UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
ESCUELA DE POST GRADO
DOCTORADO EN EDUCACIÓN

"CONOCIMIENTO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO Y LA CAPACIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA DE LA CIUDAD DE PUNO - 2012"

TESIS

PRESENTADA POR:

BETHZABE COTRADO MENDOZA

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTORIS SCIENTIAE EN:

EDUCACIÓN

PUNO - PERÚ

2013

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

ESCUELA DE POST GRADO

DOCTORADO EN EDUCACIÓN

TESIS

"CONOCIMIENTO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO Y LA CAPACIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA DE LA CIUDAD DE PUNO - 2012"

PRESENTADA POR:

BETHZABE COTRADO MENDOZA

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTORIS SCIENTIAE EN: EDUCACIÓN

APROBADA POR EL SIGUIENTE JURADO REVISOR:

PRESIDENTE : ______________________
Dr. Felipe Gutierrez Osco

PRIMER MIEMBRO : ______________________
Dr. Bernabe Canqui Flores

SEGUNDO MIEMBRO : ______________________
Dr. Edgar Mancha Pineda

TERCER MIEMBRO Y ASESOR : ______________________
Dr. Saúl Bermejo Paredes

DEDICATORIA

A Dios por mostrarnos día a día que con humildad, paciencia y sabiduría todo es posible.

A mis padres Dionicio y Sofía, por su apoyo, consejos, comprensión y afecto en todo momento. Me han dado todo lo que soy como persona, mis valores, principios, empeño, perseverancia para conseguir mis objetivos, dándome ejemplos dignos de superación. Para ellos mi amor, obediencia y respeto.

A mi hermana Magui y mi hermano Rody Anthony, quienes han sido mi inspiración para ser mejor cada día, por estar siempre presentes y acompañándome asimismo por el cariño inmenso que me ofrecen.

A mi abuelito Marcos, por haberme enseñado a creer que los sueños se pueden hacer realidad aunque no está conmigo pero sé que me acompaña desde el cielo.

A la Universidad Nacional del Altiplano - Puno, por haber permitido adquirir los conocimientos necesarios y la experiencia necesaria para poderla aplicar en la práctica.

AGRADECIMIENTO

Desde estas líneas deseo poner de manifiesto mi más sincero agradecimiento.

En primer lugar, al Dr. Saúl Bermejo Paredes, asesor de tesis, no solo por ofrecerme su valioso conocimiento y experiencia profesional, sino también por animarme y alentarme en cada una de las fases de la investigación.

A los miembros de jurado: Dr. Felipe Gutiérrez Osco, Dr. Edgar Mancha Pineda, Dr. Bernabe Canqui Flores, por el interés que han puesto en esta investigación además de las valiosas críticas constructivas y sugerencias aportadas. Así como por la atención brindada en todo momento.

A la Escuela de Post Grado de la U.N.A. – Puno junto al equipo de docentes del Programa de Doctorado de quienes he aprendido a mirar los fenómenos educativos desde diferentes perspectivas y por brindarme todo su apoyo para lograr alcanzar tan alto grado.

A todos mis compañeros y compañeras del Doctorado en Educación, por los buenos momentos y múltiples oportunidades de compartir ideas y preocupaciones tanto académicas como existenciales.

A toda mi familia, por infundirme valor, cariño y serenidad, siempre con muestras de confianza y apoyo.

A los estudiantes del cuarto grado de las I.E.S de la ciudad de Puno, protagonistas de este trabajo de investigación, que sin ellas no hubiera sido posible culminar el trabajo de investigación.

A muchas personas que de forma solidaria me animaron y ayudaron a transitar por estos provechosos caminos de la investigación pedagógica. A todos muchas gracias.

ÍNDICE

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

LISTA DE CUADROS

RESUMEN

El interés del trabajo de investigación titulada "conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de Educación Secundaria de la ciudad de Puno – 2012". Se fundamentó en determinar el tipo de relación que existe entre el conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno en el año académico 2012. El estudio metodológico fue de carácter cuantitativo con un diseño descriptivo correlacional. La población considerada fueron estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria, con una muestra estratificada de 286 estudiantes. Para la recolección de datos se aplicó pruebas escritas, una para evaluar el conocimiento del lenguaje matemático y otra para evaluar la capacidad de resolución de problemas matemáticos; los cuales fueron sometidos a un proceso de validación. De los datos obtenidos se tuvo los siguientes resultados: el tipo de lenguaje matemático que en mayor medida conocen los estudiantes es el lenguaje gráfico, la mayoría de estudiantes se ubican en la primera fase de resolución de problemas matemáticos, los estudiantes de la ciudad de Puno se encuentran en proceso de conocimiento del lenguaje matemático y en inicio de capacidad de resolución de problemas matemáticos, también se alcanzó identificar la existencia de las diferencias significativas en nivel de logro según las características de Instituciones Educativas. Finalmente se pudo concluir que la relación entre el conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos es positiva y directa.

Palabras claves: Lenguaje, matemática, problemas, resolución.

ABSTRACT

The interest of the research work entitled "knowledge of the mathematical language and the capacity of resolution of mathematical problems in students of Secondary Education of the city Puno – 2012". Was based in determining the relation type that exists between the knowledge of the mathematical language and the capacity of resolution of mathematical problems in students of fourth grade of Secondary Education of the city Puno in the academic year 2012. The methodological study treaty was of quantitative character with a descriptive correlational design. The study population was conformed by students of fourth grade Secondary Education, with a stratified sample of 286 students. For the gathering of data it was applied written tests, one to evaluate the knowledge of the mathematical language and another to evaluate the capability to solve mathematic problems; which were subjected to a validation process. Of the obtained data the results were the following: the kind of mathematical language than greatly students know is graphic language and the most students were located in the first phase of mathematical problem solving, the city Puno students is in process of knowledge of mathematical language and in start of capacity resolution mathematical problem, also reached identify the existence of significant difference in level of achievement according to the characteristics of educational institutions. Finally was concluded that the relationship between knowledge of the mathematical language and the capacity of resolution mathematical problems is positive and direct.

Keywords: Language, mathematic, problem, resolution.

INTRODUCCIÓN

La educación matemática como campo de investigación es fuente de muchos estudios con métodos y paradigmas variados; este aspecto es consecuencia de que recibe aportaciones de diversas áreas como la psicología, pedagogía, filosofía, matemáticas e historia de las ciencias, entre otras. Tal variedad de contribuciones hace que afloren distintas facetas y consideraciones dinámicas entre la teoría y la práctica en educación matemática (Torralbo, 2009).

Desde esta perspectiva el trabajo de investigación aborda el conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno, deslindando que el conocimiento del lenguaje matemático es una herramienta básica para comprender y resolver un problema matemático, razón por la cual todo estudiante debe lograr, haciendo uso de destrezas, estrategias, estableciendo conexiones entre los conceptos, definiciones, mostrando interés, confianza y perseverancia, utilizar el vocabulario matemático.

Desde luego se concibe que el conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas son de gran importancia, porque posibilita a los estudiantes el comprender, analizar, construir y aplicar lo aprendido a la vida diaria. Es así que una responsabilidad importante de los docentes del área de matemática es, dar a conocer en forma apropiada el lenguaje matemático y el uso de estas mismas en la capacidad de resolución de problemas matemáticos de diversos tipos.

Con respecto a la redacción del marco teórico del trabajo de investigación, en cuanto a la variable conocimiento del lenguaje matemático aborda elementos y notaciones escritos, ya que en la producción lingüística se hace una división fundamental entre los canales escritos y hablados, en síntesis estas dos formas de construcción del lenguaje presentan problemas y exigencias diferentes, así mismo tienen funciones distintas.

El presente trabajo de investigación está organizado en cuatro capítulos:

En el capítulo I, se presenta el problema de investigación, a través de la descripción y formulación del problema, así como la justificación, objetivos, hipótesis y el cuadro de operacionalización de variables.

En el capítulo II, se tiene antecedentes previos al estudio y se hace una amplia presentación del marco teórico, en el que se aborda la epistemología de la matemática, la enseñanza de la matemática desde el constructivismo, enfoques teóricos acerca de conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos, del mismo modo el contexto sociocultural.

En el capítulo III, se presenta y describe la fundamentación de la metodología de investigación, se considera la población y muestra, las técnicas e instrumentos de recolección de datos utilizados, la validación de instrumentos, el plan de tratamiento de datos y el diseño estadístico, enmarcado dentro del paradigma cuantitativo.

Finalmente en el capítulo IV, se hace una aproximación al conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos de los estudiantes a partir de la interpretación, descripción y discusión analítica de los resultados obtenidos durante el proceso de investigación, posteriormente se culmina con las conclusiones y sugerencias en base a los objetivos y la metodología utilizada.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Todas las personas estamos inmersos en una sociedad de permanente cambio como resultado de la globalización y de los crecientes avances de la ciencia, la tecnología y las comunicaciones. Para enfrentar a estos cambios y ser protagonistas del mismo, la educación de nuestro país exige paradigmas pedagógicos actuales centrados en los modelos cognitivos y socioculturales con nuevas concepciones y acciones en los procesos de enseñanza – aprendizaje, que permita a los estudiantes estar en la capacidad de responder a los desafíos que se les presenta, planteando y resolviendo con actitud analítica los problemas de su realidad. En este sentido, la educación matemática debe proyectarse a responder nuevas demandas globales y nacionales.

Sabemos que en todos los niveles de la educación Peruana, se tiene problemas con respecto al área de la matemática, esto evidencia los bajos resultados obtenidos por los estudiantes en las evaluaciones internacionales,

nacionales y regionales, como nos da a conocer el informe español, PISA[1] 2009, detalla que los educandos fueron evaluados en cuanto a la capacidad para la solución de problemas, apoyado en un contexto del mundo real. Del cual, el rendimiento de los estudiantes se clasificó en seis niveles, donde muestra que un 0,1% se encuentra en nivel 6, un 0,5% se encuentra en nivel 5, un 2,1% se encuentra en nivel 4, un 6,8% se encuentra en nivel 3, un 16,9% se encuentra en nivel 2, un 25,9% se encuentra en nivel 1 y un 47,7% de estudiantes peruanos, obtuvieron un rendimiento debajo del nivel 1. También en un informe de la Dirección Regional de Educación Puno en su página web, pone en consideración los resultados obtenidos en la evaluación de aprendizajes esperados en el área de matemática 2011 – línea base, aplicados a los estudiantes de 2° y 5°, de secundaria, con el objetivo de verificar los niveles de aprendizaje en el que los estudiantes se encuentran al iniciar el año académico con 6,5 de promedio. De la misma manera el Ministerio de Educación dio a conocer que en la Evaluación Censal de Estudiantes 2012 (ECE - 2012) que se aplicó a los estudiantes de segundo grado de primaria en todo el país, el 12,8% a nivel nacional alcanzó el nivel satisfactorio en matemática, el 38,2% el nivel 1 y el 49,0% debajo del nivel 1, respectivamente. La Evaluación Censal de Estudiantes (ECE) consiste en la aplicación de pruebas estandarizadas y presenta sus resultados de acuerdo a niveles de logro. En el Nivel 2 – Satisfactorio se ubican los estudiantes que

[1] PISA (Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes) su objetivo principal es determinar en qué medida los jóvenes de 15 años, han adquirido una amplia gama de conocimientos y destrezas lectoras, matemáticas y científicas que necesitarán en la vida adulta.

lograron los aprendizajes esperados para el grado, en el Nivel 1 – En proceso están quienes responden solamente las preguntas más fáciles de la prueba, mientras que debajo del Nivel 1 – En inicio, están aquellos estudiantes con dificultades incluso para responder las preguntas más fáciles. Lo que demuestra que existen dificultades en los procesos de enseñanza - aprendizaje y al mismo tiempo la necesidad de mejorar el logro de capacidades matemáticas.

Sin embargo haciendo un análisis a estos resultados y la experiencia en el aula de clases, los estudiantes evidencian debilidades en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la matemática, lo que puede relacionarse con diversos factores. Uno de ellos que es lo que interesa en la presente investigación se basa en el conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos.

El desconocimiento del lenguaje matemático puede conducir a errores de comprensión e interpretación de conceptos, definiciones en el proceso de resolución de problemas matemáticos, respuestas equivocadas en los exámenes, dificultades de comunicación entre docentes y estudiantes.

Además, estos problemas de comunicación generan en el estudiante una reacción de antipatía y rechazo hacia la matemática, que en algunos casos resulta difícil de superar, por esta razón muchos estudiantes cuando se le presenta un problema matemático dice: no puedo, en realidad, el estudiante no ha comprendido el problema porque desconoce algunas definiciones, términos y símbolos usados en la matemática.

Para desarrollar las capacidades fundamentales en el área de matemática, los estudiantes tienen que lograr conocer, manejar y emplear el lenguaje matemático (los símbolos propios, estructuras de presentación y caracteres gráficos que son utilizados y contribuyen a la definición y comprensión de conceptos o propiedades) de la misma forma que un estudiante de literatura debe extender su estudio a las herramientas básicas necesarias para comprender dicha materia: la gramática y la sintaxis castellana.

Los estudiantes de Educación Secundaria de la ciudad de Puno, evidencian dificultades en conocimiento del lenguaje matemático y no están empleando de forma adecuada en el proceso de resolución de problemas matemáticos, puesto que sólo en algunas ocasiones los docentes de matemática usan en sus clases una simbología matemática en forma apropiada.

Frente a este problema el presente trabajo de investigación buscó determinar el tipo de relación que existe entre el conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno en el año académico 2012. Para que los estudiantes tengan en cuenta los aspectos en los cuales, carezcan del conocimiento pertinente o necesario y apliquen estrategias durante el proceso de resolución de problemas, corrijan las dificultades y potencialicen sus fortalezas, de tal manera que participen reflexivamente con sus conocimientos y experiencias.

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

1.2.1 PROBLEMA GENERAL

¿Qué relación existe entre el conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno en el año académico 2012?

1.2.2 PROBLEMAS ESPECÍFICOS

a) ¿Qué tipo de lenguaje matemático conocen en mayor medida los estudiantes del cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno?

b) ¿En qué fase de resolución de problemas matemáticos se ubican en mayor medida los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno?

c) ¿En qué nivel de logro se encuentran los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno, en conocimiento del lenguaje matemático?

d) ¿En qué nivel de logro se encuentran los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno en capacidad de resolución de problemas matemáticos?

e) ¿Qué nivel de logro en conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos, evidencian los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno, según las características de la Institución Educativa (ubicación y tipo de gestión)?

1.3 JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La baja calidad del sistema educativo Peruano es uno de los principales retos a afrontar en la actualidad. Nuestro país ha participado en el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA) 2009, que agrupa actualmente a más de 60 países, y que es promovido por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), a través de un consorcio de instituciones especializadas en la evaluación e investigación educativa. Este programa evaluó a estudiantes de 15 años, independientemente de la modalidad, grado o ciclo que estén cursando, en capacidades relacionadas con la comprensión lectora, matemática y ciencia, ubicándonos en el puesto 60 en matemáticas, de la misma manera en la Evaluación Censal de Estudiantes (ECE - 2012) del Ministerio de Educación, revela que el 49,0% de estudiantes se ubican debajo del nivel 1, también en los registros académicos se observa un alto índice de estudiantes desaprobados. Todo lo anterior sugiere que existen problemas severos de calidad en el aprendizaje de matemática por parte de los estudiantes, principalmente en la capacidad de resolución de problemas.

De ahí que la investigación se propuso analizar cuestiones específicas del conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos, durante el proceso de enseñanza y aprendizaje del área de matemática. Teniendo en cuenta que en la educación actual el foco de la enseñanza esta puesto en la motivación y en que el estudiante desarrolle la capacidad de utilizar conceptos, representaciones, estrategias de resolución de problemas para interpretar y comprender el mundo real. Es más los docentes del área de matemática deben proporcionar a sus estudiantes las herramientas necesarias que les permitan actuar en diversas situaciones de la vida diaria, puesto que la matemática ha dejado de estar centrada en el aprendizaje de algoritmos y procedimientos de cálculo, o en el uso de la resolución de problemas solo como un elemento de control de lo aprendido, además cabe destacar, que la resolución de problemas propicia el desarrollo del pensamiento matemático, puesto que exige poner en juego diferentes tipos de razonamiento. Se presta además, al desarrollo de habilidades para reconocer y utilizar el lenguaje matemático en procedimientos matemáticos.

Por otra parte los resultados de esta investigación generara reflexión y discusión sobre el conocimiento existente del área investigada, permitirá dar alternativas, pautas para plantear acciones de capacitación docente, proponer algunos recursos didácticos dentro del ámbito de la educación matemática para mejorar el nivel de logro de los estudiantes.

1.4 OBJETIVOS DEL PROBLEMA

1.4.1 OBJETIVO GENERAL

Determinar el tipo de relación que existe entre el conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno en el año académico 2012.

1.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

a) Determinar el tipo de lenguaje matemático que en mayor medida conocen los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno.

b) Identificar la fase de resolución de problemas matemáticos que en mayor medida se ubican los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno.

c) Identificar el nivel de logro de conocimiento del lenguaje matemático de los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno.

d) Identificar el nivel de logro de capacidad de resolución de problemas matemáticos de los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno.

e) Establecer las diferencias del nivel de logro entre conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos, de los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno, según las características de la Institución Educativa (ubicación y tipo de gestión)

1.5 HIPÓTESIS Y VARIABLES

1.5.1 HIPÓTESIS GENERAL

Existe una relación positiva y directa entre el nivel de conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos en los estudiantes del cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno.

1.5.2 HIPÓTESIS ESPECÍFICAS

a) El tipo de lenguaje matemático que en mayor medida conocen los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno, es el lenguaje literal.

b) La fase de resolución de problemas matemáticos en que se ubican en mayor medida los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno, es comprensión del problema.

c) El nivel de logro en conocimiento del lenguaje matemático de los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno está en proceso.

d) El nivel de logro de capacidad de resolución de problemas matemáticos de los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno está en inicio.

e) Existe diferencias significativas del nivel de logro entre el conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos de los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno, según las características de la Institución Educativa (ubicación y tipo de gestión)

CUADRO 1

OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES

VARIABLES	DIMENSIONES	INDICADORES	INDICE
(X) Conocimiento del lenguaje matemático	Lenguaje literal	▪ Identifica los elementos primarios de un triángulo. ▪ Señala el triángulo que tiene dos lados iguales y dos ángulos iguales. ▪ Completa espacios vacíos con las palabras: isósceles, bisectriz, equiángulo.	▪ Logro destacado 18 – 20 ▪ Logro previsto 14 - 17 ▪ En proceso 11 – 13 ▪ En inicio 00 – 10
	Lenguaje grafico	▪ Responde los datos que faltan en el cuadrilátero. ▪ Identifica la figura de acuerdo a la descripción dada.	
	Lenguaje simbólico	▪ Interpreta y escribe el significado de los siguientes símbolos matemáticos. ▪ Relaciona con una flecha los enunciados con su respectiva expresión simbólica.	
(Y) Capacidad de resolución de problemas matemáticos	**Comprensión del problema.** Comprende la naturaleza del problema con una lectura analítica.	▪ Identifica la cuestión primordial del problema. ▪ Identifica las condiciones del problema. ▪ Reconoce los datos del problema.	▪ Logro destacado 18 – 20 ▪ Logro previsto 14 - 17 ▪ En proceso 11 – 13 ▪ En inicio 00 - 10
	Selección del plan. Selecciona la estrategia apropiada para resolver el problema.	▪ Señala a partir de los datos el plan de trabajo adecuado para resolver el problema.	
	Ejecución del plan Desarrolla la estrategia seleccionada en la resolución de problemas.	▪ Resuelve el problema de acuerdo a la estrategia seleccionada anteriormente. ▪ Muestra la solución del problema, desarrollando la estrategia elegida con anterioridad.	
	Visión retrospectiva y prospectiva Reflexiona sobre el proceso ejecutado en la resolución de problemas	▪ Argumenta los puntos difíciles al resolver el problema. ▪ Explica si un gráfico ayuda a resolver el problema con rapidez. ▪ Expresa la resolución del problema otra forma. ▪ Indica los conceptos matemáticos utilizados para resolver el problema.	

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 ANTECEDENTES DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Como antecedentes se tiene a los estudios previos relacionados con el lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos.

- Escudero (1996) realizó un estudio con dos grupos de alumnos cuyos resultados en general eran bajos. Determinó que 79% de los alumnos dispone de un reducido y pobre espectro de estrategias cognitivas y metacognitivas en proceso de resolución de problemas. El 52% de alumnos necesita de referenciales externos permanentes (compañeros y profesores) para realizar la tarea y/o controlarla, no recurren de manera espontánea a estrategias metacognitivas. No aplican método alguno para resolver un problema. Aquellos que resuelven situaciones nuevas en general, lo hacen por capacidad propia (o externa a la escuela) y no porque el sistema educativo les haya proporcionado herramientas.
- Toboso (2004) desde luego expone los resultados en cuanto a las puntuaciones medias obtenidas en cada uno de los conglomerados de alumnos, que ha resultado altamente significativo en cada una de las

fases de resolución de problemas. Se observa que el grupo 4, con 42 alumnos (15,67%), representa el máximo nivel general en las cuatro fases de resolución de problemas (comprensión lectora, selección del plan, organización de estrategias y ejecución algorítmica). En este grupo se sitúan los alumnos que manifiestan buenas habilidades en todas las fases del proceso. El grupo 1, con 36 casos (13,43%), recoge a los alumnos que tienen habilidades similares a los del grupo 4, en las fases de selección del plan y ejecución algorítmica, pero presentan mayor dificultad en comprensión lectora y organización de estrategias. Son alumnos que resuelven bien los problemas, porque conocen el plan de resolución adecuado y la ejecución algorítmica, pero que tienen algunas dificultades en la comprensión lectora y el conocimiento estratégico que facilita la organización correcta de los pasos a seguir. El grupo 2, con 82 casos (30,59%), representa a los alumnos que tienen mejor comprensión lectora que el grupo 1, pero peores habilidades en selección del plan y ejecución algorítmica. En este grupo se sitúa un porcentaje importante de alumnos, con buenas habilidades en los procesos de comprensión lectora, pero con una manifiesta dificultad para la resolución de problemas matemáticos, especialmente en las fases de conocimiento esquemático, que permite seleccionar el plan de resolución, y el algorítmico que lleva a solución. Finalmente, el grupo 3, con 108 casos (40,29%), engloba al conglomerado mayor con los niveles más bajos en las cuatro fases. Estos alumnos presentan algunas dificultades en comprensión lectora, pero su mayor dificultad se localiza en las tres fases más específicas de la resolución de problemas matemáticos. El porcentaje de casos de este grupo viene a coincidir con el de los alumnos que, actualmente, presentan bajo rendimiento en el área de matemáticas.

- Olazábal (2005) de acuerdo al análisis de resultados de cada una de las categorías, encontró traducciones en donde el porcentaje de éxito es muy bajo. En la primera categoría indica que solo un 37,35% de estudiantes realizaron la traducción literal del lenguaje natural al lenguaje algebraico y 16,7% resolvieron el problema. Respecto a la segunda categoría confirma que 5,55% comprendieron y evocaron los conceptos con el nombre y el modelo que los representa y 2,7% resolvieron el problema. Y respecto a la tercera categoría señala que 22,5% representaron gráficamente para visualizar las relaciones pertinentes y 19,5% resolvieron el problema, por lo que en estos casos, esta traducción adicional, la gráfica, aparece como un eslabón entre el lenguaje natural y el lenguaje algebraico.
- Fortes, Sanjosé, Valenzuela y Solaz (2007) indican que los estudiantes presentan un nivel alto de fracaso (57%) a la hora de interpretar los resultados matemáticos para responder las preguntas conceptuales que los problemas plantean, es decir, a la hora de volver a relacionar los conceptos abstractos con los acontecimientos y objetos del mundo tangible. Un 87,3% de estudiantes demuestran saber resolver las ecuaciones pero manifiestan problemas graves de comprensión de los

problemas algebraicos con enunciado. Esto demuestra de nuevo que saber resolver es independiente de comprender.

- Por su parte, Valle, Juárez y Guzmán (2007) pidieron a los estudiantes que expusieran por escrito sus resultados y fundamentaran sus respuestas en hojas separadas, analizaron 546 escritos de estos, solo el 35% de los escritos analizados cuentan con evidencias de que los concursantes comprendieron el problema. De los 42 estudiantes que propusieron vías de solución el 41 % de los escritos representa estrategias de solución (hacer una figura, usar una variable, ensayo y error) lo que refleja la maduración del pensamiento formal en los estudiantes. Y 26 escritos reportaron solución completa en cada uno de los problemas planteados.
- Solaz - Portolés y Sanjosé, (2006) clasificaron a los estudiantes en dos grupos en base a una prueba de seis ítems, cinco de ellos considerados como conceptuales y uno algorítmico: el primer grupo formado por 43 estudiantes con conocimiento previo alto que obtuvieron una puntuación igual o superior a 9.3 en la prueba. Y el segundo grupo de 42 alumnos con conocimiento previo bajo no alcanzaron dicha puntuación. Así, el Ítem 1, que no requiere de un modelo mental para ser resuelto, sólo de una representación proposicional, registra un elevado porcentaje de éxito (81.1%). Los ítems 2, 3 y 4 (porcentajes de éxito 65.9%; 58.8% y 41.2%, respectivamente) necesitan para su resolución, la ejecución de dos a cuatro modelos mentales. Finalmente, los ítems 5 y 6 (con porcentajes de éxito 18.8% y 33%,

respectivamente) precisan tener en funcionamiento para ser resueltos, al menos seis y cinco modelos mentales, respectivamente. Esto es, a mayor conocimiento previo, mayor probabilidad de resolver correctamente problemas difíciles.

- Cuesta (2007) corroboró la existencia de dificultades en tareas de interpretación y construcción del concepto función, producidas por el efecto combinado de los significados que poseen los estudiantes manifestándose en un 54%, por otra parte, las tareas de construcción relacionadas con las diferentes formas de representar el concepto de función, así como la traducción entre ellas en un contexto geométrico sólo 17 estudiantes fueron capaces y el resto del grupo no pueden representar entabla de valores la condición algebraica del problema y como resultado no pueden esbozar la gráfica que representa esta situación. Muchos estudiantes no pueden transferir la función, de la tabla y/o gráfica, a la ecuación algebraica.
- Morales (2009) dio a conocer los resultados de la aplicación de la prueba diagnóstica de matemática I que exigia habilidades para leer información en variadas modalidades de presentación (lenguaje escrito en palabras, simbólico, gráfico, esquemático, algorítmico, etc.), para interpretar, relacionar y hacer inferencias; habilidades que se adquieren bajo esquemas de enseñanza basados en estrategias de procesamiento de información. De donde estableció que el 77 % de estudiantes del semestre 2004-II y el 63% de estudiantes del semestre 2005-I del total, salió aplazado en la prueba diagnóstica (entre 00 y 09

puntos). Vale destacar que el porcentaje de estudiantes aplazados en la prueba diagnóstica de semestre 2005-I (63,43 %) es inferior al porcentaje de estudiantes aplazados en la prueba diagnóstica del semestre 2004-II (77%). De igual modo, se constató que los estudiantes no mostraron dominio de estrategias para resolver problemas y su nivel de conformidad con las explicaciones se quedó en la repetición de las mismas afirmaciones que se solicitó justificar y el conocimiento de procedimientos matemáticos, ausentes de procesos descriptivos y explicativos.

- Silva (2009) reveló que, en torno a los problemas más difíciles, los alumnos que dominaban los conceptos y nociones matemáticas necesarias mostraron éxito en la resolución de los mismos, llegando a reportar más de 74 puntos porcentuales de diferencia con quienes se hallaban en la situación contraria. Otro aspecto interesante, fue conocer las respuestas que incluían una comprensión parcial del problema por parte de los alumnos, ya que se observó entre un 3% y un 16%, llegaron a respuestas incorrectas debido a una pobre comprensión lectora. En cuanto al establecimiento de un plan, observó que, los alumnos tienden a echar mano de estrategias irreflexivas, ante la ausencia de un plan. que en la mayoría de los casos desembocan en errores. Al mismo tiempo, las estrategias empleadas por los alumnos no es muy amplio y por último, confirmó la importancia de la verificación de resultados después de la prueba.

- Alcalde (2010) determinó el nivel de conocimientos matemáticos previos de los estudiantes, el porcentaje total de respuestas correctas del Grupo de control fue del 63,02% y el del Grupo experimental del 64,88%. En las categorías de contenido el máximo de aciertos correspondió a representación y análisis de datos (probabilidad) en los tres colectivos (71,38%, 70,64% y 78,82% respectivamente), siendo los mínimos en «Geometría» con 53,51%, en proporcionalidad en el Grupo de Control (53,51%) y también en geometría en el experimental (51,76%). En las subcategorías de contenido, el máximo se alcanzó en ecuaciones lineales (82,18%) y el Grupo de control (81,87%) y en representación y análisis de datos, en el Grupo Experimental (88,24%) y el mínimo en congruencia y semejanza en los tres colectivos (35,11%, 36,26% y 23,53% respectivamente). Por los resultados anteriores podemos decir que los contenidos matemáticos previos en los que los estudiantes están mejor preparados son los de representación y análisis de datos (probabilidad) y en los que peor en geometría.
- Depaz y Fernández (2011) indican que los estudiantes del colegio estatal en relación al colegio privado dejaron más preguntas sin resolver demostrando que el tiempo planteado no les fue suficiente; mientras que, los estudiantes del colegio privado lograron un mejor rendimiento en la resolución de problemas matemáticas de sustracción.
- Astola, Salvador y Vera (2012) demostraron que la efectividad del programa "GPA-RESOL" en el incremento del nivel de logro en la

resolución de problemas aritméticos aditivos y sustractivos en estudiantes de dos Instituciones Educativas una de gestión estatal y otra privada, es altamente significativa. Se observó que en el momento del pre test los estudiantes de gestión privada obtuvieron GC 9,2 y GE 13,1 de media y los estudiantes de gestión estatal obtuvieron GC 9,6 y GE 7,3 de media. Luego en el post test se observó que la media de gestión estatal GE es de 16.5 mientras que la media de los estudiantes de gestión privada GE es de 16.3. En tanto que la media de gestión privada GC es de 12.3, mientras que la media de gestión estatal GC es de 11.1. Ello significa que los estudiantes de gestión estatal GE y gestión privada GE culminaron con un semejante nivel de logro de resolución de problemas aritméticos aditivos y sustractivos, no hallándose diferencias estadísticamente significativas entre ellos.

2.2 MARCO REFERENCIAL

2.2.1 EPISTEMOLOGÍA DE LA MATEMÁTICA

La matemática ha sido enfocada desde disímiles presupuestos filosóficos. Resalta desde tiempos remotos el "Platonismo", donde esta corriente filosófica constituye un sistema de verdades absolutas que han existido siempre e independientemente del hombre.

"Para Platón los objetos matemáticos no están en continuidad con los objetos sensibles, su existencia es independiente de ellos. Tampoco son producto del pensamiento humano. Los objetos matemáticos pertenecen a un tercer mundo de naturaleza diferente a los anteriores" (Popper, 1974).

En consecuencia hacer matemática en esta concepción filosófica, consiste en el proceso de descubrimiento de sus relaciones preexistentes. El trabajo del matemático platónico es un trabajo empirista, dado que no inventa sino que descubre los conceptos matemáticos. Utiliza para ello fundamentalmente la percepción y la intuición matemática (Socas y Camacho, 2003).

A comienzos del siglo pasado existió inquietud por esclarecer las dudas sobre la naturaleza epistemológica de la matemática en su modelo euclídeo. Tres programas trataron de sanear las fisuras de sus fundamentos: el "Logicismo" de B. Russell, el "Formalismo" de D. Hilbert, y el "Intuicionismo" de L. E. J. Brouwer. Para el primero la matemática es una rama de la Lógica; para el segundo constituye una creación de la mente humana y existe solamente en axiomas, teoremas, etcétera; y para el tercero son un fruto de la elaboración mental, a partir de lo que se percibe mediante los órganos de los sentidos, así como el propio estudio de esas construcciones mentales. Los tres intentos fracasaron y la matemática, en lugar de seguir buscando su afirmación en el supuesto modelo perfecto (euclídeo) de la ciencia por excelencia, aceptó como más plausible el enfoque empirista (Cruz, 2006).

En efecto, respecto a las teorías o grandes sistemas proposicionales, los patrones específicos de ordenación del conocimiento complejo y organizado determinan, junto con el nivel en el que son introducidos los valores de verdad, los distintos tipos epistemológicos: teorías euclídeas, teorías empíricas y teorías inductivas. Estas son diferentes porque determinan de manera distinta el patrón organizativo de las distintas proposiciones que contienen, así como el flujo de verdad o falsedad del sistema. Una teoría euclídea es consistente pues todas las proposiciones que ocurren en ella son verdaderas (Lakatos, 1981).

Respecto a las teorías empiristas hay que aclarar que no es igual a empíricas en el sentido sensorial, sino que hacen alusión a la situación de los valores de verdad y su flujo, de modo que si en la base hay proposiciones falsas el sistema deductivo que articula la teoría trasmite falsedad a los resultados, pero si hay verdad en la base no se puede asegurar que los resultados sean verdaderos. Son teorías que se pueden "falsear" o refutar pero no probar (Cruz, 2006).

La tercera opción es el inductivismo, que pretende el ascenso de la verdad desde la base hasta la cúspide, y así establecer un principio lógico de retransmisión de la verdad. El paso de los principios inducciónistas a una prueba lógica ha fracasado. Aun Russell que lo intentó con su "construccionismo" no pudo resolver el problema de la "definición inductiva". En cuanto a la clasificación epistemológica de la matemática actualmente no puede sintetizarse en una de estas tres corrientes, pero a través de los neoempirismos de Russell, Quine, Carnap y fundamentalmente de Popper se llega a desterrar el modelo euclídeo y a proponer que "bajo la influencia de la crítica moderna de sus fundamentos, la matemática había perdido ya gran parte de su 'certeza absoluta' y que en el futuro, debido a la aparición de nuevos axiomas de la teoría de conjuntos, sería cada vez más falible" (Lakatos, 1981).

Esto indica que se ha evolucionado desde una teoría euclídea hacia una teoría empírica o cuasi–empírica.

El empirismo tiene sus raíces en diferentes autores de los siglos XVII y XVIII. Con la intención de combatir las ideas innatas, analizan el origen del conocimiento humano. La idea central es conceder una preponderancia absoluta a la experiencia sobre las demás fuentes del conocimiento humano, es decir, acentúa la exclusiva validez de la experiencia como fuente del conocimiento. La universalidad y necesidad de nuestro conocimiento intelectual es explicada por la acción de las cosas externas sobre nuestras facultades cognoscitivas (Socas y Camacho, 2003).

Representa la opción más extrema de la consideración descriptiva de las matemáticas. Esta corriente filosófica admite una visión de la naturaleza de las matemáticas que descansa sobre la consideración de que las verdades matemáticas son generalizaciones empíricas. Así, los conceptos matemáticos tienen orígenes empíricos y las verdades matemáticas se derivan de las observaciones del mundo físico. Sus justificaciones provienen también de estas observaciones (Socas y Camacho, 2003)

El cuasi empirismo, es una corriente, relativamente reciente, surge de la enérgica oposición de su fundador -Imre Lakatos- al Logicismo y Formalismo. Esta corriente filosófica incluye la dimensión histórica de las matemáticas, a partir de la cual se puede mostrar por qué se desarrollaron los conceptos y resultados particulares de las matemáticas, tomando como base los problemas concretos así como las dificultades históricas para su resolución (Lakatos, 1978).

Tiene más importancia para esta corriente filosófica la matemática informal y práctica que la formal o acabada, y considera que la dialéctica conjetura refutación, así como el uso constante de contraejemplos, constituyen la clave para la elaboración de teorías matemáticas informales (Socas y Camacho, 2003).

Davis y Hersh (1988) aportan al cuasi-empirismo de Lakatos la naturaleza cultural de las matemáticas, tanto a los aspectos internos como a los externos de la misma. Mientras Lakatos se centra en la historia del desarrollo de la propia matemática (aspectos internos), estos autores muestran cómo las matemáticas penetran y desarrollan todos los aspectos de la vida social y cultural.

Si se puede afirmar que la matemática ha evolucionado desde el ideal euclídeo al empírico, es porque su metodología y objetivos han ido cambiando paulatinamente (Cruz, 2006).

A pesar de haber predominado por siglos, la perspectiva platónica debió ceder terreno a otros paradigmas menos absolutistas. Uno de los movimientos que ha intentado reformar la enseñanza de las ciencias lo constituye la "Pedagogía Constructivista", que es diametralmente opuesta por naturaleza (Lakatos, 1978).

Pero en la actualidad surgieron varias corrientes, las cuales repercuten con mucha fuerza en la didáctica de la matemática mundial.

La primera corriente se adscribe al enfoque antropológico, como base epistemológica de la didáctica de la matemática. Se trata de la "Etnomatemática" de U. D'Ambrosio, cuya principal novedad consiste en el cambio de planteamientos en relación a la posibilidad y entidad del conocimiento matemático. Este último es posible e inseparable de sus productores, de manera que asume una posición dogmática. Además, el conocimiento matemático tiene sentido, validez, y se encuentra integrado en cada cultura inseparablemente. Los juicios sobre la validez son "locales" no "universales". Por lo tanto, también se trata de una corriente pragmática que atribuye el poder de validar a la comunidad científica, en su contexto histórico concreto (Cruz, 2006).

Borba (1990) por su parte, pone de relieve dos aspectos esenciales de esta corriente, "los conceptos de problema y diálogo, como partes integrantes de su visión de los seres humanos; así como la relación entre esta visión y la Etnomatemática". El conocimiento matemático queda ligado al lenguaje, así como a la cultura del que lo crea o lo reconstruye; por tanto, tiene un carácter relativo. Todas las culturas hacen matemática, aunque la expresen en lenguajes específicos.

El conocimiento matemático, expresado en el código lingüístico de un grupo sociocultural dado, es llamado 'Etnomatemática'. En este contexto 'etno' y 'matemática' deberían adquirir un sentido amplio, 'matemática' debe considerarse como un conjunto de actividades tales como cifrado, medida, clasificación, ordenación, inferencia y modelación (Borba, 1990).

Es evidente que esta epistemología antropológica tiene claras implicaciones para la educación. Si personas diferentes producen distintos tipos de matemáticas, no es posible pensar en una educación con procesos uniformes que se desarrollen en el mismo sentido por diferentes grupos. La didáctica de la matemática debería desarrollarse teniendo en cuenta las peculiaridades culturales de cada grupo social, desde una perspectiva multicultural (Cruz, 2006).

Para que los educadores desarrollen puntos de vista basados en la Etnomatemática, es importante considerar los conceptos de diálogo social y de problema. Se podrían encontrar problemas basados en las etnomatemáticas. Los problemas a resolver podrían ser elegidos tanto por los estudiantes como los profesores, a través de un diálogo que fortalezca y aliente una conciencia crítica. El conocimiento puede considerarse como un producto de esta relación dialéctica a través del diálogo.

La segunda corriente se deriva particularmente de la anterior y aparece encabezada por la obra de Skovmose (1994), el cual fundó su "Matemática educativa crítica", a partir de la Teoría crítica de la Escuela de Frankfurt. En

Skovmose resalta una visión histórica del término "criticismo", va más allá respecto al significado de este término y haciendo una distinción entre los conceptos de crisis, criticismo y emancipación. Sobre la base de estos conceptos se instituye una didáctica de la matemática de profundas raíces humanistas, destacando los diferentes caminos a través de los cuales se desarrolla la sociedad, desentrañando el papel de la escuela en este desarrollo, y proveyendo a los estudiantes con competencias que les faciliten identificar y reaccionar ante los problemas que le depara la vida.

En tercer lugar se erige el "Constructivismo social" de P. Ernest[2], perspectiva falibilista, basada en el convencionalismo de L. Wittgenstein y el cuasi–empirismo de Lakatos. Los supuestos ontológicos del Constructivismo Social llevan a la adopción de las teorías pragmáticas del significado. Los objetos matemáticos son considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos, ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo (Ernest, 1991).

Ernest (1991) resalta un grupo de problemas filosóficos relevantes para la didáctica de la matemática, entre los que figuran: ¿qué postulados filosóficos, posiblemente implícitos, sostienen la enseñanza de la matemática?, ¿son válidos estos postulados? y ¿cuáles recursos son adoptados para llevar a cabo los objetivos de la enseñanza de la

[2] P. Ernest desarrolla su "Filosofía de la educación matemática" utilizando como fundamento teórico el constructivismo social, y establece un modelo de ideología educativa para la matemática que incluye como elementos primarios: la epistemología, la filosofía de las matemáticas, las metas educativas.

matemática? Después de criticar el absolutismo y la falacia de los programas euclídeos, expone su criticismo desde una perspectiva falibilista. Resolver problemas es un signo distintivo de la actividad matemática. Ernest (1994) identificó tres concepciones generales de esta actividad: la platónica, la instrumental y la de resolución de problemas.

En este trabajo se enfatiza esta última, por considerar la matemática como una disciplina dinámica y cambiante, la cual está en constante desarrollo y reajuste ante las nuevas situaciones problémicas. La perspectiva platónica es idealista subjetiva y se desecha totalmente. La instrumental se inscribe en una visión pragmática pero no es posible desecharla del todo pues se estaría negando un papel esencial de la matemática, reflejado en el desarrollo de habilidades para resolver problemas prácticos, para usar ágilmente el lenguaje simbólico, los procedimientos y algoritmos, y para desarrollar el pensamiento lógico–formal.

En efecto para varios eminentes matemáticos (y se refiere particularmente a M. Atiyah) hacer matemáticas no supone una meta en particular, excepto “la meta de comprender la matemática”. Otro aspecto importante, relativo a la filosofía de la matemática, dimana de la interrogante: ¿todo problema tiene solución? en vista de que todo el conocimiento matemático refleja propiedades intrínsecas de la realidad objetiva, la respuesta estará condicionada por la conocida controversia entre los representantes del materialismo dialéctico –quienes afirman que el mundo es cognoscible– y los agnósticos –quienes afirman que o bien no se puede conocer o, al menos, no se sabe qué se puede y cuándo se conoce– lo cual constituye un tema básico de la epistemología (Cruz, 2006).

Desde la perspectiva psicológica, el enfoque histórico–cultural de Vigotsky, enfatiza la naturaleza social del desarrollo psíquico del hombre, así como la unidad entre psiquis y actividad. El principio fundamental que sustenta este enfoque consiste en que los procesos mentales pueden nacer en la actividad planificada, para luego convertirse en órganos funcionales de la propia actividad. Sin embargo, en el contexto escolar no todo se puede enseñar, pues el desarrollo no depende directa y linealmente de la enseñanza aunque esta, en última instancia, conduzca al desarrollo.

Uno de los principales aportes de la obra de Vigotsky consiste en la noción de "Zona de Desarrollo Próximo" (ZDP) que expresa la relación interna entre la enseñanza y el desarrollo.

2.2.2 LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA DESDE LA PERSPECTIVA CONSTRUCTIVISTA

"Adentrarnos en los fundamentos epistemológicos del constructivismo implica partir de que el conocimiento se construye activamente por los sujetos y no es algo que existe fuera de sus cuerpos a quienes se les puede transmitir el cúmulo de saberes de manera lineal y automática" (Novack, 1998; Larios, 2000). O como sostiene Sánchez (2004) "el conocimiento no puede ser transferido desde la cabeza de un profesor a la cabeza de los estudiantes". Por el contrario, "el constructivismo intenta explicar cómo el ser humano es capaz de construir conceptos y cómo sus estructuras conceptuales le llevan a convertirse en las gafas perceptivas que guían sus aprendizajes" (Novack, 1998).

Carretero (1997) precisa que:

Desde la epistemología constructivista, el individuo no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción del ser humano. ¿Con qué instrumentos realiza la persona dicha construcción? Fundamentalmente con los esquemas que ya posee, es decir, con lo que ya construyó en su relación con el medio que le rodea.

Aunque existen distintas corrientes dentro de este paradigma, coinciden en el postulado central que destaca la importancia de los conocimientos previos como sustrato para el nuevo conocimiento y, por tanto, para el aprendizaje. Es decir, el sujeto construye los conocimientos en función de sus experiencias previas, creencias o ideas que en su conjunto conforman lo que Novack (1998) denomina "estructuras conceptuales".

En esa misma línea, Driver (1986) afirma que "lo que hay en el cerebro del que va a aprender tiene importancia" con lo que sugiere que todos construimos representaciones del saber y las utilizamos para interpretar las experiencias nuevas.

De esta afirmación se desprende que los resultados del aprendizaje dependen de los conocimientos previos de los estudiantes, así como de sus concepciones y motivaciones.

Además del papel activo del sujeto cognoscente, Kilpatrick y Gómez (1995) destacan otro factor clave respecto del constructivismo: "llegar a conocer es un proceso adaptativo que organiza el mundo experiencial de uno, no se descubre un independiente y preexistente mundo fuera de la mente del conocedor".

Sin embargo Larios (2000) "precisa que el mundo existe independientemente del cognoscente; sólo que para el interés de este ser, sólo existirá el mundo cuando lo conozca. De ahí la importancia de un sujeto activo que construye conocimientos y con ellos organiza el mundo".

Estas dos características centrales del constructivismo –cognoscente activo e importancia de conocimientos previos- son sintetizadas de manera muy clara por Driver (1986) al afirmar que "quien aprende construye activamente significados". Para este autor, interpretamos nuevas experiencias mediante analogías, a partir de las estructuras de conocimientos que ya poseemos lo que a su vez puede modificar dichas estructuras.

Estos postulados constructivistas son aplicables a cualquier área del saber y las matemáticas es una de ellas. En tal sentido, Kilpatrcick y Gómez (1995) y Rico (1995) precisan que:

- Todo conocimiento es construido. El conocimiento matemático es construido, al menos en parte, a través de un proceso de abstracción reflexiva.
- Existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción.

- La estructuras cognitivas están en desarrollo continuo. La actividad con propósito induce la transformación en las estructuras existentes.

En el caso de las matemáticas una experiencia que favorece la construcción de conocimientos a partir de procesos de abstracción reflexiva es la resolución de problemas. A tal efecto, Larios (2000) afirma que:

Tal parece que para que el alumno pueda construir su conocimiento y llevar a cabo la obligatoria interacción activa con los objetos matemáticos, incluyendo la reflexión que le permite abstraer estos objetos, es necesario que estos objetos se presenten inmersos en un problema y no en un ejercicio. De hecho son estas situaciones problemáticas las que introducen un desequilibrio en las estructuras mentales del alumno, que en su afán de equilibrarlas (un acomodamiento) se produce la construcción del conocimiento.

En fin, la resolución de problemas es una experiencia didáctica que favorece el enriquecimiento de las estructuras conceptuales, ya que demanda conocimientos previos –nociones, conceptos, experiencias- y genera conflictos cognitivos que movilizan al estudiante a buscar una respuesta que permita equilibrar la situación problemática planteada.

2.2.3 CONOCIMIENTO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO

2.2.3.1 EL LENGUAJE EN LA MATEMÁTICA

El término "lenguaje" hace referencia a la actividad humana guiada por un sistema de signos combinados entre sí por ciertas reglas. El lenguaje es la actividad verbal específica de los individuos cuando hablan y escriben, pero también cuando piensan, pues el lenguaje es la expresión de una idea, de un pensamiento y posee un cierto sentido.

El lenguaje constituye una vía universal para la transmisión del conocimiento matemático y una herramienta auxiliar en el desarrollo de las estructuras cognoscitivas pertinentes.

Por ello Tourlet (2003) "indica que una estructura lingüística ajustada a la experiencia es necesaria para el estudiante".

Además durante el proceso de enseñanza – aprendizaje, implica la elaboración de situaciones que trae como consecuencia la comprensión e interrelación de los conceptos matemáticos.

"La percepción y la representación del lenguaje podrían indicar el éxito o el fracaso en la solución de un problema; de tal manera que la eficacia y la eficiencia en la solución del problema tan aparentemente sencillos como los de adición y sustracción depende de la capacidad para comprender los conceptos matemáticos fundamentales" (Resnick y Ford, 1990).

Al pensar en los objetos de la matemática, podemos situarnos en dos polos opuestos: considerar el lenguaje en un nivel secundario en relación con los objetos o pensar que la objetividad de la matemática está inseparablemente unida a su formulación lingüística: "la matemática no es más que un juego del lenguaje formal". Entre estas dos posiciones sostenidas por las corrientes Intuicionista (Brouwer) y Formalista (Hilbert), respectivamente, parece razonable aceptar que la construcción de los objetos matemáticos no es posible sin un lenguaje, como señala Popper (1974) "no puede haber construcción de los objetos matemáticos sin un control crítico constante y no puede haber crítica sin una formulación lingüística de nuestra construcciones".

Departiremos del lenguaje en la matemática enfatizando a sus aspectos representativos, simbólicos y gráficos, desde el punto de vista didáctico.

Ya que la comprensión matemática exige el dominio de un lenguaje formal, riguroso y abstracto que, aunque tenga un claro significado referencial, no deja de estar dominado por reglas complejas y muy precisas.

Por lo tanto es relevante dar a conocer la importancia del binomio lenguaje – matemática, debido a que son muchas las veces que observamos el uso inapropiado del lenguaje y su significado en los ámbitos académicos, y al estudiante se le hace difícil transformar la escritura del lenguaje común de una situación problemática al lenguaje algebraico por la escasez de información lingüística previa que maneja (Pimm, 1999).

2.2.3.2 EL LENGUAJE MATEMÁTICO

La matemática tiene, como la mayoría de las ciencias y otras disciplinas del saber, un lenguaje particular, específico, el cual simplifica, en algunos casos, la comunicación, y por otro lado clarifica y designa de una manera exacta, sin posible confusión, sus contenidos. En el lenguaje matemático, las afirmaciones son presentadas de una manera propia, siendo tajantes, con demostraciones de su veracidad, y sin permitir ambigüedades. Todos y cada uno de los símbolos de escritura definidos y utilizados tienen una tarea determinada, exacta, sin solapamientos ni posibles equívocos, mientras que también la estructura de su presentación es idónea para su perfecta comprensión. Así como lo define Aubanell (1987) "las matemáticas son un lenguaje, el lenguaje de la ciencia y tecnología. Un poderosísimo lenguaje que ayuda a pensar rigurosamente, porque obliga a precisar las hipótesis y porque delimita exactamente el ámbito de validez de sus conclusiones. Un lenguaje para modelizar, para precisar y para decidir".

"El lenguaje matemático es un sistema de símbolos que fija lógicamente los conocimientos sobre las relaciones y conexiones entre los objetos y procesos del mundo real, y sus propiedades; posee un vocabulario, una sintaxis y una notación propia" (Alcalá, 2002).

Si un estudiante no comprende el significado de todas las palabras empleadas para plantear un problema matemático, posiblemente tampoco entenderá qué es lo que debe hacer y será difícil que logre la meta de aprendizaje prevista con tal actividad.

Esa diversidad de signos y códigos operacionales que son utilizados al resolver un problema matemático, forman una red de significados:

conforman un lenguaje del cual existen diferentes grados de apropiación por los alumnos de un grupo escolar normal (Alcalá, 2002).

En el trabajo de investigación lo definiremos, el lenguaje matemático como un poderoso medio de comunicación de conocimientos; que posee símbolos los cuales tienen significado, semántica, sintaxis, y unas reglas para relacionarlos u operarlos. Por lo tanto, es conciso porque permite expresar en muy poco espacio mucha información (por medio de fórmulas o utilizando símbolos propios) y además los hace sin ambigüedades. Y a la vez es soporte, herramienta y parte constitutiva del conocimiento matemático mismo.

Hay que tener en cuenta que, aunque sean muy importantes los aspectos semióticos del aprendizaje matemático, la actividad matemática va más allá de cualquier actividad lingüística, representacional o simbólica.

El desconocimiento del lenguaje matemático produce errores de construcción, de interpretación, y en definitiva hace imposible la comunicación. Es decir, si se pierde la gran virtud de las matemáticas que es, como hemos dicho, su exactitud, nos queda una ciencia con un lenguaje que producirá errores y confusiones (Pimm, 1999).

En general, en el área de matemática a los estudiantes de educación secundaria de la ciudad de Puno no se evalúa sobre su conocimiento del lenguaje matemático, y se permiten errores de "expresión". De tal forma que en el futuro, estos estudiantes tendrán muchas dificultades para avanzar en los conocimientos adquiridos por el hecho de desconocer las bases de las herramientas matemáticas.

2.2.3.3 APLICACIÓN DE CONOCIMIENTO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO

La ciencia matemática es cada vez más usada para dar solución a problemas que surgen en otras áreas del conocimiento; además, es una manera sintética de mostrar y manejar información. Por ello, nos encontramos rodeados cada vez de una mayor cantidad de información expresada en términos matemáticos (Pimm, 1999).

Acciones concretas, así como situaciones personales o colectivas, pueden ser expresadas en términos matemáticos a través de ecuaciones, gráficos estadísticos, clasificaciones presentadas como conjuntos o como fracciones.

En síntesis, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática existe dos factores predominantes que causan verdaderamente una frustración en el estudiante, dichos factores son sin duda alguna el manejo inadecuado del lenguaje y la insuficiente y escasa comprensión lectora que poseen estos en relación con los conceptos, enunciados, axiomas y postulados presentes tanto en los textos como en el desarrollo de las clases. Factores estos que impiden que el estudiante sea capaz de conectar su lengua cotidiana con la lengua y simbología matemática. Dentro del proceso para la adquisición del lenguaje matemático se pueden destacar que los canales de percepción son muy importantes ya que a medida que se desarrolla la habilidad del alumno para abstraer el percibirá las acciones, relaciones y atributos por lo que agregara símbolos, terminología y conceptos entre otros aspectos matemáticos a su vocabulario cotidiano. "En razón de estas conjeturas, se sugiere profundizar en esta línea de reflexión para eventualmente construir un cuerpo teórico discursivo respecto al uso correcto y comprensivo de los contenidos matemáticos como elementos fundamentales del lenguaje natural cotidiano" (Devlin, 2002).

2.2.3.4 TIPOS DEL LENGUAJE MATEMÁTICO

2.2.3.4.1 LENGUAJE LITERAL: Corresponde a la estructura y presentación de los contenidos matemáticos que se realiza mediante enunciados como: Axioma, definición, teorema, proposición, lema, demostración, corolario; de manera que cada uno de ellos predice su contenido. Luego, todo enunciado o afirmación en matemáticas debe ser presentado dentro de uno de estos epígrafes, ayudando así a una clara organización y estructura de los contenidos del área (Azarquiel, 1993).

Los conceptos son unos de los componentes importantes del contenido de cualquier materia y en la matemática también. "Es así que al iniciar el estudio de la geometría los estudiantes de inmediato se enfrentan a los conceptos de punto, línea, ángulo y posteriormente, con todo un sistema de conceptos relacionados con diferentes tipos de objetos geométricos" (Nina, 1998).

2.2.3.4.2 LENGUAJE GRÁFICO: Representa y expresa las ideas por medio de imágenes bidimensionales. Muchas veces "la construcción de un gráfico puede ayudar a representar la esencia de un concepto matemático, y también puede ayudar a que surja una solución inmediata en la resolución de un problema" (Torres, 2007).

Un gráfico nos presta una gran ayuda para resolver un problema ya que facilita la comprensión del mismo y hace surgir ideas que nos acercan a la solución. "La importancia que tiene un gráfico en los problemas que se resuelven por métodos geométricos es evidente, sin embargo, también hay muchos problemas algebraicos en los que un gráfico nos permite llegar a una solución de forma más rápido y elegante" (Figueiras y Molero, 1998).

Introducir una enseñanza apoyada por el recurso gráfico repercute sensiblemente en la buena comprensión de nociones, conceptos, procedimientos y actitudes hacia la matemática. Así como indica Pimm (1999) Nuestra vida está llena de signos y símbolos y ellos pernean toda actividad; dirigen nuestra atención, sustituyen ideas, connotan situaciones, informan sucintamente y simplifican textos. Vivimos en la época de intensa actividad y gran parte de la información que recibimos, por extensa, se simplifica por medio de gráficos. Desde las primeras incursiones del niño en el espacio escolar se le invita a representar con dibujos sus apreciaciones y percepciones del mundo exterior, el íntimo, el familiar y el social. Se ha creado una inmensa gama de símbolos que invitan, prohíben, informan, sugieren y señalan acciones que debemos o podemos realizar; es un lenguaje jeroglífico que hemos aprendido en la escuela de la vida.

Dotar al alumno de un buen manejo del lenguaje gráfico, facilita la comprensión y la apropiación de nuevos conceptos de cálculo.

2.2.3.4.3 LENGUAJE SIMBÓLICO: Los símbolos representan un concepto, una relación, una operación o una fórmula matemática según ciertas reglas. La simbología utilizada en matemáticas, tiene variedad de caracteres gráficos como (<,>, /,*,=, %), denominados logogramas Pimm, (1999). Estos símbolos se deben conocer porque cada uno de ellos tiene un único significado y sirven para interpretar lo que se quiere decir o se utilizan para expresar proposiciones o ideas en matemática. Este es uno de los aspectos más complicados para los estudiantes por la rigurosidad del lenguaje matemático. En el lenguaje común es frecuente decir por ejemplo que sobre la mesa hay una cosa, pero en el lenguaje matemático debe decirse una y solo una cosa, para no dar la idea de que pueden ser más de una. Todos los símbolos son necesarios para la correcta construcción de ideas, es decir que la sustitución de alguno de ellos por otro diferente en una proposición, aunque se le parezca gráficamente, cambiará totalmente el significado.

Según Pimm (1999) los símbolos desempeñan diversas funciones, "ilustran la estructura de las matemáticas, facilitan la rutina de las manipulaciones, permite la reflexión sobre las matemáticas, y facilita la compacidad y permanencia del pensamiento". Especialmente señala dos funciones de los símbolos matemáticos: significación y "counterpart" (equivalencia). Este último término se refiere al uso de los símbolos como sustitutos visibles o tangibles para la manipulación. En la matemática, los objetos no son parte del mundo físico por lo tanto, no pueden ser manipulados directamente, se hace necesario simbolizarlos mediante materiales manipulativos o marcas en el papel. Siendo los símbolos matemáticos predominantemente estímulos visuales. La otra función de los símbolos, significación, nos permite lograr algo y así hacerlo presente, además de permitir distinguir objetos o conceptos entre sí.

Pimm (1999) considera "la existencia de los significados antes que los símbolos, admitiendo que también los símbolos y los nombres pueden dar lugar a significado". En la matemática a veces se requieren símbolos pero no significados. Este mismo autor propone en otra de sus obras, una clasificación para los símbolos del lenguaje matemático:

Logogramas.- Signos inventados para hacer referencia a conceptos totales, estos signos no tienen parecido alguno con lo que significan, por ejemplo las diez cifras del sistema numérico decimal (0, 1, 2, 3,...,9) o los símbolos operatorios y relacionantes (=, -, >, <).

Pictogramas.- Imágenes estilizadas del objeto en cuestión, pero interpretables con toda claridad, este es el caso de unos pocos iconos geométricos, como el signo de ángulo, de cuadrado o de triángulo.

Símbolos de puntuación.- Símbolos tomados de la ortografía del lenguaje normal escrito a los que se le ha asignado un significado específico. Por ejemplo. "{ }", "[ ]". ":", "/".

Símbolos alfabéticos.- Letras tomadas del alfabeto romano o del griego que son utilizadas con significado y finalidad muy diferente al alfabético. Ejemplo. A, B, C, x, y, π, α, β.

2.2.3.5 FUNCIONES DEL LENGUAJE MATEMÁTICO

El lenguaje se manifiesta como un instrumento esencial en la formacion de conceptos y procedimientos matematicos.

Esta mediación lingüística del conocimiento matemático no debe reducir el papel del lenguaje a una mera función expresiva y comunicativa que tenga como única finalidad de llevar a buen término el entendimiento entre docentes y estudiantes, sino que debe entenderse juntamente a su función regulativa. En este sentido, dos procesos regulativos como son la formulación lingüística que adopta la progresiva construcción del conocimiento matemático y su posibilidad de autovaloración catalogan al lenguaje como un entorno de análisis y optimización de la actividad matemática. Desde este planteamiento se propone reflexionar de manera argumentada sobre la realidad lingüística matemática en estrecha relación con las soluciones didácticas que se vislumbran (Pimm, 1999).

El lenguaje matemático esto es, los diversos sistemas rotacionales (verbales, escritos, simbólicos, gráficos y gestuales) se presentan como medios de expresión de los objetos matemáticos. En este sentido, el lenguaje matemático ayuda a los estudiantes a desarrollar sus habilidades para formular argumentos convincentes y para interpretar y representar ideas matemáticas en forma verbal gráfica o simbólica. En este sentido el lenguaje matemático tiene una doble función, que son:

REPRESENTACIONAL: Nos permite designar objetos abstractos que no podemos percibir.

INSTRUMENTAL: Como herramienta para hacer el trabajo matemático. El valor instrumental puede ser muy diferente según se trate de palabras, símbolos o gráficas (Torres, 2007).

2.2.3.6 EL PAPEL DEL DOCENTE EN EL MANEJO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO EN EL AULA

Profundizando la reflexión acerca del rol que debe jugar el docente en el aula, este debe saber que el personaje principal y centro de atención en el proceso educativo es el estudiante.

Por ello, es que la finalidad de la enseñanza y aprendizaje de la matemática no es llenarle su cerebro de información poco significativa e irrelevante, sino más bien el de ayudarle a desarrollar su pensamiento creativo y gerencial de los procedimientos generales matemáticos y lingüísticos para el procesamiento eficiente de la información ya sea en sus formas oral o escrita, fonética o grafo simbólica, es decir, el docente debe tener conciencia de buscar que el estudiante sea capaz de interpretar, identificar, decodificar, calcular, algoritmizar, graficar, definir, demostrar, modelar, comparar, resolver, optimizar y aproximar toda aquella información que le sea suministrada y a su vez que pueda recíprocamente crear y/o reproducir su percepción (Torres, 2007).

A su vez, el docente debe considerar y revisar los elementos del lenguaje inmersos dentro de un nuevo contenido a impartir y debe examinar la calidad de su propia interpretación y eficacia lingüística al comunicar ese contenido, esto porque en muchas situaciones los docentes recurren a la improvisación incoherente o a la planificación ligera de un contenido matemático sin tomar en cuenta el significado y la simbología inmersa en el, y algunas veces sin comprensión completa o con fallas del lenguaje, y de la formalidad lógica reproducen defectuosamente el contenido, convirtiéndose en simples dadores de clases deformadores del lenguaje matemático sin medir las consecuencias algunas veces nefastas para el desarrollo del proceso cognitivo y del razonamiento lógico matemático en el estudiante.

En consecuencia, aparte de reflexionar acerca del tema, sus elementos simbólicos y formales, también el docente debe entender que el proceso de aprender involucra el desempeño en la comunicación de ese tópico. Por ello, el docente conjuntamente con el estudiante debe elaborar estrategias en relación con la importancia que representa este binomio para él y para el estudiante a quien enseña día tras día, de modo que, "ambos se ayuden mutuamente a descubrir sus debilidades y con ello expandir su potencialidad de enriquecer el lenguaje de las matemáticas" (Ortiz, 2001).

2.2.4 LA CAPACIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS.

La resolución de problemas es la variable que se representa como el núcleo fundamental de la actividad matemática, y por ello constituye uno de los campos de investigación más importante en educación matemática.

Según Piaget (1977) considera la resolución de problemas matemáticos como producto de una "abstracción reflexionante" que se realiza a partir de operaciones intelectuales y no de hechos.

Llivina (1999) "la resolución de problemas es una capacidad específica que se desarrolla a través del proceso de enseñanza y aprendizaje".

De forma explícita el DCN[3] (2009) establece que, el área curricular de matemática se orienta a desarrollar el pensamiento matemático y el razonamiento lógico del estudiante, desde los primeros grados, con la finalidad que vaya desarrollando las capacidades que requiere para plantear y resolver con actitud analítica los problemas de su contexto y de la realidad.

En la OTP[4] del área de matemática (2010) se señala:

Como propósito del área de matemática: resolver problemas de la vida cotidiana. La matemática debe desarrollar en los estudiantes su capacidad para plantear y resolver problemas si queremos contar en el futuro con ciudadanos productivos. El desarrollo de la capacidad para resolver

[3] DCN (Diseño Curricular Nacional) es un documento normativo, que orienta el trabajo educativo en la Educación Básica Regular de la educación peruana.
[4] OTP (Orientaciones para el Trabajo Pedagógico) del área de matemática, es un documento emanado por el Ministerio de Educación|, con el propósito de enriquecer el entendimiento de la educación matemática, su organización curricular y propuesta de acción para un mejor desenvolvimiento docente, contribuyendo así al desarrollo del pensamiento matemático e integral en los estudiantes.

problemas, es la espina dorsal en la enseñanza – aprendizaje de la matemática en el nivel secundario y obliga a que, algo tan evidente, se precise enfatizarlo.

"Para desarrollar dicha capacidad, los estudiantes tienen que trabajar sobre problemas que puedan tardar horas, días e incluso semanas en resolverse. Aunque algunos puedan ser ejercicios relativamente simples que puedan solucionarse independientemente" (Cordero, 1996).

Sin embargo, tan importante como la capacidad de resolver problemas es la de saber plantearlos creativamente.

En consecuencia, todo el trabajo en el aula de matemáticas va orientado a desarrollar la capacidad de resolución de problemas, que es, por así decirlo, el propósito principal del área curricular de matemática.

2.2.4.1 DEFINICIÓN DE PROBLEMA Y EJERCICIO MATEMÁTICO

En el ámbito escolar los términos "ejercicio" y "problema" son empleados con singular frecuencia. Muchas veces este uso no va acompañado de una precisión clara, de ahí que las referencias bibliográficas que se exponen plantean diferentes puntos de vista, pero presentan elementos comunes o al menos no contradictorios. En general, todas coinciden en señalar que un problema es una situación que presenta dificultades para las cuales no hay solución inmediata. Al respecto se tiene a:

Delgado (1998) considerando la situación problémica de la cual es consciente el sujeto, define el término problema como: "Situación verdaderamente problémica para el resolutor, para la cual, teniendo conciencia de ella, no conoce una vía de solución".

Labarrere (1987) un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades, de y entre los objetos que no son accesibles directa e inmediatamente a la persona, o sea, una situación en la que hay algo oculto para el sujeto, que este se esfuerza por hallar.

Se puede decir que un problema es toda situación enfrentada por un estudiante que posee capacidades que le permitan asimilar y entender una situación problemática, lo cual lo conllevará a ejecutar un plan de acción en busca de la respuesta adecuada (Villella, 1998).

En cuanto al término ejercicio, algunos autores señalan:

Torregrosa (1999) "para los ejercicios el alumno tiene ya disponibles respuestas satisfactorias para las que ha sido preparado y – al contrario de lo que sucede en un verdadero problema – no hay incertidumbre en su comportamiento".

Los ejercicios no implican una actividad intensa de pensamiento para su resolución. Al realizarlos, los estudiantes se dan cuenta muy pronto de que no le exigen grandes esfuerzos.

Generalmente tienen una sola solución, son actividades de entrenamiento, de aplicación mecánica de contenidos o algoritmos aprendidos o memorizados.

Hacer ejercicios en serie puede provocar aburrimiento, ya que generalmente son repetitivos y pueden resultar poco interesantes. Son un tipo de actividades muy abundantes en los libros de texto. Como docentes no debemos abusar de su realización, sino seleccionar cuidadosamente aquellos que nos resultan más útiles para evaluar el grado de comprensión de los conceptos y la adquisición de algoritmos matemáticos por parte de los estudiantes.

Partiendo de estas definiciones, es posible caracterizar qué se entiende por resolución de problemas matemáticos en el contexto escolar.

Así, Delgado (1998) considera la resolución de problemas como una habilidad matemática y señala que resolver: “es encontrar un método o vía de solución que conduzca a la solución de un problema”.

Por su parte Llivina (1999) la resolución de problemas matemáticos es una capacidad específica que se desarrolla a través del proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática y que se configura en la personalidad del individuo al sistematizar, con determinada calidad y haciendo uso de la metacognición, acciones y conocimientos que participan en la resolución de estos problemas.

La persona que se enfrenta a un problema debe estar consciente de la existencia de una dificultad y tener interés en resolverla, pero no cuenta con los conocimientos y experiencias que le permitan directa o inmediatamente darle solución. No se consideran problemas aquellos ejercicios rutinarios que se presentan en las clases de matemática para desarrollar algunas habilidades específicas y que en ocasiones promueven la memorización y el mecanicismo.

2.2.4.2 EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS.

Cerdán (1995) entiende por el proceso de resolución de un problema a la actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento en que, siéndole presentado un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea.

La resolución de problemas en general, y la búsqueda de un modelo que ayude a las personas en dicho proceso de resolución, ha sido un tema investigado, tanto por parte de matemáticos como de psicólogos.

Desde el punto de vista de la Psicología, diversas han sido las aportaciones más significativas a la resolución de problemas, de las que sólo citamos algunas: Dewey (1933), Wallas (1926), Duncker (1945), Wertheimer (1954), Newell y Simon (1972), Mason, Burton y Stacey (cit. por Puig y Cerdan, 1988), Mayer (1983), Bransford y Stein (1987).

Desde el punto de vista de la Matemática, citamos los trabajos de Polya (1945), Schoenfeld (1985), Goldin (1987), De Guzmán (1991).

Dewey (1933) presentó un modelo para resolver problemas, con las cinco fases siguientes:

- Identificación de la situación problemática.
- Definición precisa del problema.
- Análisis de medios-fines. Plan de solución.
- Ejecución del plan.
- Evaluación de la solución. Supervisión. Generalización.

En «The Art of Thought» de Wallas (1926) aparece un modelo para resolver problemas con cuatro fases:

- **Preparación:** implica la recolección de información e intentos preliminares de solución.

- **Incubación:** Dejar el problema de lado para realizar otras actividades.
- **Iluminación:** Fase en la que aparece la clave para la solución.
- **Verificación**: Fase final en la que se comprueba la solución para estar seguros de que funciona.

Entre los modelos propuestos por matemáticos, destaca el de Polya (1945) que ha inspirado o ha sido utilizado en multitud de estudios e investigaciones. Se basa en las observaciones que había realizado como profesor de matemáticas y en la obra de los gestaltistas, aunque también podemos encontrar algunas coincidencias con el modelo de Dewey. Sugirió que la resolución de problemas está basada en procesos cognitivos que tienen como resultado encontrar una salida a una dificultad, una vía alrededor de un obstáculo, alcanzando un objetivo que no es inmediatamente alcanzable.

Este modelo consta de cuatro fases:

- **Comprensión del problema:** Se reúne información mediante preguntas como: ¿cuál es la incógnita, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la condición?
- **Concebir un plan:** Es la fase donde aparece el "insight". El sujeto utiliza la experiencia pasada para encontrar un método de solución y se pregunta: ¿conozco algún problema relacionado o semejante?, ¿puedo resolverlo utilizando mis conocimientos y experiencia pasada? (trabajando hacia atrás), o ¿puedo reordenar los datos de una nueva forma para que se

relacione con mi experiencia pasada?, ¿puede enunciarse el problema de forma diferente? (trabajando hacia adelante). Determinar la relación entre los datos y la incógnita. De no encontrarse una relación inmediata, se puede considerar problemas auxiliares.

- **Ejecución del plan:** Requiere que el sujeto ponga en práctica el plan elaborado comprobando cada uno de los pasos.
- **Visión retrospectiva o reflexión:** El sujeto comprueba el resultado utilizando otro método o viendo cómo todo encaja, y se pregunta: ¿puedo utilizar este resultado o este método para resolver otros problemas?

El modelo de Polya se basa, como afirman Puig y Cerdán (1988).

En la idea del resolutor ideal, esto es, la persona que al resolver un problema avanza linealmente desde el enunciado hasta hallar la solución, sabiendo en todo momento qué hace y por qué lo hace, y que, para acabar, examina la solución, comprueba que es adecuada y ve hacia dónde le conduce.

Otro modelo de resolución de problemas, es el creado por Bransford y Stein (1987) concebido, como ellos afirman, «con la finalidad de facilitar la identificación y reconocimiento de las distintas partes o componentes a tener en cuenta en la resolución de problemas». Entre los autores que han inspirado este modelo se encuentra también Polya. Sus fases son:

- I: Identificación de los problemas.
- D: Definición y representación del problema.

- E: Exploración de posibles estrategias.
- A: Actuación, fundada en una estrategia.
- L: Logros. Observación y evaluación de nuestras actividades.

Schoenfeld (1987) inspirado en las ideas de Polya, diseña uno de los modelos más completos, sobre todo en estrategias heurísticas. Se basa en una observación minuciosa del proceso de resolución de problemas por sujetos reales y, a posteriori, construye bloques de conductas más o menos homogéneas, que se dan en un período de tiempo, y así califica los bloques de modo que especifiquen su función en la globalidad del proceso. Distingue cuatro fases:

- Análisis.
- Exploración.
- Ejecución.
- Comprobación de la solución obtenida.

Mason, Burton y Stacey (1989) proponen un modelo que no pretende ser un instrumento de estudio o de análisis, sino una ayuda para la instrucción. El objetivo de estos autores es mostrar cómo acometer cualquier problema, es decir, cómo abordarlo de una manera eficaz y cómo ir aprendiendo de la experiencia. Se basan en los trabajos de Polya (1965) y Schoenfeld (1985). En este modelo aparecen las fases:

- Identificar el problema.
- Predecir los límites y posibilidades para su resolución.
- Tener conciencia de las estrategias apropiadas.
- Planificar el uso de estas estrategias.

- ❖ Dirigir y supervisar su uso.
- ❖ Evaluar la eficacia de su aplicación.

Puig y Cerdán (1988) presentan un modelo, basado en las ideas de Dewey y en el modelo de Polya, para la resolución de problemas aritméticos verbales, que consta de las siguientes fases:

- ❖ Lectura.
- ❖ Comprensión.
- ❖ Traducción.
- ❖ Cálculo.
- ❖ Solución.
- ❖ Revisión. Comprobación.

La fase "comprensión" de Polya (1945) la subdividen en dos etapas, lectura y comprensión, para acentuar el cuidado que debe ponerse en la lectura del enunciado. La fase "elaboración de un plan", se llama aquí traducción y correspondería al paso del enunciado verbal a la operación u operaciones aritméticas correspondientes. La fase cálculo corresponde a la de "ejecución del plan" y aquí intervienen las destrezas algorítmicas de los estudiantes. Las últimas fases, de revisión y comprobación, coinciden con la de "verificación del resultado" de Polya.

De Corte y Verschaffel (1987) basándose en las teorías del procesamiento de la información y en sus propias investigaciones, han presentado un modelo de competencia para la resolución de problemas aritméticos verbales de sumas y restas, que comprende cinco etapas:

- Partiendo del enunciado del problema, el alumno construye una representación interna del problema en términos de conjuntos y relaciones entre estos conjuntos.
- Sobre la base de esta representación, el resolutor elige la operación formal apropiada o la estrategia informal con el fin de encontrar el valor desconocido en la representación del problema.
- El alumno ejecuta la operación o acción seleccionada.
- El resolutor vuelve a la representación inicial del problema, sustituye el elemento desconocido por el resultado que ha obtenido y formula la respuesta.
- El estudiante verifica las acciones realizadas con el fin de garantizar la corrección de las soluciones encontradas en la fase precedente.

De Guzmán (1991) publica un modelo que, relacionado también con las cuatro fases de Polya, orienta y anima al resolutor para que avance:

- Familiarízate con el problema.
- Búsqueda de estrategias.
- Lleva adelante tu estrategia.
- Revisa el proceso y saca consecuencias de él.

Hernández y Socas (1994) presentan un modelo para resolver problemas verbales aritméticos, inspirado, como la mayoría de los anteriores, en el modelo de Polya, pero en el que se han añadido algunos aspectos teniendo en cuenta los sistemas de representación de Goldin (1987) Consta de las siguientes fases:

- ❖ Lectura del enunciado.
- ❖ Comprensión.
- ❖ Representación, ejecución y solución visual-geométrica.
- ❖ Representación, ejecución y solución formal.
- ❖ Soluciones.
- ❖ Comprobación.

En la resolución de problemas se tiene varias fases que nos ofrece cada autor, en el trabajo de investigación, en base a la literatura que se tiene y tomando en cuenta el "Módulo de resolución de problemas de Educación Secundaria" MINEDU[5] (2012) se considera el siguiente procedimiento:

- ❖ **Familiarización y comprensión:** En esta fase el estudiante debe identificar la incógnita, reconocer los datos, identificar las condiciones, si son suficientes, si son necesarios o son complementarios. Para ello, debe leer atentamente el problema. Algunas preguntas que pueden ayudar a familiarizarse con el problema y comprenderlo pueden ser: ¿Entiende el significado de los términos del problema?, ¿puede indicar la naturaleza de la solución?, ¿tiene en cuenta toda la información relevante?, ¿puede explicarlo en términos de un esquema?, ¿Cuál es la

[5] MINEDU (Ministerio de Educación) órgano rector del sector de educación Peruana, es la empresa de servicios más grande del país, pues atiende a más de seis millones de estudiantes en el sistema público, tiene una planilla de trescientos veinte mil empleados activos, controla cuarenta y cuatro mil Instituciones Educativas y diecisiete mil programas no escolarizados.

incógnita?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuál es la condición?, ¿es la condición suficiente para determinar la incógnita?

- **Búsqueda de estrategias y elaboración de un plan:** En la segunda fase, el estudiante comienza a explorar la situación, experimenta, particulariza. Empezar por lo fácil hace fácil lo difícil. Esta es una de las fases más importantes en el proceso de solución, pues depende tanto de la base de conocimientos como de la calidad del pensamiento. En general se logra haciendo preguntas: ¿Este dato, a qué conclusiones me puede hacer llegar? luego podemos mencionar todas las posibles respuestas a esta interrogante: Particularizar, generalizar, trata de encontrar un patrón, elegir una notación adecuada, modificar el problema, buscar analogías con otros problemas, hacer un diagrama, plantear una ecuación, realizar una simulación, descomponer el problema en partes, hacer una tabla, construir una lista sistemática.
- **Ejecución del plan y control:** Cuando el estudiante decide qué estrategias utilizar, viene la fase de ejecución del plan, que debe realizarse siempre en forma controlada, evaluando cada paso de su realización, a fin de saber si el plan lo está acercando a la respuesta o lo está conduciendo a una situación compleja. Si lo lleva a la solución, pasara a la siguiente fase; de lo contrario, deberá repetir la fase dos. La actitud juega aquí un rol protagónico. Actuar con flexibilidad, si las cosas se complican

demasiado, intentar otro camino. En esta fase entran a tallar los mecanismos de regulación mental y la habilidad para salir de bloqueos.

- **Visión retrospectiva y prospectiva:** Cuando se ha obtenido una solución, se ingresa a la cuarta fase, donde se efectúa una reflexión acerca del proceso ejecutado. Así mismo, se realiza una verificación de la solución, pudiendo modificarse el problema o generalizar los resultados. Las estrategias para la reflexión son: controla paso a paso lo que se hace, verifica y compara la solución, ubica los puntos difíciles, modifica las condiciones o los datos del problema y resuelve uno nuevo, reflexiona sobre la naturaleza del problema general. Esta es una fase esencial para el mejoramiento de la habilidad del estudiante al enfrentarse con problemas.

2.2.4.3 TEORÍAS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

En este apartado se consideran algunos modelos que explican, específicamente, los procesos cognitivos que intervienen en la resolución de problemas matemáticos y que más relevancia e influencia han tenido en el panorama científico de los últimos años. A nivel general, podemos afirmar que todos los modelos explicativos comparten la concepción de Piaget (1977) “entendiendo la resolución de problemas como una actividad inherente al ser humano”.

Analizamos ahora las características específicas de cada uno de las teorías más relevantes:

2.2.4.3.1 TEORÍAS ASOCIACIONISTAS

El principal representante de esta teoría es Edward Thorndike, describe sus observaciones sobre el pensamiento y la resolución de problemas, estableciendo las bases del posterior conductismo.

La resolución de problemas se entiende como la aplicación, por ensayo y error, de las tendencias preexistentes de respuesta o “hábitos” adquiridos a los estímulos que se nos presentan. En cada problema, existen asociaciones a varias posibles respuestas: R_1, R_2, R_3, etc., siendo ordenadas jerárquicamente en función del éxito obtenido en anteriores ocasiones.

A veces, la aplicación del ensayo y error puede ser encubierta, probando varias soluciones en la mente del individuo, hasta que se encuentra una que funciona. Como esta forma de ensayo y error no puede verse, la solución aparece como si se lograra de súbito, por “introvisión” o intuición.

La posibilidad de que el pensamiento pueda contener cadenas de respuestas encubiertas produjo cambios en la idea asociacionista tradicional. Surgen, así, las teorías mediacionales del modelo neoconductista Berlyne (1965), Underwood (1965), entre otros. Estos autores entienden la resolución de problemas como un proceso más complejo que la mera asociación de estímulos y respuestas. La teoría mediacional considera que la situación de problema abierto, evoca una respuesta interna en miniatura, llamada respuesta mediacional o “r_m”;

ésta, a su vez, crea un nuevo estado interno o "e_m" que evoca una nueva respuesta "r_{m2}", seguida de otro "e_{m2}"; y así sucesivamente, hasta que un "e_{mn}" evoca una respuesta de solución abierta.

Thorndike (1922) explica la resolución de problemas aritméticos de igual forma que el resto de las conductas. Estos problemas se resuelven mediante asociaciones de estímulo-respuesta que se van consolidando por las leyes del ejercicio y del efecto. Por ejemplo, la suma de "3+4" sería el estímulo y "7" la respuesta.

Esta asociación se fortalece en la medida que se ejercita la respuesta "7" (ley del ejercicio) y se observa que el resultado es correcto (ley del efecto).

De esta forma, los procesos de resolución de problemas se consideran como una asociación automática o mediacional entre los datos iniciales y la solución, siguiendo procedimientos de ensayo y error.

Como conclusión, aunque esta manera de entender los procesos de cálculo aritmético puede resultar válida en alguna situación muy concreta, sin embargo, estimamos que los procesos de asociación, ya sean instantáneos o mediáticos, son insuficientes para explicar la complejidad de los procesos de cálculo. Además, sería imposible memorizar todos los resultados de las infinitas operaciones que se pueden presentar.

2.2.4.3.2 TEORÍA DE LA GESTALT.

Esta teoría, se interesa por llegar a una comprensión estructural del problema. "Adquiere una especial relevancia el concepto de "insight" Resnick y Ford (1990). Este proceso se ha de entender como la rápida comprensión de la estructura del problema, que permite establecer una meta y llegar a una solución. El "insight" es fundamental para llegar a la solución del problema. Sin embargo, es una de las partes más vagas de la teoría, pues no especifica cómo surge y se alcanza, dificultando su comprensión científica.

En cambio, una de las mejores implicaciones se encuentra en el campo de la instrucción, al favorecer el aprendizaje por descubrimiento en la resolución de problemas matemáticos. Pacheco (1991) defiende "la instrucción en la que los sujetos han de comprender las relaciones estructurales entre los elementos de un problema, frente al aprendizaje reproductivo y mecánico del modelo asociacionista-conductista".

Desde esta perspectiva, Mayer (1983) comprueba experimentalmente la eficacia de este modelo de aprendizaje.

Los alumnos que aprenden el área del paralelogramo por comprensión, poniendo el acento en la propiedad geométrica o estructural, llegan más fácilmente a la solución que los que aprenden sólo la aplicación memorística de la fórmula. Además, también se pudo comprobar que el método comprensivo mejora la capacidad para transferir los aprendizajes a otras situaciones novedosas. Por ejemplo, los sujetos que habían aprendido por comprensión eran capaces de calcular áreas de paralelogramos y formas poco usuales, mientras que los alumnos del modelo mecánico decían, frecuentemente, que ese tipo de ejercicios no los habían estudiado.

La Gestalt considera que para resolver los problemas es fundamental dirigirse hacia la consecución de una meta y no quedarse en el mero proceso de ensayos y errores. Consecuentemente, pone un énfasis especial en delimitar las fases que son necesarias para la resolución de un problema.

Posteriormente, Polya (1945) influenciado por las ideas del modelo gestaltista y basándose en sus observaciones directas como profesor de matemáticas, considera que "son necesarias las siguientes fases: Comprensión del problema, concebir un plan, ejecución del plan, visión retrospectiva".

En resumen, consideramos que los gestaltistas aportan varias ideas prácticas para el estudio del pensamiento y los procesos de resolución de problemas, como la distinción entre el pensamiento productivo y reproductivo, la idea de que el pensamiento se produce por etapas y el concepto de reorganización, como estrategia básica para resolver los problemas. Sin embargo, se presenta como una teoría demasiado imprecisa para ser comprobada y verificada empíricamente.

2.2.4.3.3 TEORÍA BASADA EN EL PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

En este apartado, más que una teoría, analizamos una serie de técnicas que facilitan el estudio de los procesos de resolución de problemas. Aunque el paradigma del procesamiento de la información es cercano a una teoría unificada sobre la cognición, al no presentar un núcleo integrador que unifique sus partes, es más apropiado considerarlo como un modelo explicativo, útil en el estudio y la comprensión del pensamiento humano (Toboso, 2004)

El modelo del procesamiento de la información se genera a partir de dos acontecimientos: el rápido desarrollo de la cibernética y las computadoras, que permiten la creación de programas con procesos de realimentación, y la concepción de que el pensamiento humano puede funcionar como una máquina compleja, similar a un programa de computadora.

Ernest y Newell (1969) describen la actividad mental del proceso de resolución, considerando al problema como activador de un "traductor cognitivo" que lo convierte en una representación mental interna y genera las técnicas que conducen a la solución.

Desde este marco conceptual, "podemos distinguir dos tipos de procesos mentales básicos: procesos de comprensión o representación interna en la memoria del sujeto que resuelve el problema, y procesos de búsqueda de la solución" (Mayer, 1983 y Pacheco, 1991).

a) **Procesos de comprensión o representación interna del espacio del problema.** Comprender el problema implica transformar la información recibida en una representación interna en la memoria del sujeto, e integrarla en un esquema cognitivo que permita darle significado.

b) **Procesos de búsqueda de soluciones al problema.** Para llegar a la solución del problema se utilizan dos tipos de recursos cognitivos: conocimiento de los procedimientos operativos y planes de acción que guían la aplicación concreta de las operaciones que se han de aplicar.

b.1 Conocimiento de los procedimientos operativos: Los procedimientos operativos se entienden como operaciones mentales o "sistemas de producción" que llevan directamente a la solución del problema. El éxito para solucionar los problemas depende, en buena parte, del grado de automatización de estos procedimientos. En la medida que se automatizan en la mente, se liberan recursos para prestar más atención a otros aspectos del problema, facilitando, así, su solución.

b.2 Procedimientos generales o heurísticos: Las estrategias generales son entendidas como procesos cognitivos conscientes que planifican, dirigen, controlan y evalúan los procedimientos que llevan a la solución del problema. En otras palabras, proporcionan un método para llegar al estado final o solución del problema, mediante la consecución de sucesivas submetas.

Lindsay y Norman (1972) identifican las estrategias generales como heurísticos, entendiéndolos como procesos generales de acción que guían y facilitan la resolución del problema, pero no garantizan su solución.

Mayer (1983) analiza varios estudios de Schoenfeld (1985) en donde se enseñan heurísticos para resolver problemas matemáticos. Estas estrategias vienen a configurar una parte importante del campo metacognitivo y facilitan el conocimiento algorítmico, esquemático y lingüístico-semántico.

Brown y Burton (1978) estudian, más específicamente, "los procesos internos que surgen en la mente y concretan en seis las destrezas metacognitivas que facilitan la resolución de los problemas matemáticos".

2.2.4.3.4 TEORÍA DE MAYER, BASADA EN PROCESOS Y CONOCIMIENTOS ESPECÍFICOS.

Mayer (1987) propone un modelo de resolución de problemas matemáticos, basado en los procesos de comprensión y solución, en los que intervienen cinco campos específicos de conocimiento: lingüístico, semántico, esquemático, estratégico y operatorio.

Para resolver problemas matemáticos de narración, como el siguiente que propone Mayer (1987) "Una barca a motor viaja corriente abajo durante 120 minutos con una corriente de 8 Km. por hora. En el mismo viaje de regreso, corriente arriba, tarda 3 horas. Hallar la velocidad de la barca en aguas tranquilas", es necesario que se produzcan dos procesos mentales:

En primer lugar, un proceso de comprensión que lleve a la representación interna del problema, traduciéndolo e integrándolo en las estructuras cognitivas del sujeto. A su vez, para realizar este proceso, se requieren tres tipos de conocimientos específicos:

- **Conocimiento lingüístico** de la lengua en que está redactado el problema para entender las palabras que lo conforman.
- **Conocimiento semántico** para comprender los hechos que se comunican. En este caso, se ha saber que 120 minutos son dos horas, que los ríos tienen corriente abajo y arriba.
- **Conocimiento esquemático** que le permita integrar el problema en una estructura cognitiva y saber lo que ha de hacer para resolverlo. En este ejemplo, tiene que conocer el esquema de "espacio = velocidad x tiempo" y el esquema mental de los problemas de "corrientes" que le permitirá crear la ecuación representativa del problema: (velocidad del barco + velocidad de la corriente) x (tiempo corriente abajo) = (velocidad del barco – velocidad de la corriente) x (tiempo corriente arriba).

En segundo lugar, una vez que se ha traducido e integrado el problema en la estructura cognitiva del sujeto, se ha de dar un proceso de solución que planifique, organice, aplique y evalúe las operaciones necesarias. Para ello, también se requieren otros dos conocimientos específicos:

- **Conocimiento operatorio o algorítmico** que realice las operaciones que son necesarias para resolver el problema. Así, en el ejemplo anterior, se han de dominar las operaciones básicas de cálculo aritmético (suma, resta y división) y algebraico (operar con paréntesis y despejar la incógnita).

- **Conocimiento estratégico** que planifique, secuencie, dirija y evalúe los distintos tipos de conocimientos: lingüístico-semánticos, esquemáticos y algorítmicos.

En la siguiente grafica representamos la estructura de los procesos y conocimientos específicos, implicados en la resolución de problemas matemáticos, según este modelo.

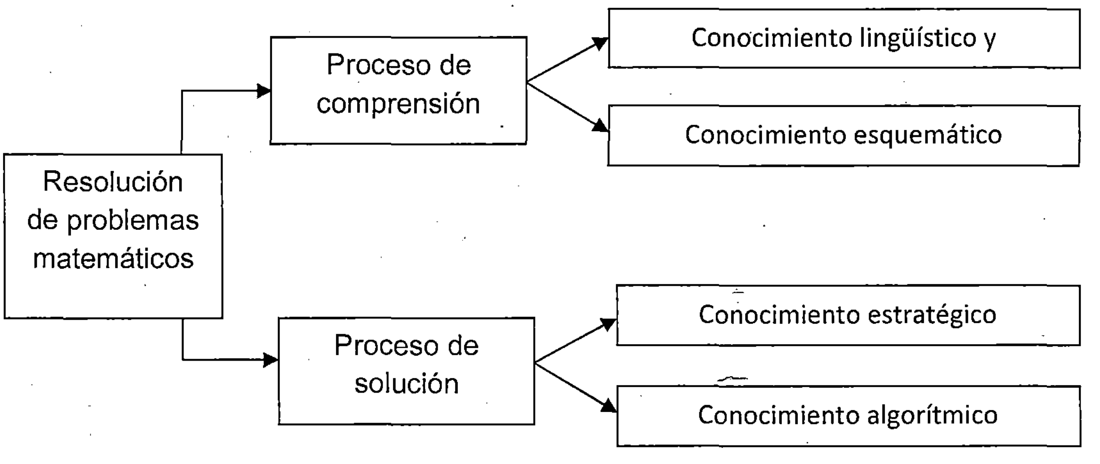


FIGURA 1: Estructura de procesos y conocimientos específicos, implicados en la resolución de problemas matemáticos.
Fuente: (Mayer, 1987).

Estos conocimientos específicos se han estudiado en múltiples investigaciones, realizadas en este ámbito, observando las siguientes características:

A. Traducción de las proposiciones y su representación mental mediante el conocimiento lingüístico-semántico.

"Para analizar los procesos de traducción, se presentan problemas con tres tipos de proposiciones" (Mayer, 1987).

- **Proposiciones de asignación**, en las que se especifica el valor de la variable, por ejemplo: "Pedro tiene 125 gallinas".
- **Proposiciones de relación,** que expresan una relación cuantitativa entre dos variables, por ejemplo: "Juan tiene 18 gallinas, más que María".
- **Proposiciones interrogatorias**, solicitando el valor numérico de una variable, por ejemplo: "¿Cuántas gallinas tiene Juan?".

En estas investigaciones se ha comprobado que las proposiciones más difíciles de recordar y traducir son las relacionales, y que la estructura proposicional del texto tiene una gran influencia en la traducción y representación interna del problema.

B. Comprensión del problema mediante el conocimiento esquemático.

Para comprender el problema, además del conocimiento lingüístico y semántico, es necesario un conocimiento esquemático que integre la información en la estructura de conocimientos almacenada en la memoria.

Hayes (1980) y Mayer (1983) comprueban que las dificultades para comprender los problemas se localizan, básicamente, "en la capacidad de los sujetos para categorizarlos. Comprender un problema implica integrarlo en una categoría o conocimiento esquemático".

Lewis y Anderson (1985) observan las diferencias que presentan los expertos y principiantes en la resolución de problemas con narración. Mientras que los primeros recuerdan fácilmente las categorías y estructuras de los problemas verbales, los menos habilidosos sólo recuerdan detalles poco significativos y superficiales.

Desde esta perspectiva, la dificultad para resolver problemas puede estar más relacionada con la falta de esquemas apropiados, que con una carencia de aptitudes aritméticas o lógicas.

Para ampliar el conocimiento sobre los esquemas que más se utilizan en los problemas escolares, Mayer (1983) analiza cerca de 2.000 problemas de los libros de texto de las escuelas secundarias de California, y los clasifica en 20 categorías generales. Dentro de esta clasificación, distingue los esquemas de alta frecuencia, con índices de presencia iguales o superiores a 25 veces por mil, y problemas de baja frecuencia, con una frecuencia de menos de 4 veces por mil. También comprueba que los problemas de alta frecuencia contenían pocas proposiciones relacionales, lo que puede facilitar la representación y retención en la memoria.

Los procesos de comprensión se pueden mejorar enseñando a los alumnos problemas tipo, y diferenciando la información básica de la irrelevante que les permita clasificarlos en categorías (Lewis y Anderson, 1985, y Mayer, 1987).

C. Planificación del proceso de resolución mediante el conocimiento estratégico.

Una vez que se ha comprendido el problema, mediante la integración en un esquema cognitivo, es necesario un conocimiento estratégico que planifique los procedimientos y las operaciones que se han de realizar. Este conocimiento controla los diferentes tipos de conocimientos que permiten avanzar desde el estado inicial al final. La estrategia representa la técnica general para resolver el problema y, aunque no garantice la solución, constituye una guía fundamental.

El conocimiento estratégico puede ser muy amplio y complejo en función de múltiples factores: edad, experiencia, conocimientos específicos, nivel madurativo y motivación.

D. Ejecución de estrategias mediante el conocimiento operatorio.

Para llegar a la solución concreta del problema, el sujeto ha de saber aplicar los algoritmos aritméticos y algebraicos que son necesarios. Los algoritmos, son procedimientos exactos para llevar a cabo una tarea.

La dificultad para llegar a la solución exacta puede localizarse tanto en el desconocimiento de los algoritmos, como en el conocimiento defectuoso de los mismos y distracciones accidentales. Esta última situación tiene una alta incidencia en los procesos de resolución de nuestros estudiantes.

Finalmente, como característica común a todos los modelos de resolución de problemas expuestos, se ha de tener en cuenta la gran importancia que tiene la motivación o actitud positiva de los sujetos. Para resolver un problema, no basta con la mera aplicación de conocimientos y operaciones aprendidas, siendo necesaria la adopción de una actitud positiva que active el pensamiento creativo y venza la pereza que presentan muchos estudiantes ante los problemas de matemáticas. Por este motivo, consideramos fundamental que, además de la enseñanza de conocimientos, procesos y algoritmos, los docentes motivemos a los estudiantes en la aplicación de los mismos, ayudando a descubrir su utilidad y la satisfacción interior que produce la resolución de un problema.

2.2.4.4 ACTITUDES DE LOS ESTUDIANTES FRENTE A LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Para muchos estudiantes, las matemáticas han sido y son una materia difícil que provoca sentimientos de intranquilidad, miedo, ansiedad, inseguridad, desconcierto e incertidumbre y manifiestan con frecuencia sus sentimientos acerca de ella, a través de expresiones como “odio las matemáticas” o “me divierto con las matemáticas”. Otras veces, el blanco de sus sentimientos es el docente que las imparte. En este rechazo influyen:

- La naturaleza precisa, exacta y sin ambigüedades de la matemática.
- Su carácter abstracto e impersonal.
- La actitud de los docentes hacia los estudiantes y el área de matemática.
- La metodología de enseñanza.
- La imagen estereotipada de su entorno que le hace tomar una determinada postura ante el aprendizaje matemático. Es habitual que los padres, amigos o compañeros comenten sus experiencias amargas y sus sentimientos de fracaso en matemáticas, con lo que en lugar de motivar al estudiante, lo angustian y, lo predisponen.

En efecto las actitudes hacia la resolución de problemas hacen referencia a los sentimientos positivos o negativos que despierta en el estudiante dicha resolución. Cuando los sentimientos son de tipo negativo las actitudes que adoptan suelen ser:

- ➢ Comportamiento de "evitación defensiva": tomamos una actitud defensiva si es imposible encontrar una alternativa sin peligros (conocidos o desconocidos). En este caso la información puede seguir una de las siguientes alternativas:
  - ✓ Posponer: Se huye del problema que nos obliga a tomar decisión que no sabemos dónde nos llevarán.

- ✓ Buscar a otra persona (compañeros, padres, hermanos). Que nos resuelva la situación.
- ✓ Buscar entre los conocimientos que tenemos una posible respuesta, sin importarles si esa respuesta es lógica o no.
- ✓ El estudiante se ve presionado y busca todo tipo de información, no distinguiendo entre la que es objetiva y la que es subjetiva, relevante o irrelevante, favorable o desfavorable.

➢ Cuando son conscientes del riesgo y no se sienten presionados por el tiempo se encuentran motivados, buscan información objetiva favorable y desfavorable, analizan.

Las emociones en el caso de la matemática se refieren a las reacciones que tienen cuando se enfrentan ante una tarea matemática como puede ser la resolución de problemas.

Es frecuente experimentar sentimientos a lo largo del proceso de resolución de un problema. De esta manera, cuando se produce la inspiración se tienen sentimientos positivos que cobran más o menos intensidad. Sin embargo, en el momento de la verificación de la solución se puede sentir placer o frustración, según que una demostración confirme o no la validez del plan previsto. Estos sentimientos y emociones pueden hacer de motor que impulse para buscar una solución o, por el contrario, bloquear dicho proceso debido al peso de las emociones negativas.

2.2.4.5 DIFICULTADES Y ERRORES PRESENTADAS POR LOS ESTUDIANTES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

En nuestra realidad escolar nuestros estudiantes presentan un porcentaje bastante significativo, dificultades en la resolución de problemas.

Por eso exponemos dificultades que se presentan con mayor frecuencia según Sanchez y Fernandez (1998):

- Falta de comprensión del problema. No conocen el vocabulario específico utilizado, o la situación planteada no les es familiar.
- Estrategias de resolución incorrectas. Incomprensión de la relación existente entre los datos y la pregunta. Aplican operaciones al azar; lo importante es llegar a un resultado por absurdo que éste sea.

Para (Barbera, 1995), existen cuatro bloques de dificultades:

- La comprensión global de la situación problemática.
- La discriminación de los datos que son necesarios y los que no lo son.
- Las relaciones escalares que se establecen entre datos numéricos.
- La explicación verbal de la solución obtenida.

Con respecto a los errores, en el aprendizaje de la matemática ha sido una cuestión de permanente interés, y se ha caracterizado por acercamientos muy disímiles. Han pasado muchos siglos hasta llegar a comprobar la importancia de los errores como instrumento diagnóstico y didáctico del aprendizaje.

Rico (1995) realiza una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizadas por expertos, determinando seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados. Ellas son:

a) Datos mal utilizados: Esto es, los errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el alumno. Ya sea porque: se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se hace una lectura incorrecta del enunciado.
b) Interpretación incorrecta del lenguaje: Son errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.
c) Inferencias no válidas lógicamente: Son errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no se deben al contenido específico.
d) Teoremas o definiciones deformados: Errores que se producen por deformación de un principio, reglas, teorema o de definición identificable.
e) Falta de verificación en la solución: Son los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada.
f) Errores técnicos: Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos.

Tomando como base la clasificación mencionada se consideró para el estudio realizado, una adaptación de dichas categorías, en la cual algunas coinciden y otras se modificaron. Las categorías se seleccionaron buscando constatar la ocurrencia de errores considerados por nosotros como "frecuentes", de acuerdo con nuestra experiencia docente. Las que se consideraron son:

- Interpretación incorrecta del lenguaje.
- Identificación de las variables.
- Errores que tiene su origen en conocimientos previos.
- Deducción incorrecta de la información. Datos mal utilizados.
- Errores al operar algebraicamente (errores de cálculo).

Investigadores en educación matemática como Rico (1995) sugieren que:

Se deben diagnosticar los errores, detectarlos, corregirlos y superarlos, mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones. Asevera además, que los errores no aparecen por azar sino que surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente y constituyen un elemento estable de los procesos de enseñanza aprendizaje.

En el enfoque constructivista el error es parte necesaria de los aprendizajes, y un factor de interés en el proceso de enseñanza aprendizaje, tanto a nivel de diagnóstico, como de proceso (ejecución) y de salida (evaluación). En consecuencia, un proceso de enseñanza-aprendizaje que se base en un enfoque constructivista, debe aceptar y reconocer los errores y extraer de ellos un provecho didáctico.

2.2.4.6 ESTRATEGIAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Un buen resolutor de problemas debe llegar a desarrollar la capacidad de resolver un problema por diversos métodos, además debe estar en la capacidad de combinar estrategias creativamente desde luego el MINEDU (2012) a través de los módulos de resolución de problemas sugiere aplicar las siguientes estrategias:

a) ESTRATEGIAS DE COMPRENSIÓN

- **Lectura analítica.** Leer analíticamente un texto es dividirlo en unidades que proporcione algún tipo de información y establecer luego, cómo estas partes del texto se interrelacionan y muestran el panorama de lo que se quiere decir. Al leer un problema de manera analítica uno puede preguntarse: ¿cuáles son los datos que nos proporciona el texto?, ¿qué datos son relevantes para resolver el problema?, ¿qué es lo que debemos encontrar?, entre otras preguntas, que ayudaran a que el estudiante se familiarice y le pierda temor a la situación.
- **Parafrasear.** Es decir explicar un problema de texto en sus propias palabras ayuda mucho en el proceso de comprensión.
- **Hacer esquemas.** Hacer e interpretar esquemas son algunas de las capacidades más necesarias en nuestra vida laboral adulta. En diversas situaciones cotidianas se requiere de la

esquematización de los sistemas, las situaciones, los procesos, con el fin de comprenderlos mejor. Un esquema apunta a encontrar una estrategia de solución; no existe una relación directa entre hacer un esquema y dar solución a un problema, pero ayuda mucho en este proceso.

b) **ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN**

Diagramas de tiras: Se utiliza cuando la cantidad que interviene en el problema varía en el tiempo o es dividida en partes que se relacionan entre sí.

Diagramas tabulares (tablas): Se emplea cuando se brinda información sobre características que relacionan dos grupos. También en problemas sobre edades o de proporcionalidad, en las que hay que buscar un patrón o regla de formación.

Diagramas analógicos: Se suelen utilizar en problemas geométricos. Son dibujos que representan la realidad de manera similar, pero esquemática, sin considerar los elementos irrelevantes al problema. Mediante esta representación es posible visualizar las relaciones entre los datos y las incógnitas.

Diagramas de flujo: Se emplea cuando una cantidad varía a lo largo de la historia o cuando tenemos la situación final de esa cantidad. También cuando se dan secuencias de pasos para encontrar objetos matemáticos.

Diagramas cartesianas: Son de gran utilidad cuando se requiere representar funciones o cuando tenemos pares ordenados o relaciones entre dos variables.

Buscar patrones: En algunos problemas es necesario experimentar con varios casos con el fin de encontrar pautas o regularidades que después se podrán emplear para llegar a la solución.

Hacer una lista sistemática: Cuando se requiere la enumeración de objetos matemáticos es conveniente realizar un conteo o listado organizado, con el fin de no dejar de lado ninguna posibilidad. Esta estrategia es útil al buscar soluciones en una ecuación polinómica, problemas con combinaciones o espacios muestrales.

Generalizar: En algunos problemas puede ser útil simbolizar las expresiones o averiguar si lo que piden se refiere a un caso particular de alguna propiedad general.

Particularizar: Conviene siempre utilizar casos particulares para familiarizarse con el problema de este modo es posible observar algún método que nos guíe hacia la solución de un problema genérico (Ortiz, 2001).

Plantear una ecuación: Implica la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.

Ensayo y error: consiste en hacer varios intentos para llegar a la solución.

Usar una fórmula: Son útiles porque al tener un conjunto de datos y buscar una relación entre ellos, recurrimos a fórmulas aprendidas con anterioridad.

Resolver un problema más simple: Algunas veces, utilizar un método que nos dio resultado con un problema más simple relacionado nos lleva a la solución del problema original.

c) **LOS ALGORITMOS.**

Monoreo (1995) "señala que un procedimiento algorítmico es una sucesión de acciones que hay que realizar, completamente prefijada y su correcta ejecución lleva a una solución segura del problema como por ejemplo, realizar una raíz cuadrada o coser un botón".

Según Hilbert y Levre (1986) "los algoritmos son procedimientos que se resuelven en un determinado problema matemático. Se caracterizan fundamentalmente por prescribir una secuencia lineal de instrucciones de forma que cumpliendo etapa tras etapa se llegue a la solución requerida".

2.2.5 CONOCIMIENTO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO Y LA CAPACIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

2.2.5.1 IMPORTANCIA DEL LENGUAJE MATEMÁTICO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

El lenguaje matemático es claramente esencial en el proceso de resolución de problemas tanto en su forma escrita como verbal. El lenguaje del alumno es tan importante como el del profesor, escuchando a los alumnos, un profesor puede calibrar su nivel del lenguaje y la calidad de su entendimiento. Un alumno que no puede hablar acerca de su trabajo en matemáticas incluso en su comparativamente, simple lenguaje, es un alumno que no entiende completamente lo que está haciendo. “Los alumnos deben ser animados a hablar sobre las matemáticas que van construyendo y resolviendo” (Devlin, 2002).

2.2.5.2 DIFICULTADES DEL LENGUAJE MATEMÁTICO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Las dificultades que pueden presentarse con respecto al lenguaje matemático en el proceso de resolución de problemas, se deben a varias causas. Analizaremos cada uno de ellos. El primer grupo se refiere al:

- Lenguaje literal, en el que se expresa el enunciado del problema.
  El vocabulario, donde algunas palabras tienen un significado en el uso normal del castellano y uno muy diferente en matemáticas por ejemplo, raíz, solución, producto, matriz, diferenciar, integrar, función, coordenada, primo, factor, multiplicar, potencia, e índice.

La utilización de tales palabras causa dificultades porque implican una confusión semántica. No existe una forma fácil de evitarlo, las palabras son parte del vocabulario matemático habitual, sin embargo, el reconocimiento de la existencia de tal dificultad es una primera etapa hacia su solución. Además de estas palabras con significados especiales en matemáticas, existe otro conjunto de palabras para las que existe confusión en cualquier parte y que forman parte del castellano ordinario. Estas incluyen palabras como evaluar, isósceles, conmutativa, polígono, rombo, paralelogramo. Tales palabras y las mencionadas antes crean la impresión de que las matemáticas son más difíciles de lo que realmente son.

- Lenguaje gráfico, en la clase de matemática o en los textos, encontramos expresiones tales como: dibuja una recta, recorta un triángulo, muéstrame un plano. Como entidades abstractas que son, es obvio que no se pueden graficar una recta o recortar un triángulo, y esto en los niveles básicos, lleva a la confusión entre las situaciones reales que se plantean y los modelos matemáticos de dichos escenarios.
- Lenguaje simbólico, la utilización de varios símbolos para una misma operación (en la división: ÷, /, ∟,:) el uso de ciertas expresiones (paréntesis, fracciones) que obligan a leer el enunciado en todas las direcciones, no solo de izquierda a derecha y en su conjunto.

- La presencia de datos irrelevantes para la solución del problema también puede oscurecer su representación mental, pero a la vez nos puede ayudar a entrenar a los estudiantes a identificar los datos importantes de los superfluos o a deducir que se trata de un problema que no se puede resolver por no disponer de todos los datos necesarios. Según algunos estudios cuantas más palabras tenga el enunciado más complicado resultará su resolución, siendo esta influencia mayor en los primeros años de la escolaridad que en los últimos.

2.2.5.3 LENGUAJE COMO ELEMENTO DE COMPRENSIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

El lenguaje como elemento de comprensión en el enfoque de resolución de problemas es muy importante por cuanto es a través de éste que el estudiante explora y establece relaciones en la situación planteada para plasmarlas en modelos matemáticos que le permiten resolver un problema. Muy a menudo la resolución de un problema depende de la utilización de un lenguaje o una notación adecuada. La importancia de una buena notación se pone de manifiesto si tratamos de operar con un sistema de numeración que no sea posicional. Existe una interconexión muy estrecha entre las palabras y el pensamiento. Hay estudios psicológicos que afirman que el uso de las palabras es indispensable para razonar "El pensamiento nace a través de las palabras. Una palabra sin pensamiento es una cosa muerta, y un pensamiento desprovisto de palabra permanece en la sombra" (Vigotsky, 1999). Y aunque esta afirmación puede resultar exagerada ya que podemos razonar sin palabras, como es el caso de una persona sorda, o manipulando figuras geométricas y combinando símbolos matemáticos, incluso en estos casos, hay una relación de interdependencia entre el pensamiento y los símbolos lingüísticos.

Plantear una ecuación es traducir el lenguaje común al de los símbolos matemáticos. Elegir una buena notación es un paso decisivo en el camino hacia la solución de un problema, teniendo en cuenta que los símbolos que utilizamos deben recordarnos el objeto que representan (Figueiras, 1998).

2.2.6 CONTEXTO SOCIOCULTURAL

Si existen diferencias transculturales en el rendimiento matemático entre dos o varios países Resnick (1989) entonces pueden existir diferencias en este dominio al interior de un país o una cultura.

Abreu (1998) presenta la noción del contexto indicando que es una característica física o un instrumento producido por un grupo cultural particular que se presenta en el momento de la acción.

Gonzales (2003) considera el contexto como un entorno cultural que facilita un conjunto de instrumentos que se emplean en la construcción del conocimiento mediante un proceso activo por parte de los niños. Este proceso activo se encuentra en una interacción social que legitima las formas y procedimientos para la construcción de significados dentro de una estructura social en un tiempo y situación específica.

Las características socioculturales del estudiante son variables que pueden contribuir en gran medida a la explicación del fracaso escolar, tanto de manera independiente como de forma conjunta.

El contexto sociocultural no sólo supone un intercambio de relaciones económicas, sociales y culturales, sino también cognitivas en el transcurso de la vida cotidiana (Díaz, 2004).

La ubicación de la escuela y el tipo de localidad donde el alumno vive (urbana-residencial, suburbial, intersticial, barrio de minorías étnicas, rural, comercial, industrial, de servicios) son variables cuyos comportamientos están asociados a la efectividad de la escuela (Gonzales, 2003).

Parece claro, pues, que la zona en la que el alumno vive, y las consecuencias que de ello se derivan para la escuela por su localización, inciden en el rendimiento del alumno.

En esta línea, Marchesi (2003) afirma que el contexto sociocultural no sólo influye en los resultados de los alumnos sino también en la cultura de la escuela, en las relaciones de los profesores con las familias y los alumnos, y en la organización y el funcionamiento de la escuela.

A continuación exponemos una muestra de los estudios realizados con relación al hábitat de la escuela.

Bourdieu y Passeron (1964) señalan que el hábitat y el tipo de vida cotidiana repercuten en la eficacia escolar del sujeto, dependiendo directamente del origen social de los individuos. Por ello, los individuos con escasos recursos económicos residirán en un hábitat más pobre.

Brophy y Good (1970) piensan que el hogar y la vecindad influyen más que la escuela en determinantes del rendimiento tales como: intereses, motivaciones, expectativas, imagen de sí mismo.

Brembeck (1977) afirma que los niños que viven en áreas socioeconómicas bajas entran en la escuela con la desventaja impuesta por su ambiente, y se van retrasando en el rendimiento en comparación con los alumnos de zonas más favorecidas, a medida que avanzan los cursos.

Juif y Legrand (1980) señalan que el éxito intelectual de un sujeto está determinado por la atmósfera en la que está envuelto en su infancia, la cual depende del ambiente económico y social, del sexo y del origen geográfico del sujeto.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

3.1 TIPO Y DISEÑO METODOLÓGICO

El trabajo de investigación es de tipo descriptivo correlacional, no experimental, el objetivo de los estudios correlaciónales según Hernández, Fernandez y Baptista (2006) es medir el grado de relación que existe entre dos o más o variables para determinar si están o no relacionadas en los mismos sujetos.

Estos estudios se distinguen de los descriptivos porque se centran en medir con precisión cada una de las variables de estudio independientemente en un determinado contexto, al mismo tiempo evalúa la relación que existe entre dos variables.

En este caso el estudio que se realizó fue determinar el tipo de relación que existe entre el conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de Educación Secundaria de la ciudad de Puno en el año académico 2012.

3.2 ÁMBITO DE ESTUDIO

a) **Población:** El interés por estudiar las variables que se tienen en el trabajo de investigación, nos llevó a seleccionar a los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno durante el año académico 2012. correspondientes al último ciclo de la Educación Básica Regular, y se caracterizan porque en esta etapa según Piaget (1977) pueden razonar de manera hipotética y en ausencia de pruebas materiales, su pensamiento es más abstracto, lo que significa que está en condiciones de desarrollar aprendizajes más complejos. El adolescente asume conscientemente los resultados de su creatividad, mostrando interés por las experiencias.

b) **Muestra:** Para la selección de la muestra se utilizó la técnica de muestreo estratificado, en la que se tomó en cuenta tanto el tamaño como la forma de escoger unidades. Este método garantizó que la muestra elegida fuera igual a la población a la que se quería generalizar. La selección de los colegios se realizó de forma aleatoria estratificada, tomando en cuenta la ubicación geográfica y tipo de gestión. Se excluyeron de la muestra Instituciones de Educación Secundaria: con menor cantidad de número de estudiantes, Privadas Parroquiales, Adventistas y, se incluyó estudiantes que han repetido el año. la muestra se representa en los siguientes cuadros.

CUADRO 2

MUESTRA ESTRATIFICADA DE ESTUDIANTES DE CUARTO GRADO POR INSTITUCIÓN EDUCATIVA SECUNDARIA DE PUNO - 2012.

I.E.S.	N° de Estudiantes	Estratos
María Auxiliadora	230	79
Comercial N°45	227	77
Industrial N°32	177	60
José Carlos Mariátegui	64	22
Villa del Lago	33	11
Claudio Galeno	67	23
Cramer	41	14
Total	839	286

Fuente: Nómina de matrícula correspondiente al año académico 2012
Elaboración: La ejecutora.

Según Fisher Arkin Colton interpolando para N = 839 como no se encuentra en la tabla entonces interpolamos y tenemos N_{FAC} = 286 para 5% y luego procedemos hallar el tamaño de muestra para cada estrato.

CUADRO 3

MUESTRA ESTRATIFICADA DE ESTUDIANTES DE CUARTO GRADO POR INSTITUCIÓN EDUCATIVA SECUNDARIA UBICADO EN LA PARTE CÉNTRICA DE LA CIUDAD DE PUNO - 2012.

I.E.S.	Número de estudiantes	Estratos
María Auxiliadora	230	79
Comercial N° 45	227	77
Total	457	156

Elaboración: La ejecutora.

CUADRO 4

MUESTRA ESTRATIFICADA DE ESTUDIANTES DE CUARTO GRADO POR INSTITUCIÓN EDUCATIVA SECUNDARIA UBICADO EN LA PARTE PERIFÉRICA DE LA CIUDAD DE PUNO - 2012.

I.E.S.	Número de estudiantes	Estratos
Industrial N° 32	177	60
José Carlos Mariátegui	64	22
Villa del lago	33	11
Total	274	93

Elaboración: La ejecutora.

CUADRO 5

MUESTRA ESTRATIFICADA DE ESTUDIANTES DE CUARTO GRADO POR INSTITUCIÓN EDUCATIVA SECUNDARIA PRIVADAS DE LA CIUDAD DE PUNO - 2012.

I.E.S.	Número de estudiantes	Estratos
Claudio Galeno	67	23
Cramer	41	14
Total	108	37

Elaboración: La ejecutora.

En la elección de la muestra se tuvo en cuenta las distintas características de las Instituciones de Educación Secundaria de la ciudad de Puno: dos privados, dos de la parte céntrica y tres de la parte periférica.

- La Institución Educativa Secundaria "María Auxiliadora" se encuentra localizado en el barrio Azoguini, Jr. Lambayeque N° 591 muy cerca del centro de la ciudad de Puno. Por el oeste limita con el cerro Azoguini, por el sur con la calle Tiahuanaco. Los estudiantes de dicha Institución Educativa son de clase media.

- La Institución Educativa Secundaria "Comercial Nº 45 Emilio Romero Padilla", se encuentra ubicado en el Barrio Porteño, Jr. Huancané Nº 154 al centro de la ciudad de Puno. Los estudiantes que conforman dicha Institución Educativa son de clase media.
- La Institución Educativa Secundaria "Industrial Nº 32", está ubicado en la Av. Simón Bolívar N° 1505 al sureste de la ciudad de Puno, los estudiantes que integran esta Institución Educativa son de barrios urbano marginales de tal modo que los estudiantes proceden de familias de escasos recursos económicos.
- La Institución Educativa Secundaria "Villa del Lago" está ubicado en el barrio Villa del lago Av. Norte S/N de la ciudad de Puno, todos los estudiantes de esta Institución Educativa en su mayoría provienen de familias del medio rural, el nivel de vida que llevan son de escasa condición económica.
- La Institución Educativa Secundaria "José Carlos Mariátegui Aplicación", está ubicado al Noroeste de la ciudad de Puno, en el Jr. Jorge Basadre S/N°, los estudiantes de esta Institución Educativa son de clase social media baja, con debilidades en el aspecto económico, además provienen de barrios urbano marginales.
- La Institución Educativa Secundaria Privada "Claudio Galeno" ubicado en el centro de la ciudad Jr. Teodoro Valcárcel N° 136, los estudiantes de esta Institución, cuentan con recursos económicos.

- La Institución Educativa Secundaria Privada "Cramer" está ubicado en la calle Ayacucho N° 690, los estudiantes de esta institución pertenecen a familias con buen nivel económico.

3.3 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS POR OBJETIVOS

Para recoger la información requerida se utilizó la técnica del examen cuyo instrumento consiste en pruebas escritas. Enseguida mencionaremos los instrumentos utilizados para cada objetivo planteado en la investigación

Primer objetivo: Para determinar el tipo de lenguaje matemático que en mayor medida conocen los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno, se aplicó la prueba escrita los ítems midieron el lenguaje literal, lenguaje gráfico y lenguaje simbólico considerando temas relacionados con elementos primarios de un ángulo, triangulo, clasificación y construcciones básicas. En seguida el instrumento fue analizado detalladamente considerando los tipos del lenguaje matemático, posteriormente se trasladó los resultados a una base de datos para el análisis estadístico pertinente y contraste de la hipótesis.

Segundo objetivo: Para identificar la fase de resolución de problemas matemáticos que en mayor medida se ubican los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno, se aplicó una prueba escrita, en el instrumento se consideró las cuatro fases (comprensión del problema, selección del plan, ejecución del plan y visión retrospectiva.) del proceso de resolución de problemas matemáticos propuestos en el módulo de resolución de problemas del MINEDU (2012) y en el marco teórico del trabajo de investigación. Luego de obtener la información requerida, se realizó un análisis estadístico para interpretar los datos y contrastar la hipótesis.

Tercer objetivo: Para identificar el nivel de logro de conocimiento del lenguaje matemático de los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno, se utilizó la prueba escrita, calificándose en base a la escala vigesimal, considerando los niveles de logro de acuerdo a las escalas de calificación indicadas en el DCN (2009). Luego de obtener los calificativos del instrumento estos se trasladaron a una base de datos. Posteriormente para realizar el análisis estadístico pertinente a los datos para el contraste de las hipótesis.

Cuarto objetivo: Para identificar el nivel de logro de capacidad de resolución de problemas matemáticos, de los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno, se utilizó la prueba escrita, calificándose en base a la escala vigesimal y considerando los niveles de logro de acuerdo a las escalas de calificación indicadas en el DCN (2009), de la misma manera los resultados del instrumento se trasladaron a una base de datos. Posteriormente para realizar el análisis estadístico pertinente a los datos para el contraste de las hipótesis.

Quinto objetivo: Para establecer las diferencias significativas del nivel de logro entre conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos de los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno, según características de la Institución Educativa (ubicación y tipo de gestión), se utilizó los cuadros de frecuencias y luego contrastar la hipótesis planteada.

3.3.1 DESCRIPCIÓN DEL INSTRUMENTO:

La elaboración de los instrumentos se realizó en función de los fundamentos teóricos y DCN (2009) estas aportaciones teóricas y empíricas han fundamentado la creación de dos pruebas escritas, una para evaluar el conocimiento de lenguaje matemático y otra para evaluar la capacidad de resolución de problemas matemáticos.

Primer objetivo: La prueba escrita para determinar el tipo de lenguaje matemático que en mayor medida conocen los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno. Pretende medir básicamente tres aspectos:

a) Lenguaje literal, contiene tres reactivos dos son con alternativas múltiples y uno para completar espacios vacíos, el dato que se pretende obtener con los reactivos es conocimiento del tipo de lenguaje literal así como los elementos primarios de un ángulo y de un triángulo

b) Lenguaje gráfico, contiene dos reactivos que consiste en completar los datos que faltan de acuerdo a una gráfica establecida e identificar una gráfica de acuerdo a una descripción

c) Lenguaje simbólico, se consideró dos reactivos uno de interpretación y otra para relacionar con su correspondiente símbolo.

Segundo objetivo: La prueba escrita para identificar la fase de resolución de problemas matemáticos que en mayor medida se ubican los estudiantes consideró seis problemas para resolver las cuales se han elaborado en base a los criterios de evaluación del DCN (2009), cada problema exigía las cuatro fases como son:

Comprensión del problema: Evalúa la comprensión lectora, mediante la pregunta: ¿qué te pide este problema? o ¿en qué consiste este problema?, Selección del plan: Evalúa los componentes cognitivos en la selección del plan de trabajo, pidiendo al estudiante que seleccione el plan de trabajo adecuado para resolver el problema matemático (Conocimiento esquemático).

Ejecución del plan: Evalúa sobre el procedimiento algorítmico que permite resolver el problema, y solicitando a continuación que realice los cálculos necesarios e indique el resultado correcto. En esta fase, se pretende valorar la habilidad que han desarrollado los estudiantes para ejecutar los procedimientos.

Visión retrospectiva: evalúa la reflexión acerca del proceso ejecutado. Así mismo, se realiza una verificación de la solución, pudiendo modificarse el problema o generalizar los resultados. Las estrategias para la reflexión son: controla paso a paso lo que se hace, verifica y compara la solución, ubica los puntos difíciles, modifica las condiciones o los datos del problema y resuelve uno nuevo, reflexiona sobre la naturaleza del problema general.

Tercer objetivo: Para identificar el nivel de logro de conocimiento del lenguaje matemático de los estudiantes, se tomó en cuenta la calificación final que lograron los estudiantes en la prueba escrita con una calificación de 0 a 20 puntos, la prueba escrita duró 60 minutos.

Cuarto objetivo: Para identificar el nivel de logro de capacidad de resolución de problemas matemáticos de los estudiantes también se tomó en cuenta el calificativo final de 0 a 20 puntos, en un tiempo determinado de 90 minutos.

Quinto objetivo: Para establecer las diferencias significativas se utilizó las herramientas estadísticas.

3.3.2 VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO

La validez y confiabilidad de los instrumentos de medición y recolección de información son aspectos fundamentales de los resultados que se tienen, desde luego en la investigación, para obtener datos confiables, se ha efectuado con la aplicación de la prueba piloto para evaluar el conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos, a una muestra de 20 estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno, quienes comparten características similares en relación a la ubicación geográfica y la metodología de enseñanza – aprendizaje del área de matemática.

La aplicación de la prueba piloto se desarrolló en el mes de septiembre del año académico 2012 con los datos obtenidos se decidió realizar el análisis del índice de consistencia interna de las respuestas de los reactivos, el cual se determinó mediante el Alfa de Cronbach que requiere una sola administración del instrumento de medición y produce valores entre 0 y 1,

CUADRO 6

ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EVALUADOS EN LA PRUEBA PILOTO CON RESPECTO AL CONOCIMIENTO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO DE PUNO - 2012.

N° de estudiantes	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7
1	2	0	2	3	3	3	5
2	2	2	0	2	3	2	3
3	0	2	2	2	3	3	5
4	2	2	2	3	3	3	3
5	0	2	0	1	3	1	3
6	0	2	0	0	3	0	1
7	2	2	2	3	3	2	5
8	2	0	0	0	0	1	2
9	2	0	0	2	0	2	1
10	2	0	2	2	3	0	2
11	2	2	2	3	0	3	5
12	0	0	0	0	3	2	1
13	0	2	0	0	3	0	1
14	2	2	2	3	3	3	2
15	2	2	2	3	3	3	5
16	2	2	2	2	3	3	5
17	2	2	2	3	3	2	3
18	2	2	2	0	3	2	5
19	2	2	2	3	3	3	5
20	2	2	2	3	3	3	5

Elaboración: La ejecutora.

Luego de haber obtenido este resultado se aplicó el Alfa de Cronbach, con el paquete estadístico SPSS 20.0, determinándose lo siguiente:

N° de elementos = 7

Alfa de Cronbach = ,801

A partir del valor inicial de ,801 se pudo inferir que la confiabilidad del instrumento es bastante aceptable.

CUADRO 7

ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EVALUADOS EN LA PRUEBA PILOTO CON RESPECTO A LA CAPACIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS DE PUNO - 2012.

N° de estudiantes	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5
1	2	4	4	3	1
2	4	3	4	3	4
3	3	1	2	3	1
4	1	4	2	2	3
5	0	3	0	1	3
6	2	3	1	2	3
7	4	4	3	4	3
8	2	1	3	0	3
9	2	3	2	2	3
10	4	1	2	4	4
11	2	4	2	4	4
12	1	2	1	2	3
13	0	1	1	1	1
14	4	3	4	4	4
15	2	3	4	4	3
16	4	4	4	4	4
17	3	3	2	2	2
18	4	2	3	1	3
19	4	4	4	3	4
20	4	4	4	4	4

Elaboración: La ejecutora.

A los resultados del cuadro 7, también se aplicó el Alfa de Cronbach con el SPSS 20.0 obteniendo el siguiente valor:

N° de elementos = 5

Alfa de Cronbach = ,802

A partir del valor inicial de ,802 se pudo inferir que la confiabilidad del instrumento es bastante aceptable, lo que permite deducir que la prueba escrita es consistente, mide de forma correcta para el cual se construyó.

Para la validez de contenido del instrumento, se efectuó mediante juicio de expertos, para ello los especialistas en Didáctica de la Matemática, juzgaron críticamente la forma del instrumento y los reactivos, los niveles de dificultad de las preguntas y otros, además de ello también se contó con la opinión del asesor y los jurados del trabajo de investigación. Permitiendo así realizar las rectificaciones necesarias.

3.4 PLAN DE TRATAMIENTO DE DATOS

a) Recolección, ordenamiento y tabulación de datos.

b) Presentación de cuadros y gráficos estadísticos.

c) Utilización de las medidas de tendencia central.

d) Interpretación de los cuadros y gráficos de acuerdo a los indicadores y el marco teórico considerado.

3.5 DISEÑO ESTADÍSTICO

Una vez tomado los datos necesarios se procedieron a su preparación para analizarlos y efectuar los cálculos usando el paquete estadístico SPSS, versión 20. De la siguiente manera:

Primero, se aplicó la estadística descriptiva calculándose básicamente frecuencia, porcentaje, promedio y diseñó de cuadros y gráficos.

Segundo, se aplicó la estadística inferencial para contrastar la hipótesis mediante la correlación de Pearson, sabiendo que este es un índice estadístico que mide la relación lineal entre dos variables cuantitativas, el cual establece los criterios de aplicación que mencionamos a continuación.

a) Se ingresaron los datos de ambas variables al paquete estadístico SPSS.

b) Se buscó la función estadística coeficiente de correlación.

c) Para el valor del índice de correlación se consideró al autor Haroldo Elorza Pérez – Tejada quien nos muestra en su texto estadística para las ciencias sociales, del comportamiento y de la salud, 3ra. Edición México. Pág. 468 el siguiente cuadro de valores de correlación.

CUADRO 8

CUADRO DE VALORES DE CORRELACIÓN

POSITIVA	
0,00 a 0,09	Correlación positiva nula o inexistente
0,10 a 0,19	Correlación positiva muy débil
0,20 a 0,49	Correlación positiva débil
0,50 a 0,69	Correlación positiva moderada
0,70 a 0,84	Correlación positiva significativa
0,85 a 0,95	Correlación positiva fuerte
0,96 a 1,00	Correlación positiva perfecta

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Antes de iniciar la exposición de resultados, se precisa que los instrumentos de investigación se diseñaron a través de una prueba piloto el cual ha servido para concretar y perfilar, los objetivos, la prueba escrita más efectiva para recoger datos, la muestra más representativa posible a partir de criterios como: la metodología de enseñanza y aprendizaje, la ubicación geográfica y tipo de Instituciones Educativas.

Finalmente en la investigación participaron estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno durante el año académico 2012. Como son: "María Auxiliadora", "Comercial N° 45", "Industrial Nº 32", "José Carlos Mariátegui", "Villa del Lago", "Claudio Galeno" y "Cramer" con diferentes características como ya se mencionó en el capítulo III. Para el análisis e interpretación de resultados obtenidos en la investigación debemos indicar que se ha tomado dos pruebas escritas distintas una para evaluar el conocimiento del lenguaje matemático y otra para evaluar la capacidad de resolución de problemas matemáticos.

4.1 ANÁLISIS Y PRESENTACIÓN DE RESULTADOS PARA DETERMINAR EL TIPO DE LENGUAJE MATEMÁTICO QUE EN MAYOR MEDIDA CONOCEN LOS ESTUDIANTES.

CUADRO 9

ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN CONOCIMIENTO DE TIPOS DEL LENGUAJE MATEMÁTICO, PUNO – 2012.

Tipos del lenguaje matemático	x_i	%
Lenguaje literal	110	38,5
Lenguaje gráfico	87	30,4
Lenguaje simbólico	85	29,7
No conocen ningún tipo de lenguaje matemático	4	1,4
Total	286	100

Fuente: Matriz de sistematización de datos.

El 38,5% de estudiantes conocen en mayor medida el tipo de lenguaje literal es decir los estudiantes lograron definir los conceptos matemáticos, el 30,4% conocen el tipo de lenguaje gráfico este dato nos indica que los estudiantes lograron identificar y representar en forma gráfica el problema propuesto y el 29,7% de estudiantes conocen y usan el tipo de lenguaje simbólico, y el 1,4 % estudiantes evidenciaron desconocimiento de tipos de lenguaje matemático.

Discusión de resultados:

El tipo de lenguaje matemático que en mayor medida conocen los estudiantes es el lenguaje literal, según los resultados obtenidos y analizados en la investigación, implica que los estudiantes lograron definir los conceptos matemáticos como indica Nina (1998), de la misma manera también Olazabal (2005) encontró traducciones en donde el porcentaje de éxito es muy bajo, la traducción literal del lenguaje natural al lenguaje algebraico, depende en gran medida del conocimiento de los conceptos y modelos que menciona el enunciado y del grado de familiaridad que el alumno tenga con ellos.

El 30,4 % conocen el tipo de lenguaje gráfico este dato nos indica que los estudiantes respondieron los datos que faltan de acuerdo a la gráfica proporcionada y lograron identificar la gráfica según a la descripción propuesta. Figueiras (1998) indica acerca de la importancia que tiene un gráfico en los problemas que se resuelven por métodos geométricos permite llegar a una solución de forma más rápida, además Olazabal (2005) señala que en algunos problemas puede necesitarse de una representación gráfica para visualizar las relaciones pertinentes, en donde éstas son fundamentales en el establecimiento del modelo matemático. Los estudiantes de la ciudad de Puno en menor medida conocen y usan el tipo de lenguaje simbólico, lo que evidencia que algunos estudiantes tienen dificultades para interpretar y escribir el significado de los símbolos matemáticos en expresiones o ideas matemáticas, Cuesta (2007) corroboró la existencia de dificultades en tareas de interpretación y construcción del concepto función, producidas por el efecto combinado de los significados que poseen los estudiantes. En suma estos resultados llegan a causar insuficiente y escasa comprensión lectora de conceptos y enunciados matemáticos así como indica Pimm (1990).

4.2 ANÁLISIS Y PRESENTACIÓN DE RESULTADOS PARA IDENTIFICAR LA FASES DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS QUE EN MAYOR MEDIDA SE UBICAN LOS ESTUDIANTES

CUADRO 10

ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN LAS FASES DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS, PUNO – 2012.

Fases de resolución de problemas	x_i	%
Comprensión del problema	139	48,6
Selección del plan	99	34,6
Ejecución del plan	33	11,5
Visión retrospectiva	5	1,8
No se ubican en ninguna fase	10	3,5
Total	286	100

Fuente: Matriz de sistematización de datos

El que 48,6 % de estudiantes se ubican en la fase de comprensión del problema, esto implica que los estudiantes lograron identificar la incógnita, reconocer los datos, condiciones necesarias del problema, en la fase de selección del plan el 34,6 % de estudiantes lograron elegir la estrategia adecuada, encontraron un patrón y una notación adecuada dependiendo las características del problema. Sin embargo, observamos que en la fase de ejecución del plan el 11,5 % de estudiantes llegaron a ejecutar la estrategia elegida en la fase anterior. En la fase de visión retrospectiva se ubican el 1,8 % de estudiantes que lograron argumentar, explicar la resolución del problema, además este evidencia que la mayoría de estudiantes evidencian dificultades en verificar paso a paso lo que se hace, reflexionar sobre la naturaleza del problema y resolver un nuevo problema.

Discusión de resultados:

Los resultados obtenidos vienen a corroborar, en parte con la investigación hecha por Toboso (2009), comprobando que en mayor medida los estudiantes se ubican en la fase de comprensión del problema. Polya (1945) dice que los estudiantes lograron entender -ver claramente- lo que el problema planteaba, ya que si un estudiante no lograba entender, no podría resolverlo y si lo hizo, sería por casualidad.

La comprensión del problema supone entender la pregunta, discriminar los datos y las relaciones entre éstos y entender las condiciones en las que se presentan. De la misma manera requiere el desempeño de competencias básicas, como manejo de los conceptos fundamentales, ya que la sola identificación de la pregunta (textual) no garantiza la satisfactoria solución.

La segunda fase previsto es la selección del plan en esta fase el 34,6 % de estudiantes lograron elegir la estrategia adecuada, encontraron un patrón y una notación adecuada dependiendo las características del problema.

Como se indica en el marco teórico el estudiante en esta fase comienza a explorar la situación, experimenta, particulariza, trata de encontrar un patrón, busca analogías con otros problemas, descompone el problema en partes.

Los resultados confirman lo que Escudero (1996) determinó que la mayoría de los alumnos dispone de un reducido y pobre espectro de estrategias cognitivas y metacognitivas en proceso de resolución de problemas.

Luego de haber elegido un plan para resolver el problema matemático el estudiante ejecuta el plan, de acuerdo con Polya (1945) al ejecutar el plan se comprueba cada uno delos pasos seguidos. Si el plan está bien concebido, su realización es factible, si aparecen dificultades se tendrá que regresar a la etapa anterior para realizar ajustes o incluso modificar. Por su parte, Schoenfeld (1985) resalta la importancia de contar con un buen repertorio de estrategias para la resolución de problemas; sin embargo, advierte que es necesario tener presente que las reglas heurísticas no son infalibles y el éxito de su aplicación depende mucho de la experiencia, juicio y buen sentido de quien las use. Y por último en la fase de visión retrospectiva muchos estudiantes fueron disminuyendo de acuerdo al orden progresivo de la prueba escrita, la mayor cantidad de estudiantes no llegaron a revisar el procedimiento por lo tanto los estudiantes evidencian dificultades en verificar paso a paso lo que se hace, en reflexionar sobre la naturaleza del problema y resolver un nuevo problema matemático. Silva (2009) confirmó la importancia de la verificación de resultados después de la prueba. Muchos alumnos al explicar nuevamente el procedimiento que habían realizado, detectaron sus propios errores.

Solaz – Portolés, et al. (2006) concluyen que el conocimiento previo, estrategias de estudio y conocimiento conceptual son predictores estadísticamente significativos del rendimiento en la resolución de problemas.

4.3 ANÁLISIS Y PRESENTACIÓN DE RESULTADOS PARA IDENTIFICAR EL NIVEL DE LOGRO DE CONOCIMIENTO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES.

CUADRO 11

ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN CONOCIMIENTO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO, SEGÚN ESCALA DE CALIFICACIÓN, PUNO – 2012.

Escala de calificación		**Frecuencia**	**Porcentaje**
Cualitativo	**Cuantitativo**	x_i	%
En inicio	[00 - 10]	96	33,6
En proceso	[11 - 13]	97	33,9
Logro previsto	[14 - 17]	81	28,3
Logro destacado	[18 - 20]	12	4,2
Total		286	100,0

Fuente: Matriz de sistematización de datos.

El 33,6% de estudiantes se encuentran en nivel de inicio, esto indica de que los estudiantes de la ciudad de Puno, están empezando a desarrollar los aprendizaje previstos o evidencian dificultades en el conocimiento del lenguaje matemático, resultado que nos da a entender que los estudiantes necesitan mayor tiempo de acompañamiento o intervención del docente de acuerdo con su ritmo y estilo de aprendizaje.

El 33,9% de estudiantes tienen un nivel de proceso de conocimiento del lenguaje matemático, este dato nos demuestra que los estudiantes están en camino de lograr los aprendizajes previstos, para lo cual requieren acompañamiento del docente durante un tiempo razonable.

El 28,3% de estudiantes evidencian un nivel de logro previsto de conocimiento del lenguaje matemático en el tiempo programado.

El 4,2% de estudiantes evidencian tener un nivel de logro destacado en conocimiento del lenguaje matemático, demostrando incluso un manejo solvente y muy satisfactorio en todo lo propuesto.

Estos resultados nos señalan que algunos estudiantes evidencian desconocimiento del lenguaje matemático en la construcción, interpretación, complicando el proceso de comunicación.

Discusión de resultados:

Los datos obtenidos mostraron que los estudiantes de la ciudad de Puno se encuentran en proceso de conocimiento del lenguaje matemático, este resultado indica que los estudiantes en el área de matemática utilizan muy poco el lenguaje matemático de manera rigurosa, lo cual conlleva una serie de deficiencias en su comprensión de conceptos y definiciones. Otra cantidad de estudiantes se encuentran en inicio de conocimiento del lenguaje matemático este dato nos indica que los estudiantes evidencian desconocimiento del lenguaje matemático causando sin duda manejo inadecuado del lenguaje, insuficiente y escasa comprensión lectora de conceptos, definiciones y enunciados matemáticos y algunos estudiantes que se ubican en este grupo recientemente están empezando a desarrollar los aprendizajes previstos por lo tanto necesitan mayor tiempo de acompañamiento o intervención del docente de acuerdo con su ritmo y estilo de aprendizaje. Una menor cantidad de estudiantes evidencian tener un nivel de logro destacado en conocimiento del lenguaje matemático, demostrando incluso un manejo solvente y muy satisfactorio en todo lo propuesto.

Los resultados obtenidos coinciden con Morales (2009) al evaluar habilidades para leer información en variadas modalidades de presentación (lenguaje escrito en palabras, simbólico, gráfico, esquemático, algorítmico, etc.), para interpretar, relacionar y hacer inferencias; obtuvo como resultado que el 77 % de estudiantes del semestre 2004-II y el 63% de estudiantes del semestre 2005-I del total, salió aplazado en la prueba diagnóstica (entre 00 y 09 puntos) y con lo que Olazábal (2005) encontró traducciones del lenguaje natural al lenguaje algebraico, en donde el porcentaje de éxito es muy bajo, lo que nos hace pensar que es en esas traducciones donde el alumno encuentra mayor dificultad en su proceso para establecer el modelo matemático del problema.

Para que los estudiantes mejoren su nivel de logro en conocimiento del lenguaje matemático. Díaz (2009) sugiere hacer un uso abundante de lenguaje verbal en el aula de matemáticas, como una poderosa herramienta para mejorar la comprensión, tanto matemática como lingüística.

4.4 ANÁLISIS Y PRESENTACIÓN DE RESULTADOS PARA IDENTIFICAR EL NIVEL DE LOGRO EN CAPACIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS DE LOS ESTUDIANTES.

CUADRO 12

ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN LA CAPACIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS, SEGÚN ESCALA DE CALIFICACIÓN, PUNO - 2012

Escala de calificación		**Frecuencia**	**Porcentaje**
Cualitativo	**Cuantitativo**	y_i	%
En inicio	[00 - 10]	141	49,3
En proceso	[11 - 13]	108	37,8
Logro previsto	[14 - 17]	34	11,9
Logro destacado	[18 - 20]	3	1,0
Total		286	100,0

Fuente: Matriz de sistematización de datos

El 49,3% de estudiantes se encuentran en nivel de inicio, este resultado nos indica que los estudiantes de la ciudad de puno, están empezando a desarrollar los aprendizaje previstos o evidencian dificultades en la capacidad de resolución de problemas, el cual nos da a entender que los estudiantes necesitan mayor tiempo de acompañamiento o intervención del docente de acuerdo con su ritmo y estilo de aprendizaje.

El 37,8% de estudiantes tienen un nivel de proceso de capacidad de resolución de problemas matemáticos, esto indica que los estudiantes están en camino de lograr la capacidad prevista, para lo cual requieren acompañamiento durante un tiempo razonable.

El 11,9% de estudiantes se encuentran con un nivel de logro previsto, este resultado implica que los estudiantes evidencian el logro previsto de capacidad de resolución de problemas matemáticos en el tiempo programado.

El 1,0% de estudiantes evidencian tener un nivel de logro destacado en la capacidad de resolución de problemas matemáticos, demostrando incluso un manejo solvente y muy satisfactorio en todo lo propuesto.

Discusión de resultados:

En cuanto al nivel de logro de capacidad de resolución de problemas la mayor cantidad de estudiantes de la ciudad de Puno, están en inicio de capacidad de resolución de problemas matemáticos, demostrando que están empezando a desarrollar los aprendizaje previstos o evidencian dificultades en la capacidad de resolución de problemas, el cual nos da a entender que los estudiantes necesitan mayor tiempo de acompañamiento o intervención del docente de acuerdo con su ritmo y estilo de aprendizaje. Seguido por los estudiantes que se encuentran en proceso de capacidad de resolución de problemas matemáticos, este resultado indica que los estudiantes están en camino de lograr la capacidad prevista, para lo cual requieren acompañamiento durante un tiempo razonable, según Escudero (1996) los estudiantes necesitan de referenciales externos permanentes (compañeros y profesores) para realizar la tarea y/o controlarla, no recurren de manera espontánea a estrategias metacognitivas. No aplican método alguno para resolver un problema. Aquellos que resuelven situaciones nuevas en general, lo hacen por capacidad propia (o externa a la escuela) y no porque el sistema educativo les haya proporcionado herramientas. Pocos estudiantes demuestran tener un nivel de logro destacado en la capacidad de resolución de problemas matemáticos, señalando incluso un manejo solvente y muy satisfactorio en todo lo propuesto. Solas et al. (2006) indica que a mayor conocimiento previo, mayor probabilidad de resolver correctamente problemas difíciles, también se debe tener en cuenta la motivación y actitud positiva porque para resolver un problema no solo basta la mera aplicación de conocimientos y operaciones aprendidas.

Los resultados también obtenidos coinciden con Escudero (1996) quien realizó su estudio con dos grupos de alumnos cuyos resultados en general eran bajos.

Las razones por las cuales hay personas mejores que otras en la capacidad de resolución de problemas matemáticos son las habilidades, la práctica, el tiempo que dedican y el conocimiento que poseen señala, Hernández (2002). Para muchos estudiantes las matemáticas son una materia difícil que provoca sentimientos de intranquilidad, miedo ansiedad, inseguridad, incertidumbre, estos factores también influyen a que los estudiantes fracasen al momento de resolver problemas matemáticos. Por este motivo consideramos fundamental que los docentes motivemos a los estudiantes a resolver problemas matemáticos.

4.5 ANÁLISIS Y PRESENTACIÓN DE RESULTADOS PARA ESTABLECER LAS DIFERENCIAS DEL NIVEL DE LOGRO ENTRE CONOCIMIENTO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO Y LA CAPACIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS DE LOS ESTUDIANTES, SEGÚN CARACTERÍSTICAS DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA (UBICACIÓN Y TIPO DE GESTIÓN).

CUADRO 13

CONOCIMIENTO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO Y CAPACIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN LOS ESTUDIANTES DE I.E.S. UBICADOS EN LA PARTE CÉNTRICA DE LA CIUDAD DE PUNO - 2012

Niveles de logro	**Conocimiento del lenguaje matemático**		**Capacidad de resolución de problemas**	
Cualitativo	**Frecuencia x_i**	**Porcentaje %**	**Frecuencia x_i**	**Porcentaje %**
En inicio	46	29,5	70	44,9
En proceso	54	34,6	65	41,7
Logro previsto	51	32,7	20	12,8
Logro destacado	5	3,2	1	0,8
Total	156	100,0	156	100,0

Fuente: Matriz de sistematización de datos

- ✓ Los estudiantes de la parte céntrica de la ciudad se encuentran en nivel de inicio, el 29,5% en conocimiento del lenguaje matemático y 44,9% en capacidad de resolución de problemas matemáticos, por lo tanto los estudiantes necesitan mayor tiempo de acompañamiento e intervención del docente.

- ✓ 34,6% de estudiantes están en nivel de proceso de conocimiento del lenguaje matemático y 41,7% en proceso de capacidad de resolución de problemas matemáticos; estos resultados indican que los estudiantes están en camino de lograr los aprendizajes previstos.
- ✓ En el nivel de logro previsto 32,7% de estudiantes demuestran tener el logro previsto de conocimiento del lenguaje matemático y 12,8% evidencian el logro previsto en capacidad de resolución de problemas matemáticos en el tiempo programado.
- ✓ El 3,2% de estudiantes evidencian tener un nivel de logro destacado en conocimiento del lenguaje matemático y 0,6% en capacidad de resolución de problemas matemáticos, demostrando incluso un manejo solvente y muy satisfactorio en todo lo propuesto.

Discusión de resultados

Los resultados mostrados nos indican que los estudiantes de la parte céntrica de la ciudad de Puno en mayor cantidad demuestran estar en proceso de conocimiento del lenguaje matemático para lo cual requieren acompañamiento del docente durante un tiempo razonable para lograr los aprendizajes previstos y un porcentaje mayor de estudiantes indicaron estar en inicio de capacidad de resolución de problemas matemáticos, pues vemos que un estudiante logró desarrollar las cuatro fases del proceso de resolución de problemas algunos estudiantes presentan un porcentaje significativo, dificultades en la resolución de problemas como indica Sanchez, et.al.(1998) estrategias de resolución incorrectas, falta de comprensión del problema.

CUADRO 14

CONOCIMIENTO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO Y CAPACIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN LOS ESTUDIANTES DE I.E.S. UBICADOS EN LA PARTE PERIFÉRICA DE LA CIUDAD DE PUNO - 2012

Niveles de logro	**Conocimiento del lenguaje matemático**		**Capacidad de resolución de problemas**	
Cualitativo	**Frecuencia** x_i	**Porcentaje** %	**Frecuencia** x_i	**Porcentaje** %
En inicio	42	45,2	60	64,5
En proceso	32	34,4	29	31,2
Logro previsto	18	19,4	4	4,3
Logro destacado	1	1,1	0	0,0
Total	93	100,0	96	100,0

Fuente: Matriz de sistematización de datos

- ✓ Los estudiantes de la parte periférica de la ciudad de Puno evidenciaron tener un nivel de inicio el 45,2% en conocimiento del lenguaje matemático y 64,5% en capacidad de resolución de problemas matemáticos.
- ✓ Los estudiantes que evidenciaron tener nivel de proceso de conocimiento del lenguaje matemático fueron 34,4% y 31,2% están en proceso de capacidad de resolución de problemas matemáticos, significa que los estudiantes están en camino de lograr los aprendizajes previstos.
- ✓ El 19,4% de estudiantes demuestran tener un nivel de logro previsto en conocimiento del lenguaje matemático y solamente 4,3% de estudiantes

lograron alcanzar el logro previsto de capacidad de resolución de problemas matemáticos.

- ✓ En el nivel de logro destacado los estudiantes evidencian tener solo el 1,1% en conocimiento del lenguaje matemático demostrando incluso un manejo solvente y muy satisfactorio en todo lo propuesto y 0,0% en capacidad de resolución de problemas matemáticos.

Discusión de resultados

Parece claro, pues, que la zona en la que el alumno vive, y las consecuencias que de ello se derivan para la institución educativa por su localización, inciden en el nivel de logro del estudiante, así tal como se observa en el cuadro 14 de frecuencias, los estudiantes que asisten a I.E.S. ubicados en la parte periférica obtienen niveles de logro bajos en conocimiento del lenguaje matemático y capacidad de resolución de problemas matemáticos, estos resultado coincide con Depaz et al. (2011) al señalar que los estudiantes del colegio estatal dejaron más preguntas sin resolver demostrando que el tiempo planteado no les fue suficiente. Y Brembeck (1977) afirma que los niños que viven en áreas socioeconómicas bajas entran en la escuela con la desventaja impuesta por su ambiente, y se van retrasando en el rendimiento en comparación con los alumnos de zonas más favorecidas, a medida que avanzan los cursos.

CUADRO 15

CONOCIMIENTO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO Y CAPACIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN LOS ESTUDIANTES DE I.E.S. PRIVADAS DE LA CIUDAD, PUNO - 2012

Niveles de logro	**Conocimiento del lenguaje matemático**		**Capacidad de resolución de problemas**	
Cualitativo	**Frecuencia x_i**	**Porcentaje %**	**Frecuencia x_i**	**Porcentaje %**
En inicio	8	21,6	11	29,7
En proceso	11	29,7	14	37,8
Logro previsto	12	32,4	10	27,0
Logro destacado	6	16,2	2	5,4
Total	37	100,0	37	100,0

Fuente: Matriz de sistematización de datos

Los resultados son favorables para los estudiantes de gestión privada de la ciudad de Puno.

- ✓ Evidencian tener nivel de inicio el 21,6% en conocimiento del lenguaje matemático y el 29,7% capacidad de resolución de problemas matemáticos, por lo tanto los estudiantes necesitan mayor tiempo de acompañamiento del docente de acuerdo con su ritmo y estilo de aprendizaje.
- ✓ Los estudiantes demuestran tener nivel de proceso el 29,7% en conocimiento del lenguaje matemático y el 37,8% en capacidad de resolución de problemas matemáticos, esto indica que los estudiantes están en camino de lograr la capacidad prevista.
- ✓ El 32,4% de estudiantes indican tener un nivel de logro previsto de conocimiento del lenguaje matemático y el 27,0% de estudiantes se

encuentran con un nivel de logro previsto en capacidad de resolución de problemas matemáticos en el tiempo programado.

- ✓ Los estudiantes que alcanzaron tener un nivel de logro destacado en conocimiento del lenguaje matemático es 16,2% y en capacidad de resolución de problemas matemáticos el 5,4% demostrando incluso un manejo solvente y muy satisfactorio en todo lo propuesto.

Discusión de resultados:

Los resultados obtenidos nos permiten contrastar que efectivamente el tipo de gestión afecta el nivel de logro en conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos, puesto que los estudiantes de la institución educativa de gestión privada obtuvieron un mejor nivel de logro. Estos resultados coinciden con Depaz y et al. (2011) al señalar que los estudiantes del colegio privado lograron un mejor rendimiento en la resolución de problemas matemáticas de sustracción. Del mismo modo Astola, et al. (2012) coincide indicando que los estudiantes de la institución de gestión privada obtuvieron el nivel de logro en la resolución de problemas aritméticos aditivos y sustractivos.

CUADRO 16

CONOCIMIENTO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO Y LA CAPACIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN LOS ESTUDIANTES DE I.E.S. DE LA CIUDAD DE PUNO - 2012

Instituciones Educativas de Secundaria de la ciudad de Puno				**Puntuaciones medias**	
				Conocimiento del lenguaje matemático	Capacidad de resolución de problemas
Tipo de gestión	Estatal	Ubicación geográfica	Periférico	10,3	8,8
			Céntrico	11,5	9,7
	Privada			13,8	11,2

Fuente: Matriz de sistematización de datos

Los estudiantes de I.E.S ubicados en la parte periférica de la ciudad de Puno obtuvieron 10,3 de promedio, este dato señala que están en inicio de conocimiento del lenguaje matemático y 8,8 de promedio en capacidad de resolución de problemas de la misma manera indica que se encuentran en inicio.

Los estudiantes de I.E.S. de la parte céntrica de la ciudad de Puno lograron un promedio de 11,5 resultado que da a conocer que están en proceso de conocimiento del lenguaje matemático y 9,7 de promedio en capacidad de resolución de problemas matemáticos este dato nos da a conocer que están en inicio.

Los resultados como se pueden observar en el cuadro fue favorable para los estudiantes de la gestión privada obteniendo 13,8 de promedio, significa que están en logro previsto de conocimiento del lenguaje matemático y en capacidad de resolución de problemas matemáticos lograron 11,2 de promedio demuestran que están en proceso.

Discusión de resultados

Al efectuarse el análisis de los resultados de puntuaciones medias obtenidas por los estudiantes de Educación Secundaria teniendo en cuenta las características de la Institución Educativa (ubicación y tipo de gestión) se ha podido observar que existen diferencias significativas, resultado que confirma a la investigación hecha por Toboso (2004). Del mismo modo los resultados presentados por los diferentes grupos corroboran los datos emitidos por el MINEDU, mediante el informe de las ECE – 2012 donde se halló un bajo nivel de logro en los estudiantes de segundo grado de educación primaria; así como también, se determinó que los estudiantes de la Institución Educativa privada presentaron un mejor nivel de logro que los de la Institución Educativa estatal.

En general, los resultados del estudio coinciden con los de Resnick y Ford (1990), Pimm (1999), Mayer (1987) puesto que la resolución de un problema matemático depende de la adecuada utilización del lenguaje matemático.

4.6 COEFICIENTE DE CORRELACIÓN PARA VARIABLES "X" e "Y"

X	Conocimiento del lenguaje matemático.
Y	Capacidad de resolución de problemas matemáticos.

Se estimó el coeficiente de correlación de Pearson para cada muestra estratificada como se tiene a continuación:

Para los estudiantes de I.E.S. que están ubicados en la parte céntrica de la ciudad, la correlación de Pearson fue: 0,81

Para los estudiantes de I.E.S. que están ubicados en la parte periferica de la ciudad, la correlación de Pearson fue: 0,80

Para los estudiantes de I.E.S. de gestión privada, la correlación de Pearson fue: 0,90.

Después de haber obtenido los resultados de correlación de Pearson para cada estrato, se decidió determinar la correlación de forma general para lo cual se tiene: r = 0,82, de acuerdo al cuadro de valores de correlación corresponde a una correlación positiva y fuerte.

En seguida se ha procedido dar a conocer el diagrama de dispersión para observar el comportamiento de las variables entre conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos.

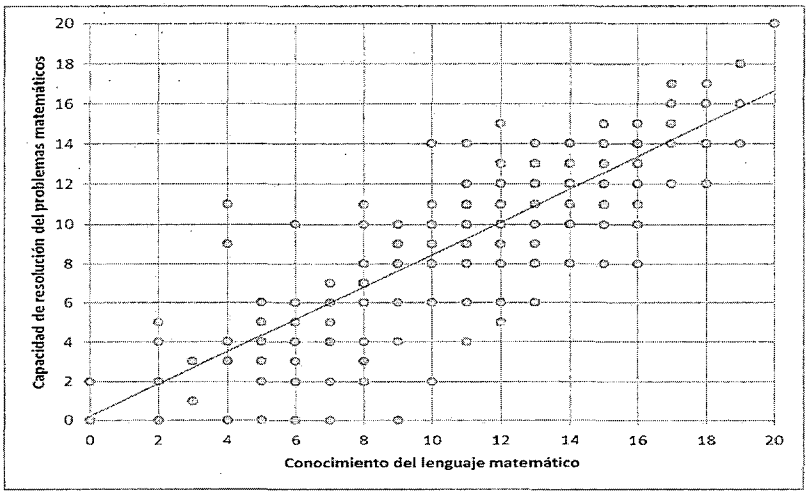


FIGURA 2: Conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de educación secundaria de la ciudad de Puno - 2012.

En la figura se observa que existe una relación directa y positiva entre el conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos. El cual confirmaría nuestra hipótesis indicada, de que existe una relación positiva y directa entre el conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno.

4.7 PRUEBA DE HIPÓTESIS DEL COEFICIENTE DE CORRELACIÓN

Para poder inferir el grado de correlación a la población se realizó lo siguiente:

Prueba de hipótesis al coeficiente de correlación.

1. ***Formulación de las Hipótesis estadísticas:***

$\rho_{xy} = 0$ ***H_o:*** (No existe una relación positiva fuerte entre el nivel de conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos en los estudiantes del cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno)

$\rho_{xy} \neq 0$ ***H_a:*** (Existe una relación positiva fuerte entre el nivel de conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos en los estudiantes del cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno).

2. ***Nivel de significancia***

De acuerdo a lo planteado y por la condiciones del problema se consideró un nivel de significancia de $\alpha = 0{,}05$ o 5% de error.

3. ***Estadístico de prueba:***

$$Z_c = \rho_{xy} \sqrt{\frac{n-2}{1-\rho_{xy}^{2}}}$$

Reemplazando lo datos se tiene:

$$Z_c = 0{,}81\sqrt{\frac{286-2}{1-(0{,}81)^2}} = 23{,}41$$

$Z_c = 23{,}41$

4. Establecimiento de la región crítica

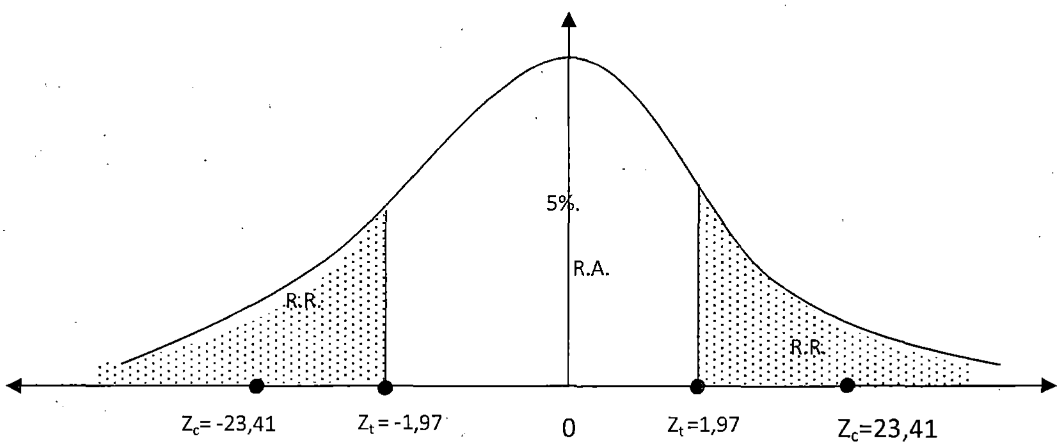


FIGURA 3: Campana de Gauss para establecer la región crítica.

Como $(Z_c = 23{,}41) > (Z_t = 1{,}97)$ entonces se rechaza la hipótesis nula.

5. Toma de decisión

El valor $Z_c = 23{,}41$ se encuentra en la región de rechazo y como Z_c calculada es mayor que la Z de tabla (Z_t) se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alterna lo que significa que a un nivel de 5% de margen de error existe el grado de relación entre el conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos en los estudiantes del cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno en el año académico 2012.

CONCLUSIONES

PRIMERA. Un alto porcentaje de estudiantes evaluados del cuarto grado de Educación Secundaria de la ciudad de Puno, determinaron el tipo de relación que existe entre el nivel de conocimiento del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas matemáticos es, positiva y directa.

SEGUNDA: Los resultados nos dieron a conocer y confirmar la hipótesis de investigación indicando que el 38,5% de estudiantes conocen en mayor medida el lenguaje literal, el 30,4% de estudiantes identifican y representan en forma gráfica el problema propuesto, el 29,7% de estudiantes conocen y usan el lenguaje simbólico.

TERCERA: Los resultados llegaron a confirmar la hipótesis planteada, indicándonos que el 48,6% de estudiantes se ubican en la fase de comprensión del problema, el 34,6% de estudiantes llegan a concebir un plan para resolver problemas, el 11,5% llega a ejecutar el plan para resolver problemas, y tan solo el 1,8% llega a la fase retrospectiva.

CUARTA: Al evaluar el conocimiento del lenguaje matemático a los estudiantes del cuarto grado de Educación Secundaria se identificó que: el 33,9% de estudiantes se encuentran en nivel de proceso de conocimiento del lenguaje matemático, esto muestra que están en camino de lograr los aprendizajes previstos, para lo cual los estudiantes requieren acompañamiento durante un tiempo razonable.

QUINTA: Al evaluar la capacidad de resolución de problemas matemáticos a los estudiantes del cuarto grado de Educación Secundaria se identificó que: El 49,3% de estudiantes se encuentran en nivel de inicio, este resultado nos indica que los estudiantes de la ciudad de Puno, están empezando a desarrollar los aprendizaje previstos o evidencian dificultades en la capacidad de resolución de problemas, el cual nos da a entender que los estudiantes necesitan mayor tiempo de acompañamiento o intervención del docente de acuerdo con su ritmo y estilo de aprendizaje.

SEXTA: Al evaluar el conocimiento del lenguaje matemático a los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria según las características (ubicación y tipo de gestión) de Institución Educativa de la ciudad de Puno se señala que: los estudiantes de Instituciones Educativas Privadas con un 32,4% tienen un nivel de logro previsto en conocimiento del lenguaje matemático, los estudiantes de Instituciones Educativas ubicadas en la parte céntrica con un 34,6% se encuentran en proceso de conocimiento del lenguaje matemático y los estudiantes de Instituciones Educativas ubicadas en la parte periférica con un 45,2% se encuentran en inicio de conocimiento del lenguaje matemático. Al evaluar la capacidad de resolución de problemas matemáticos a los estudiantes de cuarto grado de Educación

Secundaria según las características (ubicación y tipo de gestión) de Institución Educativa de la ciudad de Puno se señala que: los estudiantes de Instituciones Educativas Privadas con un 37,8% se encuentra en proceso de capacidad de resolución de problemas matemáticos, los estudiantes de Instituciones Educativas ubicadas en la parte céntrica el 44,9% se encuentran en inicio de capacidad de resolución de problemas matemáticos y los estudiantes de Instituciones Educativas ubicadas en la parte periférica con 64,5% se encuentran en proceso de capacidad de resolución de problemas matemáticos.

RECOMENDACIONES

Las conclusiones obtenidas nos permiten recomendar lo siguiente:

PRIMERA: Para mejorar el nivel académico de los estudiantes, los docentes del área de matemática durante el proceso de Enseñanza – Aprendizaje deben manejar y aplicar correctamente el lenguaje matemático.

SEGUNDA: Para el desarrollo de la capacidad de resolución de problemas matemáticos se sugiere a los docentes, que den a conocer las diversas estrategias a los estudiantes.

TERCERA: Se sugiere a todos los docentes de Educación Secundaria que desarrollen la capacidad de comunicación matemática con mayor énfasis, ya que este es un instrumento de mucha utilidad para desarrollar el conocimiento matemático sin errores y dificultades.

CUARTA: Se sugiere a los estudiantes del pre y post grado de la Universidad Nacional del Altiplano Puno, realizar este trabajo de investigación en un diseño cuasi - experimental, para así contribuir a la calidad de la educación de nuestro país.

BIBLIOGRAFIA

Alcala, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona,España: Editorial Grao.

Alcalde, M. (2010). *Importancia de los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes para el aprendizaje de la didáctica de la matemática en las titulaciones de maestro en la Universitat Jaume.* Tesis de doctorado. Castelló.

Astola, P., Salvador A. y Vera G. (2012). *Efectividad del programa "GPA-RESOL" en el incremento del nivel de logro en la resolución de problemas aritméticos aditivos y sustractivos en estudiantes de segundo grado de primaria de dos Instituciones Educativas, una de gestión estatal y otra privada del distrito de san Luis.* Tesis de maestría. Perú.

Aubanell, A. (1987). *Matemática y lenguaje*. Barcelona, España: Editorial Trillas.

Azarquiel, G. (1993). *Ideas y actividades para enseñar algebra*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Barbera, E. (1995). *Estrategias en matemática*. Cuadernos de pedagogía. Madrid, España: Editorial Trillas.

Barrantes, H. (2006). *Resolución de problemas. El Trabajo de Alan Schoenfeld. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, N° 1.

Bourdieu, P. y Passeron, J. (1964). *Les héritiers*. Paris: Minuit.

Borba, M. (1990). *Ethnomathematics and education, for the learning of mathematics* 1 (10).

Bransford, J. y Stein, B. (1987). *Solución IDEAL de problemas, guía para pensar mejor, aprender y crear*. Barcelona: Ediciones. Labor.

Brembeck, C. (1977). *Sociología de la Educación*. Buenos Aires: Paidós.

Brophy, J. y Good, T. (1970). *Teachers' comunication of differential expectations for children's classroom performance: some behavioural data.* Journal of Educational Psychology, 61, 365-374.

Brown, R. y Burton, R. (1978). *Diagnostic models for procedural in basic mathematical skills*. Cognitive Science, 4, 379-426.

Carretero, M. (1997). *Constructivismo y educación*, Luis vives: México.

Castro, R. (2006). *Pensamiento psicoanalítico y matemático*. México: Editorial Siglo XXI. S.A.

Cockcroft, W.H. (1985). *Las matemáticas si cuentan*. Madrid: Ediciones MEC.

Corbalan, F. (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana.* Barcelona, España: Editorial Grao.

Cordero, J. (1996). *Resolución de problemas.* México: Editorial Trillas.

Cruz, M. (2006). *La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas*. Tomo 1. La Habana: Educación Cubana.

Cuesta, A. (2007). *El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica*. Tesis de doctorado. Barcelona.

Davis, P. y Hersh, R. (1988). *Experiencia matemática.* Madrid, España: MEC-Labor. (Título original: *The Mathematical Experience*. Boston: Birkhäuser.

De Corte, E. y VerchaffelL, L. (1987). *The effect of semantic structure on first grader´s strategies for solving addition and subtraction word problems. Journal for research in mathematics education*, 18, 5, 363-381.

De Guzmán, M. (1991) *Para pensar mejor*. Barcelona: Ediciones. Labor.

Delgado, R. (1998). *La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: dos aspectos fundamentales para lograr su eficacia. La estructuración del contenido y el desarrollo de habilidades generales matemáticas.* Tesis de Doctorado, La Habana.

Depaz, R. y Fernández, M. (2011). *Resolución de problemas matemáticos de sustracción en alumnos de 3er grado de primaria de un colegio privado y de un colegio estatal en Lima.* Tesis de maestría. Perú.

Devlin, K. (2002). *El lenguaje de las matemáticas.* España: Robinbook.

Dewey, J. (1933). *El arte como experiencia.* México: Fondo de la cultura económica.

Diaz, H. (2009). *El lenguaje verbal como instrumento matemático:* Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y portugal (REDALYC). 12(13), 13 – 31.

Diaz, J. (2004). *El grado de abstracción en la resolución de problemas de cambio de suma y resta en contextos rural y urbano.* Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid.

Driver, R. (1986). Students thinking and the learning of science: A constructivist view. School science review, 67,443 – 456.

Duncker, J. (1945). *One problema solving. Psycological monographs,* 58. Whole N° 270.

Ernest, G. y Newell, A. (1969). *A case study in generality and problem solving.* New York: Academic Press.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of Mathematics Education.* London: Falmer Press.

Ernest, P. (1994). *The philosophy of mathematics and the didactics of mathematics.* En R. Biehler et al. (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Dordrecht: Kluwer.

Escudero, C. (1996). *Los procedimientos en resolución de problemas de alumnos de 3° año: caracterización a través de entrevistas.* Investigações em Ensino de Ciências. 1(3), 241-256.

Figueiras, L. y Molero, M. (1998). *Género y Matemáticas.* Madrid, España: Editorial Síntesis.

Fortes, C. Sanjosé, V. Valenzuela, T. Solaz, J. (2007). *Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por transferencia.* Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias. 6(3), 538-561.

Godino, I. (2002). *Significado y comprensión de los conceptos matemáticos.* España: Universidad de Valencia.

Goldin, G. (1987). *Cognitive representacional systems for mathematical problema solving.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Gonzales, C. (2003). *Factores determinantes del bajo rendimiento académico en Educación Secundaria. Tesis doctoral.* Universidad Complutense de Madrid.

Gutierrez, Á. (1991). *Área de conocimiento didáctica de la matemática.* España: Editorial Síntesis.

Hayes, J. (1980). *Teaching problem solving mechanisms.* En Tuma, D.T. y Reif, F. (Comps.), Problem solving and education: Issues in teaching. Hillsdale, New Jersy: L. Erlbaum.

Hernandez, J. y Socas, M. (1994). *Analogías y diferencias observadas entre buenos y malos resolutores de problemas matemáticos.* V Jaem.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista P. (2006). *Metodología de la Investigación.* México: Editorial Mc. Graw Hill.

Hilbert y Levre, P. (1986). *Instrumentos* de cálculo.Madrid: Ediciones. Paidos.

Juif, P. y Legrand, L. (1980). *Didáctica y renovación pedagógica*. Madrid: Narcea.

Kilpatrick, J. y Gómez, P. (1995). *Educación Matemática*. Bogotá: Editorial Iberoamericana.

Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford: Oxford University Press.

Labarrere, A. (1987). *Bases psicopedagógica de la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos en la escuela primaria*. La Habana: Editorial Pueblo 20.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Universidad (Traducción al castellano de: *Proofs and Refutations - The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: University Press, 1976).

Lakatos, I. (1981). *Matemática, ciencia y epistemología*. Madrid: Alianza Universidad.

Larios, V. (2000). *Constructivismo en tres patadas. Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas*, año 1, num. 1

Le Lionnais, F. (1962). *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. Buenos Aires: Editorial Universitaria.

Lewis, M. y Anderson, J. (1985). *Discrimination of operator schemata in problem solving: learning from examples*. Cognitive psychology, 17, 26-65. Lindsay, P. y Norman, A. (1972). *Introducción a la psicología cognitiva*. Madrid: Tecnos.

Llivina , M. (1999). *Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de capacidad para resolución de problemas*. (Tesis Doctoral). La Habana.

Macnab D.S. (1992). *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16*. España: Editorial Trillas.

Marchesi, A. (2003). *El fracaso escolar en España. Documento de trabajo del Laboratorio 11*. Fundación Alternativas.

Mayer, R. (1983). *Thinking, problem solving and cognition*. New York: W.H. Freeman and Company. Barcelona: Paidós.

Mayer, R. (1987). *Pensamiento resolución de problemas y cognición. Barcelona: Ediciones Paidos Iberica S.A.*

Ministerio de Educación, (2009). D*iseño curricular nacional de educación básica regular*. Lima, Perú.

Ministerio de Educación, (2012). *Módulo de resolución de problemas – resolvamos 2*. Edit. El comercio. Lima, Perú.

Monereo, C. (1995). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje. Formación de l profesorado y aplicación en la escuela*. Barcelona: Editorial Graó.

Morales E. M. (2009). *Los conocimientos previos y su importancia para la comprensión del lenguaje matemático en la educación superior. (scielo)* 13(52).

Moya, R. (1999). *Estadística descriptiva.* Lima, Perú: Editorial San Marcos.

Newell, A. y Simon, H. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Nina, F. T. (1998). *La formación de habilidades del pensamiento matemático.* Editorial Universitaria Potosina.

Novack, J. (1998). *Constructivismo humano: un consenso emergente. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas: Enseñanza de las Ciencias,* 6(3) 213-23.

Olazabal, A. M. (2005). *Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto.* (Tesis de Maestría). México.

Ortiz, F. (2001). *Matemática estrategias de enseñanza y aprendizaje.* México: Editorial Pax Mexio.

Pacheco, J. (1991). *Razonamiento matemático: estrategias, algoritmos y categorías.* Tesis de licenciatura, Universidad de Valencia.

Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años.* (Tesis doctoral). Universidad de la Laguna.

Pefeiffer, K.; Feinberg, G. y Gelber, S. (1987). *Teaching productive problem solving actitudes. Hillsdale*, New Jersey: Lawrence. Erlbaum Associates.

Piaget, J. (1977). *Investigaciones sobre la abstracción reflexionante.* París. Buenos Aires: Huemul, 1979.

Pimm, D. (1999). *El lenguaje matemático en el aula* Madrid, España: Morata.

Polya, G. (1945). *Como plantear y resolver problemas.* México: Editorial Trillas.

Polya, G. (1987). *Mathematics Magazine*, vol.60, no.5, Diciembre.

Popper, K. (1974). *Conocimiento objetivo.* Madrid: Tecnos (versión castellana: *Objective knowledge.* Oxford: Oxford University Press, 1972).Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos PISA 2009. (2010) OCDE INFORME ESPAÑOL, Madrid, España.

Puig, L. y Cerdan, F. (1995). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: síntesis.

Resnick, L. y Ford, W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Barcelona: Editorial Paidos.

Rico, L. (1995). *Errores en el aprendizaje de la matemática.* México: Editorial Iberoamericana.

Romberg, T. (1991). *Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas. Revista de Educación.*

Ruiz, D. (2003). E*l lenguaje en clases de matemáticas.* Merida, Venezuela: Universidad de los Andes. Consejo de publicaciones.

Sanchez, J. y Fernández, J. (1998). *La enseñanza de la matemática fundamentos teóricos y bases psicopedagógicas.* Edit. CCS.

Sanchez (2004). *El Constructivismo en la Educación*. Revista de Educación [revista en línea]. Consultada en febrero, 2008.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.*

SKovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education. Dordrecht*. Kluwer Academic publishers.

Shiffrin, R. y Dumais, S. (1981). *The development of automatism. Cognitive skills and their acquisition*. Hillsdale, New Jersy: L. Erlbaum.

Silva, M. (2009). *Método y estrategias de resolución de problemas matemáticos utilizadas por alumnos de 6to. Grado de primaria.* (Tesis de Maestría). Universidad Iberoamericana de México.

Socas, M., Camacho, M. (2003). *Conocimiento matemático y enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria. Algunas reflexiones*. Boletín de la Asociación matemática Venezolana Vol x N° 2

Solaz-Portolés, J., San José, V. (2008). *Conocimiento previo, modelos mentales y resolución de problemas.Un estudio con alumnos de bachillerato. Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 10 (1).

Sternberg, R. (1982). *Razonamiento, resolución de problemas e inteligencia*. Vol. 2. Barcelona: Paidós Ibérica.

Talavera, R. (2004). *Estrategias innovadoras para la comprensión del lenguaje matemático.* Universidad de Carabobo, Valencia Venezuela.

Thorndike, E. (1922). *Psicología de la aritmética.* New York: W.H. Freeman and Company.

Toboso, J. (2004). *Evaluación de habilidades cognitivas en la resolución de problemas matemáticos.* (Tesis Doctoral), universidad de Valencia.

Torralbo, R. (2009). *Tesis doctorales de educación matemática en España.* Revista de investigación educativa. 30(12), 253-270.

Torregrosa, A. (1999). *El fracaso en la resolución de problemas de física: Una investigación orientada por nuevos supuestos. Enseñanza de las ciencias.* 6, 131 - 146.

Torres, A. (2007). E*ducación matemática y desarrollo del pensamiento lógico matemático.* Lima, Perú: Editorial Rubiños.

Tourlet, L. (2003). *Lenguaje y Pensamiento Pre escolar.* Madrid, España: Narcea.

Tymozcko, T. (1986). *New Directions in the Philosophy of Mathematics.* Boston: Birkhäuser.

Valle, M. C., Juárez, M. A., Guzmán, M. E. (2007). Estrategias generales en la resolución de problemas de la olimpíada mexicana de matemáticas. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 9 (2).

Villella A. J. (1998). *¡Piedra libre para la matemática! aportes y reflexiones para una renovación metodológica en la E.G.B.* Argentina: Aique grupo editor S.A.

Vygotski, L. (1999). *Pensamiento y Lenguaje.* México: Editorial Quinto Sol.

Wallas, G. (1987). *El arte del pensamiento.* New York: Harcourt - Brace.

Wertheimer, M. (1945). *Productive thinking.* New York: Harper and Brothers.

Wittgenstein, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática.* Madrid: Editorial Alianza.

ANEXOS

CUADRO 17

ESCALAS DE CALIFICACIÓN DE LOS APRENDIZAJES EN LA EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR

Nivel Educativo Tipo de Calificación	Escalas de Calificación	Descripción
Educación Inicial Literal y Descriptiva	A Logro previsto	Cuando el estudiante evidencia el logro de los aprendizajes previstos en el tiempo programado.
	B En proceso	Cuando el estudiante está en camino de lograr los aprendizajes previstos, para lo cual requiere acompañamiento durante un tiempo razonable para lograrlo.
	C En inicio	Cuando el estudiante está empezando a desarrollar los aprendizajes previstos o evidencia dificultades para el desarrollo de éstos y necesita mayor tiempo de acompañamiento e intervención del docente de acuerdo con su ritmo y estilo de aprendizaje.
Educación Primaria Literal y Descriptiva	AD Logro destacado	Cuando el estudiante evidencia el logro de los aprendizajes previstos, demostrando incluso un manejo solvente y muy satisfactorio en todas las tareas propuestas.
	A Logro previsto	Cuando el estudiante evidencia el logro de los aprendizajes previstos en el tiempo programado.
	B En proceso	Cuando el estudiante está en camino de lograr los aprendizajes previstos, para lo cual requiere acompañamiento durante un tiempo razonable para lograrlo.
	C En inicio	Cuando el estudiante está empezando a desarrollar los aprendizajes previstos o evidencia dificultades para el desarrollo de éstos y necesita mayor tiempo de acompañamiento e intervención del docente de acuerdo con su ritmo y estilo de aprendizaje.
Educación Secundaria Numérica y Descriptiva	20 - 18	Cuando el estudiante evidencia el logro de los aprendizajes previstos, demostrando incluso un manejo solvente y muy satisfactorio en todas las tareas propuestas
	17 - 14	Cuando el estudiante evidencia el logro de los aprendizajes previstos en el tiempo programado.
	13 - 11	Cuando el estudiante está en camino de lograr los aprendizajes previstos, para lo cual requiere acompañamiento durante un tiempo razonable para lograrlo.
	10 - 00	Cuando el estudiante está empezando a desarrollar los aprendizajes previstos o evidencia dificultades para el desarrollo de éstos y necesita mayor tiempo de acompañamiento e intervención del docente de acuerdo con su ritmo y estilo de aprendizaje.

PRUEBA ESCRITA PARA EL CONOCIMIENTO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO (FASE PILOTO)

Institución Educativa Secundaria:..................................
Apellidos y Nombres:..
Cuarto Grado. Sección: ....

INSTRUCCIONES:

- Lea atentamente y responda las siguientes preguntas, evite borrones y mala letra.
- Los cálculos puede realizarlos detrás de la hoja, indicando la pregunta.
- Esta prueba consta de 20 puntos y tiene un tiempo máximo de 60 minutos.
- Recuerda que el tema es: ángulos, triángulos, elementos, clasificación y construcciones básicas.

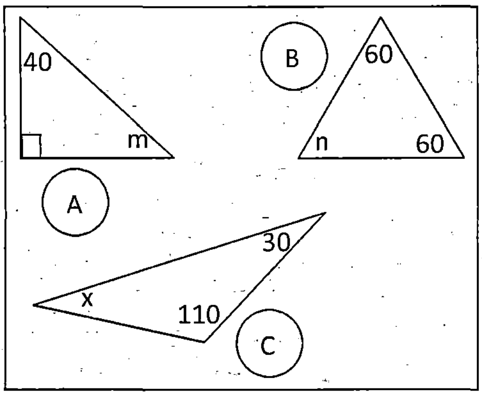
Marque la alternativa correcta

1. ¿Cuáles son los elementos primarios de un triángulo? (2 puntos)
a) Equilátero, isósceles, escaleno.
b) Obtusángulo, acutángulo y rectángulo.
c) Vértices, lados y ángulos interiores.
d) Altura, mediana, mediatriz.

2. ¿Cómo se llama el triángulo que tiene dos lados iguales y dos ángulos iguales? (2 puntos)
a) Equilátero.
b) Isósceles.
c) Escaleno.
d) Obtusángulo.

3. Un triángulo rectángulo debe tener principalmente: (2 puntos)
a) Una hipotenusa.
b) Catetos.
c) Un ángulo recto.
d) Lados iguales.

***4. Descubre el valor de "x" en los siguientes triángulos*: (1p c/u)**

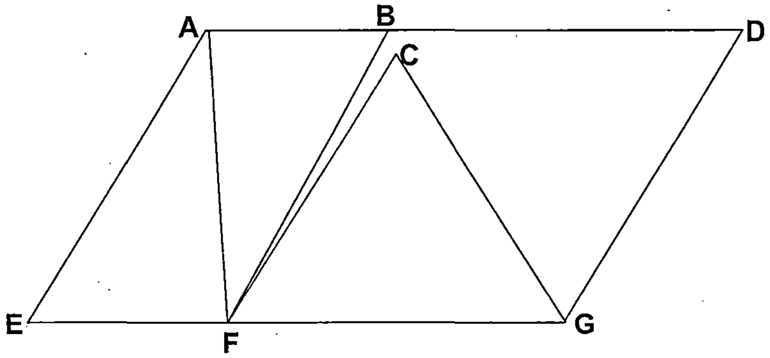


a) En el ΔA , el valor de m es: _________

b) En el ΔB , el valor de n es: _________

c) En el ΔC , el valor de x es: _________

5. Responde correctamente los datos que faltan en el siguiente cuadrilátero: (1 p c/u)



a) ¿Cuánto miden $\angle ABF + \angle BFA + \angle FAB$? ------------------------

b) Si $\angle ABF=85°$ entonces $\angle FBD =$ ______°

c) ¿Con qué letra minúscula marcarías el lado $\overline{CG}$ del ΔFGC? ----------------

6. Completa los espacios vacíos con algunas de estas palabras: escaleno, isósceles, diferente, complementario, equiángulo. (1p c/u)

a) En todo triángulo.............., la medida de cada ángulo interior es 60°.

b) Los ángulos agudos en un triángulo rectángulo son: ....

c) En un triángulo rectángulo........., la medida de cada ángulo agudo es 45°.

7. Relacione con una flecha los enunciados con su respectiva expresión simbólica que le corresponde. (1p c/u)

a.	Angulo, paralelo, perpendicular, segmento AC.	$m\angle AHC = 5(m\angle ABC)$
b.	La recta L_1 es paralelo a la recta L_2	$m\angle A - m\angle B = 20°$
c.	Hallar la medida del ángulo β	$m\angle\beta = ?$
d.	La medida del ángulo A menos la medida del ángulo B es 20 grados	$\angle$, //, $\perp$, $\overline{AC}$
e.	La medida del ángulo AHC es igual a 5 veces la medida del ángulo ABC.	$\overleftrightarrow{L}_1 \,//\, \overleftrightarrow{L}_2$

PRUEBA ESCRITA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (FASE PILOTO)

Institución Educativa Secundaria:.................................
Apellidos y Nombres:..

INSTRUCCIONES:

- Lea atentamente y responda las siguientes preguntas.
- Esta prueba consta de 8 problemas con una duración de 90 minutos máximo.
- Recuerda, el tema es: triángulos, elementos, clasificación y construcciones básicas.

1. Un ómnibus parte del terminal terrestre y se dirige a 12 km. en dirección norte. Luego avanza 9km. en dirección este hasta hacer su primera parada. ¿A qué distancia del terminal realiza el ómnibus su primera parada?

1.1 Identifica, en el texto la alternativa que mejor responda a la pregunta ¿Qué se desea conocer?

a) La distancia entre el terminal y la primera parada del ómnibus.
b) Toda la distancia que recorre el ómnibus.
c) El recorrido en dirección norte del ómnibus.
d) El perímetro de recorrido del ómnibus.

1.2 Señala, a partir de los datos. ¿Qué necesitas para resolver el problema?

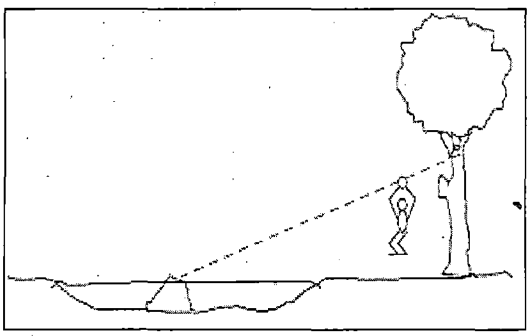
a) Hacer una tabla y buscar datos.
b) Representar gráficamente y aplicar el teorema de Pitágoras.
c) Aplicar el teorema de catetos.
d) Representar gráficamente y sumar el perímetro.

1.3 Resuelve, el problema de acuerdo a lo que indicaste en el punto anterior.

1.4 Argumenta, ¿qué fue lo más difícil para resolver el problema?

....
....
....
....

2. Según se representa en el dibujo, queremos colocar una cuerda entre las ramas del árbol y la roca que hay en el centro de un río para darnos divertidos chapuzones. (2 p)



Sabemos que la distancia de las ramas al suelo es de 4 metros, y que también existe esta misma distancia entre el árbol y la orilla del río, y entre ésta y la roca; pero no sabemos la distancia que hay entre las ramas y la roca. ¿Puedes indicarnos la medida que ha de tener la cuerda para que podamos realizar este juego?

2.1 Identifica, en el problema marcando una sola alternativa que mejor responda a la pregunta **¿Qué te pide este problema?** o **¿En qué consiste este problema?**

a) Averiguar la distancia de las ramas a la roca.
b) Calcular la distancia de la orilla a la roca.
c) Hallar la anchura del rio.
d) Calcular la altura total del árbol.

2.2 Señala, a partir de los datos. ¿Qué necesitas para resolver el problema?

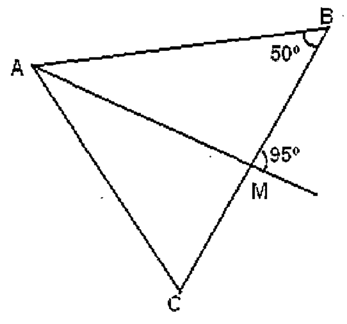
a) Aplicar el teorema de Pitágoras.
b) Averiguar la superficie del triángulo.
c) Hacer un diagrama de árbol.
d) Hacer una tabla.

2.3 Resuelve, el problema de acuerdo a lo que señalaste en el punto anterior.

2.4 Explica, si el dibujo del problema te ha permitido resolver con rapidez.

....
....
....

3. En el triángulo ABC de la figura. $\overline{AM}$, está sobre la bisectriz del $\angle A$, Determine qué tipo de triángulo es el Δ ABC? (3 p)



3.1 Identifica, la alternativa que mejor responda a la pregunta ¿Qué datos te presenta el problema?

a) Una bisectriz, dos ángulos exteriores.
b) Un ángulo de 95°, un ángulo de 50° e indica que es un triángulo.
c) Un ángulo interior de 50°, un ángulo exterior de 95°, una bisectriz en el ángulo A.
d) Un triángulo y una bisectriz.

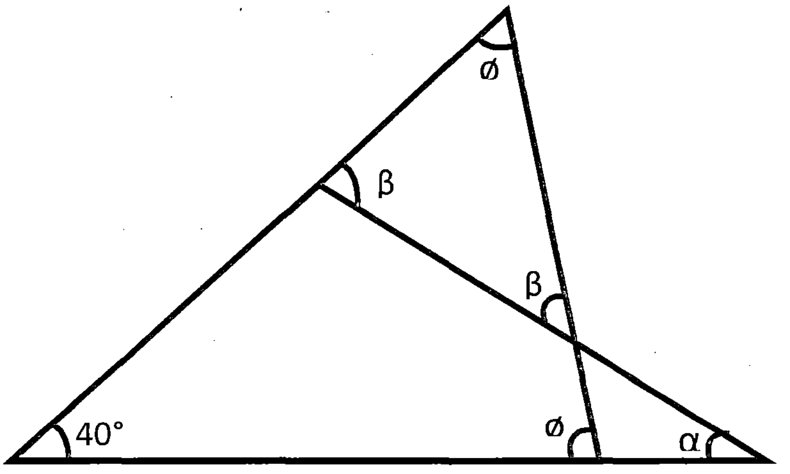
3.2 Señala, a partir de los datos. ¿Qué necesitas para resolver el problema?

a) Aplicar el teorema de Pitágoras.
b) Rehacer el grafico.
c) Usar la propiedad de suma de ángulos suplementarios y la propiedad de suma de ángulos internos de un triángulo.
d) Listar uno a uno los datos presentados.

3.3 Muestra, la solución del problema de acuerdo a lo que indicaste en el punto anterior.

3.4 Expresa, si puedes resolver el problema de otra forma.

4. En el siguiente triángulo, la medida del ángulo “α” es:



4.1 Identifica, la alternativa que mejor responda a la pregunta ¿con que datos se cuenta para poder calcular el valor de α?

a) Un triángulo escaleno, un triángulo isósceles y un ángulo de 40°.
b) Con triángulos isósceles y ángulo α.
c) Dos triángulos diferentes.
d) Un ángulo de 40° y dos triángulos isósceles que hay en la figura.

4.2 Señala, a partir de los datos. ¿Qué necesitas para resolver el problema?

a) Analizar cada uno de los triángulos que forman la figura.
b) Averiguar la superficie del triángulo.
c) Aplicar el teorema de Pitágoras.
d) Completar los otros valores con las propiedades de suma de triángulos.

4.3 Muestra, la solución del problema de acuerdo a lo que indicaste en el punto anterior.

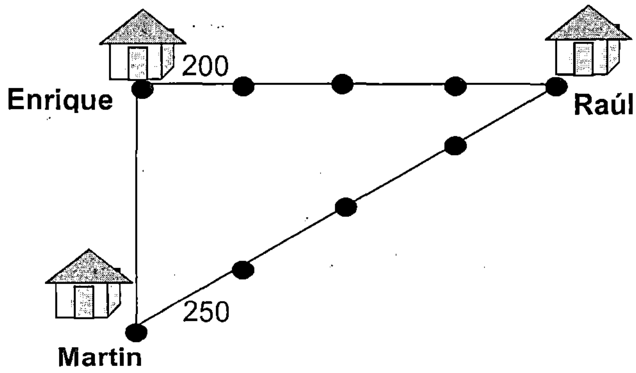
4.4 Explica, si el gráfico presentado te permitió resolver el problema con rapidez.

....

....

....

5. Enrique y Martin salen de sus casas para visitar a Raúl. Enrique hace 4 paradas cada 200m y Martin otras 4 cada 250m hasta encontrarse en la casa de Raúl, como indica el gráfico. ¿Qué distancia hay entre la casa de Enrique y la de Martin? (2 p)



5.1 Identifica, en el texto marcando una sola alternativa que mejor responda a la pregunta ¿Qué te pide este problema?

a) Averiguar la distancia de las casas de Enrique y Martin.
b) Calcular la distancia de la casa.
c) Hallar la distancia de la casa de Raúl y Enrique.
d) Calcular la altura del triángulo.

5.2 Señala, a partir de los datos. ¿Qué necesitas para resolver el problema?

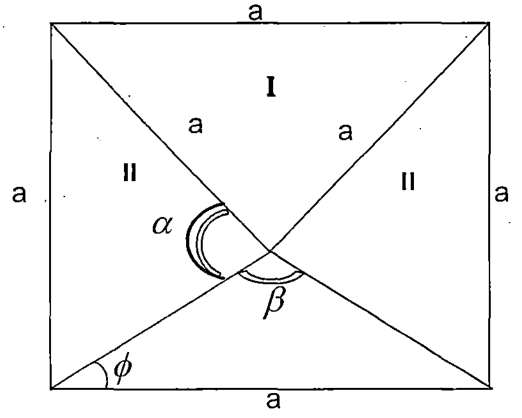
a) Aplicar el teorema de Pitágoras.
b) Averiguar la superficie del triángulo.
c) Hacer un diagrama de árbol.
d) Hacer una tabla.

5.3 Muestra, la solución del problema de acuerdo a lo que indicaste en el punto anterior.

5.4 Explica, si el dibujo del problema te ha permitido resolver con rapidez.

....
....
....

6. Cuál es la medida de los ángulos α , β y ϕ Si el triángulo I es equilátero y los triángulos II son isósceles.



6.1 Identifica, en el texto marcando una sola alternativa que mejor responda a la pregunta ¿Cuál es la incógnita?

a) Los ángulos β y ϕ .
b) La variable "a".
c) Los triángulos I y II.
d) Los ángulos α , β y ϕ .

6.2 Señala, a partir de los datos. ¿Qué necesitas para resolver el problema?

a) Aplicar el teorema de Pitágoras.
b) Averiguar la superficie del triángulo.
c) Hacer un diagrama de árbol.
d) Hacer una tabla.

6.3 Resuelve, el problema de acuerdo a lo que indicaste en el punto anterior.

6.4 Indica, ¿qué conceptos matemáticos utilizaste para resolver el problema?

....

....

....

7. La suma de los ángulos de un triángulo es 180°. La medida del ángulo pequeño es la mitad del ángulo mediano, y la medida del ángulo grande es igual a la medida del ángulo mediano aumentado en la medida del ángulo pequeño. Determinar la medida de los tres ángulos.

7.1 Identifica, en el texto la alternativa que mejor responda a la pregunta ¿De qué trata el problema?

a) De la medida de los ángulos de un triángulo.
b) Del ángulo grande del triángulo.
c) Del ángulo mediano del triángulo.
d) Del perímetro de triangulo.

7.2 Señala, a partir de los datos. ¿Qué necesitas para resolver el problema?

a) Hacer una tabla y buscar datos.
b) Representar gráficamente y definir las variables.
c) Aplicar el teorema de catetos.
d) Representar gráficamente y sumar el perímetro.

7.3 Resuelve, el problema de acuerdo a lo que indicaste en el punto anterior.

7.4 Argumenta, ¿qué fue lo más difícil para resolver el problema?

....
....
....
....

PRUEBA ESCRITA EN CONOCIMIENTO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO

Institución Educativa Secundaria:..
Apellidos y Nombres:..
INSTRUCCIONES:

- Lea atentamente y responda las siguientes preguntas, evite borrones y mala letra.
- Esta prueba consta de 7 preguntas con una duración de 60 minutos máximo.
- Recuerda que el tema es: ángulos, triángulos, elementos, clasificación y construcciones básicas.

Marque la alternativa correcta

1. Cuáles son los elementos primarios de un triángulo? (2 puntos)

a) Equilátero, isósceles, escaleno.
b) Obtusángulo, acutángulo y rectángulo.
c) Vértices, lados y ángulos interiores.
d) Altura, mediana, mediatriz.

2. ¿Cómo se llama el triángulo que tiene dos lados iguales y dos ángulos iguales? (2 puntos)

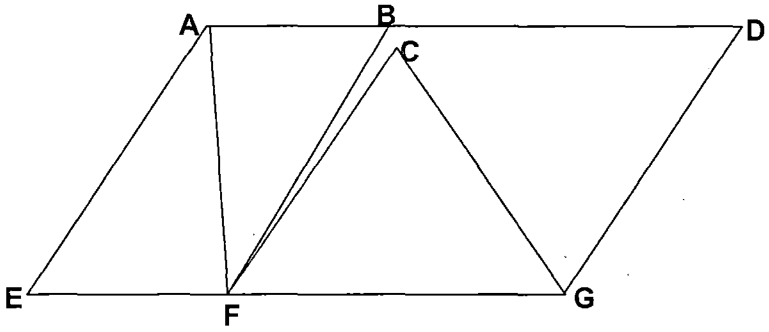
a) Equilátero.
b) Isósceles.
c) Escaleno.
d) Obtusángulo.

3. Completa los espacios vacíos con las palabras: isósceles, bisectriz, equiángulo. (1p c/u)

a) En todo triángulo..............., la medida de cada ángulo interior es 60°.

b) La............. de un ángulo es la semirrecta que tiene su origen en el vértice del ángulo y lo divide en dos ángulos congruentes.

4. Responde correctamente los datos que faltan en el siguiente cuadrilátero: (1 p c/u)



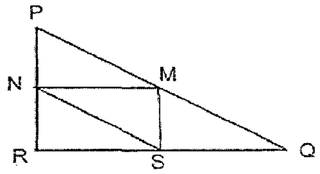
a) ¿Cuánto miden $\angle ABF + \angle BFA + \angle FAB$? ________________________

b) Si $\angle ABF = 85°$ entonces $\angle FBD$ = ______ °

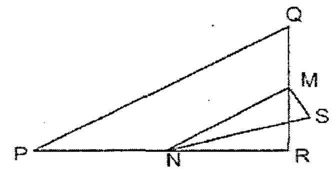
c) ¿Con qué letra minúscula marcarías el lado $\overline{CG}$ del $\triangle FGC$? ________________

5. Encierre con un círculo la figura que se ajusta a la siguiente descripción: El triángulo PQR es un triángulo rectángulo con el ángulo recto en R. El lado RQ es menor que el lado PR. M es el punto medio del lado PQ y N es el punto medio del lado QR. S es un punto del interior del triángulo. El segmento MN es mayor que el segmento MS. (3 p)

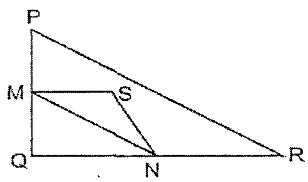
A



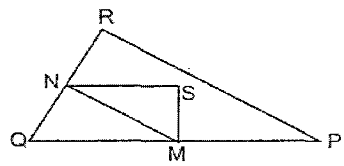
B.



C



D



6. Interpreta y escribe el significado de los siguientes símbolos matemáticos. (2p c/u)

a) $\angle BAC \cong \angle EDF$

----

b) $\overleftrightarrow{AB} \quad \mathrm{I} \quad \overrightarrow{m} \quad = \quad \phi$

----

c) $m\angle A - m\angle B = 20^\circ$

----

7. Relaciona con una flecha los enunciados con su respectiva expresión simbólica que le corresponde. (1p c/u)

a. Angulo, paralelo, perpendicular.

b. La recta L_1 es paralelo a la recta L_2

c. La medida del ángulo AHC es igual a 5 veces la medida del ángulo ABC.

$m\angle AHC = 5(m\angle ABC)$

$\overleftrightarrow{L}_1 \; // \; \overleftrightarrow{L}_2$

PRUEBA ESCRITA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Institución Educativa Secundaria:....................................
Apellidos y Nombres:..

INSTRUCCIONES:

- Lea atentamente y responda las siguientes preguntas, evite borrones y mala letra.
- La prueba escrita consta de 8 problemas con una duración de 90 minutos máximo.
- Recuerda, el tema es: Triángulos, elementos, clasificación y construcciones básicas

1. La suma de los ángulos de un triángulo es 180°. La medida del ángulo pequeño es la mitad del ángulo mediano, y la medida del ángulo grande es igual a la medida del ángulo mediano aumentado en la medida del ángulo pequeño. Determinar la medida de los tres ángulos.

1.1 Identifica, en el texto la alternativa que mejor responda a la pregunta ¿De qué trata el problema?

a) De la medida de los ángulos de un triángulo.
b) Del ángulo grande del triángulo.
c) Del ángulo mediano del triángulo.
d) Del perímetro de triangulo.

1.2 Señala, a partir de los datos. ¿Qué necesitas para resolver el problema?

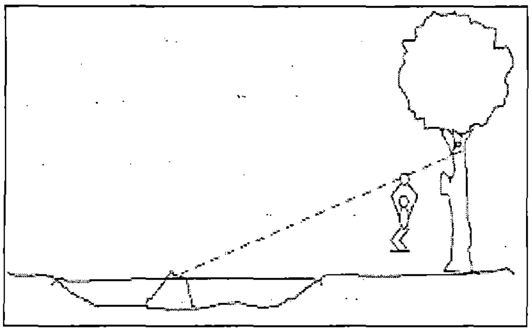
a) Hacer una tabla y buscar datos.
b) Representar gráficamente y definir las variables.
c) Aplicar el teorema de catetos.
d) Representar gráficamente y sumar el perímetro.

1.3 Resuelve, el problema de acuerdo a lo que indicaste en el punto anterior.

1.4 Argumenta, ¿qué fue lo más difícil para resolver el problema?

....
....
....
....

2. Según se representa en el dibujo, queremos colocar una cuerda entre las ramas del árbol y la roca que hay en el centro de un río para darnos divertidos chapuzones. (2 p)



Sabemos que la distancia de las ramas al suelo es de 4 metros, y que también existe esta misma distancia entre el árbol y la orilla del río, y entre ésta y la roca; pero no sabemos la distancia que hay entre las ramas y la roca. ¿Puedes indicarnos la medida que ha de tener la cuerda para que podamos realizar este juego?

2.1 Identifica, en el texto marcando una sola alternativa que mejor responda a la pregunta ¿Qué te pide este problema?

a) Averiguar la distancia de las ramas a la roca.
b) Calcular la distancia de la orilla a la roca.
c) Hallar la anchura del rio.
d) Calcular la altura total del árbol.

2.2 Señala, a partir de los datos. ¿Qué necesitas para resolver el problema?

a) Aplicar el teorema de Pitágoras.
b) Averiguar la superficie del triángulo.
c) Hacer un diagrama de árbol.
d) Hacer una tabla.

2.3 Resuelve, el problema de acuerdo a lo que señalaste en el punto anterior.

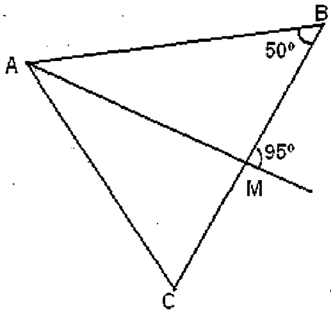
2.4 Explica, si el gráfico del problema te ha permitido resolver con rapidez.

....

....

....

3. En el triángulo ABC de la figura. $\overline{AM}$, está sobre la bisectriz del $\angle A$, Determine qué tipo de triángulo es el Δ ABC? (3 p)



3.1 Identifica, la alternativa que mejor responda a la pregunta ¿Qué datos te presenta el problema?

a) Una bisectriz, dos ángulos exteriores.
b) Un ángulo de 95° un ángulo de 50° e indica que es un triángulo.
c) Un ángulo interior de 50°, un ángulo exterior de 95°, una bisectriz en el ángulo A.
d) Un triángulo equiángulo y una bisectriz.

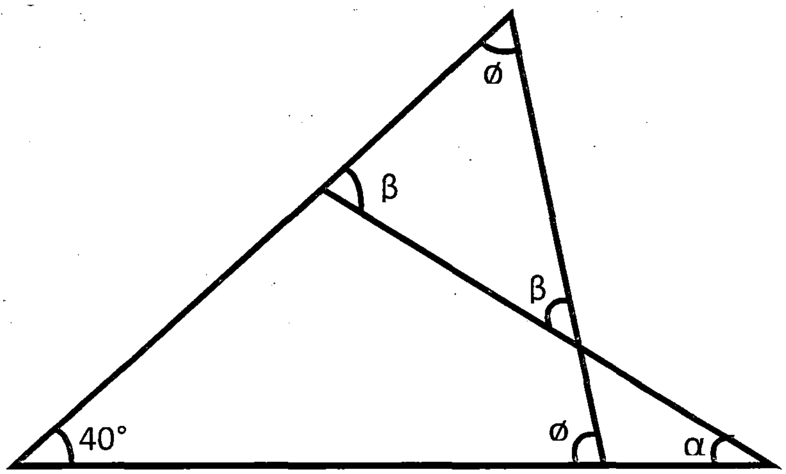
3.2 Señala, a partir de los datos. ¿Qué necesitas para resolver el problema?

a) Aplicar el teorema de Pitágoras.
b) Rehacer el gráfico.
c) Usar la propiedad de suma de ángulos suplementarios y la propiedad de suma de ángulos internos de un triángulo.
d) Listar uno a uno los datos presentados.

3.3 Muestra, la solución del problema de acuerdo a lo que indicaste en el punto anterior.

3.4 Expresa, si puedes resolver el problema de otra forma.

4. En el siguiente triángulo, la medida del ángulo "α" es:



4.1 Identifica, la alternativa que mejor responda a la pregunta ¿con que datos se cuenta para poder calcular el valor de α?

a) Un triángulo escaleno, un triángulo isósceles y un ángulo de 40°.
b) Con triángulos isósceles y ángulo α.
c) Dos triángulos diferentes.
d) Un ángulo de 40° y dos triángulos isósceles que hay en la figura.

4.2 Señala, a partir de los datos. ¿Qué necesitas para resolver el problema?

a) Analizar cada uno de los triángulos que forman la figura.
b) Averiguar la superficie del triángulo.
c) Aplicar el teorema de Pitágoras.
d) Completar los otros valores con las propiedades de suma de triángulos.

4.3 Muestra, la solución del problema de acuerdo a lo que indicaste en el punto anterior.

4.4 Explica, si el grafico presentado te permitió resolver el problema con rapidez.

....

....

....

5. Un ómnibus parte del terminal terrestre y se dirige a 12 km. en dirección norte. Luego avanza 9km. en dirección este hasta hacer su primera parada. ¿A qué distancia del terminal realiza el ómnibus su primera parada?

5.1 Identifica, en el texto la alternativa que mejor responda a la pregunta ¿Qué se desea conocer?

a) La distancia entre el terminal y la primera para del ómnibus.
b) Todas las distancias que recorre el ómnibus.
c) El recorrido en dirección norte del ómnibus.
d) El perímetro de recorrido del ómnibus

5.2 Señala, a partir de los datos. ¿Qué necesitas para resolver el problema?

a) Representar gráficamente y aplicar el teorema de Pitágoras.
b) Averiguar la superficie del triángulo.
c) Aplicar el teorema de catetos.
d) Representar gráficamente y sumar el perímetro.

5.3 Resuelve, el problema de acuerdo a lo que indicaste en el punto anterior.

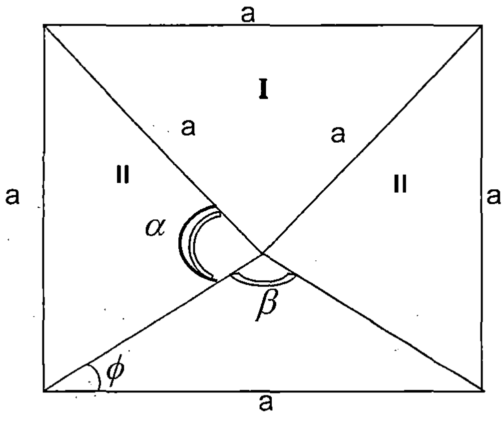
5.4 Argumenta, ¿qué fue lo más difícil para resolver el problema?

....

....

....

6. Cuál es la medida de los ángulos α , β y ϕ Si el triángulo I es equilátero y los triángulos II son isósceles.



6.1 **Identifica**, en el texto marcando una sola alternativa que mejor responda a la pregunta ¿Cuál es la incógnita?

a) Los ángulos β y ϕ .
b) La variable "a".
c) Los triángulos I y II.
d) Los ángulos α , β y ϕ .

6.2 **Señala**, a partir de los datos. ¿Qué necesitas para resolver el problema?

a) Aplicar el teorema de Pitágoras.
b) Averiguar la superficie del triángulo.
c) Aplicar la suma de ángulos internos de un triángulo.
d) Definir variables.

6.3 **Resuelve,** el problema de acuerdo a lo que indicaste en el punto anterior.

6.4 **Indica**, ¿qué conceptos matemáticos utilizaste para resolver el problema?
....
....
....

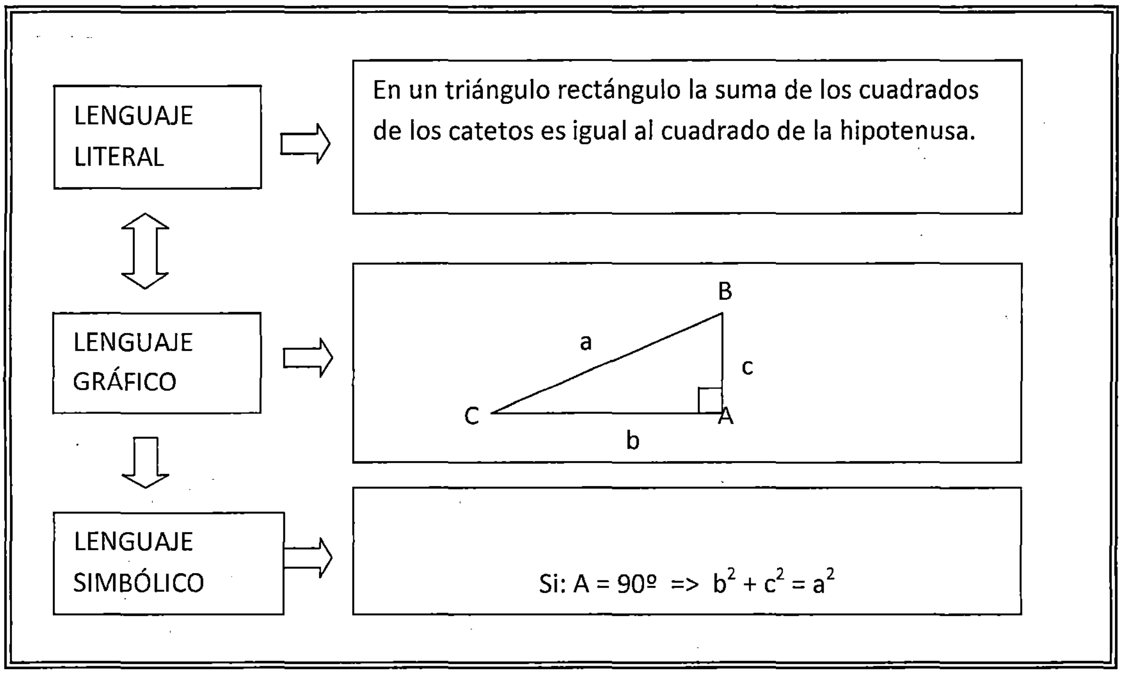


FIGURA 4: Ejemplo de aplicación del conocimiento del lenguaje matemático.