiar y evaluar.

3.1.4. Tema de Investigación.

El presente proyecto titulado : "DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROLADOR ADAPTATIVO AUTOSINTONIZADO PARA EL CONTROL DE UN PENDULO TRIPLE"; corresponde al área de Ingeniería Electrónica en las especialidades de Instrumentación y control; en el que se aborda distintos conocimientos referentes a la teoría de control avanzado, identificación de sistemas, dinámica analítica y programación.

3.2. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Para la recolección de datos se utilizo las siguientes técnicas e instrumentos:

Cuadro 1. Técnicas e Instrumentos De Recolección De Datos

TECNICAS	INSTRUMENTOS
<ul style="list-style-type: none"> • Registro bibliográfico • Análisis bibliográfico 	<ul style="list-style-type: none"> • Tesis y fuentes secundarias de información. • Hojas de datos de los componentes.

3.3. FASES DE LA INVESTIGACIÓN

La metodología utilizada para el desarrollo de la tesis se divide en las siguientes fases:

- **Fase 1.** *Revisión bibliográfica y estudio de proyectos antecedentes;* Se realiza el estudio y análisis de la teoría de control clásico y avanzado, estudio de identificación de sistemas, mecánica analítica de Euler – Lagrange – Hamilton, se estudia y analiza la dinámica del péndulo simple, doble y triple y los algoritmos de autolevantamiento.
- **Fase 2.** *Modelamiento matemático del péndulo triple;* Se realiza el modelamiento matemático usando la mecánica analítica de Euler – Lagrange – Hamilton del péndulo triple tanto en su forma estable como en su condición de autolevantamiento, además se integra este modelado con el modelo matemático del sistema motor – polea.
- **Fase 3.** *Diseño y simulación del controlador adaptativo autosintonizado;* Se diseña el controlador adaptativo y se simula en los programas de Matlab 7.10 ® y LabVIEW 2012 ®. En esta fase se comprueba el uso del control adaptativo en distintos sistemas dinámicos como péndulo simple, doble y triple para una mayor comprensión de la teoría de control avanzado.
- **Fase 4.** *Diseño del software y hardware necesario e implementación del sistema del péndulo triple;* En esta fase a partir de los resultados del diseño y las simulaciones realizadas, se procede a implementar el hardware necesario tanto la parte física como la circuitería electrónica necesaria para lectura de datos de los sensores de posición y envío de la señal de control hacia el motor haciendo uso de los distintos programas de diseño electrónico, también se diseña el software en LabVIEW 2012 Professional Development System que realizará los algoritmos necesarios para el control de la estabilidad del péndulo triple invertido.
- **Fase 5.** *Experimentación del sistema desarrollado;* Se realiza las pruebas de funcionamiento del sistema de control desarrollado, para esto usamos la técnica de prueba – error, que nos ayudara a corregir los

posibles errores que provoquen un mal funcionamiento del sistema ; de ser necesario se corregirá o rediseñara el controlador, software y hardware hasta alcanzar la respuesta deseada.

- **Fase 6.** *Corroboración de la verdad o falsedad de las hipótesis*

Una vez obtenido el correcto funcionamiento del sistema se validara o negara las hipótesis planteadas en el perfil de tesis.

- **Fase 7.** *Conclusión de datos de la investigación.*

Finalmente se realiza la conclusión de datos y recomendación para futuros trabajos.

3.4. CONDICIONES DE PRUEBA Y EVALUACIÓN DEL SISTEMA

El desarrollo y evaluación del presente proyecto de investigación se llevó a cabo bajo las siguientes condiciones de hardware y software:

- Computador Core i3 a 2.20Ghz con 4GB de RAM.
- Las simulaciones se realizaron utilizando el programa de Matlab 7.10 ®, la programación de los Microcontroladores se hizo en el PICC ,el diseño de los circuitos impresos y las placas se construyeron utilizando el programa Eagle 6.4.0, el software de control del sistema se realizó en LabVIEW 2012 Professional Development System, además se hizo uso de otros programas como el Proteus 7.10 , PICKIT 2 de microchip para la grabación de los programas en los PICs.
- La comunicación entre la PC y el sistema físico se realiza por medio del microcontrolador PIC 18F4550, el envío y recepción de datos se realiza vía el puerto USB mediante el protocolo Bulk Transfer.
- Se utiliza 4 señales de entrada analógica que corresponden a las posiciones lineal del carro y posiciones angulares de las varillas, la señal de control proveniente del algoritmo adaptativo se envía al PIC en un dato de un Byte, este dato es transferido al puerto B del PIC 16F877 ,para ser procesado con el fin de obtener las señales de sentido de giro y

porcentaje PWM que se envían al driver STK 6875 que controla el motor.

- Se utilizaron dos fuentes de alimentación, para esto se hace uso de dos transformadores simétricos de 12 V y 1 A, una es exclusivamente para la etapa de control del sistema, este comprende a los Microcontroladores PIC 18F4550 y 16F877, alimentación de los sensores y voltajes necesarios para el funcionamiento del driver STK 6875, la segunda fuente de alimentación es de 24 V. y es exclusiva para alimentar al driver de potencia que controla el motor .
- El módulo mecánico se construyó a base de aluminio, los sensores utilizados son potenciómetros, para medir la posición del carro se utilizó un potenciómetro multivoltas ya que su desplazamiento es de aproximadamente 80 centímetros, los ángulos de las varillas son medidas con potenciómetros comerciales, el actuador es un motor DC de imán permanente de 24 voltios.

3.5. ÁMBITO DE ESTUDIO

El presente trabajo de investigación titulado: “DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROLADOR ADAPTATIVO AUTOSINTONIZADO PARA EL CONTROL DE UN PENDULO TRIPLE” elaborado por el tesista Bach. Wilson Beto Mendoza Ccoa, se llevó a cabo en el domicilio del Investigador y en los laboratorios de la escuela profesional de Ingeniería Electrónica de la Universidad Nacional del Altiplano, ubicados en la Ciudad Universitaria, Puno, Perú.

Ubicación geográfica:

Latitud Sur : 15° 54’
Longitud Oeste : 70° 08’
Altitud : 3827 m.s.n.m.

Ubicación política:

Departamento : Puno

Provincia : Puno

Distrito : Puno

3.6. RECURSOS**3.6.1. Recursos Humanos**

El presente proyecto de investigación titulado “DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROLADOR ADAPTATIVO AUTOSINTONIZADO PARA EL CONTROL DE UN PENDULO TRIPLE” fue elaborado por el tesista Bach. Wilson Beto Mendoza Ccoa, con la supervisión de el director de investigación Ing. Marco Antonio Quispe Barra así como por el asesor Ing. Pedro Bejar Muñoz.

3.6.2. Recursos Materiales

Para la realización de este proyecto de investigación se utilizó los siguientes materiales y equipos:

- Computadora personal Acer ASPIRE :
 - ▶ Procesador Intel(R) Core i3 CPU 2.20 GHz.
 - ▶ 4GB de RAM.
 - ▶ Sistema operativo Windows 7 Ultimate de 32 bits.
- Estructura de aluminio para el sistema mecánico del péndulo triple.
- Microcontroladores PIC 18F4550 y PIC 16F877.
- Grabador de PICs , PICKIT 2 .
- Amplificadores operacionales TL081.
- Optoaclopadores 4N25.
- Driver de potencia STK 6875.
- Transformado simétrico de 12 V y 1A.
- Reguladores de voltaje 7805,7815, 7915 y 7824.

- Resistencias, condensadores, cristales de cuarzo de 4Mhz y 20MHz, diodos, diodos LED, placas de cobre, cable, estaño y demás componentes para armar el sistema de control electrónico .
- Software de MatLab 7.10 ® para la simulación y diseño del controlador.
- Software LabVIEW 2012 Professional Development System como interfaz grafica para el control y monitoreo de las señales del péndulo triple .
- Proteus 7.10 SP0 para las simulaciones de los circuitos de control, PIC-C para la programación de los PICs, Eagle 6.4.0. para el diseño del circuito impreso, entre otros.
- Instrumentos de medición (Tarjeta de adquisición de datos, voltímetro, frecuencímetro, osciloscopio, capacímetro, ohmímetro), componentes y herramientas de instrumentación electrónica.
- Otras herramientas básicas de construcción.

3.7. FINANCIAMIENTO DEL PROYECTO

El presente proyecto de investigación titulado “DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROLADOR ADAPTATIVO AUTOSINTONIZADO PARA EL CONTROL DE UN PENDULO TRIPLE” elaborado por el tesista Bach. Wilson Beto Mendoza Ccoa, es autofinanciado por el investigador.

En el siguiente cuadro se muestra el presupuesto utilizado para llevar a cabo este proyecto.

Cuadro 2: Financiamiento de la investigación.

Descripción	Cantidad	Costo (S/.)
Laptop Acer Aspire con procesador intel(R) Core i3 de 2.20GHz , 4 GB de RAM ,500 GB de ROM, con sistema operativo Windows 7 Ultimate de 32 bits .	1	2000
Software utilizados :		
▶ Matlab 2010 ® .		
▶ LabVIEW 2012 Professional Development System.		
▶ Eagle 6.4.0.	1	Versiones de prueba.
▶ PIC C Compiler version 4.033.		
▶ Proteus 7.10 .		
▶ PICKIT 2 de microchip.		
Sistema mecánico del péndulo triple .		
Estructura de Aluminio	1	200
Base de madera	1	20
Tornillos, tuercas y otros elementos de unión.		30
Motor DC de imán permanente de 24 V.	1	30
Engranajes y correa dentada		20
Sub Total		300
Sistema electrónico		
Transformadores simétricos de 15 V - 1 A .	2	40
Microcontrolador PIC 18F4550 de microchip	1	45
Microcontrolador PIC 16F877 de microchip	1	20
Potenciómetro multivoltas (25 vueltas) de 10K	1	5
Potenciómetro de 10 K	3	4

Condensadores de 2200 uF/50V	2	8
Condensador de 4700 uF/50V	1	6
Puente de diodos de 6 A.	2	5
Reguladores de voltaje 7805, 7815, 7915 y 7824.	1	6
Disipadores	4	6
Optoacopladores 4N25	2	4
Cristal de 4MHz y 20MHz	1	4
Conector de puerto USB tipo B	1	2
Cable USB apantallado de 2 mts	1	7
Zócalos de 40 y 8 pines	2	3
Pulsador normalmente abierto	1	2
Driver de potencia para el control bidireccional de motor DC STK 6875	1	5
Switch de inicio	1	3
Caja de control	1	6
Borneras de 3 pines	2	2
Conectores (molex) de 4 pines	6	3
Conectores (molex) de 6 pines	1	1
Capacitores de distintos valores.		20
Resistencias de distintos valores.		20
Diodos LED		2
Cables		10
Estaño		4
Placas de cobre	3	6
Acido Férrico	1	3
Tiñer	1	3
Cable de Extensión 220 V AC	1	3
Otros		20
Sub Total		278
TOTAL		2578

CAPITULO IV

EXPOSICIÓN, DISEÑO Y ANÁLISIS DE RESULTADOS



4.1. GENERALIDADES

Es este capítulo, se desarrollan y describen todos los procesos, cálculos matemáticos, métodos, algoritmos y técnicas empleadas en el desarrollo de la investigación, también se proporcionan los diagramas esquemáticos y códigos de programa, con la finalidad de facilitar y permitir su uso para futuras investigaciones.

El desarrollo de esta investigación comprende, el modelamiento matemático del sistema del péndulo triple, diseño del controlador adaptativo, simulación del sistema, diseño del sistema mecánico y circuito electrónico de control así como el diseño del software de control del sistema.

4.2. MODELAMIENTO MATEMÁTICO DEL PÉNDULO TRIPLE.

4.2.1. Modelamiento matemático del subsistema carro – péndulo triple.

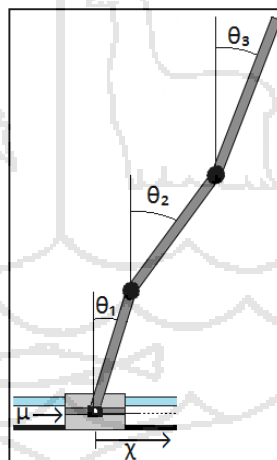


Figura 17: Subsistema carro – péndulo triple.

A diferencia del modelamiento dinámico clásico de sistemas usando el equilibrio de fuerzas establecido por la segunda ley de Newton, para este caso usaremos la formulación Lagrangiana que es un planteamiento alternativo para la obtención del modelo, basado en consideraciones energéticas, y está dada por la ecuación 2- 90:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (5-1)$$

Donde L es conocido como el Lagrangiano del sistema y está dado por:

$$L = E_c - E_p \quad (5-2)$$

E_c : Energía cinética del sistema .

E_p : Energía potencial del sistema .

q_j : Coordenadas generalizadas .

Q_j : Fuerzas o pares aplicados sobre el grado de libertad q_j .

Para el péndulo triple tenemos:

$$E_c = E_{c0} + E_{c1} + E_{c2} + E_{c3} \quad (5-3)$$

$$E_p = E_{p0} + E_{p1} + E_{p2} + E_{p3} \quad (5-4)$$

Donde los subíndices 0, 1, 2 y 3 indican la articulación referida a la posición, ángulo de la primera, segunda y tercera varilla de péndulo respectivamente.

Para la articulación q_0 referida a la posición tenemos que la energía cinética está dada por:

$E_{c0} = \frac{1}{2} m v^2$, donde denotaremos a la masa del carro como m_0 y la velocidad $v = \frac{dq_0}{dt} = \dot{q}_0$ por tanto nos resulta que:

$$E_{c0} = \frac{1}{2} m_0 \dot{q}_0^2 \quad (5-5)$$

Para la articulación q_1 la energía cinética será:

$E_{c1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$; Donde la masa m_1 representa la masa de la primera varilla del péndulo triple, y la velocidad v_1 representa la velocidad a la que gira esta varilla, y está dada por:

$$v_1^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \quad \text{donde:}$$

$$x = q_0 + l_1 \sin(q_1) \quad \text{y}$$

$$y = l_1 \cos(q_1)$$

Donde l_1 es la longitud al centro de masa de la varilla.

Reemplazando y resolviendo tenemos que:

$$Ec_1 = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_0^2 + \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{q}_0^2 + m_1\dot{q}_0\dot{q}_1l_1\cos(q_1) \quad (5-6)$$

Para la articulación q_2 la energía cinética será:

$Ec_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2$; Donde la masa m_2 representa la masa de la segunda varilla del péndulo triple, y la velocidad v_2 representa la velocidad a la que gira esta varilla, y está dada por:

$$v_2^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \text{ Donde:}$$

$$x = q_0 + L_1 \text{sen}(q_1) + l_2 \text{sen}(q_2) \text{ y}$$

$$y = L_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_2)$$

Donde l_1 y l_2 son las longitudes al centro de masa de las varillas de los péndulos, y $L_1 = 2l_1$ es la longitud de la varilla 1.

Reemplazando y resolviendo tenemos que:

$$Ec_2 = \frac{1}{2}m_2\dot{q}_0^2 + m_2L_1\dot{q}_0\dot{q}_1\cos(q_1) + m_2l_2\dot{q}_0\dot{q}_2\cos(q_2) + m_2L_1l_2\cos(q_1 - q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_2L_1^2\dot{q}_1^2 + m_2l_2^2\dot{q}_2^2 \quad (5-7)$$

Para la articulación q_3 la energía cinética será:

$Ec_3 = \frac{1}{2}m_3v_3^2$; Donde la masa m_3 representa la masa de la tercera varilla del péndulo triple, y la velocidad v_3 representa la velocidad a la que gira esta varilla, y está dada por:

$$v_3^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \text{ donde:}$$

$$x = q_0 + L_1 \text{sen}(q_1) + L_2 \text{sen}(q_2) + l_3 \text{sen}(q_3) \text{ y}$$

$$y = L_1 \cos(q_1) + L_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_3)$$

Donde l_3 es la longitud al centro de masa de la varilla 3, y L_1 y L_2 son las longitudes de la varilla 1 y 2 respectivamente.

Reemplazando y resolviendo tenemos que:

$$E_{c3} = \frac{1}{2} m_3 (\dot{q}_0^2 + 2L_1 \dot{q}_0 \dot{q}_1 \cos(q_1) + 2L_2 \dot{q}_0 \dot{q}_2 \cos(q_2) + 2l_3 \dot{q}_0 \dot{q}_3 \cos(q_3) + 2L_1 L_2 \cos(q_2 - q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2L_1 l_3 \cos(q_3 - q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_3 + 2L_2 l_3 \cos(q_3 - q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + L_1^2 \dot{q}_1^2 + L_2^2 \dot{q}_2^2 + l_3^2 \dot{q}_3^2)$$

(5-8)

Finalmente:

$$E_c = \frac{1}{2} a_0 \dot{q}_0^2 + \frac{1}{2} b_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} b_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} b_3 \dot{q}_3^2 + a_1 \dot{q}_0 \dot{q}_1 \cos(q_1) + a_2 \dot{q}_0 \dot{q}_2 \cos(q_2) + a_3 \dot{q}_0 \dot{q}_3 \cos(q_3) + a_2 L_1 \cos(q_2 - q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_3 L_1 \cos(q_3 - q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_3 + a_3 L_2 \cos(q_3 - q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_3$$

(5-9)

Dónde:

$$a_0 = m_0 + m_1 + m_2 + m_3$$

$$a_1 = m_2 L_1 + m_3 L_1 + m_1 l_1$$

$$a_2 = m_2 l_2 + m_3 L_2$$

$$a_3 = m_3 l_3$$

$$b_1 = m_1 L_1 + m_3 L_1 + m_1 l_1$$

$$b_2 = m_2 l_2^2 + m_3 L_2^2$$

$$b_3 = m_3 l_3^2$$

Para desarrollar el Lagrangiano necesitamos la energía potencial del sistema, esta está dada por:

$$E_p = E_{p0} + E_{p1} + E_{p2} + E_{p3}$$

Donde la energía potencial E_{p0} expresa la energía potencial del carro , y está dado por :

$$E_{p0} = 0 .$$

Para la primera varilla del péndulo, la energía potencial será:

$$E_{p1} = m_1 g l_1 \cos(q_1) \tag{5-10}$$

Para la segunda varilla del péndulo, la energía potencial será :

$$E_{p2} = m_1 g L_1 \cos(q_1) + m_2 g l_2 \cos(q_2) \tag{5-11}$$

Para la tercera varilla del péndulo, la energía potencial será:

$$E_{p3} = m_1 g L_1 \cos(q_1) + m_2 g L_2 \cos(q_2) + m_3 g l_3 \cos(q_3) \quad (5 - 12)$$

$$E_p = (m_1 g l_1 + m_2 g L_1 + m_3 g L_1) \cos q_1 + (m_2 g l_2 + m_3 g L_2) \cos q_2 + m_3 g l_3 \cos q_3 \quad (5 - 13)$$

Ordenando tenemos:

$$E_p = c_1 \cos q_1 + c_2 \cos q_2 + c_3 \cos q_3 \quad (5 - 14)$$

Donde:

$$\begin{aligned} c_1 &= m_1 g l_1 + m_2 g L_1 + m_3 g L_1 \\ c_2 &= m_2 g l_2 + m_3 g L_2 \\ c_3 &= m_3 g l_3 \end{aligned} \quad (5 - 15)$$

Para formar el Lagrangiano usamos las ecuaciones (5 - 9) y (5-14) y reemplazamos en las ecuaciones (5 - 1) y (5 - 2)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, \dots, n).$$

Para la articulación q_0 tenemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_0} = F, \quad \text{donde } F \text{ es la fuerza que se le imprime al carro.}$$

Resolviendo las derivadas y ordenando tenemos:

$$\begin{aligned} a_0 \ddot{q}_0 + a_1 (\cos q_1 \ddot{q}_1 - \operatorname{sen} q_1 \dot{q}_1^2) + a_2 (\cos q_2 \ddot{q}_2 - \operatorname{sen} q_2 \dot{q}_2^2) + \\ a_3 (\cos q_3 \ddot{q}_3 - \operatorname{sen} q_3 \dot{q}_3^2) = F \end{aligned} \quad (5 - 16)$$

Para la articulación q_1 tenemos:

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$, despreciaremos las fricciones de desplazamiento del carro así como al movimiento de las articulaciones de los péndulos así como las inercias rotatorias de los ejes.

Resolviendo las derivadas y ordenando tenemos que:

$$a_1(\cos q_1 \ddot{q}_0 - g \sin q_1) + a_4(\cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_2 - \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_2^2) + a_5(\cos(q_3 - q_1) \ddot{q}_3 - \sin(q_3 - q_1) \dot{q}_3^2 + b_1 \ddot{q}_1) = 0 \quad (5-17)$$

Para la articulación q_2 tenemos:

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0$, despreciaremos las fricciones de desplazamiento del carro así como al movimiento de las articulaciones de los péndulos así como las inercias rotatorias de los ejes.

Resolviendo las derivadas y ordenando tenemos que:

$$a_2(\cos q_2 \ddot{q}_0 - g \sin q_2) + a_4(\cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_1 + \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_1^2) + a_6(\cos(q_3 - q_2) \ddot{q}_3 - \sin(q_3 - q_2) \dot{q}_3^2 + b_2 \ddot{q}_2) = 0 \quad (5-18)$$

Para la articulación q_3 tenemos:

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_3} = 0$, despreciaremos las fricciones de desplazamiento del carro así como al movimiento de las articulaciones de los péndulos así como las inercias rotatorias de los ejes.

Resolviendo las derivadas y ordenando tenemos que:

$$a_3(\cos q_3 \ddot{q}_0 - g \sin q_3) + a_5(\cos(q_3 - q_1) \ddot{q}_1 + \sin(q_3 - q_1) \dot{q}_1^2) + a_6(\cos(q_3 - q_2) \ddot{q}_2 - \sin(q_3 - q_2) \dot{q}_2^2 + b_3 \ddot{q}_3) = 0 \quad (5-19)$$

Donde $a_4 = a_2 L_1$; $a_5 = a_3 L_1$; $a_6 = a_3 L_2$.

Resumiendo tenemos:

$$a_0\ddot{q}_0 + a_1(\cos q_1\ddot{q}_1 - \text{sen}q_1\dot{q}_1^2) + a_2(\cos q_2\ddot{q}_2 - \text{sen}q_2\dot{q}_2^2) + a_3(\cos q_3\ddot{q}_3 - \text{sen}q_3\dot{q}_3^2) = F$$

$$a_1(\cos q_1\ddot{q}_0 - g\text{sen}q_1) + a_4(\cos(q_2 - q_1)\ddot{q}_2 - \text{sen}(q_2 - q_1)\dot{q}_2^2) + a_5(\cos(q_3 - q_1)\ddot{q}_3 - \text{sen}(q_3 - q_1)\dot{q}_3^2 + b_1\ddot{q}_1) = 0$$

$$a_2(\cos q_2\ddot{q}_0 - g\text{sen}q_2) + a_4(\cos(q_2 - q_1)\ddot{q}_1 + \text{sen}(q_2 - q_1)\dot{q}_1^2) + a_6(\cos(q_3 - q_2)\ddot{q}_3 - \text{sen}(q_3 - q_2)\dot{q}_3^2 + b_2\ddot{q}_2) = 0$$

$$a_3(\cos q_3\ddot{q}_0 - g\text{sen}q_3) + a_5(\cos(q_3 - q_1)\ddot{q}_1 + \text{sen}(q_3 - q_1)\dot{q}_1^2) + a_6(\cos(q_3 - q_2)\ddot{q}_2 - \text{sen}(q_3 - q_2)\dot{q}_2^2 + b_3\ddot{q}_3) = 0$$

4.2.2. Modelamiento matemático del subsistema Motor – Polea.

El modelamiento matemático para el subsistema motor polea se hará usando la ley de voltajes de Kirchhoff .Ya que la inductancia del motor es pequeña despreciaremos el efecto causado por este en el modelo:

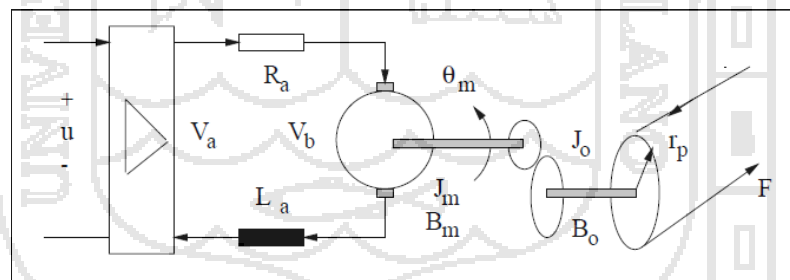


Figura 18: Subsistema motor polea.

De la figura podemos deducir que:

$$R_a i_a + V_b = K_A \cdot u = V_a \tag{5 - 20}$$

El voltaje contraelectromotriz está dado por:

$$V_b = K_b \frac{d\theta}{dt} \tag{5 - 21}$$

Para el subsistema mecánico aplicamos la segunda ley de Newton a el movimiento rotatorio, obtenemos:

$$T_m = J_{eq}\ddot{\theta}_m + B_{eq}\dot{\theta}_m + nFr_p \quad (5 - 22)$$

Donde:

$$J_{eq} = J_m + n^2(J_o + J_p) \quad (5 - 23)$$

$$B_{eq} = B_m + n^2B_o \quad (5 - 24)$$

El torque producido en el servomotor es proporcional a la corriente de armadura, por lo tanto obtenemos la ecuación siguiente:

$$T_m = K_m i_a \quad (5 - 25)$$

Sustituyendo la ecuación 5-22 en 5 - 25 y despejando para i_a , obtenemos:

$$i_a = \frac{J_{eq}}{K_m} \ddot{\theta}_m + \frac{B_{eq}}{K_m} \dot{\theta}_m + \frac{nFr_p}{K_m} \quad (5 - 26)$$

Sustituyendo las ecuaciones 5 - 26 y 5 - 22 y despejando para F obtenemos finalmente:

$$F = \frac{K_m K_A}{R_a n r_p} u - \frac{J_{eq}}{n r_p} \ddot{\theta}_m - \left(\frac{B_{eq}}{n r_p} + \frac{K_m K_b}{R_a n r_p} \right) \dot{\theta}_m \quad (5 - 27)$$

Para transformar el desplazamiento angular del motor en movimiento horizontal del carro en función del radio de la polea y del factor de reducción del motor, empleamos:

$$\theta_m = \frac{x}{n r_p} \quad (5 - 28)$$

Sustituyendo la última relación en 5 - 27 tenemos la ecuación general del subsistema motor - polea, y está dada por:

$$F = \frac{K_m K_A}{R_a n r_p} u - \frac{J_{eq}}{n^2 r_p^2} \ddot{x} - \left(\frac{B_{eq}}{n^2 r_p^2} + \frac{K_m K_b}{R_a n^2 r_p^2} \right) \dot{x} \quad (5 - 29)$$

Asignamos las siguientes variables para nuestra ecuación 5 -27, así:

$$K_x = \frac{K_m}{R_a n r_p}$$

$$J_2 = \frac{J_{eq}}{n r_p}$$

$$B_x = \frac{B_{eq}}{n r_p} + \frac{K_m K_b}{R_a n r_p}$$

Haciendo que $x = q_0$.

Nos queda:

$$F = K_x K_A u - J_2 \ddot{q}_0 - B_x \dot{q}_0 \quad (5 - 30)$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación (5 - 16) del subsistema carro - péndulo triple, tenemos:

$$a_0 \ddot{q}_0 + a_1 (\cos q_1 \ddot{q}_1 - \text{sen} q_1 \dot{q}_1^2) + a_2 (\cos q_2 \ddot{q}_2 - \text{sen} q_2 \dot{q}_2^2) + a_3 (\cos q_3 \ddot{q}_3 - \text{sen} q_3 \dot{q}_3^2) = K_x K_A u - J_2 \ddot{q}_0 - B_x \dot{q}_0 \quad (5 - 31)$$

Ordenando tenemos finalmente:

$$\left(\frac{a_0 + J_2}{K_x K_A} \right) \ddot{q}_0 + \frac{B_x}{K_x K_A} \dot{q}_0 + \frac{a_1}{K_x K_A} (\cos q_1 \ddot{q}_1 - \text{sen} q_1 \dot{q}_1^2) + \frac{a_2}{K_x K_A} (\cos q_2 \ddot{q}_2 - \text{sen} q_2 \dot{q}_2^2) + \frac{a_3}{K_x K_A} (\cos q_3 \ddot{q}_3 - \text{sen} q_3 \dot{q}_3^2) = u \quad (5 - 32)$$

Agrupando las ecuaciones (5 - 17), (5 - 18), (5 - 19) y (5 - 27) y reescribiendo en la forma :

$$D(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = \tau \quad (5 - 33)$$

Obtenemos el siguiente resultado que representa la dinámica del sistema del péndulo triple:

$$D(q) = \begin{bmatrix} d_0 & d_1 \cos q_1 & d_2 \cos q_2 & d_3 \cos q_3 \\ a_1 \cos q_1 & b_1 & a_2 L_1 \cos(q_2 - q_1) & a_3 L_1 \cos(q_3 - q_1) \\ a_2 \cos q_2 & a_2 L_1 \cos(q_2 - q_1) & b_2 & a_3 L_2 \cos(q_3 - q_2) \\ a_3 \cos q_3 & a_2 L_1 \cos(q_2 - q_1) & a_3 L_2 \cos(q_3 - q_2) & b_3 \end{bmatrix} \quad (5 - 34)$$

Donde:

$$d_0 = \frac{a_0 + J_2}{K_x K_A}$$

$$d_1 = \frac{a_1}{K_x K_A}$$

$$d_2 = \frac{a_2}{K_x K_A}$$

$$d_3 = \frac{a_3}{K_x K_A}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \frac{B_x}{K_x K_A} & -d_1 \text{sen} q_1 \dot{q}_1 & -d_2 \text{sen} q_2 \dot{q}_2 & -d_3 \text{sen} q_3 \dot{q}_3 \\ 0 & 0 & a_2 L_1 \text{sen}(q_2 - q_1) \dot{q}_2 & a_3 L_1 \text{sen}(q_3 - q_1) \dot{q}_3 \\ 0 & a_2 L_1 \text{sen}(q_2 - q_1) \dot{q}_1 & 0 & -a_3 L_2 \text{sen}(q_3 - q_2) \dot{q}_3 \\ 0 & a_3 L_1 \text{sen}(q_2 - q_1) \dot{q}_1 & a_3 L_2 \text{sen}(q_3 - q_2) \dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5 - 35)$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -c_1 \text{sen} q_1 \\ -c_2 \text{sen} q_2 \\ -c_3 \text{sen} q_3 \end{bmatrix} \quad (5 - 36)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5 - 37)$$

Para expresar la ecuación (5 - 33) en su representación en el espacio de estados, debemos despejar \ddot{q} , nos queda:

$$\ddot{q} = D^{-1}[\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q)] \quad (5 - 38)$$

La inversa de D existe ya que esta es una matriz cuadrada simétrica definida positiva, definiremos nuestras variables de estado como:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (5 - 39)$$

4.2.3. Modelamiento matemático en MATLAB

Las ecuaciones anteriormente desarrolladas son llevadas al programa del MATLAB para las simulaciones respectivas.

```

%% MODELAMIENTO MATEMATICO DEL PENDULO TRIPLE

clc;close all ;
syms xp u m0 m1 m2 m3 l1 l2 l3;
syms x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8;

%Momento de inercia de los links
J1=0;
J2=0;
J3=0;

% longitud al centro de masas
lc1=0.5*l1;
lc2=0.5*l2;
lc3=0.5*l3;

% Coeficiente de gravitación
g=9.81;

% constantes para simplificacion
a0=m0+m1+m2+m3;
a1=m2*l1+m3*l1+m1*lc1;
a2=m2*lc2+m3*l2;
a3=m3*lc3;

b1=J1+(m1*lc1*lc1)+(m2*l1*l1)+(m3*l1*l1);
b2=J2+(m2*lc2*lc2)+(m3*l2*l2);
b3=J3+m3*lc3*lc3;

c1=g*a1;
c2=g*a2;
c3=g*a3;

% Fricción Viscosa
bc=0; k1=0; k2=0; k3=0;

% Matriz de Inercia M(q)
% Definimos los estados como
% q =[x1 x2 x3 x4]
% qp=[x5 x6 x7 x8]
% donde x1:=posicion del carro, x2:=posicion angular 1
% x3:=posicion angular 2 , x4:=posicion angular 3
% x5:=velocidad del carro x6:=velocidad angular 1
% x7:=velocidad angular 2 x8:=velocidad angular 3

% PARAMETROS DEL MOTOR
rp = 0.019; n = 11/75;Jo = 0;
Jm = 6.37e-6;mp = 0.045;
Jp = mp*rp^2/2;
Jeq = Jm + n^2*(Jo + Jp);
Bm = 4.23e-6; Bo =4.23e-8; Beq = Bm + n^2*Bo;
Km = 86.02e-3; Kb = 86.47e-3; Ra = 37.38; KA = 4.8;

```

```

J2 = Jeq/(n^2*rp^2);
Kx = Km/(Ra*n*rp);
Bx = Beq/(n^2*rp^2) + Kb*Km/(n^2*rp^2*Ra);
KxA=Kx*KA;

%Elementos de la matriz de Inercias
M11=a0/KxA+J2/KxA;
M12=a1/KxA*cos(x2);
M13=a2/KxA*cos(x3);
M14=a3/KxA*cos(x4);

M21=a1*cos(x2);
M22=b1;
M23=a2*l1*cos(x3-x2);
M24=a3*l1*cos(x4-x2);

M31=a2*cos(x3);
M32=a2*l1*cos(x3-x2);
M33=b2;
M34=a3*l2*cos(x4-x3);

M41=a3*cos(x4);
M42=a3*l1*cos(x4-x2);
M43=a3*l2*cos(x4-x3);
M44=b3;

%Vector de Fuerzas de Coriolis y de Fuerzas Centripetas
C11=bc/KxA+Bx/KxA;
C12=a1/KxA*sin(x2)*x6;
C13=a2/KxA*sin(x3)*x7;
C14=a3/KxA*sin(x4)*x8;

C21=0;
C22=k1+k2;
C23=-k2-a2*l1*sin(x3-x2)*x7;
C24=-a3*l1*sin(x4-x2)*x8;

C31=0;
C32=-k2+a2*l1*sin(x3-x2)*x6;
C33=k2+k3;
C34=-k3-a3*l2*sin(x4-x3)*x8;

C41=0;
C42=a3*l1*sin(x4-x2)*x6;
C43=-k3+a3*l2*sin(x4-x3)*x7;
C44=k3;

%Matriz de Gravedad
G1=0;
G2=-c1*sin(x2);
G3=-c2*sin(x3);
G4=-c3*sin(x4);

```

```

% Matriz de Fricción Viscosa y Seca
% Fr1=b1*x2+k1*tanh(beta*x2);
% Fr2=b2*x4+k2*tanh(beta*x4);

% Variables Articulares y Derivadas
q=[x1;x2;x3;x4];
qp=[x5;x6;x7;x8];

% Matrices
M=[M11,M12,M13,M14;
M21,M22,M23,M24;
M31,M32,M33,M34;
M41,M42,M43,M44];

C=[C11,-C12,-C13,-C14;
C21,C22,C23,C24;
C31,C32,C33,C34;
C41,C42,C43,C44];

G=[G1;G2;G3;G4];
% w=1;
% f=5*sin(w*t);
f=u;
T=[f;0;0;0];

N=C*qp+G;

% Ecuaciones de Estado
qpp=inv(M)*(T-N);

% Sustituyendo en el punto de equilibrio.
Equi=subs(qpp,{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,u},{0,0,0,0,0,0,0,0,0});
;

xp=[x5; x6; x7; x8; qpp(1);qpp(2);qpp(3); qpp(4)];

```

4.2.4. Variables y parámetros del proceso

El siguiente cuadro muestra las variables y los valores de los parámetros del péndulo triple.

Cuadro 3. Variables y parámetros del Péndulo Triple.

Símbolo	Descripción	Valor /Formula
q_0	Posición del carro	M
q_1	Posición angular de la primera varilla	Rad
q_2	Posición angular de la segunda varilla	Rad
q_3	Posición angular de la tercera varilla	Rad
U	Señal de control	Volts.
m_0	Masa del carro	0.370 Kg
m_1	Masa de la primera varilla	0.073 Kg
m_2	Masa de la segunda varilla	0.087 Kg
m_3	Masa de la tercera varilla	0.096 Kg
m_p	Masa de la polea	0.045Kg
L_1	Longitud de la primera varilla	0.25mts
L_2	Longitud de la segunda varilla	0.27mts
L_3	Longitud de la tercera varilla	0.29mts
G	gravedad	9.81 m/s^2
R_a	Resistencia de armadura del motor DC	37Ω
L_a	Inductancia del motor	Se despreció
K_b	Constante contraelectromotriz	$86.47 \times 10^{-3} \text{ V/rad}$
K_m	Constante de torque del motor	$86.02 \times 10^{-3} \text{ V/rad}$
J_m	Inercia del eje primario del motor	$6.37 \times 10^{-6} \text{ kg} - \text{m}^2$
B_m	Fricción viscosa del eje primario	$4.23 \times 10^{-6} \frac{\text{N} - \text{m}}{\text{rad/s}}$
J_o	Inercia del eje secundario	$1.22 \times 10^{-6} \text{ kg} - \text{m}^2$
B_o	Fricción viscosa del eje secundario	$2.13 \times 10^{-8} \frac{\text{N} - \text{m}}{\text{rad/s}}$
N	Factor de reducción de velocidad de los engranes	0.1467
r_p	Radio de la polea	0.019m
J_p	Momento de inercia de la polea	$8.1225 \times 10^{-6} \text{ kg} - \text{m}^2$
K_A	Ganancia del amplificador	4.8
T	Periodo de muestreo	0.01

4.2.5. Linealización del sistema.

Una vez obtenido el modelo no lineal del sistema péndulo triple, es necesario linealizar el sistema alrededor de un punto de equilibrio, para nuestro caso linealizaremos alrededor del punto $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, u\} = \{0,0,0,0,0,0,0,0,0\}$ ya que las variaciones de los ángulos q_1, q_2, q_3 son pequeñas alrededor de 0.

El código utilizado en el MATLAB para realizar esta tarea es :

```
% Linealización
A1=diff(xp,x1);
A2=diff(xp,x2);
A3=diff(xp,x3);
A4=diff(xp,x4);
A5=diff(xp,x5);
A6=diff(xp,x6);
A7=diff(xp,x7);
A8=diff(xp,x8);
A=subs([A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7
A8], {x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,u}, {0,0,0,0,0,0,0,0,0});

B1=diff(xp(1),u);
B2=diff(xp(2),u);
B3=diff(xp(3),u);
B4=diff(xp(4),u);
B5=diff(xp(5),u);
B6=diff(xp(6),u);
B7=diff(xp(7),u);
B8=diff(xp(8),u);
B=subs([B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7
B8]', {x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,u}, {0,0,0,0,0,0,0,0,0});
%% Parámetros
% masa del carrito
m0=0.370;

% masas de los péndulos
m1=0.073;
m2=0.087;
m3=0.096;

% longitud de los péndulos
l1=0.25;
l2=0.27;
l3=0.29;

%Momento de inercia de los links
J1=0;
J2=0;
J3=0;
```

```

% longitud al centro de masas
lc1=0.5*l1;
lc2=0.5*l2;
lc3=0.5*l3;

% Coeficiente de gravitación
g=9.81;

% constantes para simplificación
a0=m0+m1+m2+m3;
a1=m2*l1+m3*l1+m1*lc1;
a2=m2*lc2+m3*lc2;
a3=m3*lc3;
a4=a2*l1;
a5=a3*l1;
a6=a3*lc2;

b1=J1+(m1*lc1*lc1)+(m2*l1*l1)+(m3*l1*l1);
b2=J2+(m2*lc2*lc2)+(m3*lc2*lc2);
b3=J3+m3*lc3*lc3;
    
```

% MODELO LINEAL DEL PROCESO

```

A=subs(A);
B=subs(B);

C=[1 0 0 0 0 0 0 0
    0 1 0 0 0 0 0 0
    0 0 1 0 0 0 0 0
    0 0 0 1 0 0 0 0];

D=[0];
    
```

Dándonos los siguientes resultados:

0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1
0	-3.551	2.2568	-0.77652	-21.578	0	0	0
0	500.36	-617.94	212.63	172.62	0	0	0
0	-900.29	1360.7	-548.37	-159.84	0	0	0
0	838.21	-1483.8	727.51	148.81	0	0	0

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.2684 \\ -26.147 \\ 24.21 \\ -22.54 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.2.6. Modelo en espacio de estado discreto

Utilizaremos el Matlab para obtener el modelo discreto del sistema, para esto usamos la siguiente instrucción:

$$[G, H] = c2d(A, B, T)$$

Donde A es la matriz de estado en tiempo continuo, B es la matriz de entrada en tiempo continuo y T representa el periodo de muestreo, para obtener el periodo de muestreo se hizo pruebas experimentales en el sistema físico real, en el que se pudo observar que se adquirirían aproximadamente 100 muestras por segundo, por lo tanto se consideró un periodo de muestreo de 10ms o 0.01 segundos.

La matriz de estado y entrada en tiempo discreto se muestra a continuación:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -0.00016723 & 0.00010772 & -3.7207e-005 & 0.0089943 & -5.6483e-007 & 3.6187e-007 & -1.248e-007 \\ 0 & 1.0253 & -0.03145 & 0.010862 & 0.0081295 & 0.010084 & -0.00010406 & 3.5886e-005 \\ 0 & -0.04582 & 1.0693 & -0.027959 & -0.0076295 & -0.00015161 & 0.010229 & -9.2464e-005 \\ 0 & 0.042818 & -0.075653 & 1.037 & 0.0071303 & 0.00014147 & -0.00025019 & 0.010122 \\ 0 & -0.032651 & 0.021325 & -0.0073936 & 0.80575 & -0.00016723 & 0.00010772 & -3.7207e-005 \\ 0 & 5.1405 & -6.4078 & 2.221 & 1.5873 & 1.0253 & -0.03145 & 0.010862 \\ 0 & -9.3357 & 14.132 & -5.703 & -1.5103 & -0.04582 & 1.0693 & -0.027959 \\ 0 & 8.7554 & -15.431 & 7.526 & 1.4169 & 0.042818 & -0.075653 & 1.037 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.00015234 \\ -0.0012314 \\ 0.0011556 \\ -0.00108 \\ 0.029423 \\ -0.24042 \\ 0.22876 \\ -0.21462 \end{bmatrix}$$

4.3. ESTIMADOR DE PARÁMETROS DEL PROCESO

El controlador adaptativo utilizado necesita de un bloque de estimación o identificación de parámetros del proceso, de modo que los parámetros estimados coincidan con los parámetros reales. Para estimar los parámetros de un proceso es común utilizar el método de los mínimos cuadrados recursivos, pero este método presenta problemas numéricos ya que su algoritmo tiene características divergentes, es decir que en cada iteración las variables usadas tienden a tomar valores muy grandes hasta el punto de tender al infinito, causando problemas al programa de control; para evitar esto se utilizó una mejora de este algoritmo, además al estimar para varias salidas es necesario usar el Método de los Mínimos Cuadrados Recursivos Mejorados Multivariable.

Para nuestro sistema, tenemos:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (5 - 40)$$

En este paso estimaremos las matrices de estado G y H a partir de las señales de entrada $u(k)$ y las variables de salida, en este caso tomaremos las variables de estado $\{x_1(k), x_2(k), x_3(k), x_4(k), x_5(k), x_6(k), x_7(k), x_8(k)\}$ y las denotaremos por \hat{G}, \hat{H} , para esto reordenaremos la ecuación (5 - 40) de la forma siguiente:

$$Y(k) = \hat{\theta}(k)\varphi^T(k) \quad (5 - 41)$$

El método de los MCRM consta de los siguientes pasos:

- 1.- Obtener el vector de parámetros inicial a partir de los datos del modelo del proceso.

$$\hat{\theta}(0) = [G \ H \ 0] \quad (5 - 42)$$

- 2.- Obtener el valor inicial del parámetro $\zeta(0) = [0]$.

Y el regresor está dado por:

$$\varphi(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ x_3(k) \ x_4(k) \ x_5(k) \ x_6(k) \ x_7(k) \ x_8(k) \ u(k) \ 1] \quad (5 - 43)$$

- 3.- Denotaremos la matriz de covarianza inicial como $P = \alpha I$, donde I es la matriz identidad de orden 10 y α es una constante que debe ser mucho mayor a 1, se tomo un valor de $\alpha = 1000$.

- 4.- Tomar nuevas mediciones de las variables de salida $(x_1(k), x_2(k), x_3(k), x_4(k), x_5(k), x_6(k), x_7(k), x_8(k))$ y de la señal de entrada $u(k)$ y expresar en la forma $Y(k) = \hat{\theta}(k)\varphi^T(k)$.

- 5.- Computar el valor de:

$$\rho(k) = \max(1, \|\psi(k)\|); \psi_n = \psi/\rho(k) \quad (5 - 44)$$

- 6.- Determinar la matriz $N(k)$ aplicando la factorización de cholesky en:

$$N(k)N(k)^T = P(k) \quad (5 - 45)$$

- 7.- Calcular la matriz de escalamiento $S(k)$ que minimiza el número condicional del producto $S(k)N(k)$.

- 8.- Computar:

$$\begin{aligned}
 P_S(k) &= S(k)P(k)S(k) \\
 \psi_{nS} &= [S(k)]^{-1}\psi_n \\
 r(k) &= 1 + \psi_{nS}^T(k)P_S(k-1)\psi_{nS}(k) \\
 \lambda(k) &= 1 - \frac{1}{2} \left[r(k) - \sqrt{r^2(k) - \frac{4\|P_S(k-1)\psi_{nS}(k)\|^2}{\text{tr } P_S(k-1)}} \right] \\
 e_n(k) &= Y(k)/\rho(k) - \psi_n^T(k) \hat{\theta}(k-1) \\
 j(k) &= [\psi_{nS}^T(k+1)P_S(k)\psi_{nS}(k+1) + \lambda(k)] \\
 \hat{\theta}(k+1) &= \hat{\theta}(k) + S^{-1}(k)P_S(k)\psi_{nS}(k)e_n(k+1)/j(k) \\
 H_{nS}(k+1) &= P_S(k)\psi_{nS}(k+1) \times [\psi_{nS}^T(k+1)P_S(k)\psi_{nS}(k+1) + \lambda(k)]^{-1} \\
 P_S(k+1) &= [I - H_{nS}(k+1)\psi_{nS}^T(k+1)]P_S(k)/\lambda(k) \\
 tt &= \text{abs} \left[\frac{\max \text{ eig}(P_S)}{\min \text{ eig}(P_S)} \right]
 \end{aligned}$$

(5 - 46)

9.-Implementar el criterio para parar la estimación y encontrar una nueva matriz de escalamiento.

4.3.1. Pasos para la estimación en el MATLAB.

Los pasos 1,2 y 3 se dan por:

```

T = 0.01; % PERIODO DE MUESTREO
[G,H]=c2d(Ac,Bc,T);%el comando de matlab hace que G=e^(AT) y H =int(...)
alfa=1000;N=10; Pi = alfa*eye(10); % MATRIZ P INICIAL
theta_p = [G H]'; % PARAMETROS DEL PROCESO
thetai = [G H zeros(8,1)]'; % PARAMETROS INICIALES
lambda = 0.99; % FACTOR DE MEMORIA

```

Los pasos 4,5,6,7y 8 se muestran a continuación :

```

% PROCEDIMIENTO DE IDENTIFICACION
psi_p = [Y(:, :, k-1); uc(k-1)];
Y(:, :, k) = X; % MODELO LINEAL DEL PROCESO
psi = [psi_p;1]; % VECTOR DE DATOS
nor = max(1,norm(psi));
psin = psi/nor;
Qch = chol(Pi');
S = inv(diag(Qch*ones(N,1),0));
Ps = S*Pi*S;
psins = inv(S)*psin;

```

```

rt = 1 + psins'*Ps*psins;
LF = 1 - (rt-sqrt(rt^2-4*norm(Ps*psins)^2/trace(Ps)))/2;
e = Y(:, :, k)/nor-thetai'*psin; % ERROR DE ESTIMACION
div = psins'*Ps*psins + LF;
theta = thetai'+e*(inv(S)*Ps*psins/div)'; % VECTOR DE PARAMETROS
Ge = theta(:,1:8); % PARAMETRO G ESTIMADO
He = theta(:,9); % PARAMETRO H ESTIMADO
Ce = theta(:,10); % PARAMETRO C ESTIMADO
Hns = Ps*psins/div;
Ps = Ps/LF - Hns*psins'*Ps/LF;
tt = abs(max(eig(Ps))/min(eig(Ps))) );

```

El paso 9, el criterio para parar la estimación y encontrar una nueva matriz de escalamiento está dada por:

```

cmax = 100; cmin = 15;
if tt <= cmin,
thetai = theta'; Pi = Ps;
elseif tt >= cmax,
Qchnew = chol(Ps');
Snew = inv(diag(Qchnew*ones(N,1),0));
Psnew = Snew*Ps*Snew;
Pi = Psnew; thetai = theta';
end

```

Para probar la eficacia de este algoritmo de identificación de parámetros, se varían los parámetros en $t=4$ y luego en $t=8$ segundos, estos resultados se muestran a continuación:

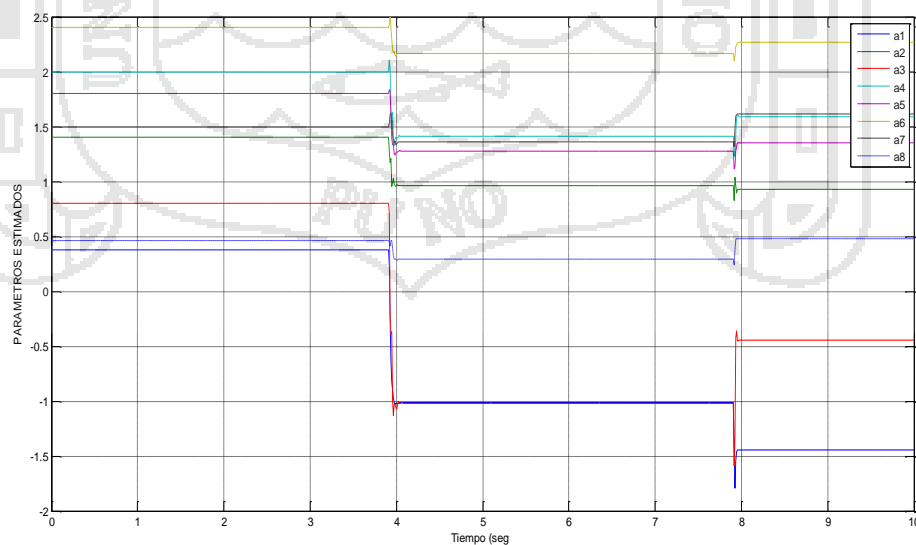


Figura 19: Identificación de parámetros.

De acuerdo con los resultados obtenidos, el estimador de parámetros es capaz de identificar el sistema frente a los cambios en la dinámica del proceso debidos a perturbaciones e incertidumbres no modeladas.

4.4. DISEÑO DEL CONTROLADOR ADAPTATIVO

Una vez obtenido las matrices de estado y entrada estimados diseñamos el controlador, el controlador adaptativo utilizará como estructura o ley de control un control proporcional integral óptimo cuadrático con realimentación de estados.

El esquema del controlador propuesto se muestra a continuación.

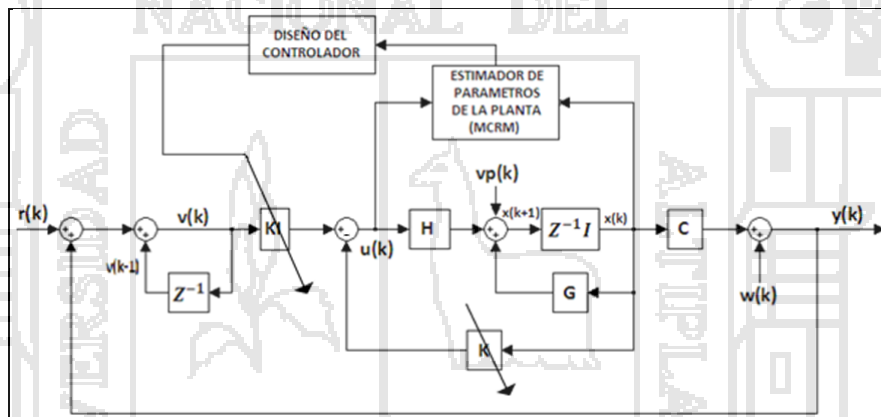


Figura 20: Estructura del sistema de control Adaptativo del Péndulo Triple.

Del gráfico podemos observar que.

$$x(k + 1) = \hat{G}x(k) + \hat{H}u(k) \quad (5 - 47)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (5 - 48)$$

$$v(k) = v(k - 1) + r(k) - y(k) \quad (5 - 49)$$

$$u(k) = -Kx(k) + KIv(k) \quad (5 - 50)$$

donde :
$$K = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4 \ k_5 \ k_6 \ k_7 \ k_8] \quad (5 - 51)$$

De la ecuación (5 – 49) obtenemos:

$$v(k + 1) = v(k) + r(k + 1) - y(k + 1)$$

Sustituyendo (5 – 48) para $y(k + 1)$ tenemos:

$$\begin{aligned} &= v(k) + r(k + 1) - C[\hat{G}x(k) + \hat{H}u(k)] \\ &= C\hat{G}x(k) + v(k) - C\hat{H}u(k) + r(k + 1) \end{aligned} \quad (5 - 52)$$

Definiendo nuevas variables de estado tenemos:

$$\begin{bmatrix} x(k + 1) \\ v(k + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{G} & \mathbf{0} \\ C\hat{G} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{H} \\ -C\hat{H} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} r(k + 1) \quad (5 - 53)$$

Si la entrada de referencia se toma constante tenemos que:

$$r(k) = r(k + 1) = r \quad (5 - 54)$$

Entonces cuando k se aproxima a infinito:

$$\begin{bmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{G} & \mathbf{0} \\ C\hat{G} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{H} \\ -C\hat{H} \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} r(\infty) \quad (5 - 55)$$

Si definimos:

$$\begin{aligned} x_e(k) &= x(k) - x(\infty) \\ v_e(k) &= v(k) - v(\infty) \end{aligned} \quad (5 - 56)$$

Entonces la ecuación de error se convierte en:

$$\begin{bmatrix} x_e(k + 1) \\ v_e(k + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{G} & \mathbf{0} \\ C\hat{G} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{H} \\ -C\hat{H} \end{bmatrix} u_e(k) \quad (5 - 57)$$

Donde:

$$u_e(k) = -\mathbf{K}x_e(k) + \mathbf{K}Iv_e(k) = -[\mathbf{K} - \mathbf{K}I] \begin{bmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \quad (5 - 58)$$

Ahora definimos nuevas ecuaciones de estado, tenemos:

$$\hat{\mathbf{G}}\mathbf{1} = \begin{bmatrix} \hat{G} & \mathbf{0} \\ C\hat{G} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (5 - 59)$$

$$\hat{\mathbf{H}}\mathbf{1} = \begin{bmatrix} \hat{H} \\ -C\hat{H} \end{bmatrix} \quad (5 - 60)$$

La nueva matriz de ganancia de retroalimentación de estados será:

$$K1 = -[K - KI] \tag{5 - 61}$$

La señal de control estará dada por:

$$w(k) = u_e(k) \tag{5 - 62}$$

Las variables de estado serán:

$$\varepsilon(k) = \begin{bmatrix} x_e(k) \\ v(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1e}(k) \\ x_{2e}(k) \\ x_{3e}(k) \\ x_{4e}(k) \\ x_{5e}(k) \\ x_{6e}(k) \\ x_{7e}(k) \\ x_{8e}(k) \\ x_{9e}(k) \end{bmatrix} \tag{5 - 63}$$

Entonces nos queda:

$$\begin{aligned} \varepsilon(k + 1) &= \widehat{G1}\varepsilon(k) + \widehat{H1}w(k) \\ w(k) &= -K1\varepsilon(k) \end{aligned} \tag{5 - 64}$$

El problema consiste en determinar la matriz **K1** que minimice el siguiente índice de desempeño cuadrático:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\varepsilon^T Q \varepsilon + w^T R w] \tag{5 - 65}$$

Donde Q y R se escogen como:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y $R = [100]$

Donde Q es una matriz hermitiana semidefinida positiva que pondera la importancia del vector de estados $\varepsilon(k)$, en este caso se da mayor peso a las posiciones angulares del péndulo con valores de 100, mientras que a la posición del carro se le da un valor de 1 ya que el sensor del carro es más exacto que los sensores usados para medir los ángulos, al integrador se le asigna un valor de 1 para evitar la saturación. La matriz R pondera la importancia de la señal de control $u(k)$ por tanto este valor será de 100 para evitar la saturación en los amplificadores y así evitar las no linealidades en el sistema.

4.4.1. Diseño del controlador en Matlab

En el siguiente programa el sistema se fija un Set Point de 0.5 metros para la posición del carro y 0 radianes para las posiciones angulares de las varillas.

```

ref=0.5;v(1)=0;uc(1)=0;uc(2) = 0;
X1(2)=0;X2(2)=0;X3(2)=0;X4(2)=0;X5(2)=0;X6(2)=0;X7(2)=0;X8(2)=0;
X=[0 0 0 0 0 0 0 0]';
Q = [ 1 0 0 0 0 0 0 0 0
      0 100 0 0 0 0 0 0 0
      0 0 100 0 0 0 0 0 0
      0 0 0 100 0 0 0 0 0
      0 0 0 0 1 0 0 0 0
      0 0 0 0 0 1 0 0 0
      0 0 0 0 0 0 1 0 0
      0 0 0 0 0 0 0 1 0
      0 0 0 0 0 0 0 0 1];
R = [100];
Ge1 = [Ge zeros(8,1)
       -Cc*Ge 1];
He1 = [He;-Cc*He];
P = zeros(9,9);
for i=1:800
P = Q + Ge1'*P*Ge1 -Ge1'*P*He1*inv(R+He1'*P*He1)*He1'*P*Ge1;
end
K1 = inv(R+He1'*P*He1)*He1'*P*Ge1;
[KK,PP] = dlqr(Ge1,He1,Q,R); K1=KK, P=PP
KK=K1;
K = [KK(1) KK(2) KK(3) KK(4) KK(5) KK(6) KK(7) KK(8)]; KI = - KK(9);

```



```

X=[X1(k) X2(k) X3(k) X4(k) X5(k) X6(k) X7(k) X8(k)]';
y(k)=Cc*X;
y(k)=v(k-1)+ref-y(k);
uc(k)=-K*[X1(k) X2(k) X3(k) X4(k) X5(k) X6(k) X7(k) X8(k)]'+KI*v(k);

X=Ge*X+He*uc(k);
X1(k+1)=[1 0 0 0 0 0 0 0]*X;
X2(k+1)=[0 1 0 0 0 0 0 0]*X;
X3(k+1)=[0 0 1 0 0 0 0 0]*X;
X4(k+1)=[0 0 0 1 0 0 0 0]*X;
X5(k+1)=[0 0 0 0 1 0 0 0]*X;
X6(k+1)=[0 0 0 0 0 1 0 0]*X;
X7(k+1)=[0 0 0 0 0 0 1 0]*X;
X8(k+1)=[0 0 0 0 0 0 0 1]*X;
    
```

4.4.2. Respuestas Gráficas

Las respuestas del sistema sujetas a un Set Point de 0.5 metros para la posición del carro y 0 radianes para las posiciones angulares de los péndulos, se muestran a continuación:

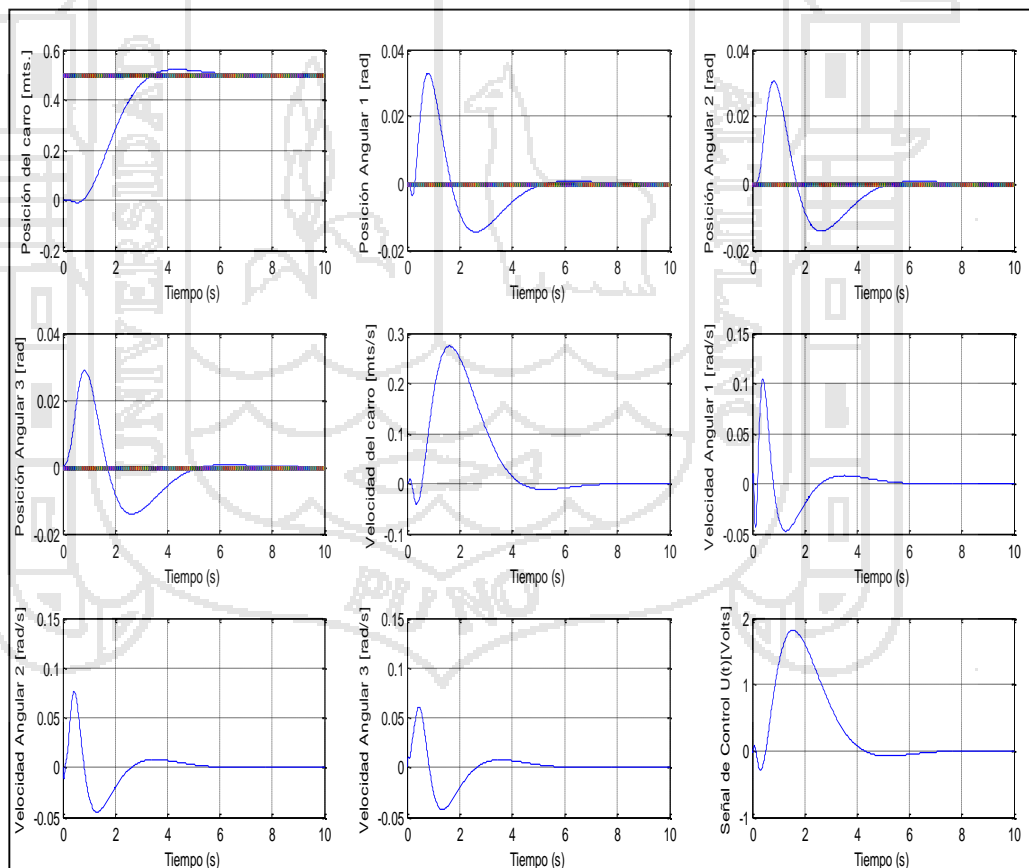


Figura 21: Respuestas del sistema a un Set Point de 0.5 m. (carro) y 0 radianes (varillas).

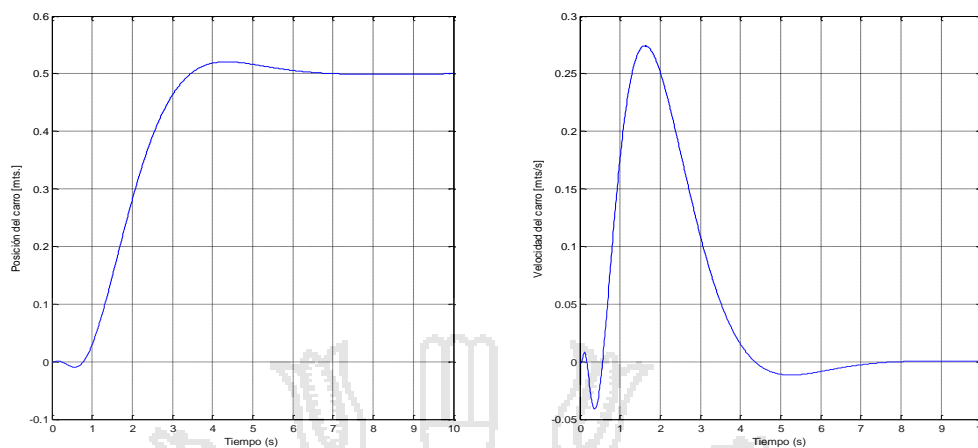


Figura 22: Posición y velocidad lineal del carro .

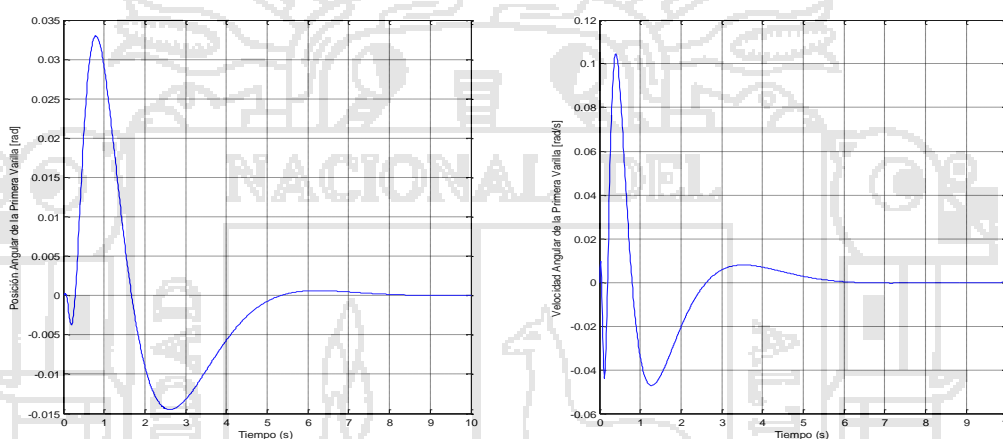


Figura 23: Posición y velocidad angular de la primera varilla.

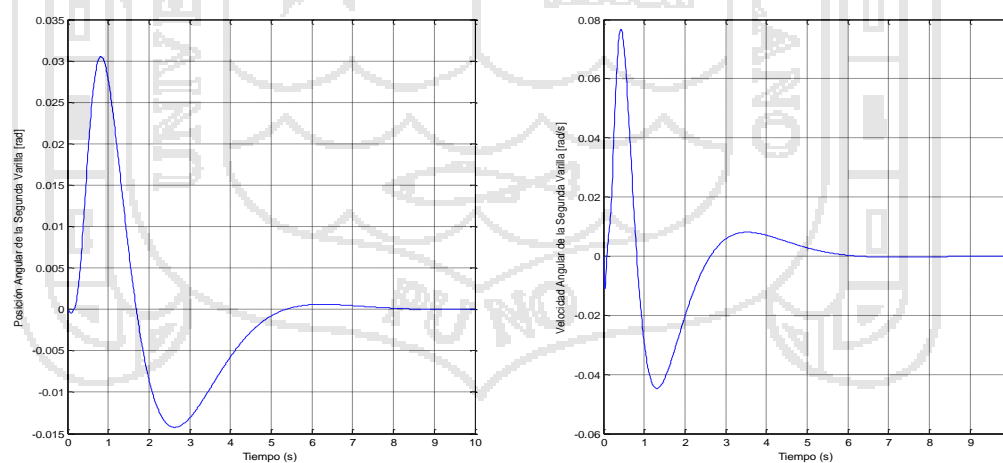


Figura 24: Posición y velocidad angular de la segunda varilla.

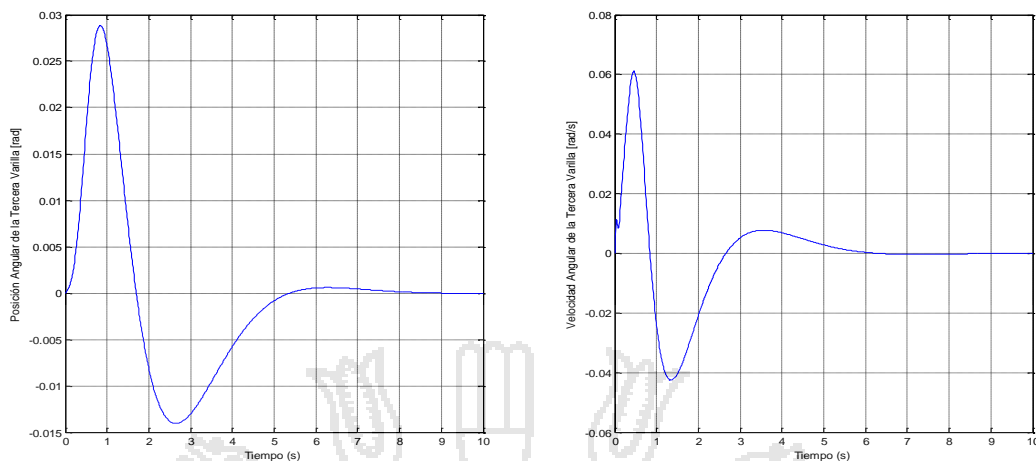


Figura 25: Posición y velocidad angular de la tercera varilla.

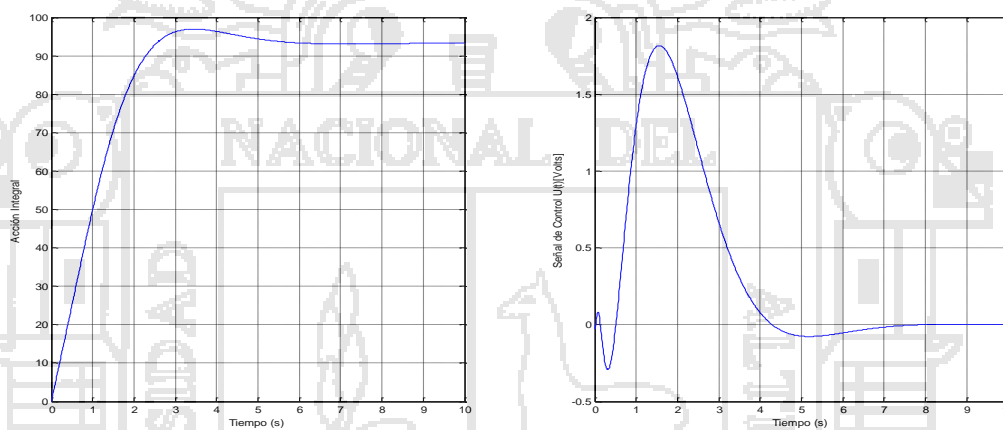


Figura 26: Acción integral y señal de control $u(k)$.

4.4.3. Prueba de la adaptabilidad del controlador.

Para probar la adaptabilidad del controlador frente a cambios en los parámetros y en la señal de entrada, se realiza variaciones en los parámetros del sistema en los tiempos de 15, 27, 45, 60 y 75 segundos. En la siguiente gráfica se muestra cómo evolucionan los parámetros estimados del controlador.

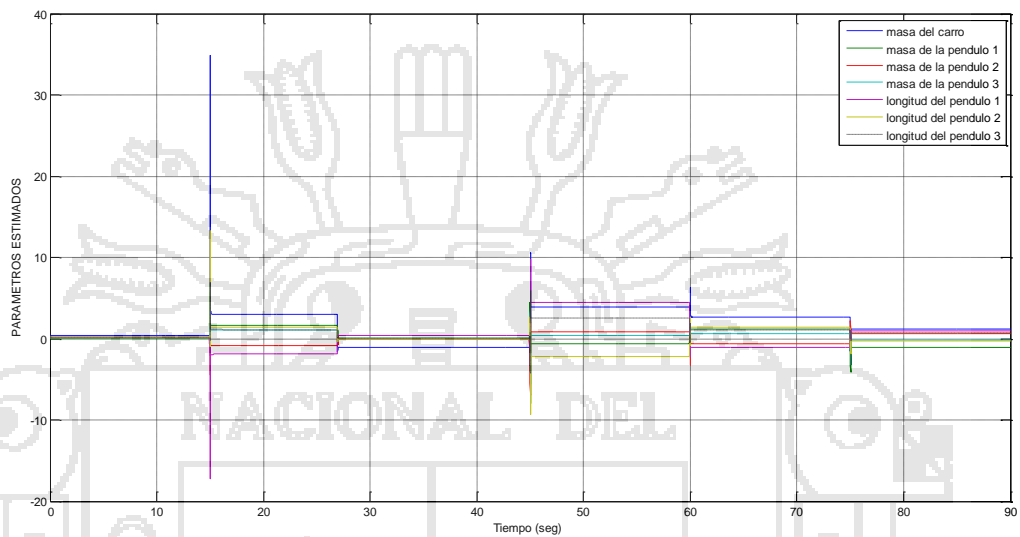


Figura 27: Estimador de parámetros.

La respuesta del controlador adaptativo se muestra a continuación:

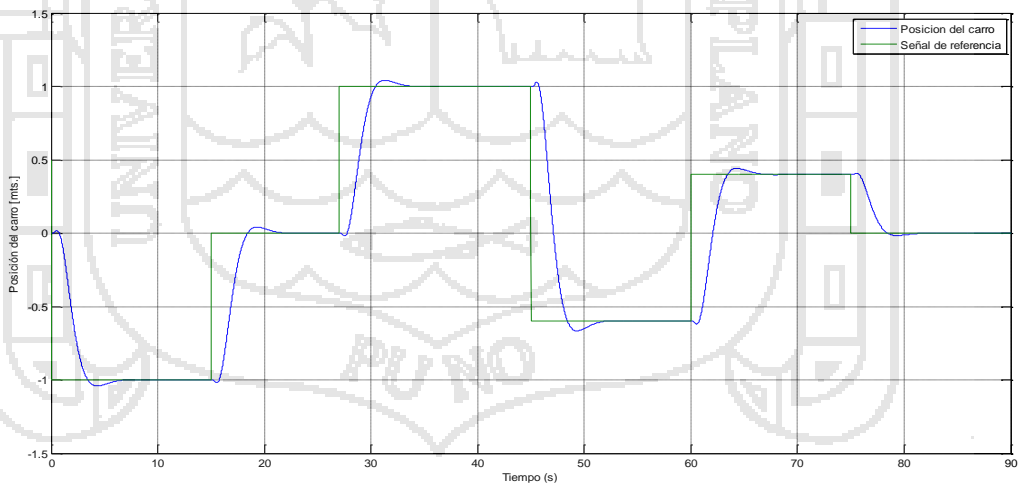


Figura 28: Sistema lineal variable con Control Adaptativo (Posición del carro).

De la figura se observa que el controlador adaptativo responde a las variaciones en la señal de entrada.

Las siguientes figuras muestran el comportamiento de las señales de posición angular de las varillas, se puede observar que a pesar de los cambios en la señal de entrada los péndulos no superan los 0.15 radianes o 8.5 grados, por lo tanto el sistema responde según lo esperado.

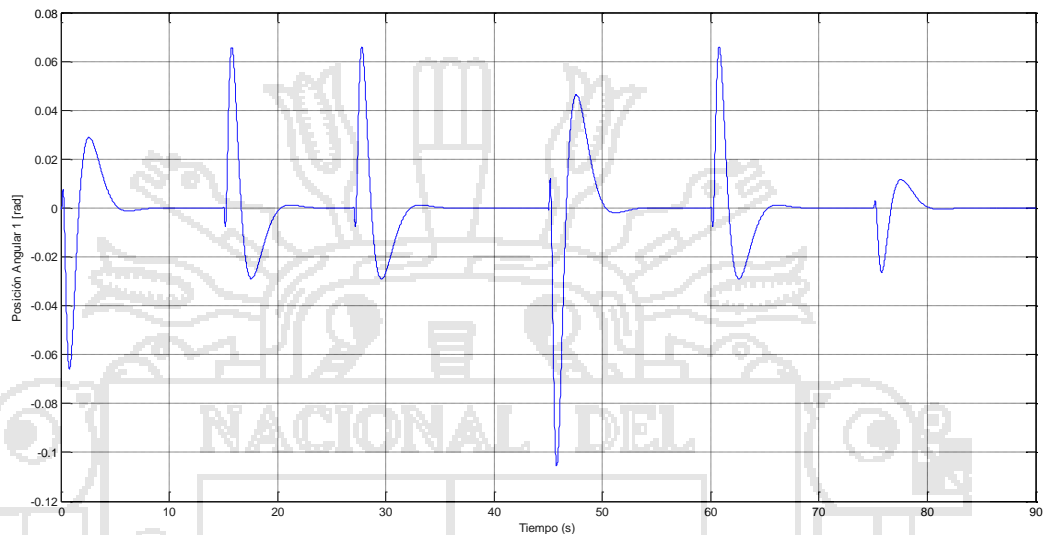


Figura 29: Sistema lineal variable con Control Adaptativo (Posición angular 1).

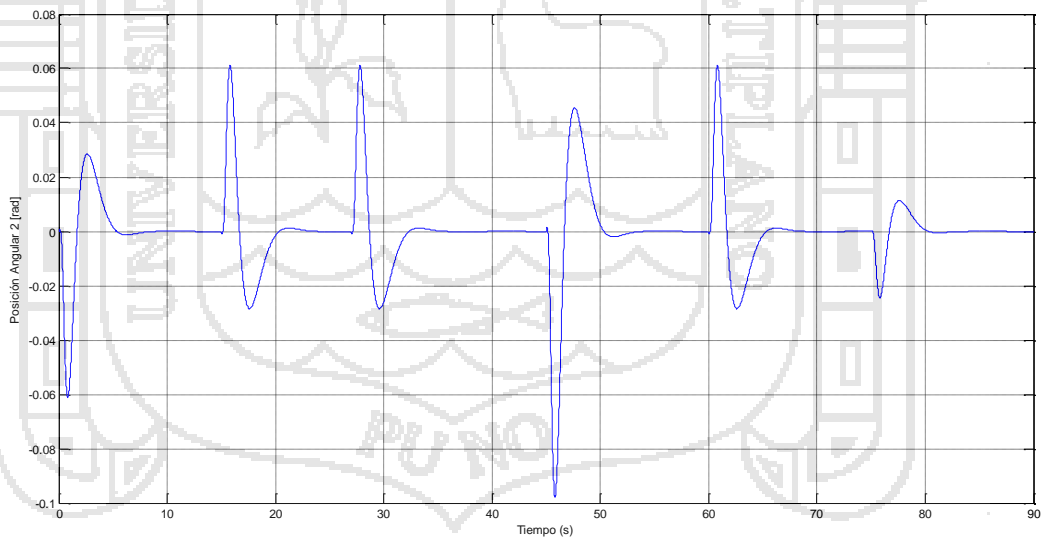


Figura 30: Sistema lineal variable con Control Adaptativo(Posición angular 2).

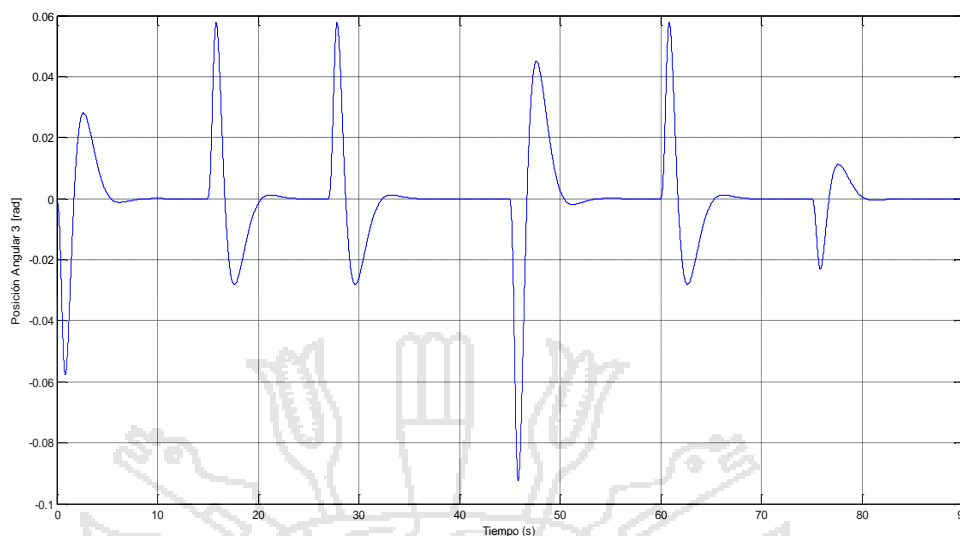


Figura 31: Sistema lineal variable con Control Adaptativo(Posición angular 3).

La señal de control se muestra a continuación:

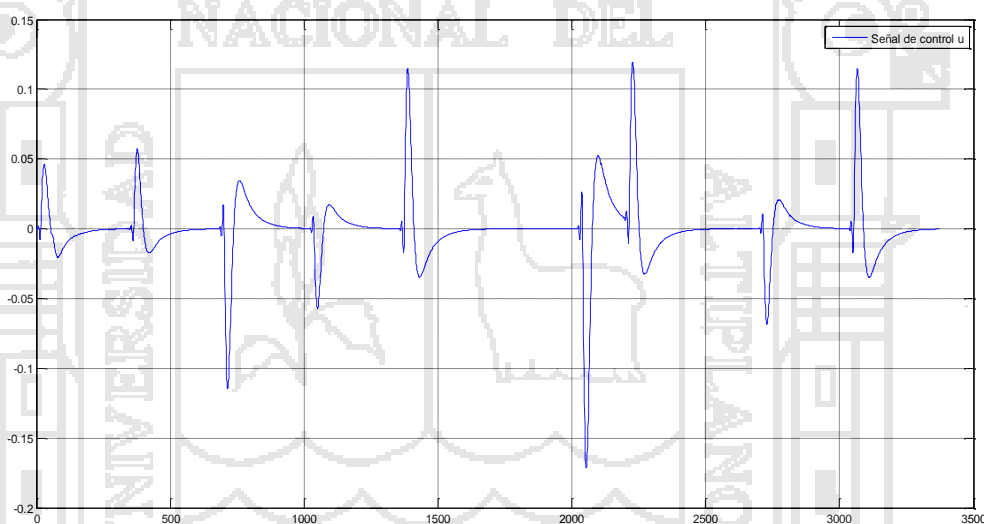


Figura 32: Sistema lineal variable con Control Adaptativo (Señal de control).

4.4.4. Diseño del observador de estados.

El controlador adaptativo diseñado utiliza una ley de control proporcional integral óptimo cuadrática variable, esta estructura de control necesita de la realimentación de todas las variables de estado, sin embargo en la práctica esto no siempre es posible, ya que no todas están disponibles para la medición directa, en nuestro proyecto solo las variables de salida son medibles, mientras que las velocidades angulares y lineal no tienen una lectura por parte de los sensores, por lo tanto será necesario estimar estas variables. La estimación suele llamarse observación, en un sistema práctico es necesario observar o estimar las variables de estado no medibles a partir de las variables de salida y control. Un observador de estados es un subsistema del sistema de control, estos se pueden diseñar si y solo si satisfacen la condición de observabilidad.

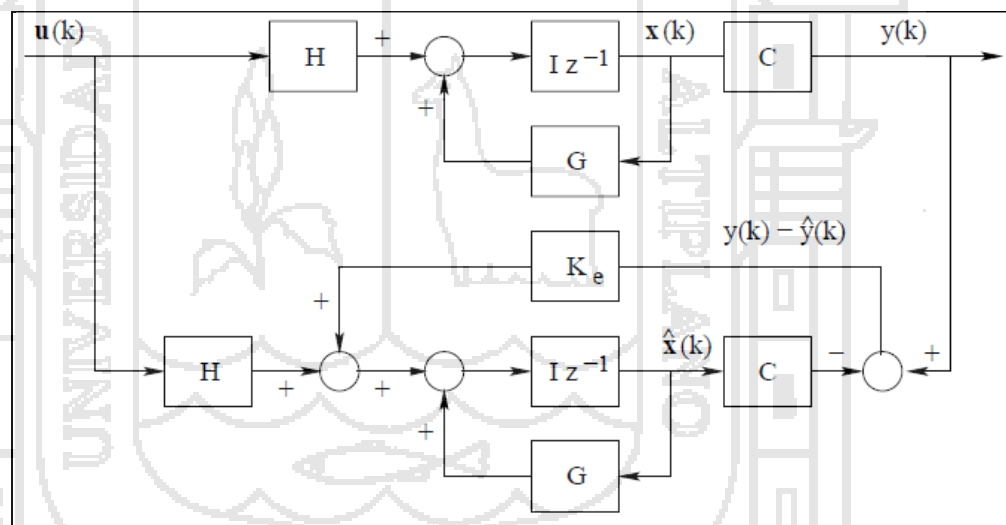


Figura 33: Sistema de regulación con observador de estados.

En muchos casos prácticos, sólo unas cuantas variables del vector de estado $\mathbf{x}(k)$ del proceso son susceptibles de ser medidas en forma directa. En tales situaciones necesitamos estimar dicho vector de estado; es decir, requerimos hallar un vector de estado estimado $\hat{\mathbf{x}}(k)$. Esto puede lograrse mediante el empleo de un observador discreto de estados. El diseño de dicho observador implica determinar su matriz de ganancia K_e , que puede ser calculada a partir de la minimización de una función de costo cuadrática. El

diagrama de bloques del observador de estados se representa en la figura 26, donde podemos notar que el observador emplea las mediciones de la salida $y(k)$ y de la señal de control $u(k)$.

De la figura podemos formular:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (5-66)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (5-67)$$

Mientras que la ecuación del observador de estados toma la forma:

$$\hat{x}(k+1) = G\hat{x}(k) + Hu(k) + Ke[y(k) - C\hat{x}(k)] \quad (5-68)$$

Donde $\hat{x}(k)$ es el vector de estado estimado de dimensión 8, $\hat{y}(k)$ representa el vector de salida estimado de dimensión 4, Ke es la matriz de ganancia de realimentación del observador con dimensión 8×4 y C es la matriz de salida de dimensión 4×8 . Reemplazando la ecuación (5-67) en (5-68) y restando la ecuación resultante de (5-66), podemos obtener la ecuación del error del observador:

$$e(k+1) = [G - KeC]e(k)$$

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (5-69)$$

mientras que su ecuación característica toma la forma:

$$\det[ZI - G + KeC] = 0 \quad (5-70)$$

En donde la matriz Ke debe ser escogida apropiadamente para que el error tienda a cero con una velocidad adecuada. Cabe mencionar también que las raíces de dicha ecuación característica deben posicionarse dentro del círculo unitario para operación satisfactoria del observador.

El observador que nos ocupa requiere que el proceso sea completamente observable; es decir, que cualquier estado inicial pueda determinarse a partir de la observación de los vectores de salida y de control, en un número finito de períodos de muestreo. Ya es conocido que el criterio para observabilidad completa requiere construir la siguiente matriz de observabilidad:

$$N = [C^T \ G^T C^T \ (G^T)^2 C^T \ (G^T)^3 C^T \ (G^T)^4 C^T \ (G^T)^5 C^T \ (G^T)^6 C^T \ (G^T)^7 C^T] \quad (5-71)$$

La condición necesaria y suficiente para que el sistema sea completamente observable es que la matriz N posea rango 8 (rango completo). Es decir, el rango de N debe ser igual al orden del proceso.

Para calcular la matriz Ke podemos proceder en la misma forma en que lo hicimos con la matriz de ganancia K del controlador; es decir, podemos utilizar las ecuaciones que describen al sistema de control óptimo, convenientemente modificadas, para que nos permitan calcular Ke .

Entonces la correspondiente ecuación de Riccati toma la forma:

$$Pe = Qe + GPeC^T - GPeC^T [Re + CPeC^T]^{-1} CPeG^T \quad (5 - 72)$$

y la matriz de ganancia Ke viene dada por:

$$Ke = [Re + CPeC^T]^{-1} CPeG^T \quad (5 - 73)$$

Para determinar Pe utilizaremos la siguiente ecuación recursiva:

$$Pe(k + 1) = Qe + GPe(k)C^T - GPe(k)C^T [Re + CPe(k)C^T]^{-1} CPe(k)G^T \quad (5 - 74)$$

4.4.4.1.- Diseño del observador de estados en Matlab

Primero determinaremos si el proceso es completamente observable, para ello formamos la matriz de observabilidad:

$$N = [C^T \ G^T C^T \ (G^T)^2 C^T \ (G^T)^3 C^T \ (G^T)^4 C^T \ (G^T)^5 C^T \ (G^T)^6 C^T \ (G^T)^7 C^T]$$

Donde :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -0.00016723 & 0.00010772 & -3.7207e-005 & 0.0089943 & -5.6483e-007 & 3.6187e-007 & -1.248e-007 \\ 0 & 1.0253 & -0.03145 & 0.010862 & 0.0081295 & 0.010084 & -0.00010406 & 3.5886e-005 \\ 0 & -0.04582 & 1.0693 & -0.027959 & -0.0076295 & -0.00015161 & 0.010229 & -9.2464e-005 \\ 0 & 0.042818 & -0.075653 & 1.037 & 0.0071303 & 0.00014147 & -0.00025019 & 0.010122 \\ 0 & -0.032651 & 0.021325 & -0.0073936 & 0.80575 & -0.00016723 & 0.00010772 & -3.7207e-005 \\ 0 & 5.1405 & -6.4078 & 2.221 & 1.5873 & 1.0253 & -0.03145 & 0.010862 \\ 0 & -9.3357 & 14.132 & -5.703 & -1.5103 & -0.04582 & 1.0693 & -0.027959 \\ 0 & 8.7554 & -15.431 & 7.526 & 1.4169 & 0.042818 & -0.075653 & 1.037 \end{bmatrix}$$

Utilizamos la instrucción *rank* de matlab:

rangoN=Rank(N)

El resultado es 8 ,por lo tanto el sistema si es completamente observable.

Para calcular la matriz de ganancia Ke del observador óptimo definimos las siguientes matrices de ponderación:

$$Q_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

$$R_e = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Para calcular la matriz Ke calculamos previamente la matriz Pe a partir de:

$$P_e(k + 1) = Q_e + G P_e(k) C^T - G P_e(k) C^T [R_e + C P_e(k) C^T]^{-1} C P_e(k) G^T$$

Esta parte del programa se puede observar en el siguiente código:

```
%%Diseño del Observador de estados
Pe = zeros(8,8);
for i=1:40
Pe = Qe + G*Pe*G' -G*Pe*Ce'*inv(Re+Ce*Pe*Ce')*Ce*Pe*G';
end
KeT = inv(Re+Ce*Pe*Ce')*Ce*Pe*G'; Ke=KeT';
```

Dándonos los siguientes resultados:

Pe =

4.5612	0.56799	-0.3124	0.28043	4.261	38.877	-32.247	29.287
0.56799	9.9622	-4.6025	3.8147	11.106	321.59	-345.6	324.75
-0.3124	-4.6025	12.198	-6.6389	-7.2013	-270.83	511.08	-492.39
0.28043	3.8147	-6.6389	11.46	6.6837	219.52	-393.39	469.15
4.261	11.106	-7.2013	6.6837	267.53	942.6	-827.11	763.51
38.877	321.59	-270.83	219.52	942.6	16765	-18150	17391
-32.247	-345.6	511.08	-393.39	-827.11	-18150	28753	-27524
29.287	324.75	-492.39	469.15	763.51	17391	-27524	29659

Ke =

0.23423	0.023893	-0.0067072	0.0063879
0.029464	0.61914	-0.19247	0.13618
-0.015327	-0.24113	0.71223	-0.28396
0.013612	0.2027	-0.35261	0.66903
0.15926	0.36419	-0.11985	0.12621
1.8848	17.901	-12.907	8.679
-1.5263	-19.561	28.236	-17.997
1.3765	18.156	-27.445	23.55

4.4.5. Simulación en Simulink.

Se desarrolló una simulación del sistema de control adaptativo empleando **Simulink** de **MATLAB**, el controlador se diseño de a cuerdo a los pasos realizados anteriormente, se puede observar los bloques de la Planta, el bloque del identificador de parámetros y el bloque de la ley del controlador.

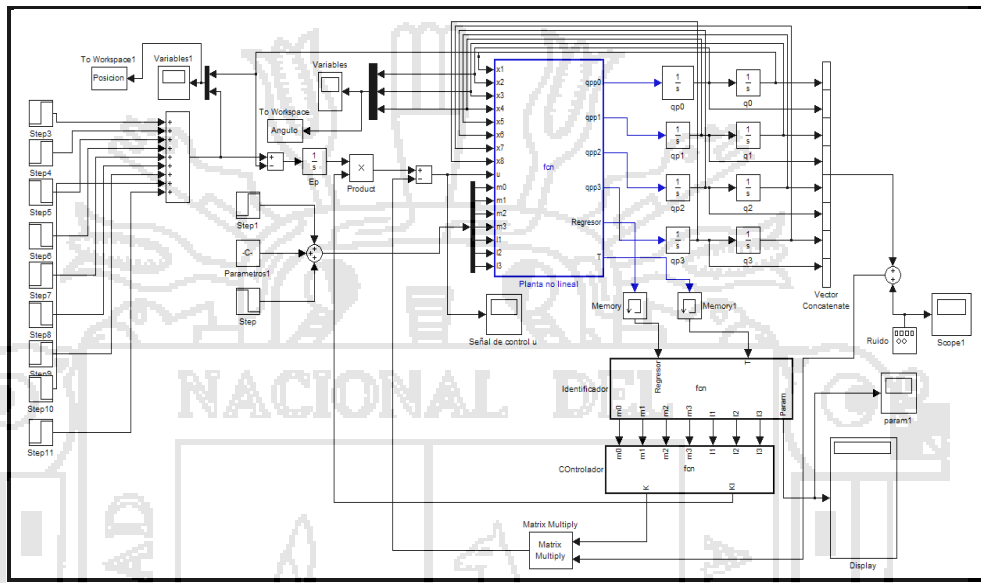


Figura 34: Simulación del controlador adaptativo usando Simulink de **MATLAB**.

De la grafica podemos observar los bloques que componen el controlador adaptativo, este consta de el modelo no lineal de la planta, está el bloque de identificador de sistemas utilizando el método de los mínimos cuadrados, además tenemos el bloque de la ley de control, que en este caso se utilizó un regulador PI óptimo cuadrático. Podemos observar las siguientes graficas:

1. Bloque del modelo matemático:

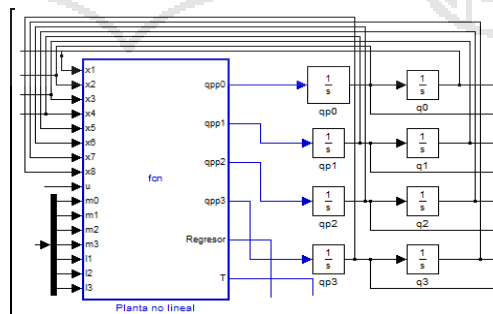


Figura 35: Modelo No lineal del Péndulo Triple.

El código interno de este bloque se muestra a continuación:

```

%Momento de inercia de los links
J1=0;
J2=0;
J3=0;

% longitud al centro de masas
lc1=0.5*l1;
lc2=0.5*l2;
lc3=0.5*l3;

% Coeficiente de gravitación
g=9.81;

% longitud al centro de masas
lc1=0.5*l1;
lc2=0.5*l2;
lc3=0.5*l3;

% Coeficiente de gravitación
g=9.81;

% constantes para simplificación
a0=m0+m1+m2+m3;
a1=m2*l1+m3*l1+m1*lc1;
a2=m2*lc2+m3*lc2;
a3=m3*lc3;

b1=J1+(m1*lc1*lc1)+(m2*l1*l1)+(m3*l1*l1);
b2=J2+(m2*lc2*lc2)+(m3*lc2*lc2);
b3=J3+m3*lc3*lc3;

c1=g*a1;
c2=g*a2;
c3=g*a3;

% Fricción Viscosa
bc=0; k1=0; k2=0; k3=0;

% Matriz de Inercia M(q)
% Definimos los estados como
% q =[x1 x2 x3 x4]
% qp=[x5 x6 x7 x8]
% donde x1:=posicion del carro, x2:=posicion angular 1
% x3:=posicion angular 2 , x4:=posicion angular 3
% x5:=velocidad del carro x6:=velocidad angular 1
% x7:=velocidad angular 2 x8:=velocidad angular 3
% Parametros del Motor

rp = 0.019; n = 11/75; Jo = 0;
Jm = 6.37e-6; mp = 0.045;
Jp = mp*rp^2/2;
Jeq = Jm + n^2*(Jo + Jp);
Bm = 4.23e-6; Bo =4.23e-8; Beq = Bm + n^2*Bo;
Km = 86.02e-3; Kb = 86.47e-3; Ra = 37.38; KA = 4.8;

```

```

J2 = Jeq/(n^2*rp^2);
Kx = Km/(Ra*n*rp);
Bx = Beq/(n^2*rp^2) + Kb*Km/(n^2*rp^2*Ra);
KxA=Kx*KA;

M11=a0/KxA+J2/KxA;
M12=a1/KxA*cos(x2);
M13=a2/KxA*cos(x3);
M14=a3/KxA*cos(x4);

M21=a1*cos(x2);
M22=b1;
M23=a2*l1*cos(x3-x2);
M24=a3*l1*cos(x4-x2);

M31=a2*cos(x3);
M32=a2*l1*cos(x3-x2);
M33=b2;
M34=a3*l2*cos(x4-x3);

M41=a3*cos(x4);
M42=a3*l1*cos(x4-x2);
M43=a3*l2*cos(x4-x3);
M44=b3;

%Vector de Fuerzas de Coriolis y de Fuerzas Centrípetas

C11=bc/KxA+Bx/KxA;
C12=a1/KxA*sin(x2)*x6;
C13=a2/KxA*sin(x3)*x7;
C14=a3/KxA*sin(x4)*x8;

C21=0;
C22=k1+k2;
C23=-k2-a2*l1*sin(x3-x2)*x7;
C24=-a3*l1*sin(x4-x2)*x8;

C31=0;
C32=-k2+a2*l1*sin(x3-x2)*x6;
C33=k2+k3;
C34=-k3-a3*l2*sin(x4-x3)*x8;

C41=0;
C42=a3*l1*sin(x4-x2)*x6;
C43=-k3+a3*l2*sin(x4-x3)*x7;
C44=k3;

%Matriz de Gravedad

G1=0;
G2=-c1*sin(x2);
G3=-c2*sin(x3);
G4=-c3*sin(x4);

% %Matriz de Fricción Viscosa y Seca
% Fr1=b1*x2+k1*tanh(beta*x2);

```

```

% Fr2=b2*x4+k2*tanh(beta*x4);

% Variables Articulares y Derivadas

q=[x1;x2;x3;x4];
qp=[x5;x6;x7;x8];

% Matrices del robot
M=[M11,M12,M13,M14;
M21,M22,M23,M24;
M31,M32,M33,M34;
M41,M42,M43,M44];

C=[C11,-C12,-C13,-C14;
C21,C22,C23,C24;
C31,C32,C33,C34;
C41,C42,C43,C44];

G=[G1;G2;G3;G4];

f=u;
T=[f;0;0;0];

N=C*qp+G;

% Ecuaciones de Estado
qpp=inv(M)*(T-N);
qpp0=qpp(1);
qpp1=qpp(2);
qpp2=qpp(3);
qpp3=qpp(4);
    
```

2. Bloque del identificador de parámetros:

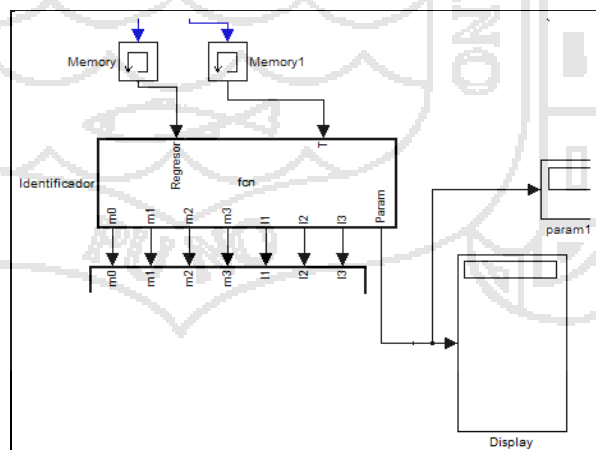


Figura 36: Identificador del sistema.

Este bloque consta principalmente del método de los mínimos cuadrados.

El código interno del identificador de parámetros es:

```
function [m0,m1,m2,m3,l1,l2,l3,Param] = fcn(Regresor,T)

persistent R R_1 R_2 R_3 R_4
persistent t t_1 t_2 t_3 t_4
persistent flag

if isempty(R)
    R=zeros(4,10);
end
if isempty(R_1)
    R_1=zeros(4,10);
end
if isempty(R_2)
    R_2=zeros(4,10);
end
if isempty(R_3)
    R_3=zeros(4,10);
end
if isempty(R_4)
    R_4=zeros(4,10);
end

if isempty(t)
    t=zeros(4,1);
end
if isempty(t_1)
    t_1=zeros(4,1);
end
if isempty(t_2)
    t_2=zeros(4,1);
end
if isempty(t_3)
    t_3=zeros(4,1);
end
if isempty(t_4)
    t_4=zeros(4,1);
end
if isempty(flag)
    flag=0;
end

R_4=R_3;
R_3=R_2;
R_2=R_1;
R_1=R;
R=Regresor;

t_4=t_3;
t_3=t_2;
t_2=t_1;
t_1=t;
t=T;
```



```

R_ext=vertcat(R,R_1,R_2,R_3,R_4);
t_ext=vertcat(t,t_1,t_2,t_3,t_4);

theta_est=pinv(R_ext)*t_ext;

a0=theta_est(1);
a1=theta_est(2);
a2=theta_est(3);
a3=theta_est(4);
a4=theta_est(5);
a5=theta_est(6);
a6=theta_est(7);
b1=theta_est(8);
b2=theta_est(9);
b3=theta_est(10);

l2=a6/a3;
l1=a5/a3;

% Ecuaciones a resolver para calcular m2 y m3
% eq1: a2=(m2*(l2/2)+m3*l2);
% eq2: b2=(m2*(l2/2)^2+m3*(l2^2));

sol=inv([l2/2 l2;(l2/2)^2 l2^2])*[a2;b2];

m2=sol(1);
m3=sol(2);

l3=2*(a3/m3);

% a1=m2*l1+m3*l1+m1*l1;
m1=(a1-(m2*l1)-(m3*l1))/(l1/2);

m0=a0-m1-m2-m3;

Param=[m0;m1;m2;m3;l1;l2;l3];
    
```

3. Bloque de la ley de control:

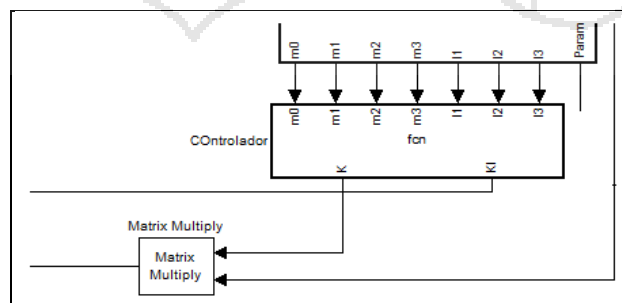


Figura 37: Diseño del controlador.

El código interno se muestra a continuación:

```
function [K,KI] = fcn(m0,m1,m2,m3,l1,l2,l3)
```

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{981m_1+1962m_2+1962m_3}{100m_0} & 0 & \frac{981m_2+1962m_3}{100m_0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{981(m_0+m_1)(m_1+2m_2+2m_3)}{50l_1m_0m_1} & 0 & -\frac{981(2m_0+m_1)(m_2+2m_3)}{50l_1m_0m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{981(2m_0+m_1)(m_1+2m_2+2m_3)}{50l_2m_0m_1} & 0 & \frac{981(m_2+2m_3)(8m_0m_1+32m_0m_2+8m_1m_2)}{400l_2m_0m_1m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{981(2m_0+m_1)(m_1+2m_2+2m_3)}{50l_3m_0m_1} & 0 & -\frac{981(m_2+2m_3)(16m_0m_1+32m_0m_2+8m_1m_2)}{400l_3m_0m_1m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{981m_3}{100m_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{981m_3(2m_0+m_1)}{50l_1m_0m_1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{981m_3(16m_0m_1+32m_0m_2+8m_1m_2)}{400l_2m_0m_1m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{981(8m_0m_1m_2+32m_0m_1m_3+32m_0m_2m_3+8m_1m_2m_3)}{400l_3m_0m_1m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_0} \\ 0 \\ -\frac{2}{L_1m_0} \\ 0 \\ \frac{2}{L_2m_0} \\ 0 \\ -\frac{2}{L_3m_0} \end{bmatrix}$$

```
Cc=[1 0 0 0 0 0 0 0];
A=[A0 zeros(8,1)
-Cc 0];
B=[B0 ; 0];
AA=A^9+139.98*A^8+7094.2*A^7+1.6306e+005*A^6+1.8723e+006*A^5+1.0942e+007*A^4+3.1875e+007*A^3+4.3451e+007*A^2+3.1017e+007*A+6.3595e+006*eye(9);
AB=[B A*B A^2*B A^3*B A^4*B A^5*B A^6*B A^7*B A^8*B];
k=[0 0 0 0 0 0 0 0 1]*inv(AB)*AA;
K=[k(1:8)];
KI=[-k(9)];
```

Del código podemos observar lo siguiente:

Una vez identificado los parámetros del sistema (m0, m1, m2, m3, l1, l2, l3); estos valores se reemplazan en las ecuaciones de estado (A) y salida (B), para luego incluirse en las matrices aumentadas (A0 y B0). Para calcular la

matriz de ganancia de realimentación de estados no utilizamos la instrucción **lqr** ya que esta no es permitida en Simulink, por lo tanto optamos utilizar el método de asignación de polos, que está dada por:

$$K = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1][A \ AB \ \dots \ A^8B]\varphi(A)$$

Donde $\varphi(A)$ representa el polinomio característico.

1. Respuestas del sistema frente a condiciones variables

Las respuestas del sistema a una señal de entrada variable se muestran a continuación.

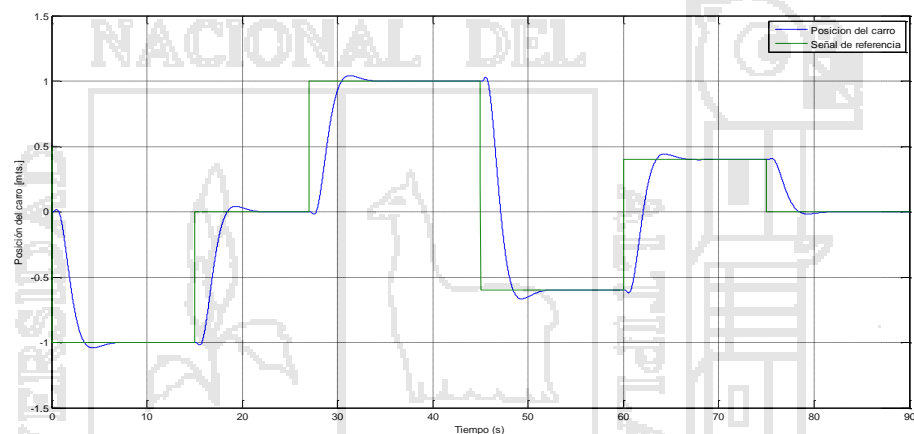


Figura 38: Respuesta del controlador Adaptativo a una señal de entrada variable.

De la figura se observa que el controlador adaptativo responde a las variaciones en la señal de entrada.

Las siguientes figuras muestran el comportamiento de las señales de posición angular de las varillas, se puede observar que a pesar de los cambios en la señal de entrada los péndulos no superan los 0.15 radianes o 8.5 grados, por lo tanto el sistema responde según lo esperado.

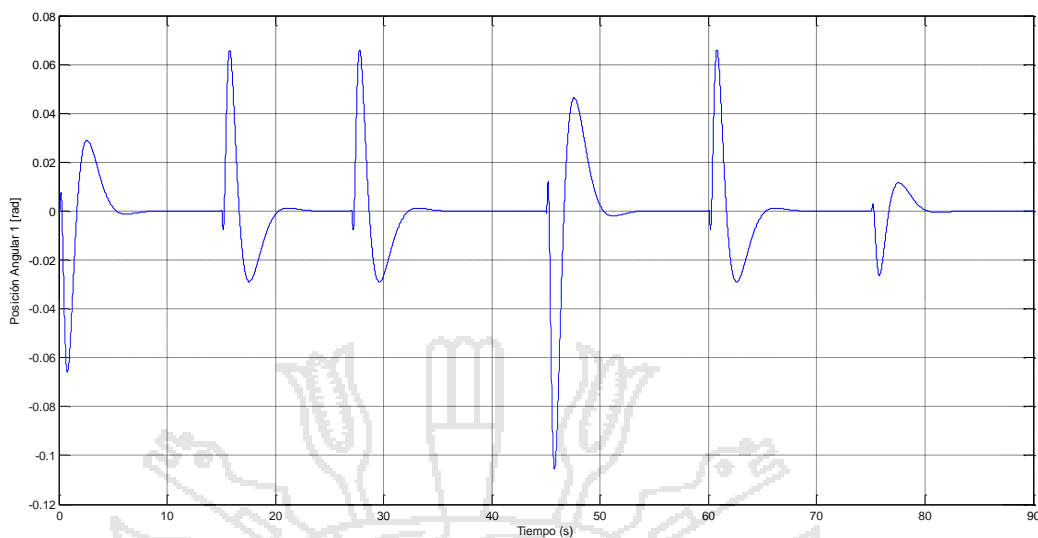


Figura 39: Sistema lineal variable con Control Adaptativo (Posición angular 1).

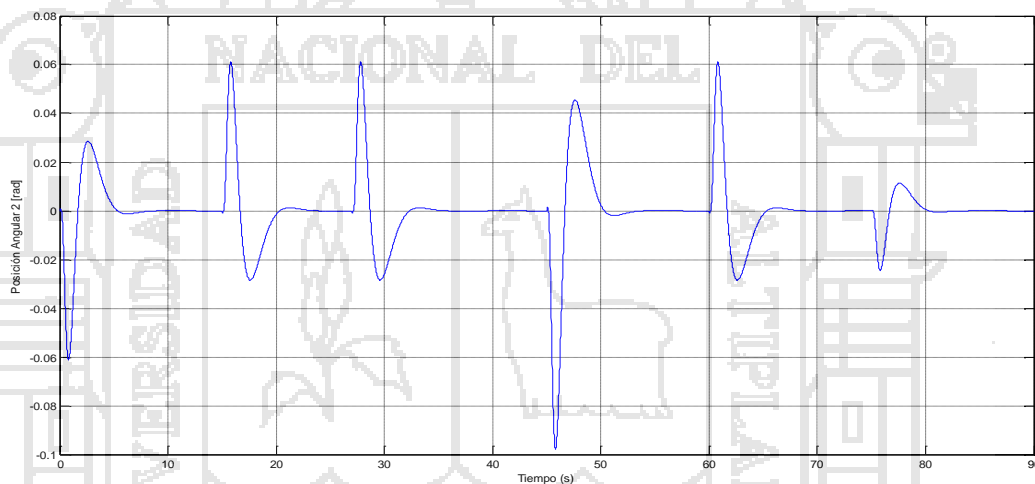


Figura 40: Sistema lineal variable con Control Adaptativo (Posición angular 2).

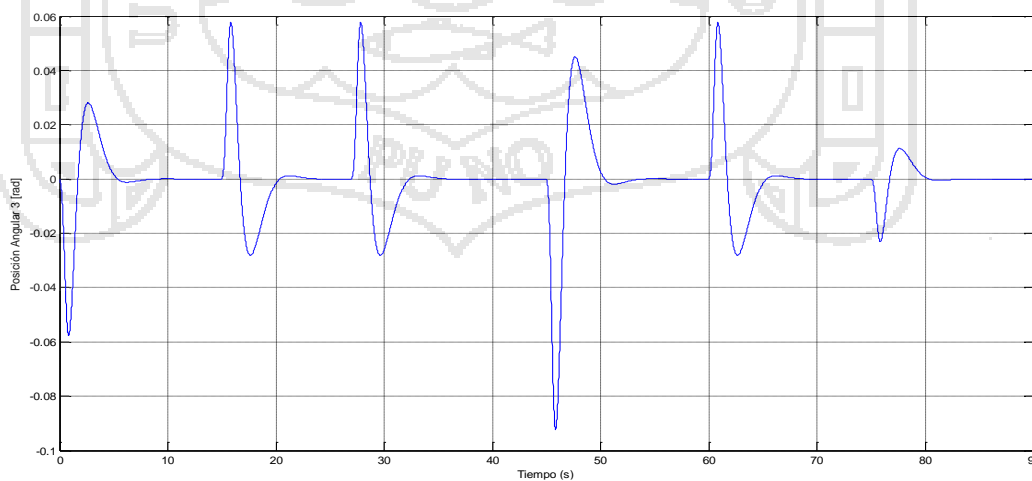


Figura 41: Sistema lineal variable con Control Adaptativo (Posición angular 3).

La señal de control se muestra a continuación:

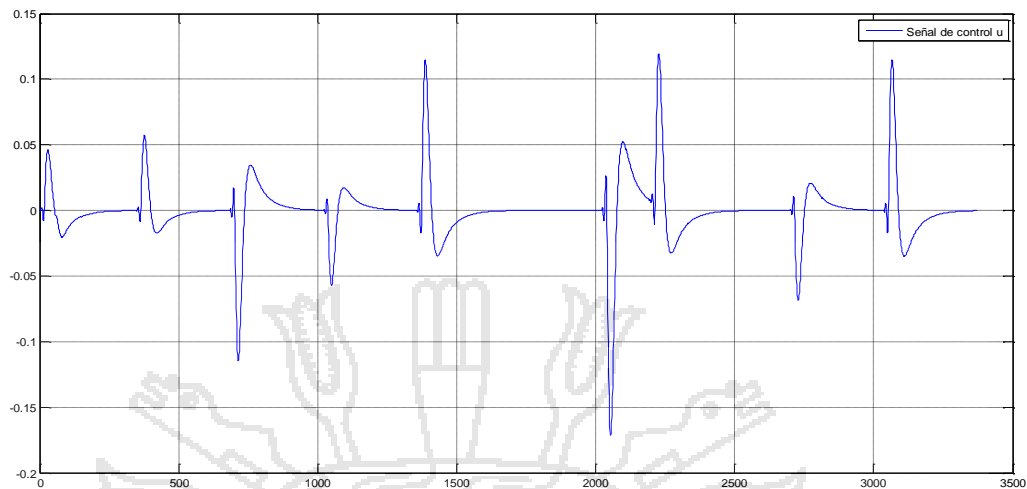


Figura 42: Sistema lineal variable con Control Adaptativo (Señal de control).

Se realiza una variación en los parámetros del sistema como son: la masa del carro, masa del primer péndulo, masa del segundo péndulo, masa del tercer péndulo, longitud del primer péndulo, longitud del segundo péndulo y longitud del tercer péndulo, las cantidades y los instantes en que se realiza estos cambios se muestran en la siguiente grafica:

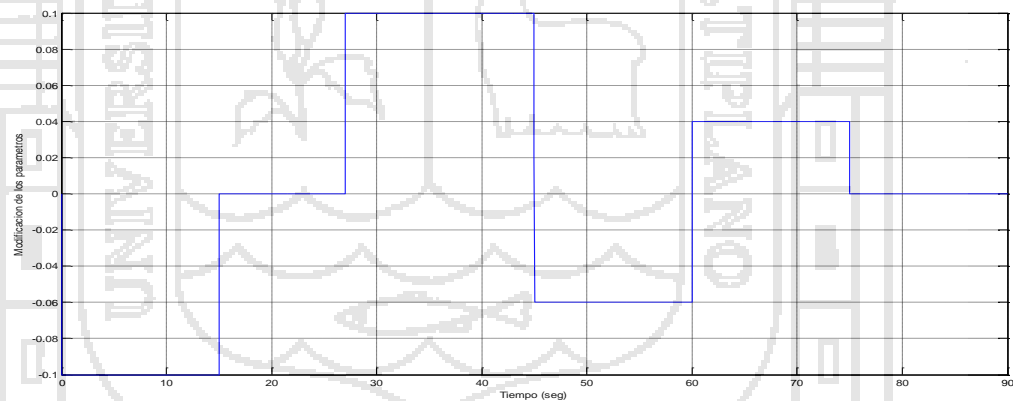


Figura 43: Cantidad y tiempos en que varían los parámetros

Se puede observar que desde el instante en que $t=0$ hasta $t=15$ segundos los parámetros tienen un decremento de 0.1 unidades, desde $t=15$ a $t=27$ los parámetros se incrementan, del mismo modo se tiene un incremento desde $t=27$ a $t=45$ en 0.1 unidades, de $t=45$ a $t=60$ los parámetros sufren un decremento en sus valores, de $t=60$ a $t=75$ los parámetros se incrementan en 0.04 unidades, finalmente desde $t=75$ hasta $t=90$ segundos los parámetros vuelven a tomar sus valores originales.

En la siguiente grafica se muestra cómo evolucionan los parámetros estimados del controlador.

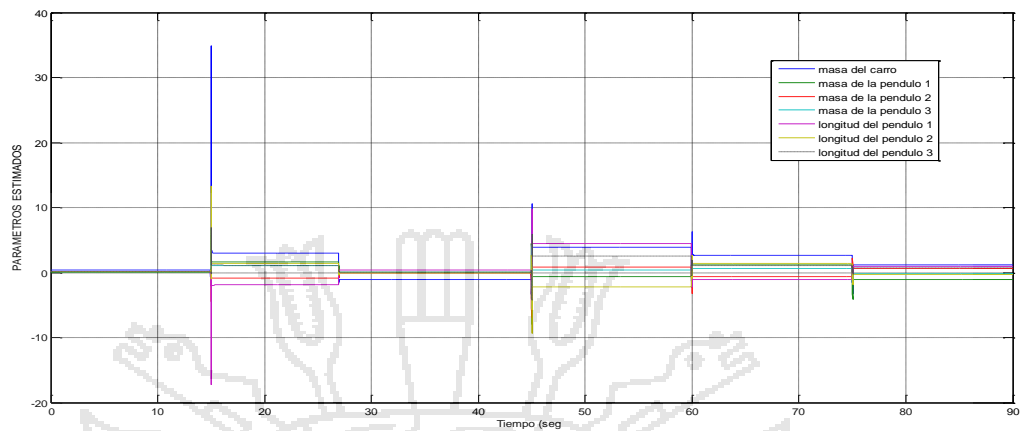


Figura 44: Estimador de parámetros.

De la gráfica se observa que los parámetros son capaces de adaptarse a los cambios en la dinámica del sistema, las variaciones se dan en los tiempos de 15, 27, 45,60 y 75 segundos.

Programa completo del controlador Adaptativo.

El siguiente código muestra el programa completo del controlador adaptativo diseñado en los pasos antes descritos.

```

%% PROGRAMA DEL CONTROLADOR ADAPTATIVO AUTOSINTONIZADO
APLICADO
%% AL CONTROL DE UN PENDULO TRIPLE.

clc;close all ;
syms xp u m0 m1 m2 m3 l1 l2 l3;
syms x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8;

%Momento de inercia de los links
J1=0;
J2=0;
J3=0;

% longitud al centro de masas
lc1=0.5*l1;
lc2=0.5*l2;
lc3=0.5*l3;

% Coeficiente de gravitación
g=9.81;

% constantes para simplificacion
a0=m0+m1+m2+m3;

```

```

a1=m2*l1+m3*l1+m1*l1;
a2=m2*l2+m3*l2;
a3=m3*l3;

b1=J1+(m1*l1*l1)+(m2*l1*l1)+(m3*l1*l1);
b2=J2+(m2*l2*l2)+(m3*l2*l2);
b3=J3+m3*l3*l3;

c1=g*a1;
c2=g*a2;
c3=g*a3;

% Fricción Viscosa
bc=0; k1=0; k2=0; k3=0;

% Matriz de Inercia M(q)
% Definimos los estados como
% q =[x1 x2 x3 x4]
% qp=[x5 x6 x7 x8]
% donde x1:=posicion del carro, x2:=posicion angular 1
% x3:=posicion angular 2 , x4:=posicion angular 3
% x5:=velocidad del carro x6:=velocidad angular 1
% x7:=velocidad angular 2 x8:=velocidad angular 3

% PARAMETROS DEL MOTOR
rp = 0.019; n = 11/75; Jo = 0;
Jm = 6.37e-6; mp = 0.045;
Jp = mp*rp^2/2;
Jeq = Jm + n^2*(Jo + Jp);
Bm = 4.23e-6; Bo =4.23e-8; Beq = Bm + n^2*Bo;
Km = 86.02e-3; Kb = 86.47e-3; Ra = 37.38; KA = 4.8;

J2 = Jeq/(n^2*rp^2);
Kx = Km/(Ra*n*rp);
Bx = Beq/(n^2*rp^2) + Kb*Km/(n^2*rp^2*Ra);
KxA=Kx*KA;

%Elementos de la matriz de Inercias
M11=a0/KxA+J2/KxA;
M12=a1/KxA*cos(x2);
M13=a2/KxA*cos(x3);
M14=a3/KxA*cos(x4);

M21=a1*cos(x2);
M22=b1;
M23=a2*l1*cos(x3-x2);
M24=a3*l1*cos(x4-x2);

M31=a2*cos(x3);
M32=a2*l1*cos(x3-x2);
M33=b2;
M34=a3*l2*cos(x4-x3);

M41=a3*cos(x4);
M42=a3*l1*cos(x4-x2);
M43=a3*l2*cos(x4-x3);
M44=b3;

```

```

%Vector de Fuerzas de Coriolis y de Fuerzas Centripetas

C11=bc/KxA+Bx/KxA;
C12=a1/KxA*sin(x2)*x6;
C13=a2/KxA*sin(x3)*x7;
C14=a3/KxA*sin(x4)*x8;

C21=0;
C22=k1+k2;
C23=-k2-a2*l1*sin(x3-x2)*x7;
C24=-a3*l1*sin(x4-x2)*x8;

C31=0;
C32=-k2+a2*l1*sin(x3-x2)*x6;
C33=k2+k3;
C34=-k3-a3*l2*sin(x4-x3)*x8;

C41=0;
C42=a3*l1*sin(x4-x2)*x6;
C43=-k3+a3*l2*sin(x4-x3)*x7;
C44=k3;

%Matriz de Gravedad
G1=0;
G2=-c1*sin(x2);
G3=-c2*sin(x3);
G4=-c3*sin(x4);

% %Matriz de Fricción Viscosa y Seca
% Fr1=b1*x2+k1*tanh(beta*x2);
% Fr2=b2*x4+k2*tanh(beta*x4);

% Variables Articulares y Derivadas
q=[x1;x2;x3;x4];
qp=[x5;x6;x7;x8];

% Matrices
M=[M11,M12,M13,M14;
M21,M22,M23,M24;
M31,M32,M33,M34;
M41,M42,M43,M44];

C=[C11,-C12,-C13,-C14;
C21,C22,C23,C24;
C31,C32,C33,C34;
C41,C42,C43,C44];

G=[G1;G2;G3;G4];
% w=1;
% f=5*sin(w*t);
f=u;
T=[f;0;0;0];

N=C*qp+G;

```



```

% Ecuaciones de Estado
qpp=inv(M)*(T-N);

% Sustituyendo en el punto de equilibrio.
Equi=subs(qpp,{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,u},{0,0,0,0,0,0,0,0,0
});

%xp=[x2 ;qpp(1); x4; qpp(2); x6; qpp(3); x8; qpp(4)];
xp=[x5; x6; x7; x8; qpp(1);qpp(2);qpp(3); qpp(4)];

%% LINEALIZACION DEL SISTEMA

A1=diff(xp,x1);
A2=diff(xp,x2);
A3=diff(xp,x3);
A4=diff(xp,x4);
A5=diff(xp,x5);
A6=diff(xp,x6);
A7=diff(xp,x7);
A8=diff(xp,x8);
A=subs([A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7
A8],{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,u},{0,0,0,0,0,0,0,0,0});

B1=diff(xp(1),u);
B2=diff(xp(2),u);
B3=diff(xp(3),u);
B4=diff(xp(4),u);
B5=diff(xp(5),u);
B6=diff(xp(6),u);
B7=diff(xp(7),u);
B8=diff(xp(8),u);
B=subs([B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7
B8]',{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,u},{0,0,0,0,0,0,0,0,0});

%% PARAMETROS DEL PENDULO TRIPLE
% masa del carrito
m0=0.370;

% masas de los pendulos
m1=0.073;
m2=0.087;
m3=0.096;

% longitud de los pendulos
l1=0.25;
l2=0.27;
l3=0.29;

%Momento de inercia de los links
J1=0;
J2=0;
J3=0;

```

```

% longitud al centro de masas
lc1=0.5*l1;
lc2=0.5*l2;
lc3=0.5*l3;

% Coeficiente de gravitación
g=9.81;

% constantes para simplificación
a0=m0+m1+m2+m3;
a1=m2*l1+m3*l1+m1*lc1;
a2=m2*lc2+m3*lc2;
a3=m3*lc3;
a4=a2*l1;
a5=a3*l1;
a6=a3*lc2;

b1=J1+(m1*lc1*lc1)+(m2*l1*l1)+(m3*l1*l1);
b2=J2+(m2*lc2*lc2)+(m3*lc2*lc2);
b3=J3+m3*lc3*lc3;

% MODELO LINEAL DEL PROCESO DEL
Ac=subs(A);
Bc=subs(B);
Cc=[1 0 0 0 0 0 0 0];
Dc=[0];

% MODELO LINEAL DISCRETO DEL PROCESO
T = 0.01; % PERIODO DE MUESTREO

[G,H]=c2d(Ac,Bc,T);%
alfa=1000;N=10; Pi = alfa*eye(10); % MATRIZ P INICIAL
theta_p = [G H]'; % PARAMETROS DEL PROCESO
theta_i = [G H zeros(8,1)]'; % PARAMETROS INICIALES
lambda = 0.99; % FACTOR DE MEMORIA
Y(:,1)=[0 0 0 0 0 0 0 0]'; uc(2) = 0;
ref=0.5;
X1(2)=0;X2(2)=0;X3(2)=0;X4(2)=0;X5(2)=0;X6(2)=0;X7(2)=0;X8(2)
)=0;

v(1)=0;
Q = [ 100 0 0 0 0 0 0 0 0
      0 150 0 0 0 0 0 0 0
      0 0 150 0 0 0 0 0 0
      0 0 0 150 0 0 0 0 0
      0 0 0 0 1 0 0 0 0
      0 0 0 0 0 1 0 0 0
      0 0 0 0 0 0 1 0 0
      0 0 0 0 0 0 0 1 0
      0 0 0 0 0 0 0 0 1];

R = [100];
K=[0 0 0 0 0 0 0 0];
KI=0;

```

```

Ge=G;He=H;
Mm=1000;
uc(1)=0;
X=[0 0 0 0 0 0 0 0]';
for k=2:Mm

%% IDENTIFICADOR DE PARAMETROS
psi_p = [Y(:, :, k-1); uc(k-1)];%9x1
%Y(:, :, k+1) = theta_p'*psi_p; % MODELO LINEAL DEL PROCESO
Y(:, :, k) = X; % MODELO LINEAL DEL PROCESO
psi = [psi_p;1]; % VECTOR DE DATOS
nor = max(1,norm(psi));
psin = psi/nor;
Qch = chol(Pi');
S = inv(diag(Qch*ones(N,1),0));
Ps = S*Pi*S;
psins = inv(S)*psin;
rt = 1 + psins'*Ps*psins;
LF = 1 - (rt-sqrt(rt^2-4*norm(Ps*psins)^2/trace(Ps)))/2;
e = Y(:, :, k)/nor-thetai'*psin; % ERROR DE ESTIMACION
div = psins'*Ps*psins + LF;
theta = thetai'+e*(inv(S)*Ps*psins/div)'; % VECTOR DE
PARAMETROS
Ge = theta(:,1:8); % PARAMETRO G ESTIMADO
He = theta(:,9); % PARAMETRO H ESTIMADO
Ce = theta(:,10);
Hns = Ps*psins/div;
Ps = Ps/LF - Hns*psins'*Ps/LF;
tt = abs(max(eig(Ps))/min(eig(Ps)) );
cmax = 100; cmin = 15;
if tt <= cmin,
thetai = theta'; Pi = Ps;
elseif tt >= cmax,
Qchnew = chol(Ps');
Snew = inv(diag(Qchnew*ones(N,1),0));
Psnew = Snew*Ps*Snew;
Pi = Psnew; thetai = theta';
end

%% DISEÑO DE LA LEY DE CONTROL
Gel = [Ge zeros(8,1)
-Cc*Ge 1];
Hel = [He;-Cc*He];
%M = [Hel Gel*Hel Gel^2*Hel Gel^3*Hel Gel^4*Hel];
%rM = rank(M); % rM=5 => COMPLETAMENTE CONTROLABLE
% CALCULO DE LA GANANCIA DEL CONTROLADOR

P = zeros(9,9);
for i=1:800
P = Q + Gel'*P*Gel -Gel'*P*Hel*inv(R+Hel'*P*Hel)*Hel'*P*Gel;
end
K1 = inv(R+Hel'*P*Hel)*Hel'*P*Gel;
%[KK,PP] = dlqr(Gel,Hel,Q,R); % K1=KK, P=PP
KK=K1;
K = [KK(1) KK(2) KK(3) KK(4) KK(5) KK(6) KK(7) KK(8)]; KI =
- KK(9);

```

```

X=[X1(k) X2(k) X3(k) X4(k) X5(k) X6(k) X7(k) X8(k) ]';
y(k)=Cc*X;
v(k)=v(k-1)+ref-y(k);
uc(k)=-K*[X1(k) X2(k) X3(k) X4(k) X5(k) X6(k) X7(k)
X8(k) ]'+KI*v(k);

X=Ge*X+He*uc(k);
X1(k+1)=[1 0 0 0 0 0 0 0 ]*X;
X2(k+1)=[0 1 0 0 0 0 0 0 ]*X;
X3(k+1)=[0 0 1 0 0 0 0 0 ]*X;
X4(k+1)=[0 0 0 1 0 0 0 0 ]*X;
X5(k+1)=[0 0 0 0 1 0 0 0 ]*X;
X6(k+1)=[0 0 0 0 0 1 0 0 ]*X;
X7(k+1)=[0 0 0 0 0 0 1 0 ]*X;
X8(k+1)=[0 0 0 0 0 0 0 1 ]*X;

end

%% GRAFICAS DEL SISTEMA
figure(1)
t=linspace(0,T*Mm,Mm);
subplot(3,3,1)
plot(t,X1(1:Mm),t,ref),grid;
ylabel('Posición del carro [mts.]')
xlabel('Tiempo (s)')
subplot(3,3,2)
plot(t,X2(1:Mm),t,0),grid;
ylabel('Posición Angular 1 [rad]')
xlabel('Tiempo (s)')
subplot(3,3,3)
plot(t,X3(1:Mm),t,0),grid;
ylabel('Posición Angular 2 [rad]')
xlabel('Tiempo (s)')
subplot(3,3,4)
plot(t,X4(1:Mm),t,0),grid;
ylabel('Posición Angular 3 [rad]')
xlabel('Tiempo (s)')
subplot(3,3,5)
plot(t,X5(1:Mm)),grid;
ylabel('Velocidad del carro [mts/s]')
xlabel('Tiempo (s)')
subplot(3,3,6)
plot(t,X6(1:Mm)),grid;
ylabel('Velocidad Angular 1 [rad/s]')
xlabel('Tiempo (s)')
subplot(3,3,7)
plot(t,X7(1:Mm)),grid;
ylabel('Velocidad Angular 2 [rad/s]')
xlabel('Tiempo (s)')
subplot(3,3,8)
plot(t,X8(1:Mm)),grid;
ylabel('Velocidad Angular 3 [rad/s]')
xlabel('Tiempo (s)')
subplot(3,3,9)
plot(t,uc(1:Mm)),grid;
ylabel('Señal de Control U(t) [Volts]')
xlabel('Tiempo (s)')

```

4.5. DISEÑO DEL SISTEMA MECÁNICO DEL PÉNDULO TRIPLE

El material a utilizar para construir nuestro péndulo triple es el aluminio ya que es un material rígido, económico y de fácil manipulación.

La base que sirve de soporte para el modulo es de madera con un peso de 2.5Kg, evita que el sistema carro – péndulo tenga movimientos indeseados.

El carro es de aluminio de un peso de 370 gramos y se desliza por dos ejes por medio de una correa dentada, los ejes son construidos de tubos de aluminio de superficie lisa con el fin de disminuir la fuerza de fricción debida al rozamiento entre las superficies.

Las varilla de los péndulos son construidos también de aluminio, cuyas dimensiones son de: 25cm , 27 cm y 29 cm para la primera ,segunda y tercera varilla respectivamente.

La transmisión del movimiento del carro se realiza por medio de una correa dentada y engranajes que son a la vez movidas por un motor DC de imán permanente fijado en el soporte base de madera.

Las medidas y el diseño de la vista frontal se muestran a continuación:

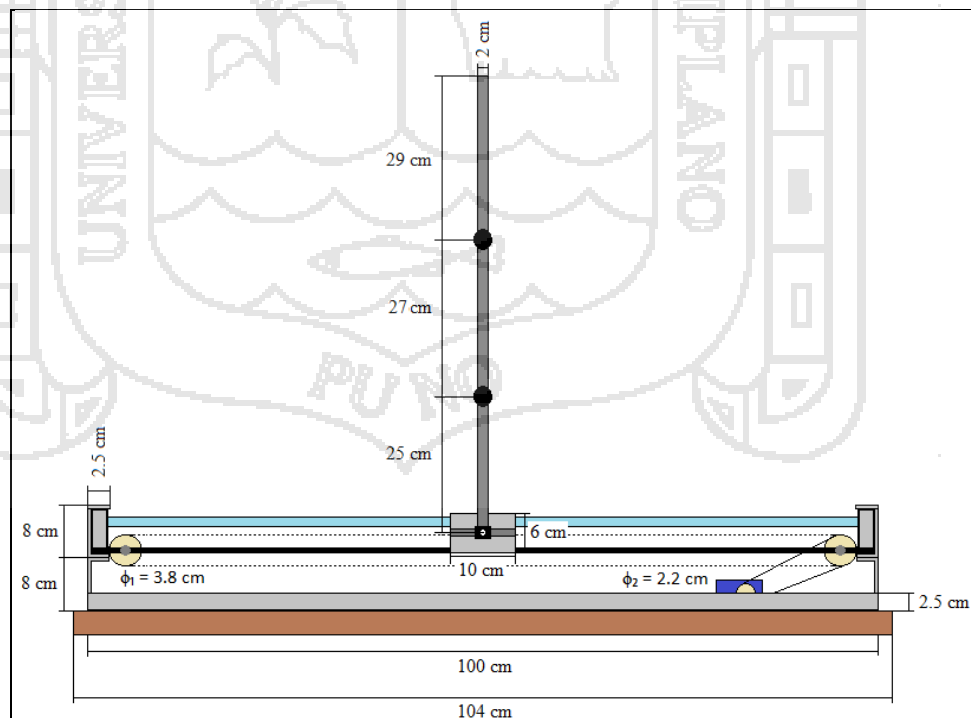


Figura 45: Diseño mecánico del Péndulo Triple (vista frontal) .

El motor DC usado tiene incorporado un encoder que nos sirve para medir la posición y velocidad a la que se mueve el carro, además cuenta con una caja de engranajes con un factor de reducción de 22/60.

Las medidas y el diseño de la vista superior se muestra a continuación:

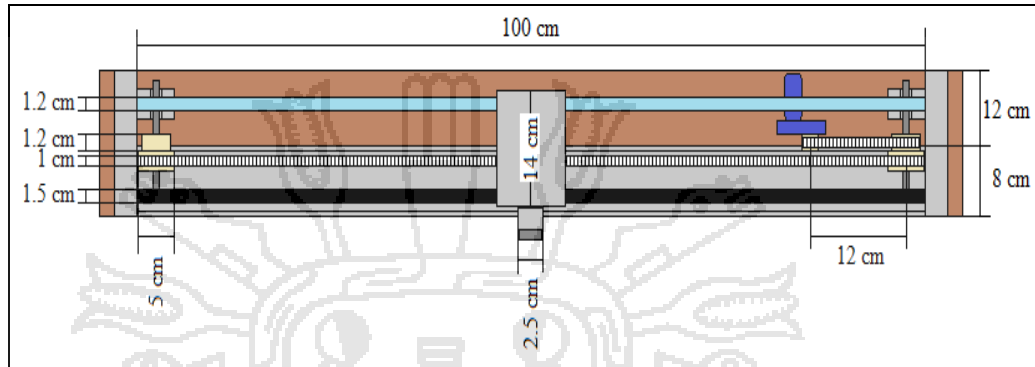


Figura 46: Diseño mecánico del Péndulo Triple (vista superior).

El engranaje del eje principal del motor consta de 22 dientes, que transfiere su movimiento por medio de una pequeña correa a un engranaje de 60 dientes que a su vez es concéntrico con otro engranaje de 20 dientes, este transfiere su movimiento por medio de una correa dentada a un engranaje de 50 dientes, este está unido por el mismo eje a un engranaje de 38 dientes y es este último el que transfiere movimiento al carro del péndulo triple. Por lo tanto podemos deducir que la ganancia final será de:

$$n = \frac{22}{60} \times \frac{20}{50} = \frac{11}{75} = \frac{1}{6.82} = 0.1467$$

Es decir por una vuelta que da el eje primario del motor, el eje final dará aproximadamente 0.1457 vueltas, o equivalentemente si el eje final gira 6.82 vueltas el eje primario del motor girara tan solo 1 vuelta.

Ahora para el movimiento del carro tenemos que 5 vueltas del eje final hacen que el carro se mueva 57 centímetros.

Por tanto podemos decir que por 10 vueltas del eje primario del motor el carro se moverá:

$$DXcm = 10 \times \frac{22}{60} \times \frac{20}{50} \times \frac{57}{5} = 16.7cm$$

Esto se puede corroborar prácticamente con una muy alta precisión.

Para medir la posición primero se utilizó el encoder incorporado en el motor, se obtuvo con éxito la medición de la posición haciendo uso de un microcontrolador PIC, sin embargo se observó que a medida que la velocidad a la que giraba el motor aumentaba conforme aumentaba el voltaje de armadura empezaban a mostrar errores en la medida esto debido a que el encoder ya no contaba todos los pulsos haciendo que perdiera datos que ocasionaban una lectura inferior a la medida real.

Entonces se decidió usar como sensor de posición un potenciómetro lineal de precisión multivuelta que fue acoplado solidario al eje del engranaje secundario del motor, de este modo se consiguió medir el desplazamiento del carro el resultado es muy bueno.

Para poder medir los ángulos que giran las varillas de los péndulos se hizo uso de potenciómetros comerciales, estos tienen una limitación en cuanto a su movimiento ya que no son potenciómetros multivuelta, además presentan un momento de inercia considerable que no permiten un comportamiento ideal del sistema, sin embargo el resultado es aceptable.

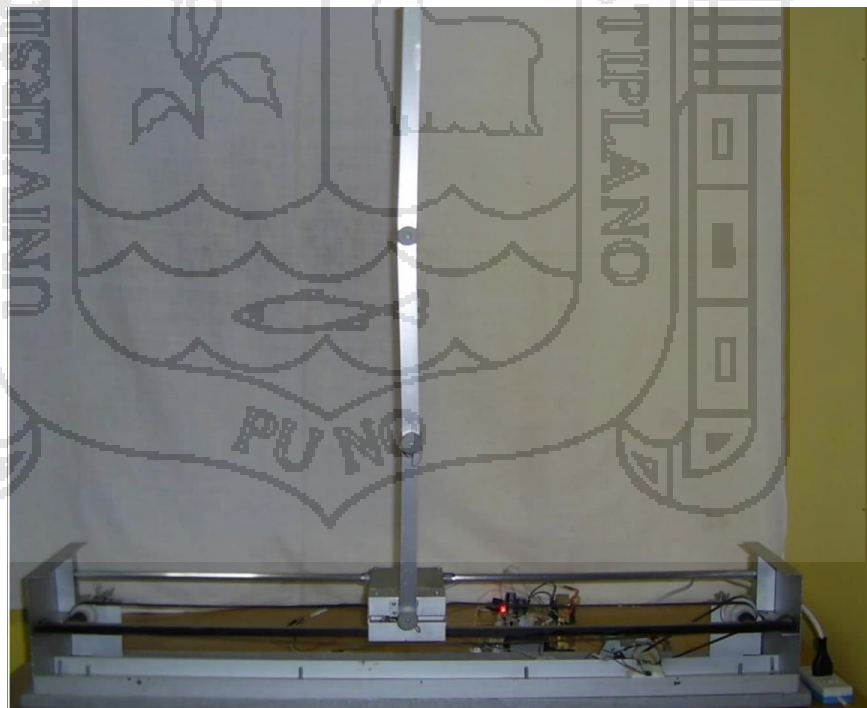


Figura 47: Sistema mecánico del Péndulo Triple.

4.6. DISEÑO ELECTRÓNICO DEL CONTROLADOR.

4.6.1. Sistema de control

El sistema de control electrónico del péndulo triple está formado por las siguientes partes:

1- Fuente de Alimentación.- Para alimentar nuestro sistema de control utilizaremos una fuente simétrica de 15V, además de ello necesitaremos una fuente de 5V para la alimentación de los PICs, para esto hacemos uso de reguladores de voltaje 7815 ,7915 y 7805.

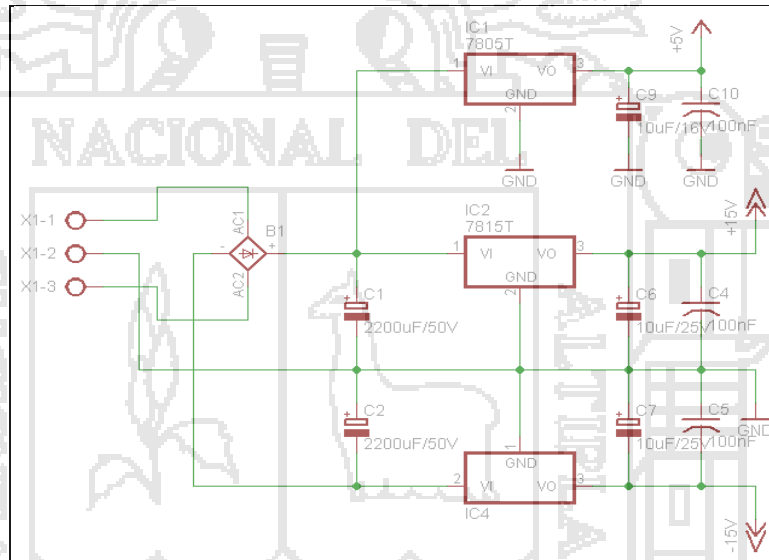


Figura 48: Fuente de alimentación para el controlador.

Para la etapa de alimentación al driver de control del motor, emplearemos otra fuente de alimentación de 24V, para ello usamos un regulador de voltaje 7824 con su respectivo disipador de calor.

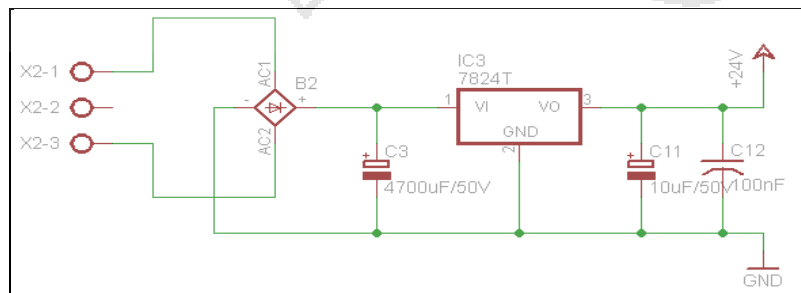


Figura 49: Fuente de alimentación para el driver de potencia.

2- Controlador .-Los dispositivos que procesarán los algoritmos de control están compuestos por los Microcontroladores PIC 18F4550 y 16F877 en conjunto con el software creado en el LabVIEW 2012, el circuito se muestra a continuación:

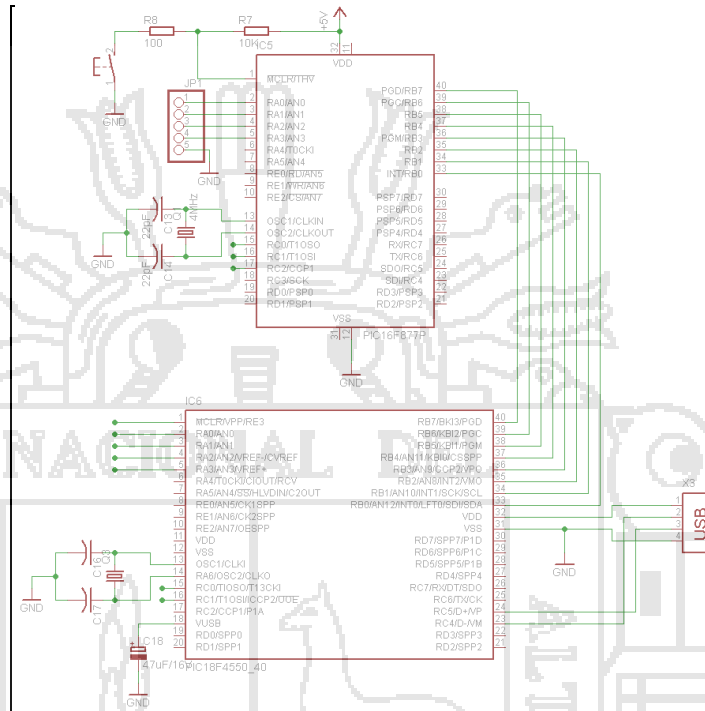


Figura 50: Controlador del sistema, compuesto por los PIC16F877, PIC 18F4550 y enlazado vía el puerto USB con el LabVIEW 2012.

3- Etapa de potencia.- Se utilizó el driver STK 6875 de SANYO que es un driver de potencia para el control bidireccional de un motor DC ,este driver está compuesto principalmente por 4 MOSFETs de potencia y es capaz de suministrar 5A a su salida, el circuito equivalente se muestra a continuación:

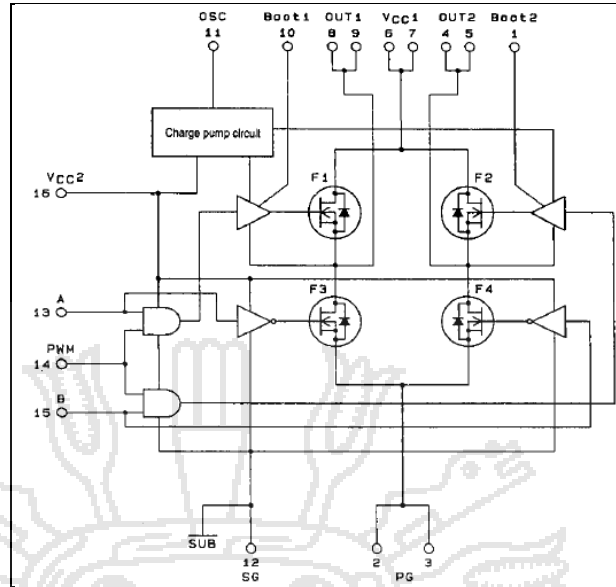


Figura 51: Circuito equivalente del driver STK 6875 de SANYO.

Además para aislar la etapa de potencia de la etapa de control se uso optoaclopadores 4N25.

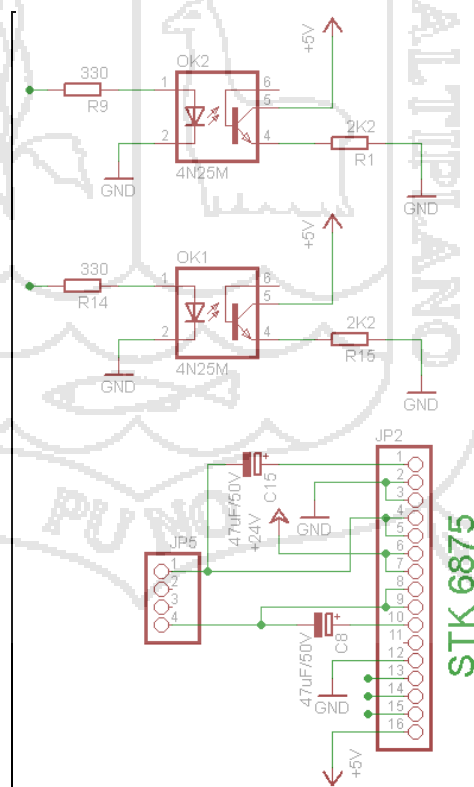


Figura 52: Etapa de potencia

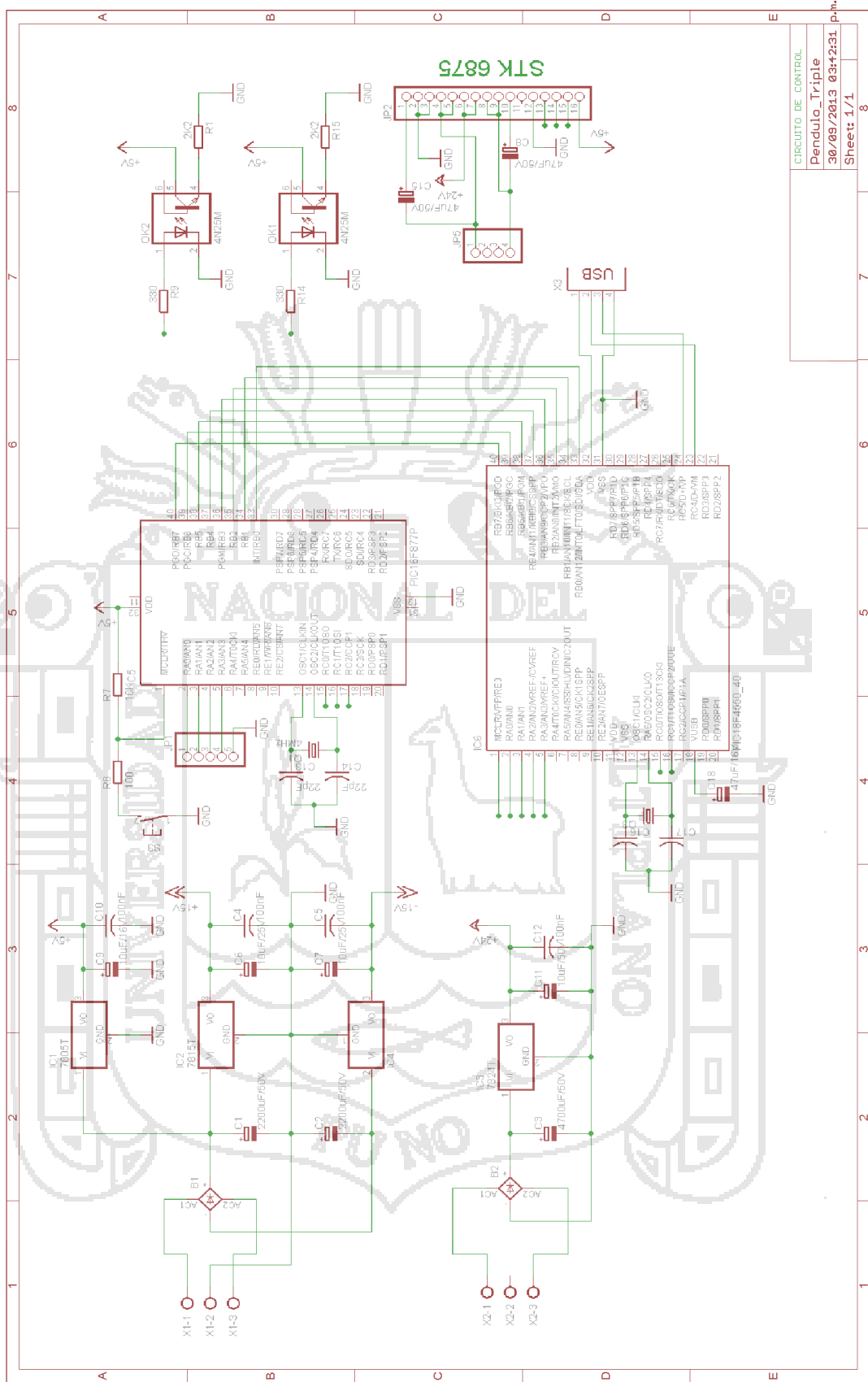


Figura 53: Circuito electrónico de control del péndulo triple .

4.7. DISEÑO DEL SOFTWARE DE CONTROL.

En esta sección desarrollaremos los programas utilizados para la interfaz de usuario implementado en LabVIEW 2012 y los programas hechos en PICC para la comunicación entre el sistema físico y el computador.

4.7.1. Interfaz de Usuario.

La interfaz para el usuario es diseñado en el programa grafico LabVIEW 2012 Professional Development System. Los criterios para diseñar el programa están de acuerdo a los pasos hechos en la simulación realizada con el Matlab.

Esta interfaz de usuario permite monitorear las señales de salida a si como genera la señal de control, está conformado por las siguientes partes:

1. **Ventada Principal.-** Muestra una descripción general de todo la interfaz de usuario.

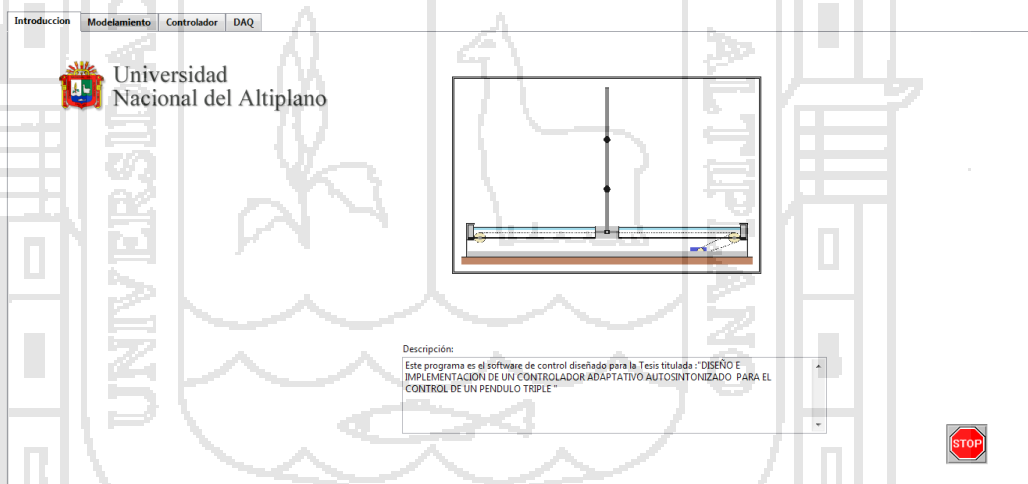


Figura 54: Ventana principal de la interfaz de usuario.

2. **Ventana de variables y modelado.-** Esta ventana muestra una serie de controladores numéricos que sirven para variar los parámetros del sistema como son las masas y longitudes del carro y las varillas, además muestra las ecuaciones de estado y salida del péndulo triple en tiempo continuo y tiempo discreto y estas pueden variar a medida que se modifican los valores de los controladores numéricos.

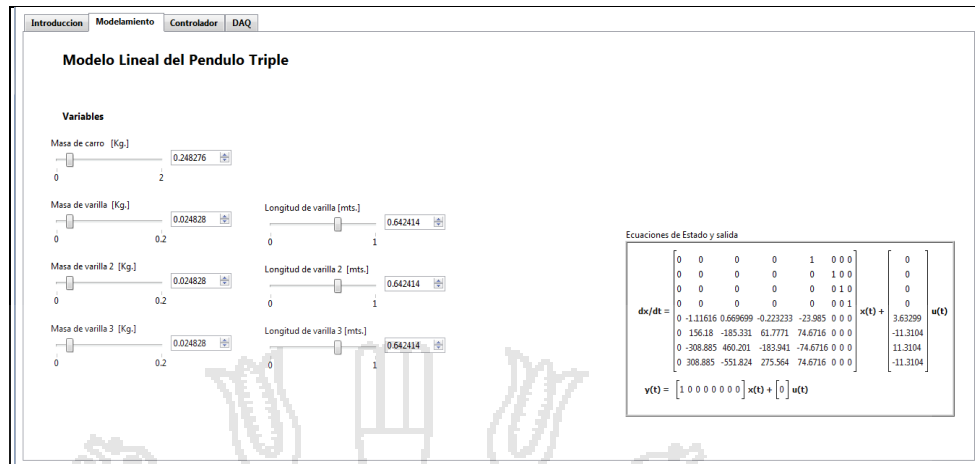


Figura 55: Variables y Dinámica del sistema.

3. **Estimador de parámetros.**-Esta ventana muestra el proceso de estimacion de parámetros a partir de las señales de entrada y salida del sistema.

4. **Ventana del controlador .-** Esta ventana muestra el controlador diseñado durante este proceso de investigación, consta de las siguientes partes:

- Modelo lineal discretizado.
- Estimador de estados.
- Estrategia de control adaptable.
- Señal de referencia o Set Point variable online.

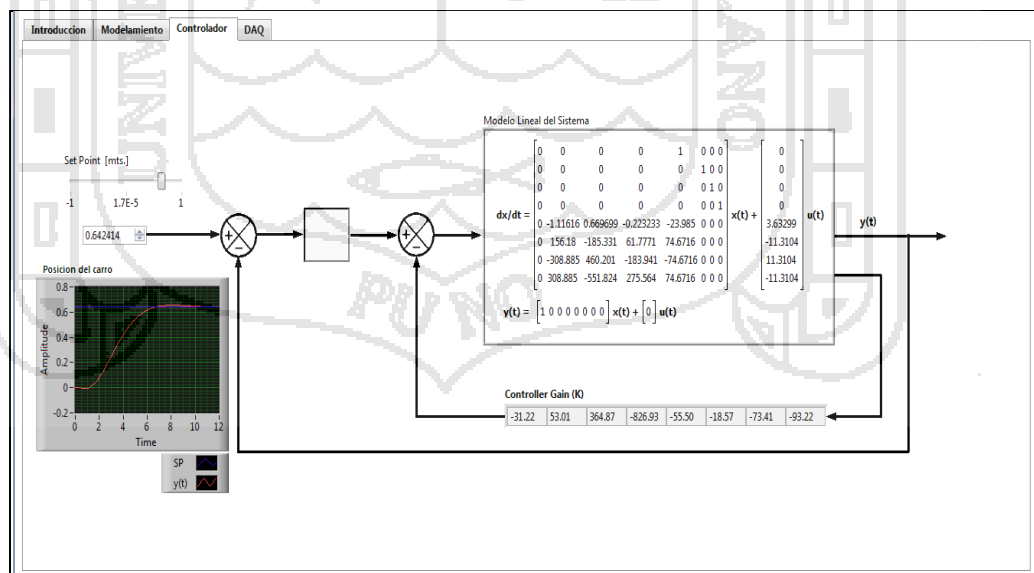


Figura 56: Estructura del Controlador Adaptativo.

5. **Respuestas del sistema.-** Muestra las respuestas del sistema debidas a la acción del controlador adaptativo autosintonizado, se observa las señales de referencia, posición del carro, posición angular de las varillas y velocidades lineales y angulares del sistema.
6. **Ventana de adquisición de datos.-** Esta ventana muestra la interfaz grafica de usuario que permite monitorear las señales de salida y control del sistema, esta comunicación entre el LabVIEW y el sistema físico se realiza a través del PIC 18F4550 y librerías necesarias para comunicar el microcontrolador vía el puerto USB en modo Bulk Transfer, las señales tienen una resolución de 10 Bits es decir pueden variar de 0 hasta 1023. Para monitorear la señal de control aplicada al motor se visualiza en el cluster los *boolean* que indican el sentido de giro y marcha del motor.

El **Diagrama de bloques** es la zona en la cual se realiza la programación gráfica característica del LabVIEW, se muestra a continuación el diagrama de bloques diseñado para nuestro sistema :

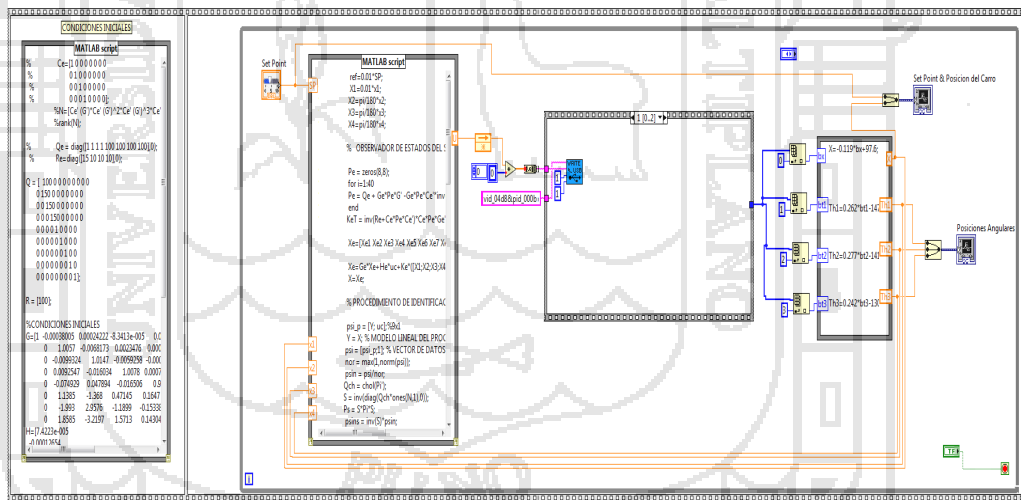


Figura 57: Diagrama de bloque del Controlador Adaptativo autosintonizado para controlar el péndulo triple.

Para entender con mayor detalle el diagrama de bloques diseñado lo dividiremos en las siguientes partes:

1. **Modelo matemático.-** En esta parte se realiza el modelamiento lineal del sistema alrededor del punto de equilibrio, también realiza la discretización del sistema del péndulo triple.

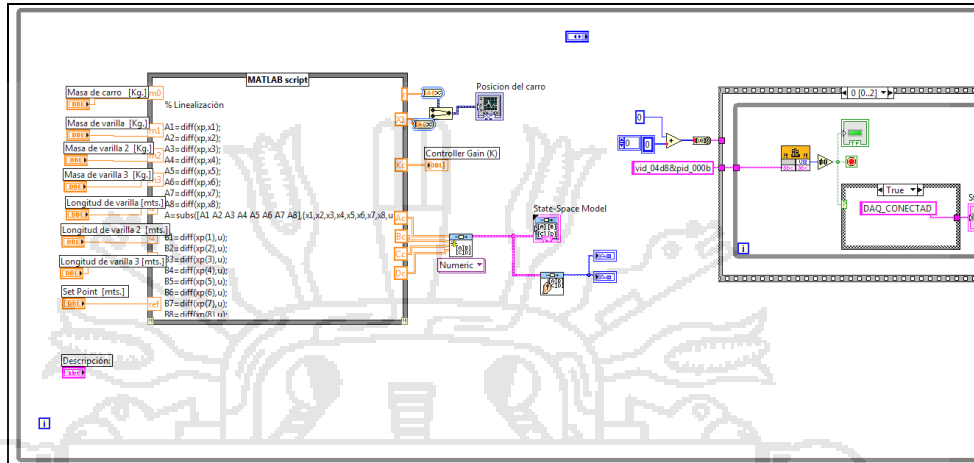


Figura 58: Diagrama de bloques para el modelo lineal en tiempo continuo y discreto.

2. **Estimador de parámetros.-** Realiza la estimación de parámetros utilizando el método de los mínimos cuadrados recursivos mejorados.
3. **Ley de control.-** El controlador adaptativo utiliza una ley de control proporcional integral óptimo cuadrático con realimentación de estados.

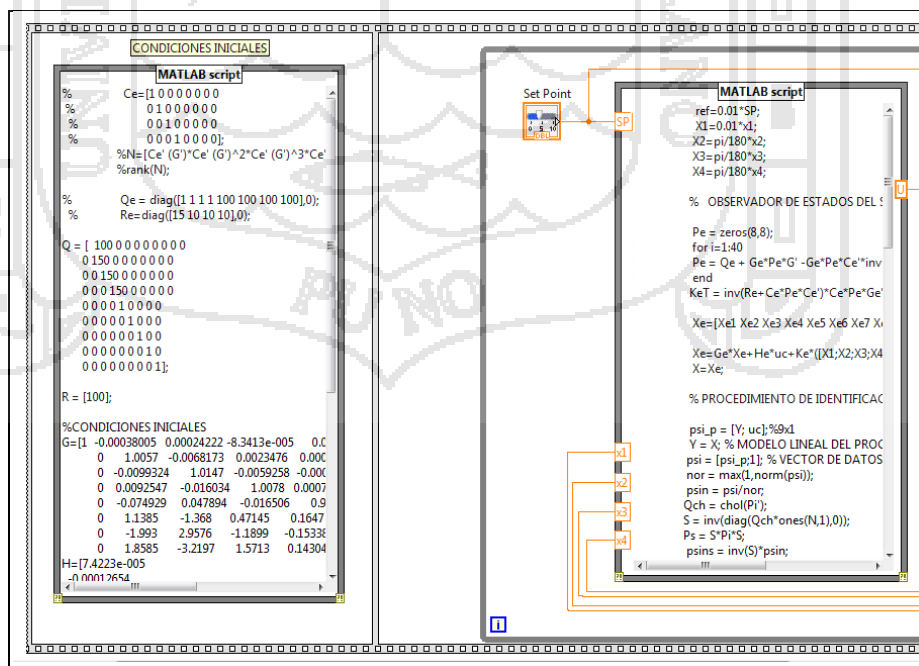


Figura 59: Diagrama de bloque para la ley de control.

4.7.2. Comunicación entre LabVIEW y el PIC

Para realizar la comunicación entre el LabVIEW y el sistema físico se hizo uso del microcontrolador PIC 18F4550 de Microchip y las librerías necesarias para la comunicación vía el puerto USB, los pasos para realizar esta tarea se muestran a continuación:

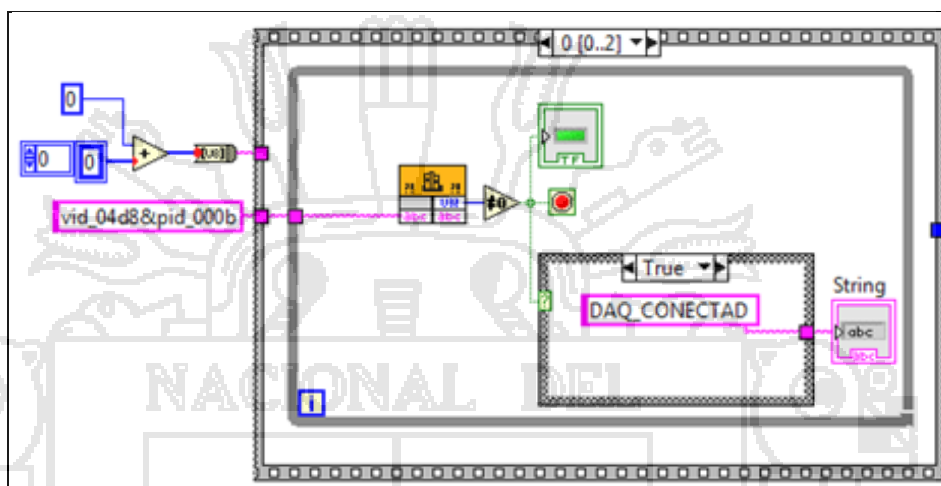


Figura 60: Diagrama de bloque para la comunicación entre LabVIEW y el PIC.

1. Comunicación entre la PC y el PIC.

Para realizar la comunicación entre la PC y un PIC vía el puerto USB utilizando el protocolo Bulk Transfer Microchip puso a disposición una DLL que permite comunicar Windows con sus Microcontroladores 18Fxxxx, esta DLL es la **mpusbapi.dll** cuyas funciones principales son las siguientes:

- MPUSGETDLLVERSION ().-Lee la versión del mpusbapi.dll.
- MPUSBGETDEVICECOUNT().-Devuelve el VID y PID asignado al dispositivo .
- MPUSBOPEN().-Devuelve el acceso al pipe del EndPoint con el VID_PID asignado .
- MPUSBREAD().-Lee el dato guardado en el EndPoint .
- MPUSBWRITE().-Escribe el dato en el EndPoint respectivo .

- MPUSBREADINT().- Lee el dato guardado en el EndPoint en caso se haya realizado una interrupción .
- MPUSBCLOSE().- Termina la comunicación con el respectivo EndPoint .

Para el correcto funcionamiento es necesario contar con el driver mchpusb.sys y mchpusb64.sys en caso se esté trabajando con un sistema operativo de 64 bits.

Para nuestra interfaz de usuario desarrollado en LabVIEW las funciones de la DLL se muestran a continuación:

- MPUSBGETDEVICECOUNT().-Devuelve el VID y PID asignado al dispositivo ,en nuestro caso el VID es 04D8 y el PID es 000B .

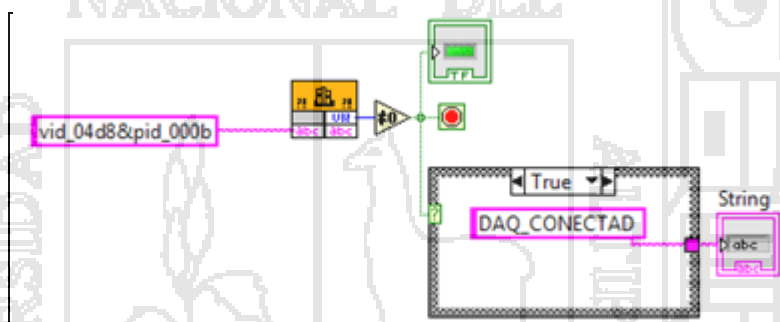


Figura 61: Diagrama de bloque para el MPUSBGETDEVICECOUNT del mpusbapi.dll

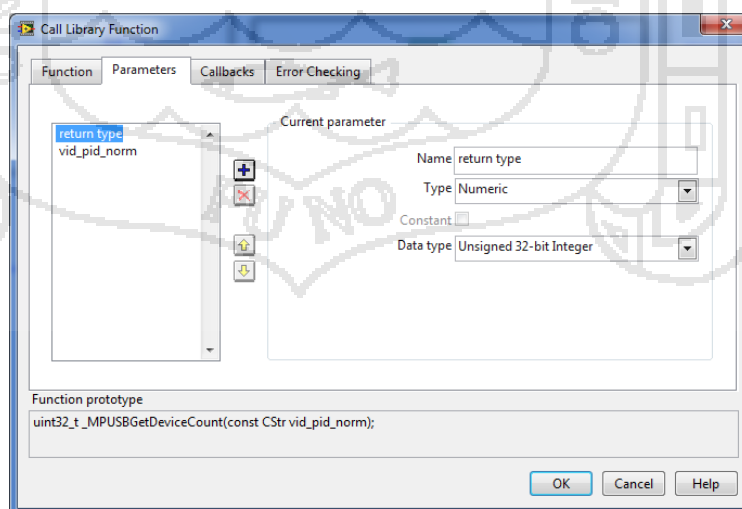


Figura 62: Configuración de parámetros para el MPUSBGETDEVICECOUNT del mpusbapi.dll

- MPUSBREAD().-En esta parte leemos los datos provenientes del PIC 18F4550 como son las señales de posición del carro y los ángulos de los péndulo.

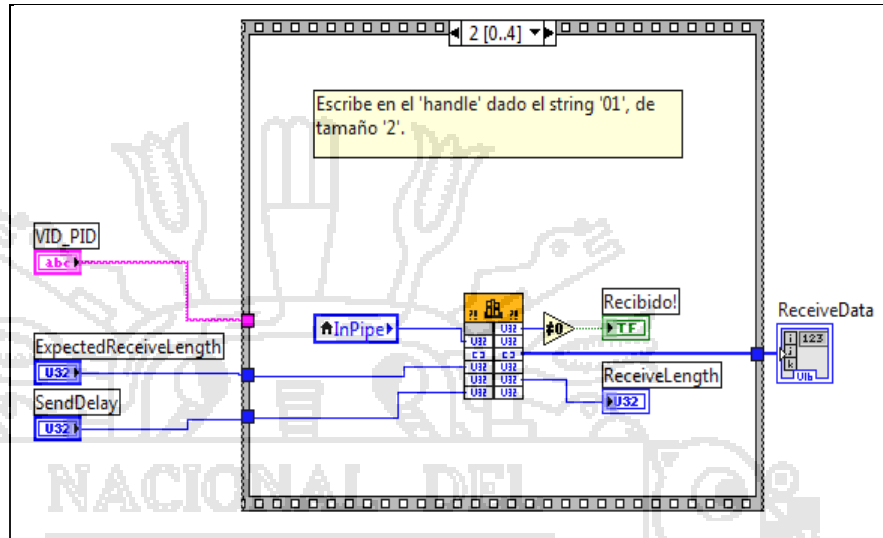


Figura 63: Diagrama de bloque para el MPUSBREAD del mpusbapi.dll

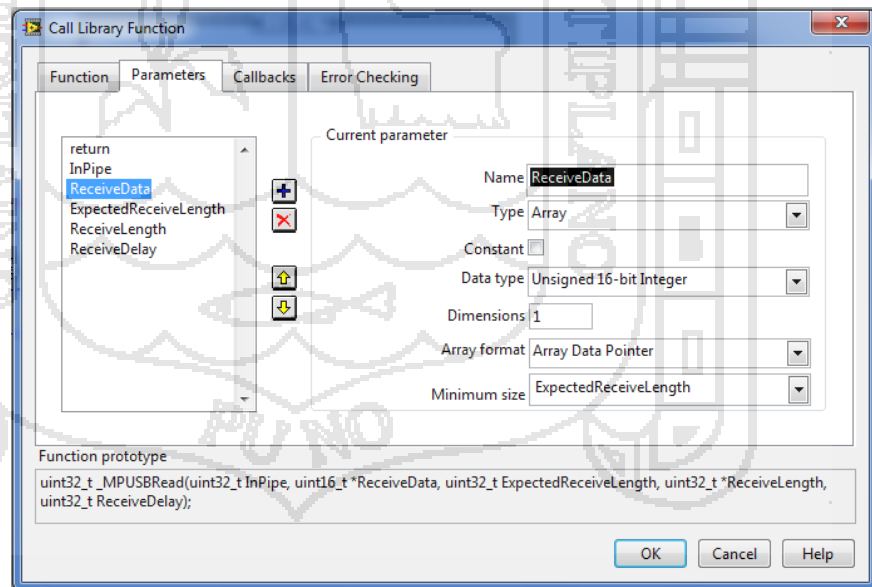


Figura 64: Configuración de parámetros para el MPUSBREAD del mpusbapi.dll .

- MPUSBWRITE().-Escribe el dato en el EndPoint respectivo .

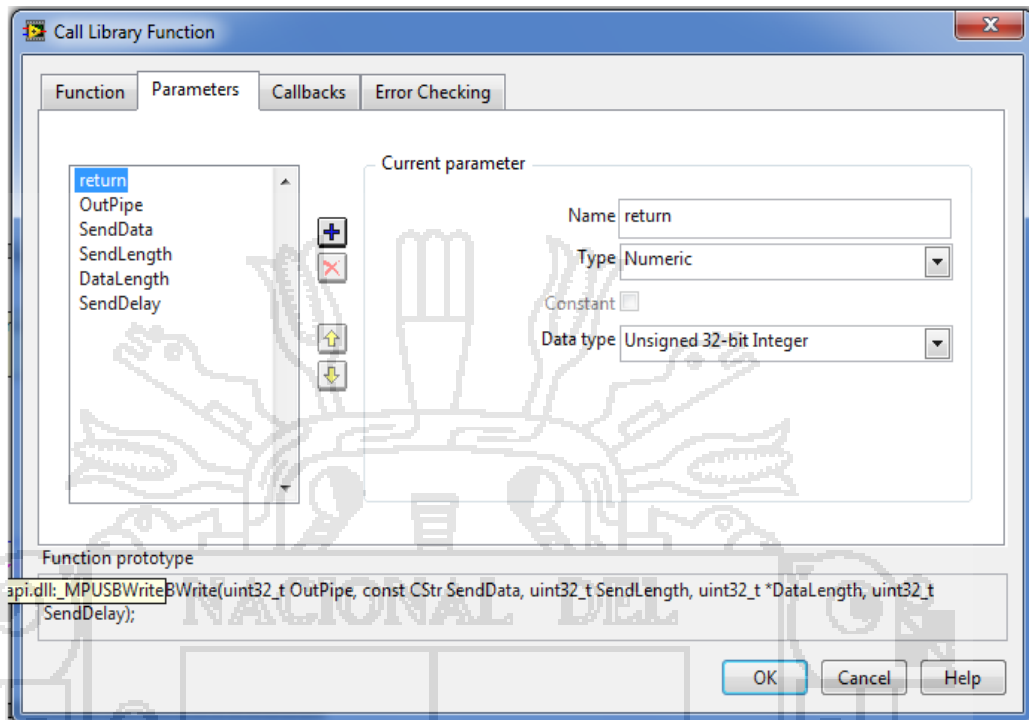


Figura 65: Diagrama de bloque para el MPUSBWRITE del mpusbapi.dll

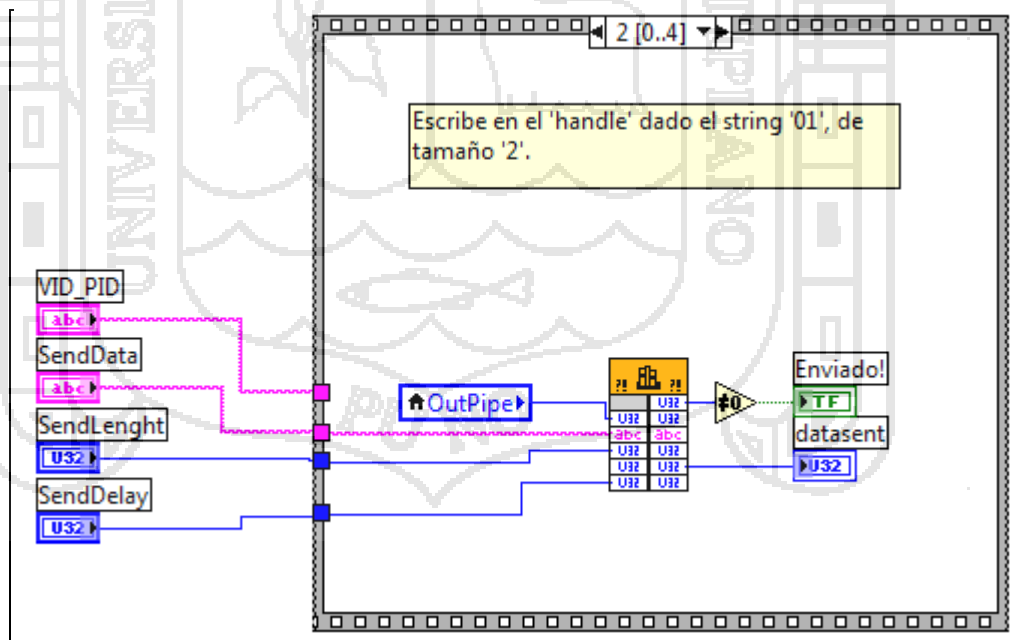


Figura 66: Configuración de parámetros para el MPUSBWRITE del mpusbapi.dll

4.7.3. Programación del PIC 18F4550.

Para realizar la comunicación entre PC y PIC utilizando el bus USB, CCS suministra una serie de librerías que nos permitirán realizar esta tarea, las librerías suministradas son:

- **pic_18usb.h** es un driver de capa hardware de la familia PIC18F4550.
- **usb.h** Realiza definiciones y prototipos utilizados en el driver USB.
- **usb.c** El USB stack que maneja las interrupciones USB y el USB setup requests en Endpoint 0.
- **usb_desc_scope.-** Es un descriptor que permite realizar una clase de dispositivo, en este caso el BULK TRANSFER, aquí es donde definimos el VID_PID que llevara nuestro PIC.

Las funciones más importantes son:

- **usb_init():** Inicializa el hardware USB .Espera en un bucle infinito hasta que el periférico USB es conectado al bus .Habilita y usa la interrupción USB.
- **usb_task():** Se utiliza para detectar la conexión para la inicialización ,cuando el PIC es conectado desconectado del bus, esta función inicializa el periférico USB o resetea el USB stack y el periférico .
 - **usb_enumerated() :** Devuelve un *TRUE* si el dispositivo ha sido enumerado para la PC, y en este caso ,el dispositivo entra en modo de operación normal y puede enviar y recibir paquetes de datos .
 - **usb_kbhit() :** Retorna un *TRUE* si el Endpoint tiene un dato recibido en su buffer.
 - **usb_get_packet() :** Recibe un carácter del buffer de transmisión ,en caso de estar vacío esperara hasta que se reciba .
 - **usb_put_packet() :** Coloca un carácter en el buffer de transmisión ,en el caso de que este lleno esperara hasta que pueda enviarlo .

Las partes principales que componen el programa del PIC son:

- Asignación del VID_PID para el dispositivo, en el descriptor **usb_desc_scope.h** realizamos el siguiente cambio:

```
//device descriptor
char const USB_DEVICE_DESC[] ={
    USB_DESC_DEVICE_LEN,           //the length of this report
    0x01,                          //constant DEVICE (0x01)
    0x10,0x01,                     //usb version in bcd
    0x00,                          //class code (if 0, interface defines class.
    0x00,                          //subclass code
    0x00,                          //protocol code
    USB_MAX_EP0_PACKET_LENGTH,     //max packet size for endpoint 0.
    0xD8,0x04,                     //vendor id (0x04D8 is Microchip)
    0x0B,0x00,                     //product id
    0x00,0x01,                     //device release number
    0x01,                          //index of string description of manufacturer.
    0x02,                          //index of string descriptor of the product
    0x00,                          //index of string descriptor of serial number
    USB_NUM_CONFIGURATIONS        //number of possible configurations
};
```

Para nuestro caso se asigno al **VID** el código **04D8**, y para el **PID** el código **000B** .En este mismo descriptor también podemos asignar un nombre a nuestra tarjeta de adquisición de datos, esto se hace en esta parte del código:

```
#define USB_STRING_DESC_COUNT sizeof(USB_STRING_DESC_OFFSET)

char const USB_STRING_DESC[] = {
    //string 0
    4, //length of string index
    USB_DESC_STRING_TYPE, //descriptor type 0x03 (STRING)
    0x09,0x04, //Microsoft Defined for US-English
    //string 1
    8, //length of string index
    USB_DESC_STRING_TYPE, //descriptor type 0x03 (STRING)
    'C',0,
    'C',0,
    'S',0,
    //string 2
    24, //length of string index
    USB_DESC_STRING_TYPE, //descriptor type 0x03 (STRING)
    'D',0,
    'A',0,
    'Q',0,
    '-',0,
    'M',0,
    'E',0,
    'N',0,
    'D',0,
    'O',0,
    'Z',0,
    'A',0,
};
```

El numero **24** y el nombre **'DAQ_MENDOZA'** tienen la siguiente relación, el STRING tiene 11 caracteres, para que esto sea entendido por el PICC debe de duplicarse el numero de caracteres aumentado en uno, es decir $2x(11+1)=24$.

Una vez realizado esto debemos de llamar esta función desde nuestro programa en el PIC, de esta manera:

```
#include <pic18_usb.h> // Microchip PIC18Fxx5x Hardware layer for CCS's PIC USB driver
#include ".\DRIVER_PT\usb_desc_scope.h" // Configuración del USB y los descriptores para este dispositivo
#include <usb.c> // handles usb setup tokens and get descriptor reports
```

Parte del programa en el PIC18F4550 se muestra a continuación:

```
while (TRUE)
{
    if(usb_enumerated())
    {
        Enciende(LED_VERDE);

        if (usb_kbhit(1))
        {
            delay_us(10);
        }
        delay_us(10);

        set_adc_channel(0);
        delay_us(10);
        entrada_0 = read_adc();

        set_adc_channel(1);
        delay_us(10);
        entrada_1=read_adc();

        set_adc_channel(2);
        delay_us(10);
        entrada_2 = read_adc();

        usb_put_packet(1,envia,6,USB_DTS_TOGGLE);
    }
    else
    {
        Apaga(LED_VERDE);
    }
}
```

Luego compilamos el programa para que genere el código hexadecimal que se grabara finalmente en el microcontrolador, para esto presionamos la tecla **F9**, el resultado se muestra a continuación:

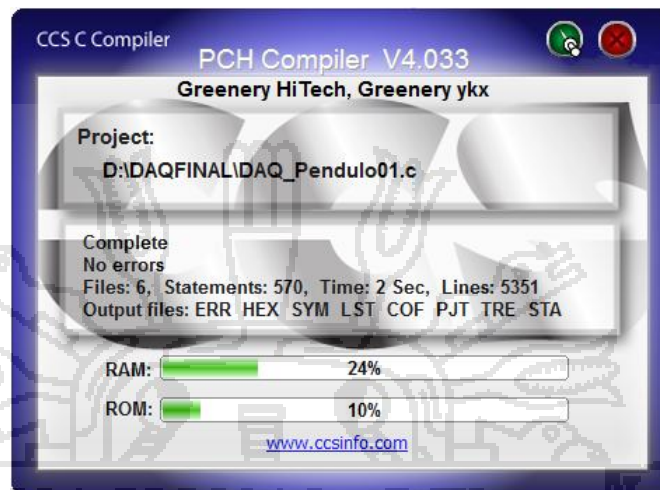


Figura 67: Compilación del programa en PICC.

Una vez obtenido el archivo hexadecimal necesitamos grabarlo al PIC, para esto haremos uso del grabador PICKIT2 proporcionado por Microchip, al conectar el grabador y abrir el PICKIT2 aparece la siguiente imagen:

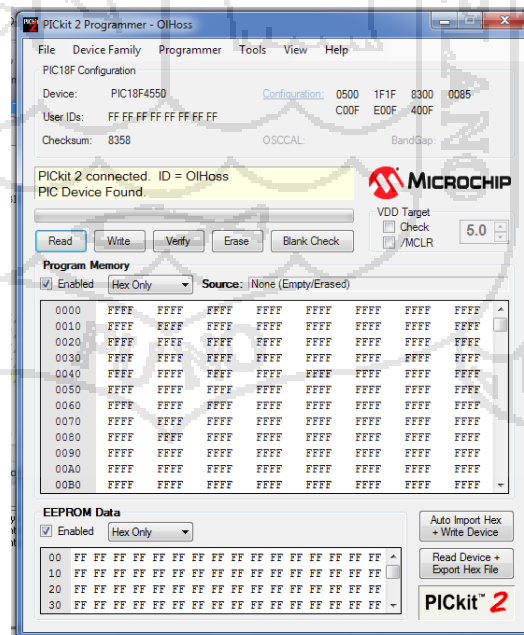


Figura 68: Grabador PICKIT 2 de Microchip.

Para programar simplemente abrimos el archivo hexadecimal y hacemos click en **Write** ,la imagen siguiente muestra el resultado de la grabacion :

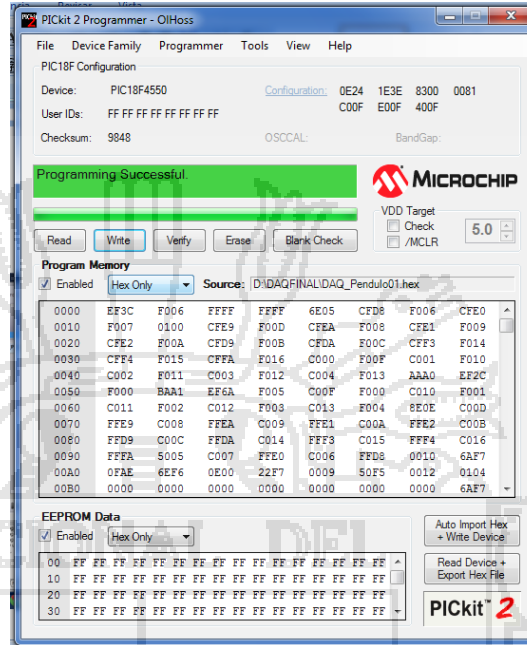


Figura 69: Programación del PIC usando PICKIT 2 de Microchip.

Una vez programado el PIC procedemos a conectarlo a la PC, la imagen inicial se muestra a continuación:

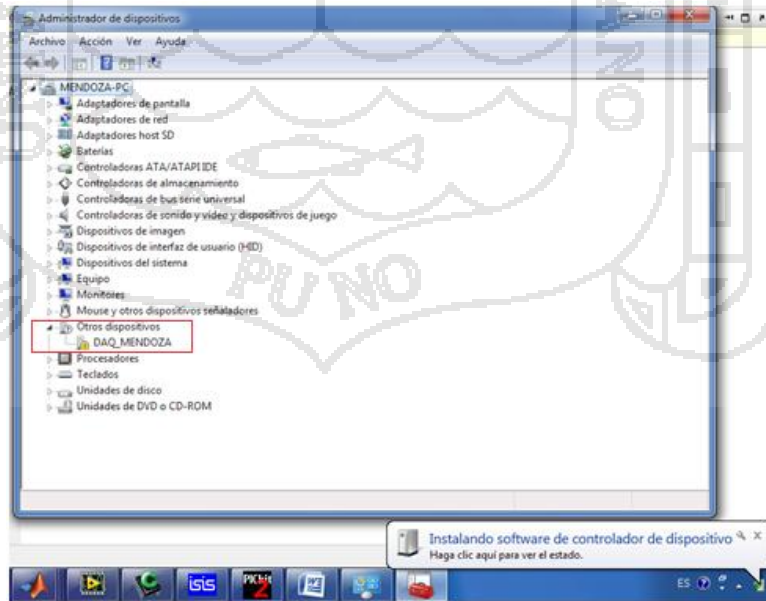


Figura 70: Conexión del PIC 18F4550 a la PC .

En esta imagen podemos apreciar que se reconoce un nuevo dispositivo, y el nombre que se le asigna es “DAQ_MENDOZA”, que es el nombre que se dispuso en el descriptor **usb_desc_scope.h**, ahora nos pedirá instalar el software de controlador de dispositivo :

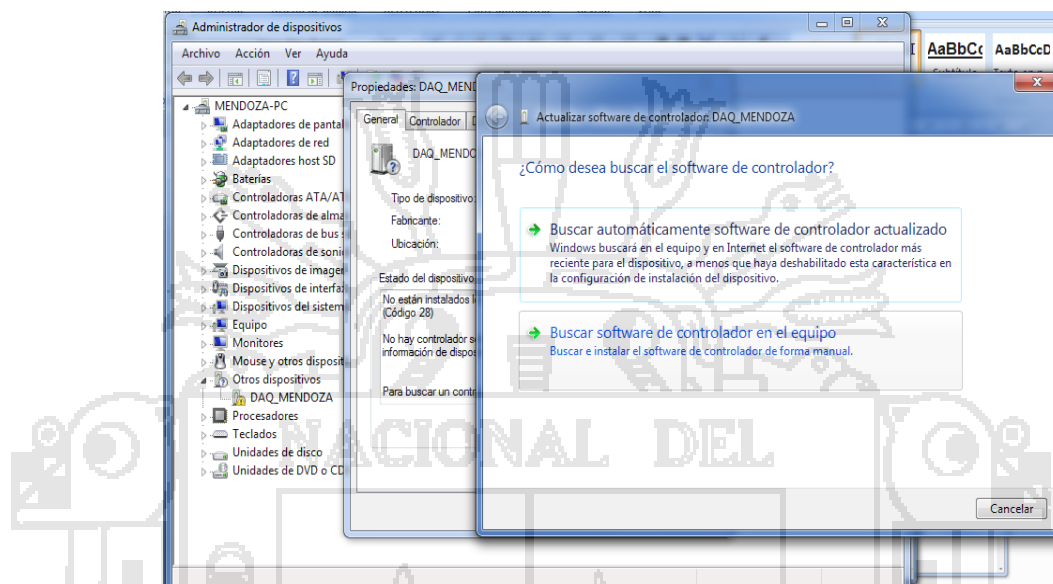


Figura 71: Instalación del Driver **mchpusb**.

Para instalar correctamente el software elegimos la carpeta en la que se encuentre los siguientes archivos:

mchpusb.inf
mchpusb.sys
mchpusb64.sys

En el archivo **mchpusb.inf** debemos de modificar la parte del código en que asignemos el VID_PID, para nuestro caso debe ser: VID_04D8&PID_000B, quedándonos esta parte del archivo **inf** así:

```
[DeviceList]
%DESCRIPTION%=DriverInstall, USB\VID_04D8&PID_000B

[DeviceList.ntamd64]
%DESCRIPTION%=DriverInstall64, USB\VID_04D8&PID_000B
```

También podemos modificar los nombres a nuestro gusto:

```
-----  
string definitions  
-----  
;Modify these strings to customize your device  
-----  
  
[strings]  
DEVICEMANAGERCATEGORY="DAQ_MENDOZA"  
MFGFILENAME= "mchpusb"  
MFGNAME="wilson Beto"  
INSTDISK="Proveedor - Disco Instalacion "  
DESCRIPTION="DAQ_PENDULO"
```

Una vez hecho estas modificaciones instalamos el software del controlador:

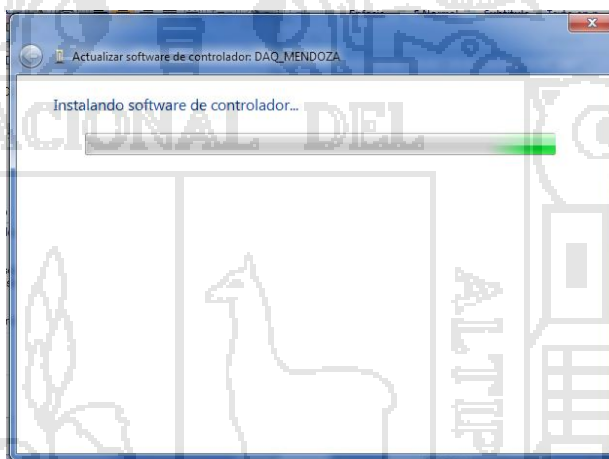


Figura 72: Instalación del software de control.

Si todo se realizó correctamente nos aparecerá la siguiente imagen:

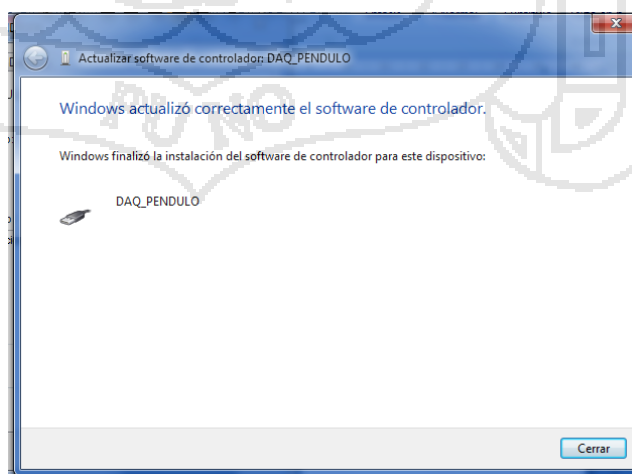


Figura 73: Instalación exitosa del driver para la comunicación entre PIC y PC.

En el administrador de dispositivos nuestra tarjeta de adquisición de datos se mostrará de la siguiente forma:

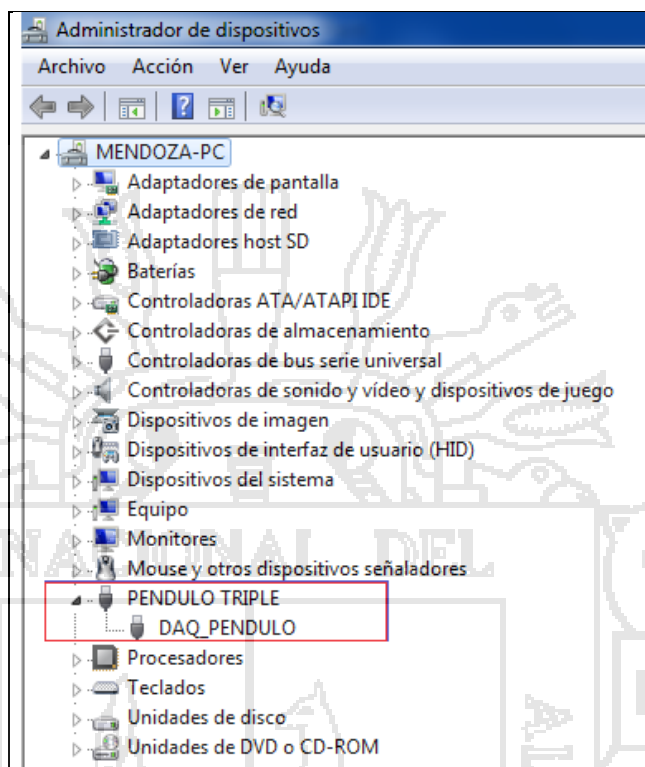


Figura 74: Reconocimiento de la DAQ.

4.8. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN.

Una vez realizado todo procedemos a experimentar con nuestro sistema diseñado, utilizamos la técnica de prueba y error con el fin de corregir los errores que impidan el correcto funcionamiento del controlador del péndulo triple.

El Set Point sirve para controlar la posición deseada del carro, manteniendo siempre los ángulos de las varillas en su posición de equilibrio, las graficas siguientes muestran las respuestas del controlador adaptativo diseñado:

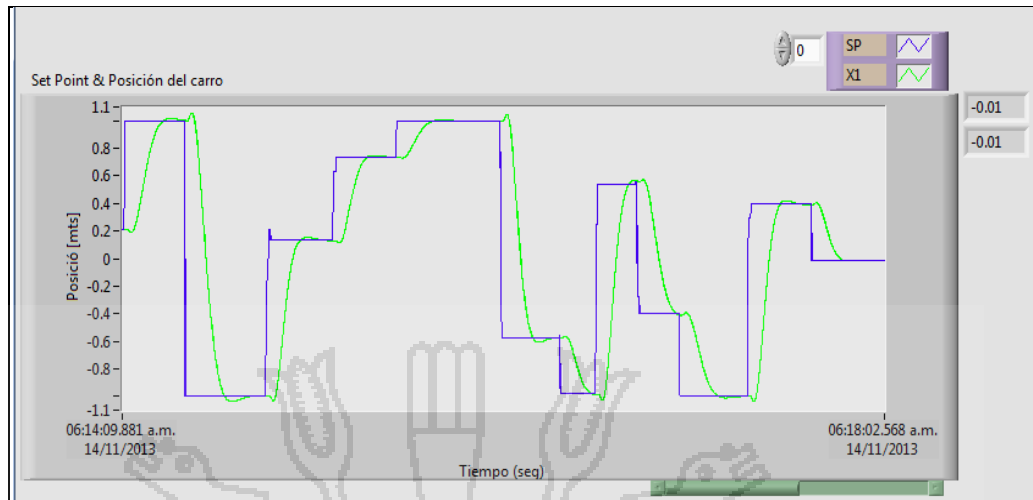


Figura 75: Respuesta del controlador Adaptativo frente a una señal de entrada variable.

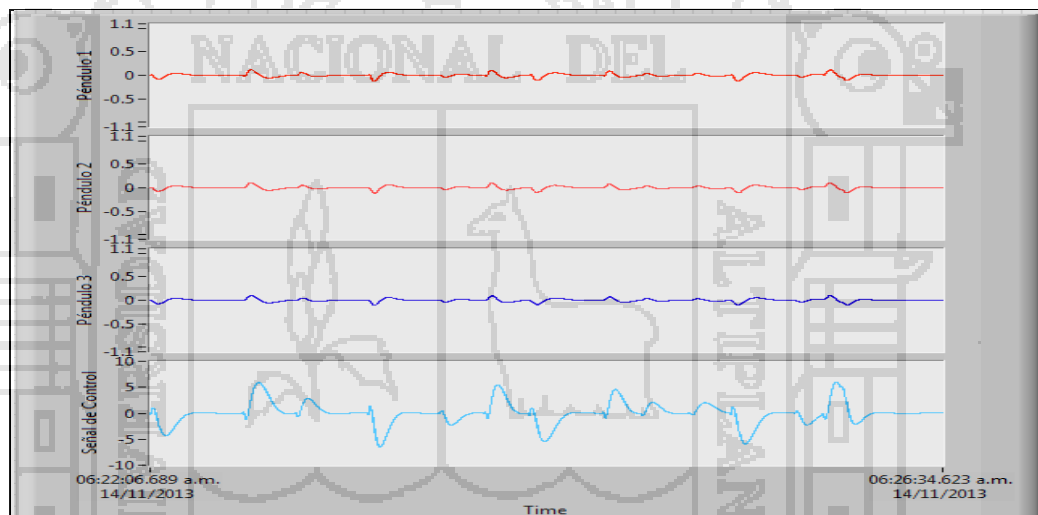


Figura 76: Evolución temporal de los ángulos frente a una señal de entrada variable.

Se puede observar que cuando el Set Point se ajusta para 1 metro o 100 centímetros, este logra estabilizarse alrededor de los 6 segundos, además el sobreimpulso no supera el 4%, por lo tanto nuestro diseño es correcto, la señal de control u esta limitada a tener valores dentro del rango para el cual fue diseñado, esto con el fin de evitar saturar a el driver de potencia y crear no linealidades que ocasionarian respuestas no deseadas en el controlador.

Se realizó varias pruebas con el fin de obtener los resultados deseados, incluso se empezó por probar un control para un péndulo simple, en este experimento se obtuvo buenos resultados utilizando una ley de control óptimo

cuadrático, demostrándonos que el modelado y diseño del controlador fueron realizados correctamente, inclusive era capaz de estabilizarse cuando se le aplicaba una perturbación considerable a la varilla del péndulo.

Sin embargo para controlar un péndulo triple el trabajo es mucho más difícil, por lo que se realizó varias pruebas con el fin de lograr una respuesta aceptable del controlador, para mayor claridad resumiremos estas experiencias en tres partes:

Prueba 1: Correcciones en el hardware y software.

El controlador diseñado es probado en el sistema mecánico, el controlador parece que responde y trata de corregir los errores, sin embargo no es capaz de estabilizarse por sí solo, es decir para lograr la estabilización es necesario que un agente externo limite el movimiento angular de las varillas con el fin de impedir que los péndulos salgan fuera del punto de equilibrio en la cual fueron diseñados. Es necesario aplicar un agente externo para que el péndulo logre una estabilización, ya que de otro modo el péndulo se desequilibra.

Al realizar este experimento se entendió el porqué la ganancia correspondiente al ángulo de la segunda varilla era mayor al de la primera y la ganancia de la tercera varilla era de signo contrario y superior al de la segunda; la razón se debe a que la tercera varilla tiene un comportamiento más inestable que las otras y por lo tanto al ponerle un peso mayor hacemos que el controlador lo tome más en cuenta y así lograr estabilizar todo el sistema.

Estos comportamientos que impiden un desempeño aceptable del controlador motivan a realizar algunos ajustes y mejoras en la parte mecánica, ya que el carro del péndulo tenía un deslizamiento muy vibratorio por tanto se hizo lo posible para que todo el sistema quede más fijo y así el carro evite dar movimientos temblorosos que impedían la estabilización del péndulo triple.

Además de ello se comprobó que la velocidad de envío y recepción de datos era muy lenta, es decir existía un retardo considerable en el envío de las señales de salida del sistema, que además al realizar el algoritmo del controlador adaptativo en el LabVIEW y generar la señal de control el péndulo

no lograra estabilizarse adecuadamente, por lo que se decidió emplear un PIC 16F877 con el fin de dividir el trabajo para calcular la ley de control, con esta modificación se logra obtener una respuesta más rápida y conseguir un mejor desempeño del controlador.

Con estas modificaciones realizamos nuevas pruebas que brinden un comportamiento aceptable del sistema.

Prueba 2: Mejora del diseño del controlador – observador.

Para mejorar el desempeño del controlador se realizo nuevas simulaciones con la finalidad de obtener ganancias más acordes a la realidad ya que al tener ganancias muy elevadas estas también amplifican los errores o perturbaciones intrínsecas de los sensores causando que el comportamiento sea inestable y por lo tanto indeseado.

En la parte del observador de estados también debemos de realizar los ajustes necesarios para obtener un buen comportamiento en el sistema real.

Prueba 3: Probando la adaptabilidad del controlador diseñado.

Una vez obtenido un comportamiento aceptable del sistema necesitamos comprobar realmente si nuestro controlador tiene la capacidad de adaptarse cuando variamos los parámetros del sistema, para probar esto modificaremos los pesos de las varillas de los péndulos, principalmente adicionaremos cargas en la tercera varilla de modo que este se comporte como una carga no lineal.

Primero adicionamos una carga de 500 gramos aproximadamente, el estimador de parámetros empieza estimar los parámetros. Ahora le imprimimos una perturbación externa, es decir damos un pequeño golpe a la varilla del péndulo. Ahora quitamos la carga y observamos el comportamiento del péndulo triple. Ahora probamos con una carga mayor en este caso usamos un peso de 1Kg.

Nuestro sistema es capaz de adaptarse conforme se varía los parámetros del sistema, sin embargo existen ocasiones en que el controlador no responde adecuadamente debido al error en la medida de los sensores y el retardo en procesar el algoritmo para la estimación de parámetros.

4.8.1. Resultados finales del controlador

A continuación mostramos las ganancias finales que se obtuvieron a medida que se variaban los parámetros del sistema, primero se considera las ganancias obtenidas sin ninguna variación en el peso de la tercera varilla que es de 96 gramos, luego obtenemos las nuevas ganancias al aumentar el peso de la tercera varilla en 500 gramos, finalmente probamos incrementando en 1 Kilogramo el peso de la varilla tres.

Cuadro 4. Cuadro de resultados obtenidos utilizando el Controlador Adaptativo.

Masa de la tercera varilla	Ganancia del controlador [K]	Ganancia Integral [KI]	Tiempo de asentamiento	Máximo sobre pico .
96 gr	[-9.4951 -47.99 156.35 -154.19 -15.484 -1.1866 -3.2849 -8.861]	[-0.051026]	6 s	4.24 %
596 gr	[-4.5912 -152.72 487.54 - 358.61 -10.776 -0.79965 1.5032 -6.3812]	[-0.025391]	6s	4.23%
1.096 Kg	[-2.9296 -247.39 736.39 - 506.96 -9.2441 -0.9527 3.1508 -5.6831]	[-0.016332]	6s	4.24%

Como puede observarse a medida que la masa de la tercera varilla aumenta las ganancias relacionadas con la posición del carro (estado x1) disminuyen en valor absoluto, como se puede ver en el cuadro estos bajan de 9.49 a 4.59 y luego a 2.93. Sin embargo sucede lo contrario con los estados x2, x3 y x4 que miden las posiciones angulares de las varillas ya que los valores absolutos de estos tienden a aumentar a medida que el peso aumenta, por ejemplo, para la primera varilla las ganancias aumentan de 47.9 a 152.7 y 247.4 ,caso similar sucede para las varillas 2 y 3, es interesante observar que los signos de las ganancias para x1, x2 y x4 son iguales sin embargo para la segunda varilla este es de signo contrario.

Las ganancias para los estados x5, x6, x7 y x8 también sufren cambios como se puede apreciar en el cuadro anterior, por ejemplo para el estado x5 que es la velocidad lineal del carro este tiende a disminuir en valor absoluto de

15.48 a 10.77 y 9.24. La ganancia integral también tiende a disminuir en valor absoluto a medida que se incrementa en el peso de la varilla, los valores disminuyen de 0.051 a 0.025 y luego a 0.016.

Un resultado importante es la poca variación en el tiempo de asentamiento del sistema, ya que a pesar de los cambios en los parámetros del proceso estos logran estabilizarse alrededor de los 6 segundos. Otro dato importante es que el máximo sobre pico oscila alrededor del 4.24 %.

4.8.2. Comparación del controlador adaptativo frente a un controlador fijo.

Realizamos una comparación entre el controlador adaptativo diseñado y utilizando un controlador fijo, en este caso usaremos un controlador óptimo cuadrático fijo, el esquema utilizado se muestra a continuación:

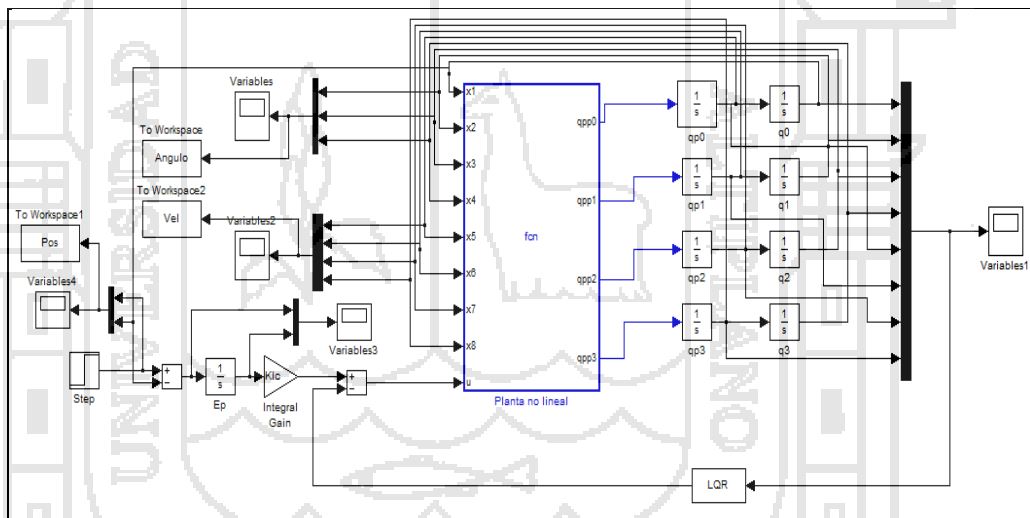


Figura 77: Diagrama del Controlador fijo: PI óptimo cuadrático.

Cuando los parámetros no se varían alrededor del punto al cual fueron diseñados, los resultados son muy buenos, como se aprecia a continuación:

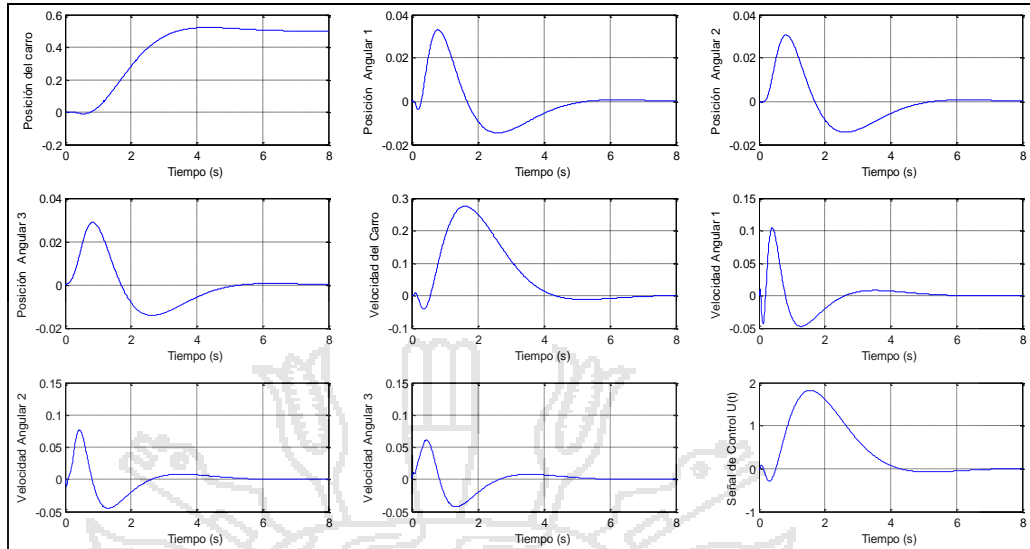


Figura 78: Respuestas cuando los parámetros varían en un 5%.

Sin embargo cuando existe una variación en los parámetros, este controlador fijo deja de responder correctamente, mostrándonos el siguiente comportamiento:

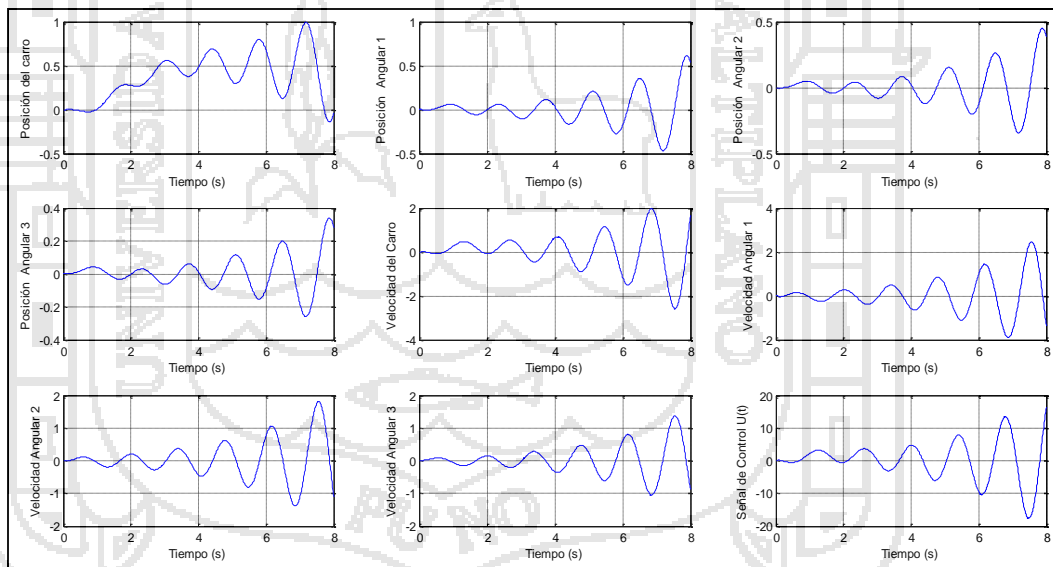


Figura 79: Respuestas cuando los parámetros varían en 50%.

Se aprecia claramente la inestabilidad del sistema, de esta forma podemos comprobar la ventaja de usar un controlador adaptativo frente a un controlador fijo.

Cuando incrementamos el peso de la tercera varilla en 500 gramos el resultado es el siguiente:

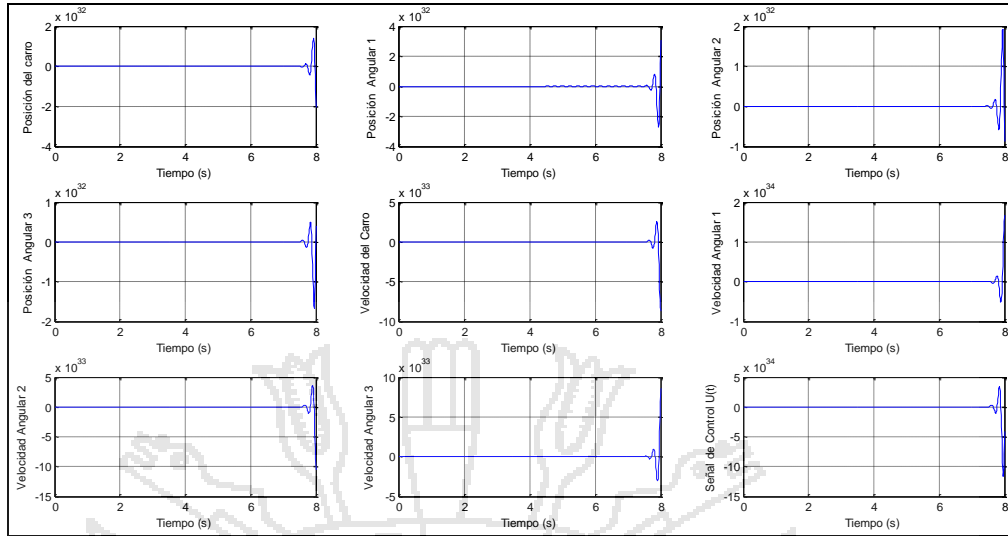


Figura 80: Respuesta cuando se incremento 500 gr a la varilla 3.

Cuando incrementamos el peso de la tercera varilla en 500 gramos el resultado es el siguiente:

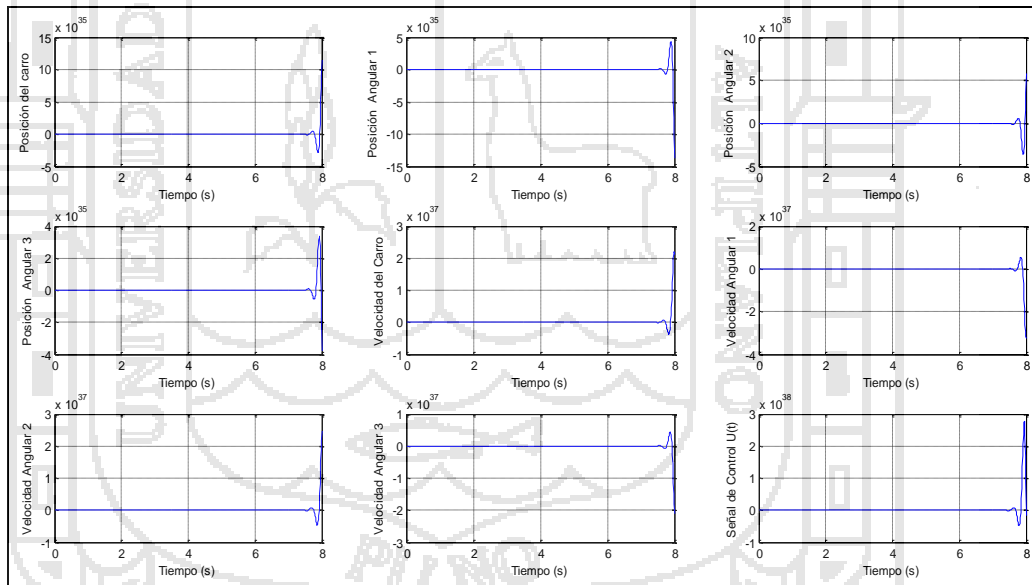


Figura 81: Respuesta cuando se incremento 1000 gr a la varilla 3.

Para una mayor apreciación de las ventajas de utilizar un controlador adaptativo frente a un control fijo, variamos los parámetros del sistema como se hizo en la sección anterior, observar que no se modifican las ganancias del controlador, es decir se está utilizando un control fijo.

Cuadro 5. Resultados utilizando un controlador fijo.

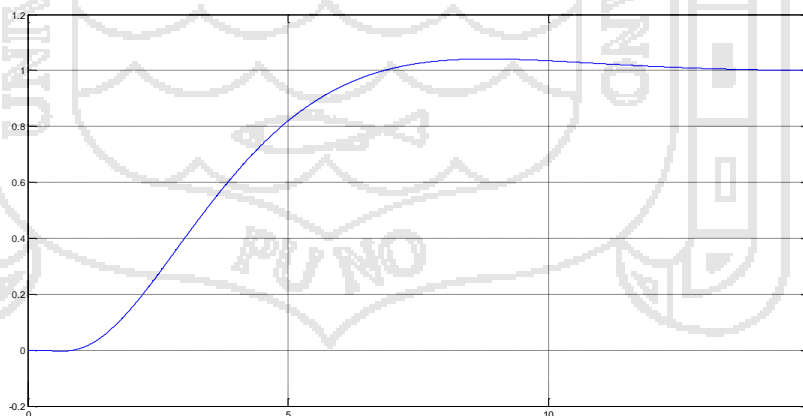
Masa de la tercera varilla	Ganancia del controlador [K] fijo	Ganancia Integral [KI]	Tiempo de asentamiento	Máximo sobre pico .
96 gr	[-9.4951 -47.99 156.35 -154.19 -15.484 -1.1866 -3.2849 -8.861]	[-0.051026]	6 s	4.24 %
596 gr	[-9.4951 -47.99 156.35 -154.19 -15.484 -1.1866 -3.2849 -8.861]	[-0.051026]	Inf.	Inf.
1.096 Kg	[-9.4951 -47.99 156.35 -154.19 -15.484 -1.1866 -3.2849 -8.861]	[-0.051026]	Inf.	Inf.

Por tanto queda demostrado que un **controlador fijo no es capaz** de responder adecuadamente a medida que se varían los parámetros del proceso estudiado.

4.8.3. Diferencias entre modelo completo no lineal y modelo linealizado

Para ver las diferencias al utilizar un modelo no lineal completo y un modelo linealizado en torno al punto de equilibrio compararemos las respuestas al utilizar un controlador continuo proporcional integral óptimo cuadrático.

Primero probaremos el controlador en el modelo no lineal, el esquema se muestra a continuación:

**Figura 82:** Simulación usando el modelo no lineal del péndulo triple.

De la gráfica podemos apreciar que el tiempo de asentamiento es de alrededor 6 segundos y el sobreimpulso no supera el 4%,

Ahora probamos el mismo controlador, pero utilizando el modelo linealizado en torno al punto de equilibrio, la respuesta del sistema se muestra a continuación:

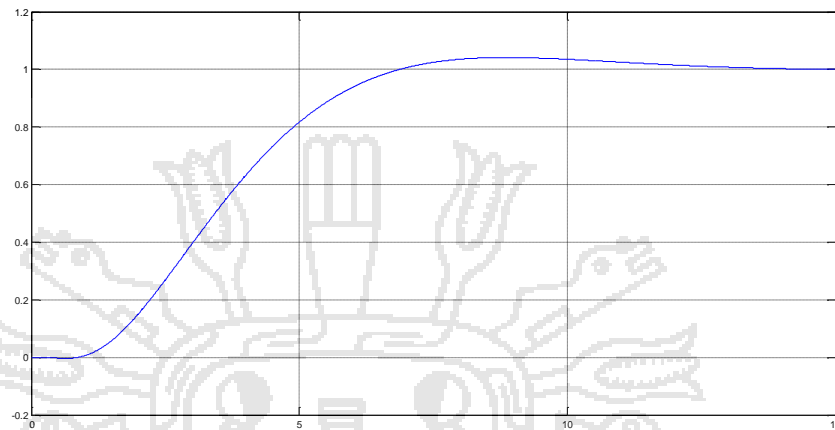


Figura 83: Simulación usando el modelo linealizado del péndulo triple.

Haciendo unos cálculos en el Matlab, comprobamos que la diferencia que existe entre los resultados usando uno y otro modelo son muy pequeños, para los estados del sistema estas diferencias no superan los valores siguientes:

Para la posición del carro, es decir la variable X_1 , el error máximo es de 0.011622 metros o 1.16 centímetros, mas aun esto podemos apreciarlo gráficamente:

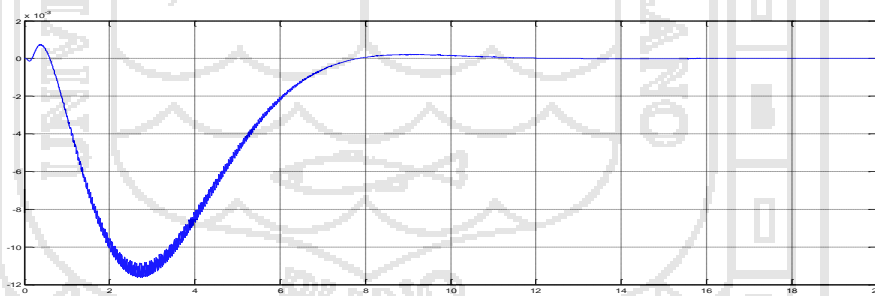


Figura 84: Error entre la posición.

La gráfica muestra el resultado de restar el valor de X_1 obtenido usando el modelo no lineal y esta variable utilizando el modelo linealizado.

Para los ángulos de las varillas, es decir las variables X_2 , X_3 y X_4 , el error máximo es 0.0018054, 0.0014732 y 0.0012714 radianes respectivamente, si convertimos a grados sexagesimales obtenemos errores menores a 0.1 grados,

en conclusión las diferencias entre el modelo no lineal y el modelo linealizado son mínimas ,mas aun esto podemos apreciarlo gráficamente:

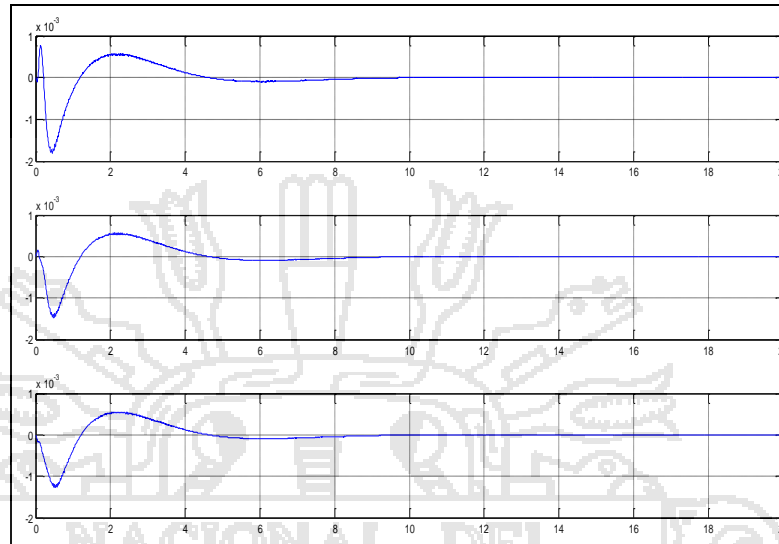


Figura 85: Error entre los ángulos.

Para las velocidades lineal y angulares , es decir las variables X5,X6,X7 y X8 ,el error máximo es 0.29088 m/s, 0.015932, 0.021298 y 0.025586 rad/s respectivamente, en conclusión las diferencias entre el modelo no lineal y el modelo linealizado son mínimas, mas aun esto podemos apreciarlo gráficamente:

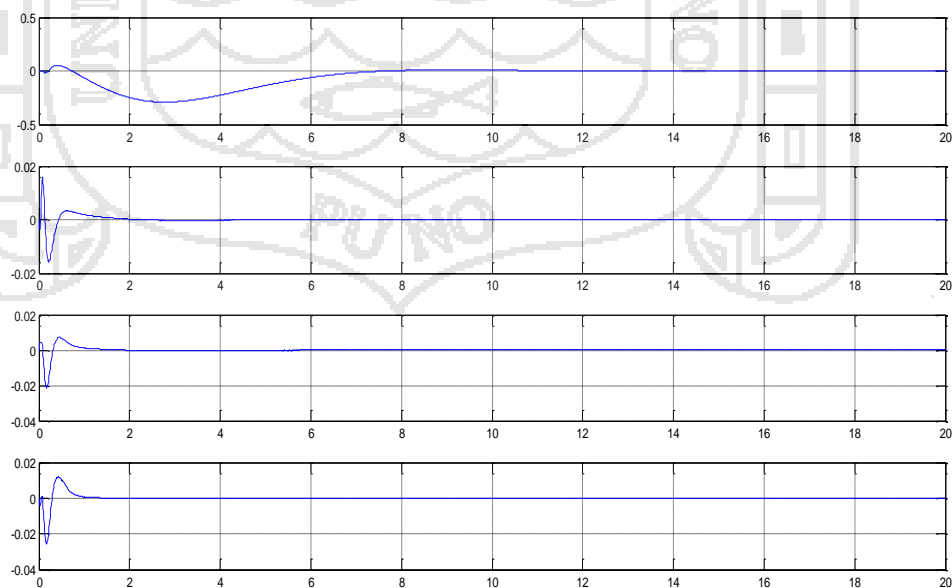


Figura 86: Error entre las velocidades.

Resumiendo estos resultados mostramos el siguiente cuadro:

Cuadro 6. Diferencias entre modelo completo no lineal y modelo linealizado

Variable	Estado	Error máximo
Posición Lineal del carro	X1	0.011622 m.
Posición Angular de la varilla 1	X2	0.0018054 rad
Posición Angular de la varilla 2	X3	0.0014732 rad
Posición Angular de la varilla 3	X4	0.0012714 rad
Velocidad Lineal del carro	X5	0.29088 m/s
Velocidad Angular de la varilla 1	X6	0.015932 rad/s
Velocidad Angular de la varilla 2	X7	0.021298 rad/s
Velocidad Angular de la varilla 3	X8	0.025586 rad/s

4.9. VALIDACIÓN DE HIPOTESIS

El controlador adaptativo autosintonizado diseñado si es capaz de controlar la estabilidad del péndulo triple invertido lineal, el controlador tiene un tiempo de respuesta de 6 segundos aproximadamente y el Sobrepico máximo es menor al 5 %. Puede variar su comportamiento frente a cambios en la dinámica del sistema como es el peso de la tercera varilla, lo que se hace es variar la matriz de ganancia de realimentación de estados de acuerdo a los cambios en la dinámica que son estimados por el identificador de sistemas utilizando el método de los mínimos cuadrados recursivos mejorados multivariantes. En el siguiente cuadro se muestra las características del controlador adaptativo diseñado.

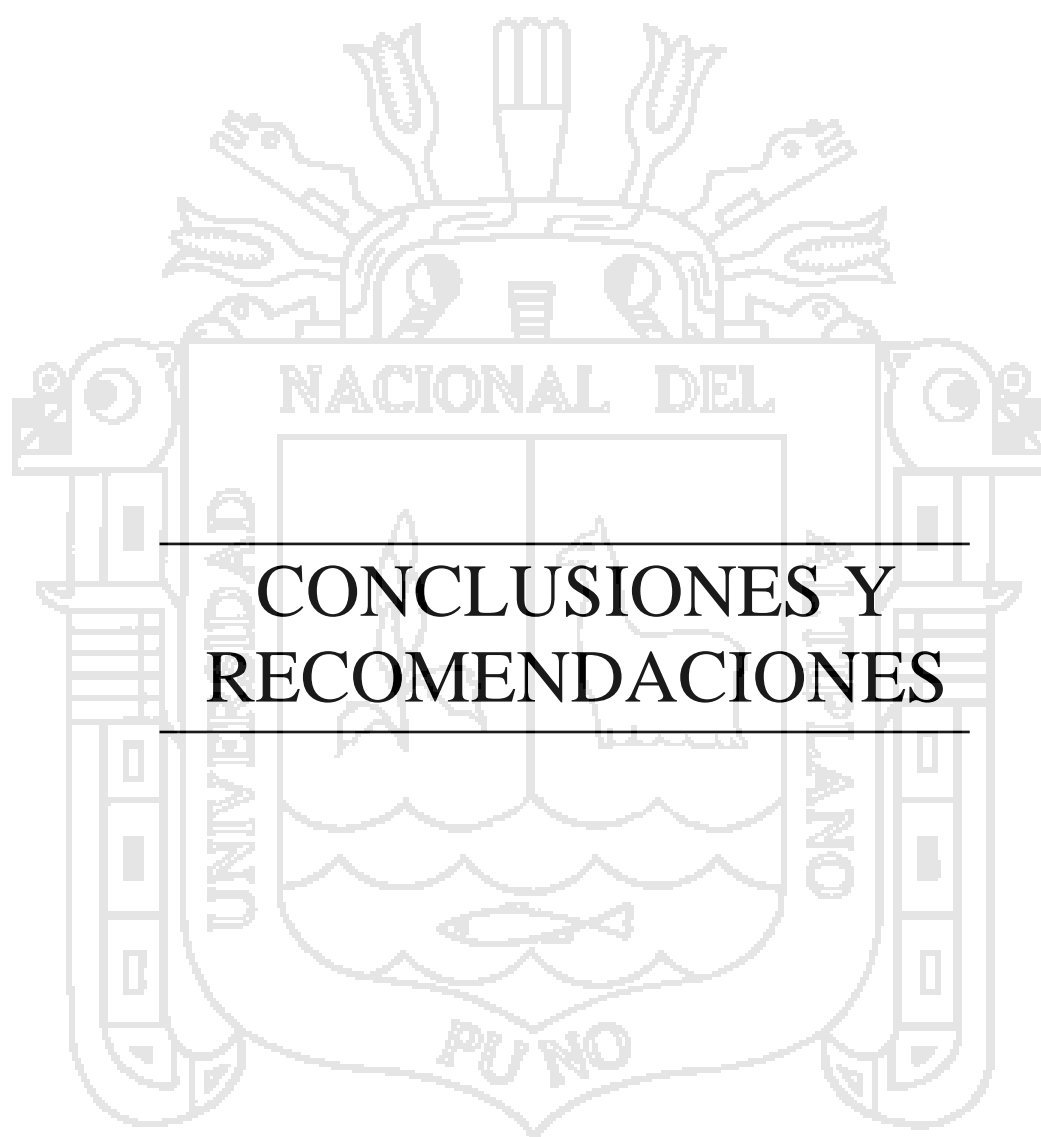
Cuadro 7. Características del Controlador Adaptativo.

CONTROL ADAPTATIVO DE UN PÉNDULO TRIPLE	
Tipo de controlador	Adaptativo Autoajutable.
Método de Identificación de parámetros.	Mínimos cuadrados recursivos.
Ley o estructura de control	Proporcional Integral Óptimo cuadrático
Tiempo de asentamiento	6 s. Aprox.
Máximo Sobrepico	5 %

El controlador adaptativo diseñado es capaz de responder de una mejor manera frente a las perturbaciones externas e incertidumbres en el modelado del proceso en comparación a un controlador fijo, sin embargo la respuesta del controlador depende mucho de la efectividad del estimador de parámetros ya que si el sistema identificado no coincide con el sistema real la respuesta no será adecuada.

Las ventajas de utilizar un controlador adaptativo si son mayores a las desventajas producidas por el alto costo computacional requerido para realizar los algoritmos de control, mas aun si el proceso estará sujeto a constantes cambios en sus parámetros el controlador adaptativo será una solución directa al problema de estudio, sin embargo, si los parámetros del sistema no van a sufrir mayores cambios se debe de pensar primero en utilizar un controlador fijo en vez de uno adaptativo.





CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

Durante el proceso de investigación se realizó muchos experimentos que ayudaron a comprender de mejor manera la teoría de control, tanto a nivel teórico como práctico, de esta forma se adquirió habilidades para diseñar sistemas de control de modo que exista estrecha relación entre la simulación y la implementación real, en nuestro estudio sobre el control adaptativo del péndulo triple se obtuvo muchos resultados importantes que ayudarán a futuras investigaciones en esta área, las conclusiones más importantes a las que se llegó son las siguientes:

1. Se diseñó e implementó un sistema para el control de estabilidad de un péndulo triple invertido, utilizando un esquema de control adaptativo autosintonizado que brindó un comportamiento dentro de lo esperado.
2. Se estudió las diferencias de utilizar un modelo no lineal frente a el modelo linealizado, los errores son muy pequeños, menores al 1.2% y por tanto se pueden considerar despreciables siempre y cuando no se aleje del punto de operación en la cual se linealizó.
3. Se realizó una comparación entre el controlador adaptativo diseñado y un controlador fijo como es el PI óptimo cuadrático, se observó que cuando los parámetros tienen pequeñas variaciones, menores al 10%, el regulador fijo responde adecuadamente, sin embargo cuando el sistema presenta un gran cambio en su dinámica, superiores al 30 % de su valor nominal este regulador deja de ser bueno, aquí es donde el controlador adaptativo muestra su mayor ventaja.
4. Se diseñó un software en LabVIEW, este programa permite controlar el Set Point así como permite el monitoreo de las señales provenientes del sistema físico.
5. Se implementó el sistema mecánico del péndulo triple con materiales asequibles, el circuito electrónico del controlador se diseñó de acuerdo al estudio hecho en el presente proyecto.

6. Se comprobó que al utilizar un mecanismo de adaptación dentro de un lazo de realimentación, un controlador es capaz de brindar un buen comportamiento incluso cuando se modifique los parámetros del sistema o se tenga una perturbación externa que afecte la dinámica del proceso.
7. Es muy importante tener un método de estimación de parámetros que no presente problemas de divergencia, es decir si en cada iteración estos tiendan a tomar valores muy grandes, llegará a un punto en que sus variables tomen valores indeterminados, que afectarán a el correcto funcionamiento del estimador ,por tanto un mal rendimiento del sistema de control.
8. Uno de los inconvenientes de utilizar un controlador adaptativo es el mayor costo computacional requerido en comparación a un regulador fijo, por lo tanto se debe de evaluar en qué casos un controlador fijo es insuficiente y será necesario un controlador adaptativo.
9. Se realizó pruebas para probar la adaptabilidad del sistema, para ello se adicionó cargas no lineales con el fin de alterar la dinámica del proceso, los resultados obtenidos guardan estrecha relación con las simulaciones obtenidas, brindando un rendimiento adecuado del algoritmo de control adaptativo.
10. Al simular el sistema utilizando el Matlab se llegó a un punto en que el programa no respondía adecuadamente debido al hecho de usar variables muy pequeñas que eran consideradas como cero o valores muy grandes que se consideraban como NaN (Not a Number) dándonos valores fuera de lo esperado ,incluso cuando toda la estructura del programa era correcta.

RECOMENDACIONES

Para futuros trabajos relacionados con el presente proyecto de investigación, damos las siguientes sugerencias y recomendaciones:

1. Implementar un sistema físico que tenga un mínimo de factores no lineales como son: fricciones de rozamiento, vibraciones indeseadas del módulo, saturación del amplificador y retardo en el envío de datos. Además se recomienda hacer uso de otros tipos de sensores para medir las variables, una buena elección es utilizar encoders absolutos.
2. Para poder comprender las estrategias de control avanzado como es el adaptativo autosintonizado, primero se recomienda realizar experiencias usando controladores convencionales como los PID, o los óptimos cuadráticos. Se debe de tomar muy en cuenta los retardos en el envío de datos y procesamiento de los algoritmos de control, ya que el tiempo de realizar la estimación de parámetros es considerable y puede ocasionar problemas en el rendimiento del sistema.
3. Se motiva a realizar el control de sistemas utilizando nuevas metodologías de control como los adaptativos por modelo de referencia, adaptativos predictivos, redes neuronales, controladores difusos, control adaptativo predictivo experto (ADEX), y otras nuevas tecnologías de control automático que están encontrando gran interés en la industria de hoy en día.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

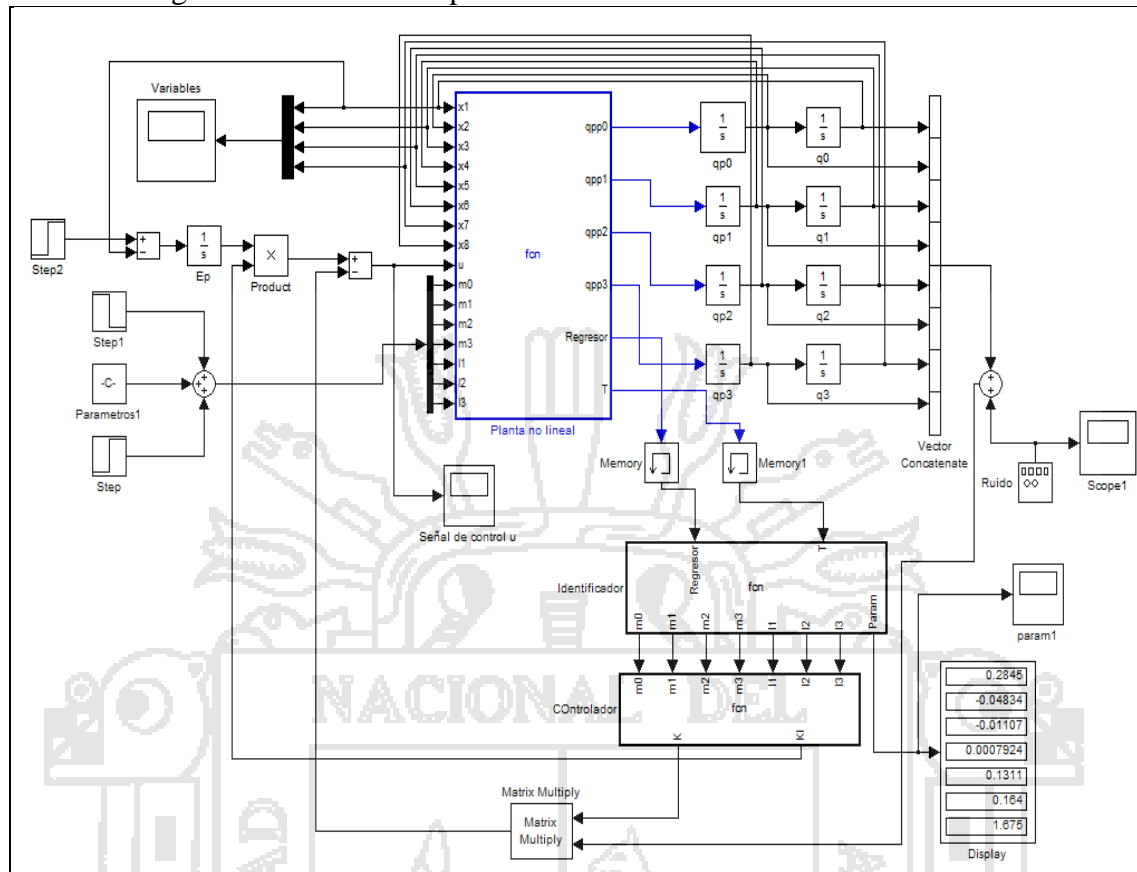
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Arturo Rojas Moreno. Control Avanzado - Diseño y aplicaciones en tiempo real Universidad Nacional de Ingeniería .Lima 2001.
- [2] Bahram Shahian , Michael Hassul . Control System Design Using MATLAB .New Jersey 1993.
- [3] Carnegie Mellon .Manuales de Matlab para control automático .Estados Unidos 1996.
- [4] Carolina Godoy .Control adaptativo en tiempo real .Quito 2012.
- [5] Daniel Rodríguez Ramírez, Carlos Bordóns Alba .Apuntes de Ingeniería de Control – Identificación de Sistemas, Control Adaptativo, Control Predictivo .2005.
- [6] Edoardo Mosca.Optimal, Predictive and adaptative control .Prentice Hall 1995.
- [7] Eduardo García Breijo .Compilador C CCS y simulador PROTEUS para Microcontroladores PIC .Barcelona 2008.
- [8] Elena Lopez Guillen .Identificacion de Sistemas – Aplicación al modelado de un motor de continua .España.
- [9] Espartacus Gomarís,Domingo Biel ,Jose Matas,Miguel Reyes . Teoría de control – Diseño Electrónico. Alfaomega. Barcelona 2001.
- [10] Iván Jesús Rivas Campero, José Manuel Salcedo Solorio. Comportamiento dinámico de un péndulo triple plano .México .2009.
- [11] Javier Pérez Ramírez, José M. Campoy, Bruno G. Soto .Control adaptativo implantado en un micro-PLC.
- [12] José Lajara Vizcaino, José P. Sebastia .LabVIEW Entorno gráfico de programación .Alfaomega –marcombo 2007.
- [13] Juan Calderón Montiel. Análisis de desempeño de controladores adaptativos discretos en el espacio de estados .Ecuador 2008.
- [14] Karl J. Astrom,Bjorn Wittenmark . Adaptive Control. 2ª ed. New York .1994.
- [15] Katsuhiko Ogata .Ingeniería de control moderna .Cuarta edición .Prentice Hall 2007.
- [16] Katsuhiko Ogata. Sistemas de control en tiempo discreto .Segunda edición. Prentice Hall 1996.
- [17] Lennart Ljung . System Identification – Theory for the User .2ª ed. Suiza .1999.

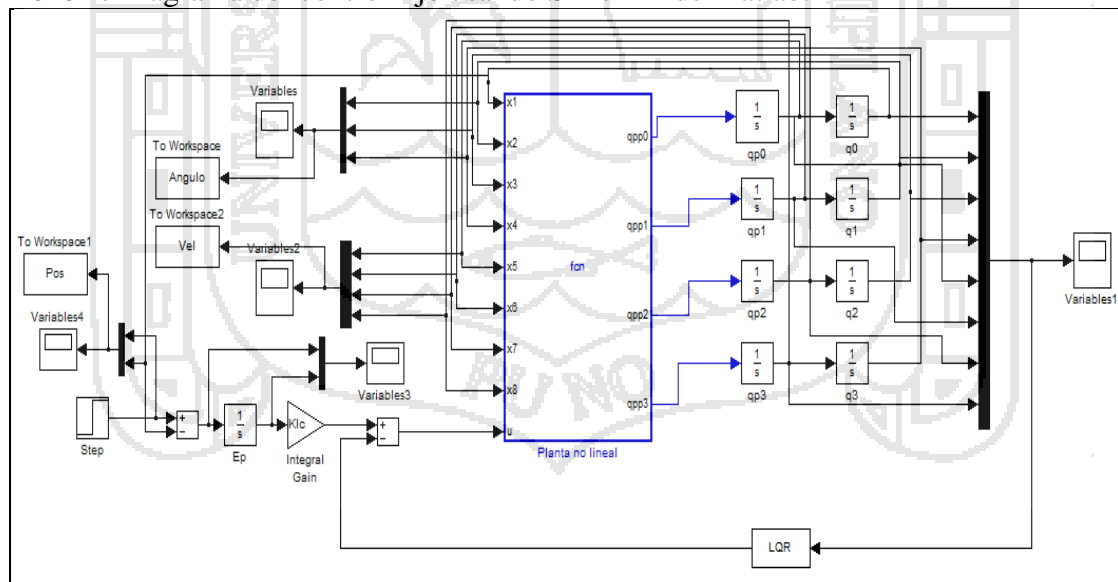
- [18] Moreno José .Estimación de parámetros en controladores de sistemas de excitación utilizando un método de identificación. México 2010.
- [19] Petros A. Ioannou ,Baris Fidan .Adaptative control tutorial .California .2006 .
- [20] Petros A. Ioannou ,Jing Sun .Robust adaptative Control. California .1996.
- [21] Robert Boylestad, Louis Nashelsky .Electrónica Teoría de circuitos .Octava edición .Prentice Hall 2003.
- [22] Roberto H. Sampieri, Carlos F. Collado, Pilar B. Lucio .Metodología de la investigación .Quinta edición .México 2010.
- [23] Rodríguez Rubio Francisco, Manuel Jesús López Sánchez .Control Adaptivo y Robusto .Sevilla.1996.
- [24] Segismundo Izquierdo Millán .Identificación de sistemas. Madrid 2005.
- [25] Shankar Sastry, Marc Bodson .Adaptative Control –Stability,convergence and robustness ,New Jersey 1989 .
- [26] Terencio Soldovieri C. Introducción a la mecánica de Lagrange Hamilton .Venezuela 2010.
- [27] Thomas F. Edgar .Recursive Least Square Parameter Estimation for linear steady and Dynamics models. University of Texas 2006.
- [28] Valencia M. Mónica. Diseño y análisis de desempeño de observadores adaptativos en esquemas de control mediante realimentación completa de estados .Ecuador 2011 .
- [29] Martín Sánchez, A. Cabanillas ,F. Alonso ,F. Riesco .Evaluación de una plataforma de control Adaptativo predictivo Experto en la refinería de Escombreras .Madrid 2004 .
- [30] Víctor H. Santamaría, José R. Rojo Ramírez. Péndulo Triple invertido .México Agosto del 2011.



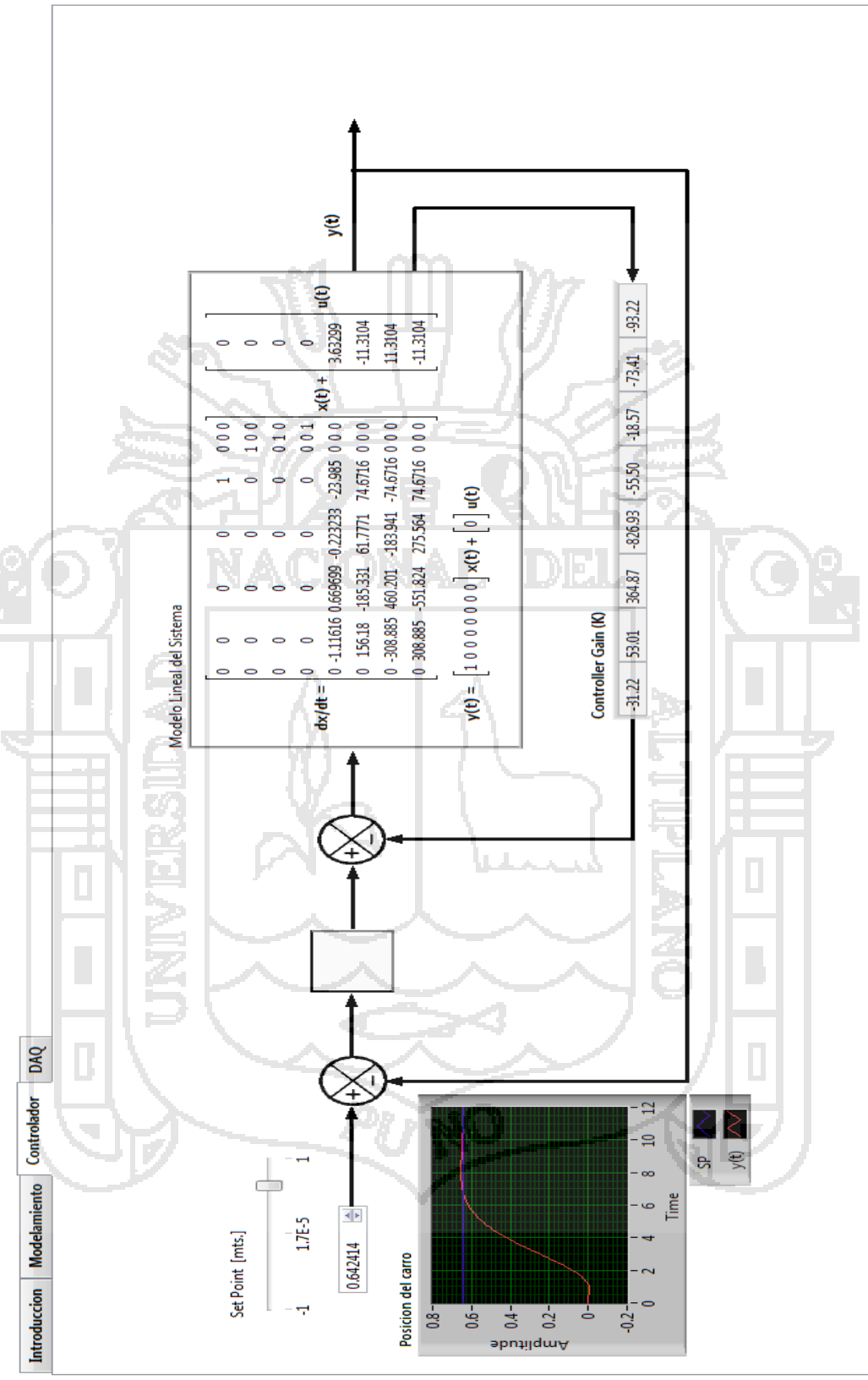
Anexo 1. Diagrama del control adaptativo usando Simulink de Matlab.



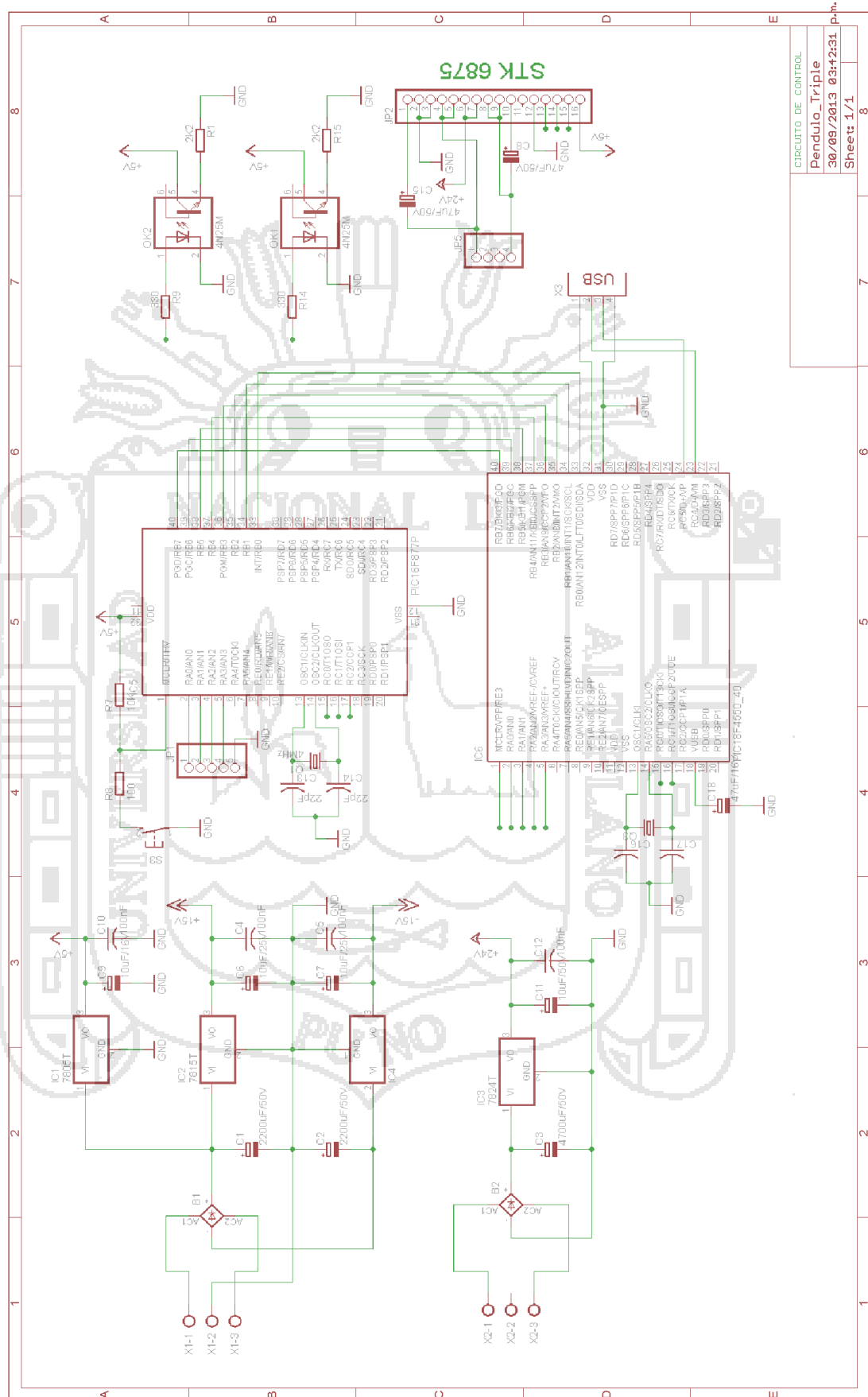
Anexo 2. Diagrama del control fijo usando Simulink de Matlab.



Anexo 3. Controlador adaptativo en LabVIEW 2012.

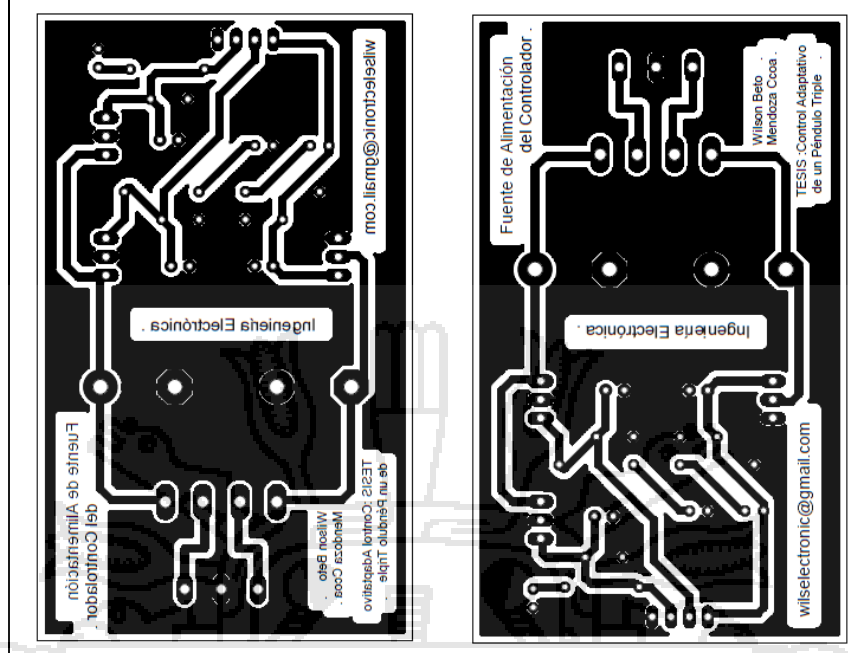


Anexo 5. Diagrama esquemático del controlador electrónico del péndulo triple.

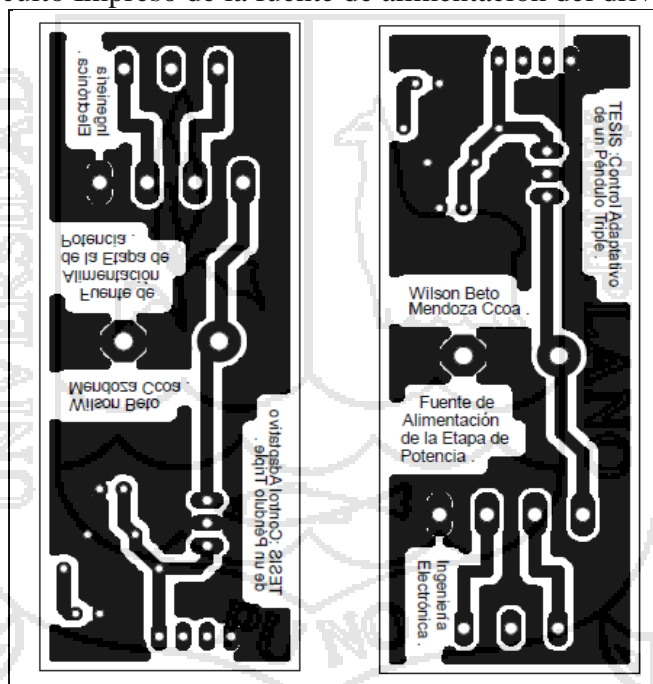


CIRCUITO DE CONTROL	8
Pendulo_Triplo	7
30/09/2013 09:12:31	6
Sheet: 1/1	5

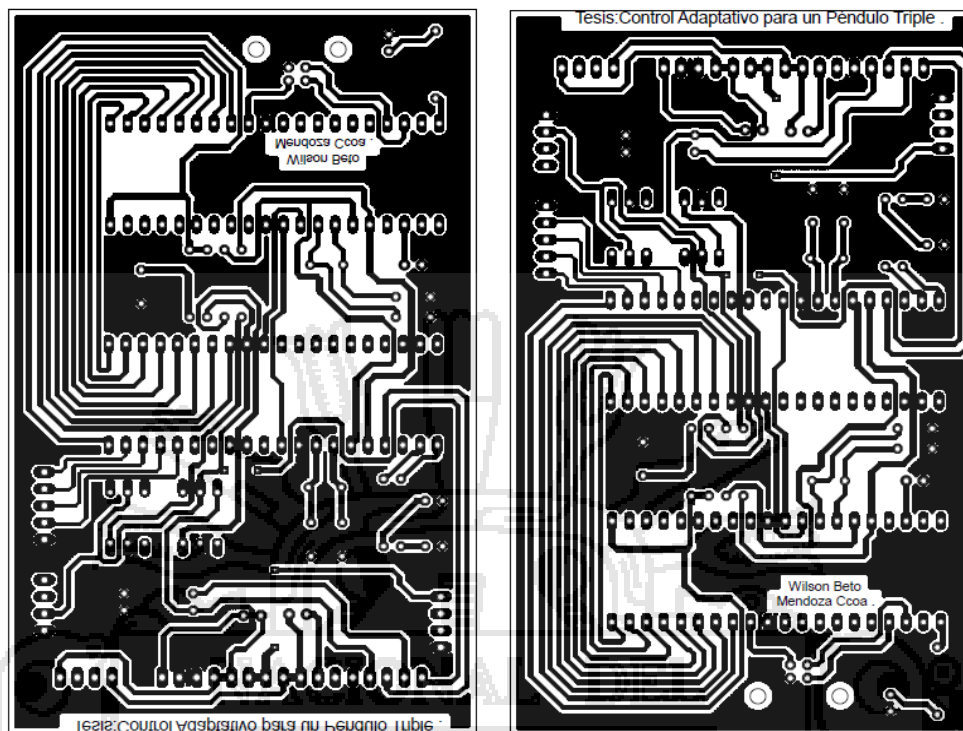
Anexo 6. Circuito Impreso de la fuente de alimentación del controlador.



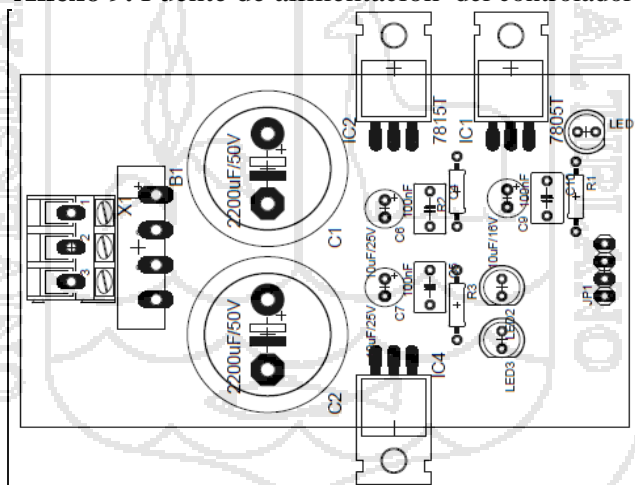
Anexo 7. Circuito Impreso de la fuente de alimentación del driver de potencia.



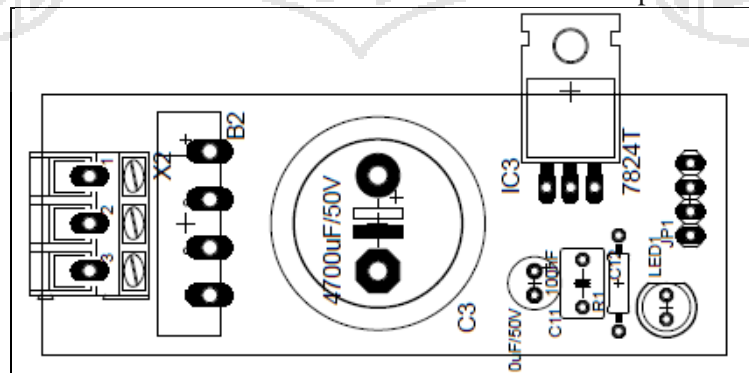
Anexo 8. Circuito Impreso del controlador.



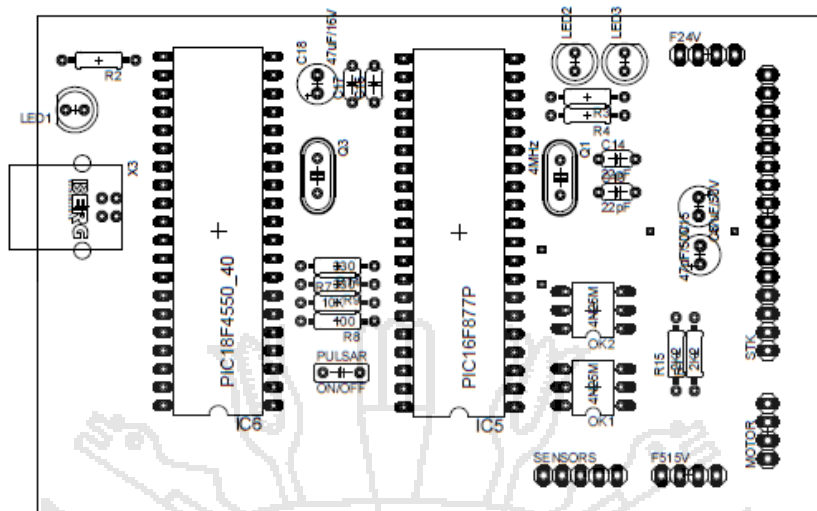
Anexo 9. Fuente de alimentación del controlador.



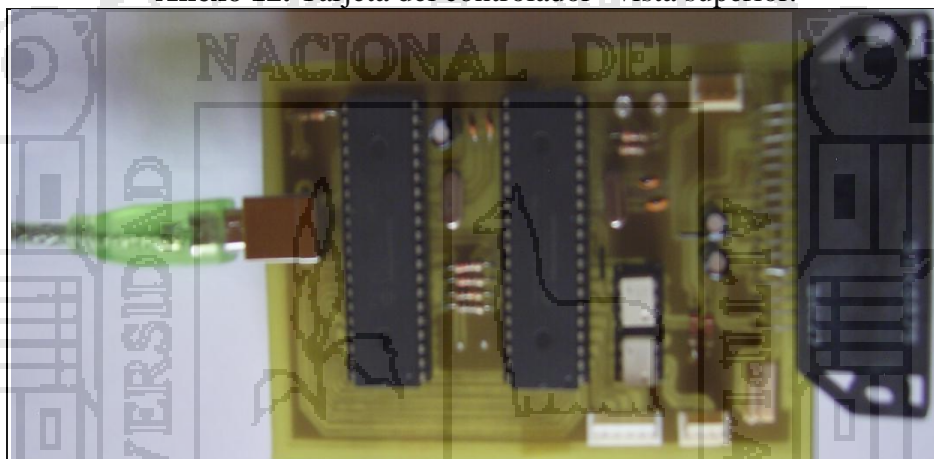
Anexo 10. Fuente de alimentación del driver de potencia.



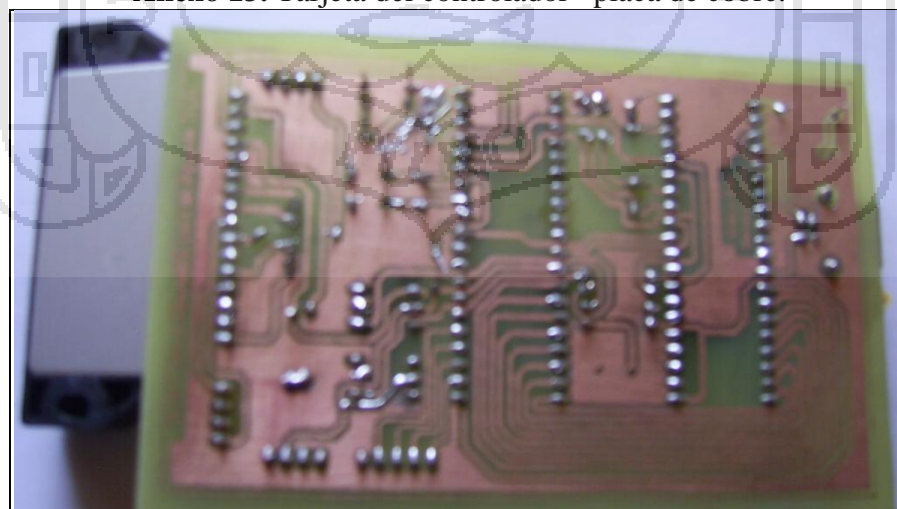
Anexo 11. Tarjeta del controlador.



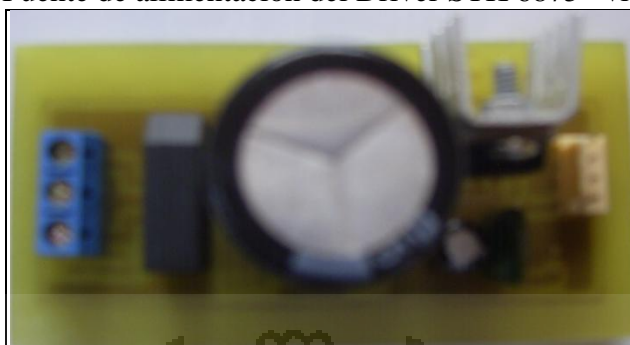
Anexo 12. Tarjeta del controlador –vista superior.



Anexo 13. Tarjeta del controlador –placa de cobre.



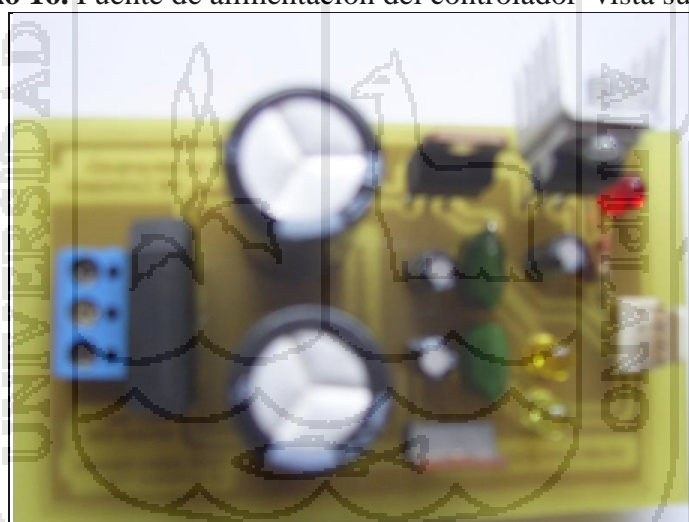
Anexo 14. Fuente de alimentación del Driver STK 6875 –vista superior.



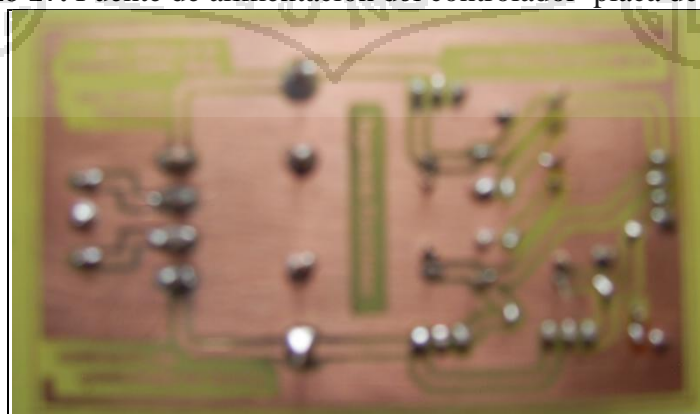
Anexo 15. Fuente de alimentación del Driver STK 6875 –placa de cobre.

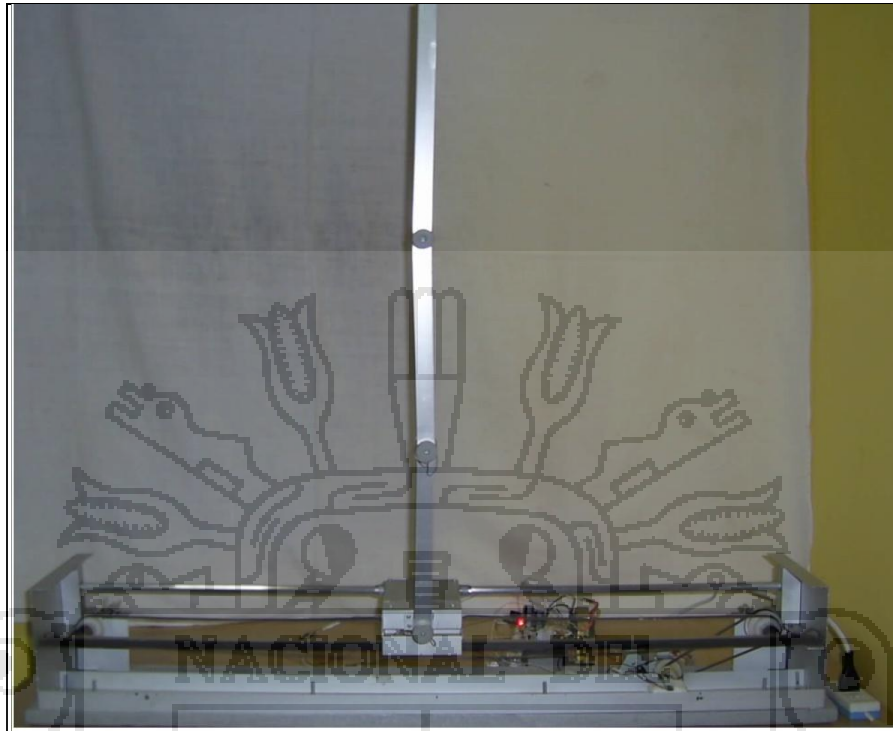


Anexo 16. Fuente de alimentación del controlador–vista superior.



Anexo 17. Fuente de alimentación del controlador–placa de cobre.



Anexo 18. Sistema mecánico del péndulo triple – vista frontal.**Anexo 19.** Código del control Adaptativo del Péndulo Triple.

```
%% PROGRAMA DEL CONTROLADOR ADAPTATIVO AUTOSINTONIZADO APLICADO
%% AL CONTROL DE UN PENDULO TRIPLE.
```

```
clc;close all ;
syms xp u m0 m1 m2 m3 l1 l2 l3;
syms x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8;
```

```
%Momento de inercia de los links
```

```
J1=0;
J2=0;
J3=0;
```

```
% longitud al centro de masas
```

```
lc1=0.5*l1;
lc2=0.5*l2;
lc3=0.5*l3;
```

```
% Coeficiente de gravitación
```

```
g=9.81;
```

```
% constantes para simplificacion
```

```
a0=m0+m1+m2+m3;
a1=m2*l1+m3*l1+m1*lc1;
a2=m2*lc2+m3*l2;
a3=m3*lc3;
```

```
b1=J1+ (m1*lc1*lc1) + (m2*l1*l1) + (m3*l1*l1) ;
```



```

b2=J2+(m2*lc2*lc2)+(m3*l2*l2);
b3=J3+m3*lc3*lc3;

c1=g*a1;
c2=g*a2;
c3=g*a3;

% Fricción Viscosa
bc=0; k1=0; k2=0; k3=0;

% Matriz de Inercia M(q)
% Definimos los estados como
% q =[x1 x2 x3 x4]
% qp=[x5 x6 x7 x8]
% donde x1:=posicion del carro, x2:=posicion angular 1
% x3:=posicion angular 2 , x4:=posicion angular 3
% x5:=velocidad del carro x6:=velocidad angular 1
% x7:=velocidad angular 2 x8:=velocidad angular 3

% PARAMETROS DEL MOTOR
rp = 0.019; n = 11/75;Jo = 0;
Jm = 6.37e-6;mp = 0.045;
Jp = mp*rp^2/2;
Jeq = Jm + n^2*(Jo + Jp);
Bm = 4.23e-6; Bo =4.23e-8; Beq = Bm + n^2*Bo;
Km = 86.02e-3; Kb = 86.47e-3; Ra = 37.38; KA = 4.8;

J2 = Jeq/(n^2*rp^2);
Kx = Km/(Ra*n*rp);
Bx = Beq/(n^2*rp^2) + Kb*Km/(n^2*rp^2*Ra);
KxA=Kx*KA;

%Elementos de la matriz de Inercias
M11=a0/KxA+J2/KxA;
M12=a1/KxA*cos(x2);
M13=a2/KxA*cos(x3);
M14=a3/KxA*cos(x4);

M21=a1*cos(x2);
M22=b1;
M23=a2*l1*cos(x3-x2);
M24=a3*l1*cos(x4-x2);

M31=a2*cos(x3);
M32=a2*l1*cos(x3-x2);
M33=b2;
M34=a3*l2*cos(x4-x3);

M41=a3*cos(x4);
M42=a3*l1*cos(x4-x2);
M43=a3*l2*cos(x4-x3);
M44=b3;

%Vector de Fuerzas de Coriolis y de Fuerzas Centripetas
C11=bc/KxA+Bx/KxA;
C12=a1/KxA*sin(x2)*x6;
C13=a2/KxA*sin(x3)*x7;

```

```

C14=a3/KxA*sin(x4)*x8;

C21=0;
C22=k1+k2;
C23=-k2-a2*l1*sin(x3-x2)*x7;
C24=-a3*l1*sin(x4-x2)*x8;

C31=0;
C32=-k2+a2*l1*sin(x3-x2)*x6;
C33=k2+k3;
C34=-k3-a3*l2*sin(x4-x3)*x8;

C41=0;
C42=a3*l1*sin(x4-x2)*x6;
C43=-k3+a3*l2*sin(x4-x3)*x7;
C44=k3;

%Matriz de Gravedad
G1=0;
G2=-c1*sin(x2);
G3=-c2*sin(x3);
G4=-c3*sin(x4);

% %Matriz de Fricción Viscosa y Seca
% Fr1=b1*x2+k1*tanh(beta*x2);
% Fr2=b2*x4+k2*tanh(beta*x4);

% Variables Articulares y Derivadas
q=[x1;x2;x3;x4];
qp=[x5;x6;x7;x8];

% Matrices
M=[M11,M12,M13,M14;
M21,M22,M23,M24;
M31,M32,M33,M34;
M41,M42,M43,M44];

C=[C11,-C12,-C13,-C14;
C21,C22,C23,C24;
C31,C32,C33,C34;
C41,C42,C43,C44];

G=[G1;G2;G3;G4];
% w=1;
% f=5*sin(w*t);
f=u;
T=[f;0;0;0];

N=C*qp+G;

% Ecuaciones de Estado
qpp=inv(M)*(T-N);

% Sustituyendo en el punto de equilibrio.
Equi=subs(qpp,{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,u},{0,0,0,0,0,0,0,0,0});

%xp=[x2;qpp(1);x4;qpp(2);x6;qpp(3);x8;qpp(4)];
xp=[x5;x6;x7;x8;qpp(1);qpp(2);qpp(3);qpp(4)];

```

```

%% LINEALIZACION DEL SISTEMA

A1=diff(xp,x1);
A2=diff(xp,x2);
A3=diff(xp,x3);
A4=diff(xp,x4);
A5=diff(xp,x5);
A6=diff(xp,x6);
A7=diff(xp,x7);
A8=diff(xp,x8);
A=subs([A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7
A8], {x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,u}, {0,0,0,0,0,0,0,0});

B1=diff(xp(1),u);
B2=diff(xp(2),u);
B3=diff(xp(3),u);
B4=diff(xp(4),u);
B5=diff(xp(5),u);
B6=diff(xp(6),u);
B7=diff(xp(7),u);
B8=diff(xp(8),u);
B=subs([B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7
B8]', {x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,u}, {0,0,0,0,0,0,0,0});

%% PARAMETROS DEL PENDULO TRIPLE
% masa del carrito

m0=0.370;

% masas de los pendulos
m1=0.073;
m2=0.087;
m3=0.096;

% longitud de los pendulos
l1=0.25;
l2=0.27;
l3=0.29;

%Momento de inercia de los links
J1=0;
J2=0;
J3=0;

% longitud al centro de masas
lc1=0.5*l1;
lc2=0.5*l2;
lc3=0.5*l3;

% Coeficiente de gravitación
g=9.81;

% constantes para simplificacion
a0=m0+m1+m2+m3;
a1=m2*l1+m3*l1+m1*lc1;
a2=m2*lc2+m3*l2;
a3=m3*lc3;

```

```

a4=a2*l1;
a5=a3*l1;
a6=a3*l2;

b1=J1+(m1*lc1*lc1)+(m2*l1*l1)+(m3*l1*l1);
b2=J2+(m2*lc2*lc2)+(m3*l2*l2);
b3=J3+m3*lc3*lc3;

% MODELO LINEAL DEL PROCESO

Ac=subs(A);
Bc=subs(B);
Cc=[1 0 0 0 0 0 0 0];
Dc=[0];

% MODELO LINEAL DISCRETO DEL PROCESO
T = 0.01; % PERIODO DE MUESTREO

[G,H]=c2d(Ac,Bc,T);%
    alfa=1000;N=10; Pi = alfa*eye(10); % MATRIZ P INICIAL
theta_p = [G H]'; % PARAMETROS DEL PROCESO
thetai = [G H zeros(8,1)]'; % PARAMETROS INICIALES
lambda = 0.99; % FACTOR DE MEMORIA
Y(:, :, 1)=[0 0 0 0 0 0 0 0]'; uc(2) = 0;
ref=0.5;
X1(2)=0;X2(2)=0;X3(2)=0;X4(2)=0;X5(2)=0;X6(2)=0;X7(2)=0;X8(2)=0;

v(1)=0;
Q = [ 100 0 0 0 0 0 0 0 0 0
      0 150 0 0 0 0 0 0 0 0
      0 0 150 0 0 0 0 0 0 0
      0 0 0 150 0 0 0 0 0 0
      0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
      0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
      0 0 0 0 0 0 1 0 0 0
      0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
      0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 1];

R = [100];
K=[0 0 0 0 0 0 0 0 0];
KI=0;
Ge=G;He=H;
Mm=1000;
uc(1)=0;
X=[0 0 0 0 0 0 0 0 0]';
for k=2:Mm

% IDENTIFICADOR DE PARAMETROS
psi_p = [Y(:, :, k-1); uc(k-1)];%9x1
%Y(:, :, k+1) = theta_p'*psi_p; % MODELO LINEAL DEL PROCESO
Y(:, :, k) = X; % MODELO LINEAL DEL PROCESO
psi = [psi_p;1]; % VECTOR DE DATOS
nor = max(1,norm(psi));
psin = psi/nor;
Qch = chol(Pi');

```

```

S = inv(diag(Qch*ones(N,1),0));
Ps = S*Pi*S;
psins = inv(S)*psin;
rt = 1 + psins'*Ps*psins;
LF = 1 - (rt-sqrt(rt^2-4*norm(Ps*psins)^2/trace(Ps)))/2;
e = Y(:, :, k)/nor-thetai'*psin; % ERROR DE ESTIMACION
div = psins'*Ps*psins + LF;
theta = thetai'+e*(inv(S)*Ps*psins/div)'; % VECTOR DE PARAMETROS
Ge = theta(:,1:8); % PARAMETRO G ESTIMADO
He = theta(:,9); % PARAMETRO H ESTIMADO
Ce = theta(:,10);
Hns = Ps*psins/div;
Ps = Ps/LF - Hns*psins'*Ps/LF;
tt = abs(max(eig(Ps))/min(eig(Ps))) ;
cmax = 100; cmin = 15;
if tt <= cmin,
    thetai = theta'; Pi = Ps;
elseif tt >= cmax,
    Qchnew = chol(Ps');
    Snew = inv(diag(Qchnew*ones(N,1),0));
    Psnew = Snew*Ps*Snew;
    Pi = Psnew; thetai = theta';
end

% DISEÑO DE LA LEY DE CONTROL

Gel = [Ge zeros(8,1)
        -Cc*Ge 1];
Hel = [He; -Cc*He];
%M = [Hel Gel*Hel Gel^2*Hel Gel^3*Hel Gel^4*Hel];
%rM = rank(M); % rM=5 => COMPLETAMENTE CONTROLABLE
% CALCULO DE LA GANANCIA DEL CONTROLADOR

P = zeros(9,9);
for i=1:800
    P = Q + Gel'*P*Gel -Gel'*P*Hel*inv(R+Hel'*P*Hel)*Hel'*P*Gel;
end
K1 = inv(R+Hel'*P*Hel)*Hel'*P*Gel;
%[KK,PP] = dlqr(Gel,Hel,Q,R); % K1=KK, P=PP
KK=K1;
K = [KK(1) KK(2) KK(3) KK(4) KK(5) KK(6) KK(7) KK(8)]; KI = - KK(9);
X=[X1(k) X2(k) X3(k) X4(k) X5(k) X6(k) X7(k) X8(k)]';
y(k)=Cc*X;
v(k)=v(k-1)+ref-y(k);
uc(k)=-K*[X1(k) X2(k) X3(k) X4(k) X5(k) X6(k) X7(k) X8(k)]'+KI*v(k);

X=Ge*X+He*uc(k);
X1(k+1)=[1 0 0 0 0 0 0 0]*X;
X2(k+1)=[0 1 0 0 0 0 0 0]*X;
X3(k+1)=[0 0 1 0 0 0 0 0]*X;
X4(k+1)=[0 0 0 1 0 0 0 0]*X;
X5(k+1)=[0 0 0 0 1 0 0 0]*X;
X6(k+1)=[0 0 0 0 0 1 0 0]*X;
X7(k+1)=[0 0 0 0 0 0 1 0]*X;
X8(k+1)=[0 0 0 0 0 0 0 1]*X;

end

```

```

%% GRAFICAS DEL SISTEMA
figure(1)
t=linspace(0,T*Mm,Mm);
subplot(3,3,1)
plot(t,X1(1:Mm),t,ref),grid;
ylabel('Posición del carro [mts.]')
xlabel('Tiempo (s)')
subplot(3,3,2)
plot(t,X2(1:Mm),t,0),grid;
ylabel('Posición Angular 1 [rad]')
xlabel('Tiempo (s)')
subplot(3,3,3)
plot(t,X3(1:Mm),t,0),grid;
ylabel('Posición Angular 2 [rad]')
xlabel('Tiempo (s)')
subplot(3,3,4)
plot(t,X4(1:Mm),t,0),grid;
ylabel('Posición Angular 3 [rad]')
xlabel('Tiempo (s)')
subplot(3,3,5)
plot(t,X5(1:Mm)),grid;
ylabel('Velocidad del carro [mts/s]')
xlabel('Tiempo (s)')
subplot(3,3,6)
plot(t,X6(1:Mm)),grid;
ylabel('Velocidad Angular 1 [rad/s]')
xlabel('Tiempo (s)')
subplot(3,3,7)
plot(t,X7(1:Mm)),grid;
ylabel('Velocidad Angular 2 [rad/s]')
xlabel('Tiempo (s)')
subplot(3,3,8)
plot(t,X8(1:Mm)),grid;
ylabel('Velocidad Angular 3 [rad/s]')
xlabel('Tiempo (s)')
subplot(3,3,9)
plot(t,uc(1:Mm)),grid;
ylabel('Señal de Control U(t) [Volts]')
xlabel('Tiempo (s)')

```

GLOSARIO DE TERMINOS



GLOSARIO DE TÉRMINOS

Adaptativo: Sistema que modifica sus parámetros a medida que se producen cambios en la naturaleza de la señal de entrada, por ejemplo, en función de las perturbaciones.

Algoritmo: Procedimiento matemático o lógico para realizar un cálculo o para resolver un problema. Sucesión de operaciones elementales, perfectamente especificadas y ordenadas, que sirven para hacer algo preciso.

Asintótico: Relativo a la asíntota. Curvas asintóticas, curvas, en número de dos, de ramas infinitas, tales que, si un punto se aleja indefinidamente sobre una de ellas, existe sobre la otra un punto variable cuya distancia al primero tiende a cero.

Cero: Término usado en la transformada de Laplace y la transformada z . Cuando en el dominio s o en el dominio z , la función de transferencia está escrita como un polinomio dividido por otro polinomio, las raíces del numerador son los ceros del sistema.

Controlabilidad: Si es posible transferir el sistema de un estado inicial arbitrario a cualquier estado deseado, en un periodo finito de tiempo. Es decir si todas las variables de estado pueden ser controladas en un periodo finito, mediante alguna señal de control no restringida.

Control realimentado: Operación que en presencia de perturbaciones, tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia.

Convolución: Operación matemática por medio de la cual se halla la salida de un sistema, conociendo su entrada y su respuesta al impulso.

Dispositivo compuesto: Es aquel dispositivo con múltiples interfaces independientes. Cada una tiene una dirección sobre el bus para cada interface puede tener un diferente driver device en el host.

Dominio de la frecuencia: Una señal que tiene frecuencia como variable independiente. La salida de la transformada de Fourier.

Dominio del tiempo: Una señal que tiene el tiempo como variable independiente.

Dominio z : El dominio definido por la transformada z . También llamado plano z .

Driver: es un programa que habilita aplicaciones para poderse comunicar con el dispositivo. Cada dispositivo sobre el bus debe tener un driver, algunos periféricos utilizan los drivers que trae Windows.

Ecuación de diferencias: Ecuación que relaciona las muestras pasadas y presentes de la señal de salida con las muestras pasadas y presentes de la señal de entrada.

Espacio de Estado: El espacio n -dimensional cuyos ejes de coordenadas están formados por los ejes x_1, x_2, \dots, x_n , donde x_1, x_2, \dots, x_n , son las variables de estado, se denomina espacio de estado. Cualquier estado se puede representar como un punto en el espacio de estados.

Estabilidad: Una situación es estable si se mantiene en estado estacionario, es decir, igual en el tiempo y una modificación razonablemente pequeña de las condiciones iniciales no altera significativamente el futuro de la situación.

Estabilidad asintótica: Significa que soluciones que empiezan suficientemente cerca, no sólo permanecen cercanas sino que eventualmente acaban convergiendo al mismo equilibrio.

Factorización de Cholesky: Una matriz simétrica definida positiva puede ser descompuesta como el producto de una matriz triangular inferior y la traspuesta de la matriz triangular inferior. La matriz triangular inferior es el triángulo de Cholesky de la matriz original positiva definida. El resultado de Cholesky ha sido extendido a matrices con entradas complejas. Es una manera de resolver sistemas de ecuaciones matriciales y se deriva de la factorización LU con una pequeña variación.

Frecuencia de muestreo: Rata o razón a la cual son adquiridas las muestras con un conversor analógico/digital.

Función de transferencia: La señal de salida dividida entre la señal de entrada. La función de transferencia puede expresarse de diferentes formas, dependiendo de cómo estén representadas las señales. Por ejemplo, en el dominio s y en el dominio z se expresa como la división de dos polinomios.

Message Pipes: este tipo de enlace virtual si tiene un formato USB definido y solo puede soportar la transferencia **Control**. Cuando se conecta un dispositivo USB a la PC se produce el **Proceso de Enumeración**, el cual consiste en que el host le pregunta al dispositivo que se presente y le diga cuáles son sus parámetros.

Muestra: Valor instantáneo de una señal continua, tomado en cierto instante de tiempo.

Normalización: Ajuste de una serie (vector) de valores (representando típicamente un conjunto de medidas) de acuerdo con alguna función de transformación para hacerlos comparables con algún punto específico de referencia.

Observabilidad: Si cualquier estado inicial puede determinarse a partir de la observación de las salidas sobre un número finito de periodos de muestreo, es decir si cualquier transición del estado de manera eventual afecta a todos los elementos del vector de salida.

Período de muestreo: Espacio de tiempo entre muestras cuando una señal es digitalizada.

Perturbaciones: Señal que tiende a afectar negativamente el valor de la salida de un sistema .Si la perturbación se origina dentro del sistema se denomina interna, mientras que una perturbación externa se genera fuera del sistema y es una entrada.

Plano z : Dominio z .

Polo: Término usado en la transformada de Laplace y la transformada z . Cuando en el dominio s o en el dominio z , la función de transferencia está escrita como un polinomio dividido por otro polinomio, las raíces del denominador son los polos del sistema.

Pre procesamiento: Conjunto de tareas tendientes a acondicionar la señal.

Puerto USB: Es una entrada o acceso para que el usuario pueda compartir información almacenada en diferentes dispositivos.

Puntos terminales (Endpoints): Es una localidad específica dentro del dispositivo. El Endpoint es un buffer que almacena múltiples bytes, típicamente es un bloque de la memoria de datos o un registro dentro del microcontrolador. Todos los dispositivos deben soportar el punto terminal 0. Este punto terminal es el que recibe todo el control y las peticiones de estado durante la enumeración cuando el dispositivo está sobre el bus.

Resolución: Número de bits utilizados para representar una señal analógica.

Respuesta en frecuencia: Cambios en la magnitud y la fase que experimentan las sinusoides cuando pasan a través de un sistema lineal. Usualmente se expresa como una función de la frecuencia.

Stream Pipes: Se trata de un flujo sin formato USB definido, esto significa que se puede enviar cualquier tipo de dato. Este tipo de pipe soporta las transferencias bulk, isócronas, e interrupt. Además tanto el host como el dispositivo USB pueden controlar.

Transformada: Un procedimiento, ecuación o algoritmo que cambia un grupo de datos en otro grupo de datos.

Tuberías (Pipes): Es un enlace virtual entre el host (la PC) y el dispositivo USB, este enlace configura los parámetros asociados con el ancho de banda que tipo de transferencia se va a utilizar (**Control, Bulk, Isócrona o Interrupt**) dirección del flujo de datos y el máximo y/o mínimo tamaño de los paquetes/buffers. Cada enlace está caracterizado por su banda de paso (Token), su tipo de servicio, el número de punto terminal (End Point) y el tamaño de los paquetes. Estos enlaces se definen y crean durante la inicialización del USB. Siempre existe un enlace virtual 0 que permite tener acceso a la información de configuración del periférico USB (estado, control e información). La norma USB define 2 tipos de enlaces virtuales (pipe); *stream* y *message*.

Umbralización: Procedimiento de descartar los valores que estén por encima/debajo de cierto umbral.

Variable controlada: Es la cantidad o condición que se mide o controla, normalmente se refiere a la salida del sistema.

Variable manipulada: Es la cantidad o condición que el controlador modifica para efectuar el valor de la variable manipulada.

Variables de estado: Las variables de un sistema dinámico son las variables que constituyen el menor conjunto de variables que determinan el estado del sistema dinámico, si al menos se necesitan n variables x_1, x_2, \dots, x_n para describir completamente el comportamiento de un sistema dinámico entonces tales n variables son un conjunto de variables de estado .

Vector de estado: Si se necesitan n variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, entonces esas n variables se pueden considerar como componentes de un vector X . Un vector de estado por lo tanto determina unívocamente el estado del sistema $x(t)$ en cualquier instante de tiempo especificado.