



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA
ESCUELA PROFESIONAL DE DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS



**LA REPRESENTACIÓN DE BRYANT DE LAS SUPERFICIES DE
CURVATURA MEDIA CONSTANTE**

TESIS

PRESENTADA POR:

Bach. JESÚS MARINO MAMANI PAMPA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

**LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS**

PUNO - PERÚ

2024



NOMBRE DEL TRABAJO

LA REPRESENTACIÓN DE BRYANT DE LAS SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE.pdf

AUTOR

JESÚS MARINO MAMANI PAMPA

RECUENTO DE PALABRAS

15892 Words

RECUENTO DE CARACTERES

67269 Characters

RECUENTO DE PAGINAS

92 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

2.2MB

FECHA DE ENTREGA

Jul 5, 2024 8:32 AM GMT-5

FECHA DEL INFORME

Jul 5, 2024 8:34 AM GMT-5

● 19% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

- 17% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 11% Base de datos de trabajos entregados
- 3% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref.

● Excluir del Reporte de Similitud

- Material bibliográfico
- Material citado
- Bloques de texto excluidos manualmente
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 12 palabras)



Adelaida Otazu Conza
Subdirección de coordinación
Físico Matemáticas

Faustino Murillo Mamani
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
DNI. 29365471
CM. N° 555

Resumen



DEDICATORIA

Este trabajo esta dedicado a mi familia quienes fueron mi principal motivo para seguir creciendo profesionalmente

Sobre todo, a mis padres quienes me brindaron su apoyo incondicional



AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi alma máter a la Universidad Nacional del Altiplano por haber permitido formarme, especialmente a mi asesor de tesis, al Mt. Faustino Murillo Mamani por su orientación y asesoramiento. Extiendo mi cordial agradecimiento a mis jurados evaluadores por tomarse el tiempo para servir en mi comité.



ÍNDICE GENERAL

	Pág.
DEDICATORIA	
AGRADECIMIENTOS	
ÍNDICE GENERAL	
ÍNDICE DE FIGURAS	
ÍNDICE DE ACRÓNIMOS	
RESUMEN.	11
ABSTRACT	12
CAPÍTULO I	
INTRODUCCIÓN	
1.1. JUSTIFICACIÓN	13
1.2. ANTECEDENTES	14
1.3. HIPÓTESIS DEL TRABAJO	17
1.4. OBJETIVOS GENERALES	17
1.5. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	17
CAPÍTULO II	
REVISIÓN DE LITERATURA	
2.1. EL ESPACIO EUCLIDIANO \mathbb{R}^n	18
2.2. TOPOLOGÍA EN \mathbb{R}^n	21
2.3. CURVAS	27
2.4. SUPERFICIES REGULARES	32
2.5. VARIETADES DIFERENCIABLES	45
2.6. MÉTRICA RIEMANNIANA	51



CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN	64
--	-----------

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. EL ESPACIO HIPERBÓLICO	65
--	-----------

4.2. TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE BRYANT	70
---	-----------

V. CONCLUSIONES87
----------------------------------	------------

VI. RECOMENDACIONES88
--------------------------------------	------------

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS89
--	------------

TEMA: Geometría Hiperbólica

ÁREA: Matemática

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: Matemática Pura

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 19 de julio de 2024



ÍNDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1 Semi-plano superior cerrado	23
Figura 2 Circunferencia unitaria en \mathbb{R}^2	28
Figura 3 Hélice cilíndrica	28
Figura 4 Parábola de Neill	29
Figura 5 Superficie regular	33
Figura 6 k_n es curvatura normal de C en p	40



ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

- \mathbb{R} : Conjunto de los números reales.
- $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$: Espacios euclidianos
- $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$: Vectores en el espacio euclidiano
- λ_1, λ_2 : Números reales
- \mathbb{N} : Conjunto de números naturales
- E : Espacio vectorial real
- $\langle ; \rangle$: Producto interno
- $|\mathbf{x}|$: Norma de un vector
- $d(x, y)$: distancia entre dos puntos
- a : Un punto en el espacio topológico en \mathbb{R}^n
- r : Radio de la bola
- x, y : Puntos en espacio topológico en \mathbb{R}^n
- $B(a, r)$: Bola abierta con centro a y radio r
- $B[a, r]$: Bola cerrada con centro a y radio r
- $S[a, r]$: Esfera con centro a y radio r
- S^{n-1} : Esfera unitaria de dimensión $n - 1$
- S^1 : Circunferencia unitaria
- X : Conjunto de un espacio topológico en \mathbb{R}^n
- X' : Es llamado conjunto derivado de X
- $\text{int.}X$: Puntos interiores a X



$\text{fr. } X \text{ o } \partial X$:	Frontera del conjunto X
\bar{X}	:	Clausura o puntos de adherentes de X
V, U	:	Conjuntos abiertos
J	:	Matriz jacobiana
α	:	Curva parametrizada diferenciable
α'	:	Vector velocidad o vector tangente
I	:	Intervalo en \mathbb{R}
t	:	Parámetro
l	:	Longitud de arco
$k(s)$:	Curvatura de α
$n(s)$:	Vector normal de α
$\tau(s)$:	Torsión de α
$b(s)$:	Vector binormal
S	:	Superficie regular
X	:	Aplicación diferenciable
dx	:	diferencial de una aplicación
$T_p S$:	Plano tangente a S en p
N	:	Vector normal a S
I_p	:	Primera forma fundamental
II_p	:	Segunda forma fundamental
E, F, G	:	Coeficientes de la I_p
e, f, g	:	Coeficientes de la II_p
k_n	:	Curvatura normal
k_1, k_2	:	Curvaturas Principales



K	:	Curvatura de Gauss
H	:	Curvatura media
Γ_{ij}^k	:	Simbolos de Christoffel
M	:	Variedad de dimensión n o n -variedad
\cup_α	:	Familia de aplicaciones
$[X, Y]$:	Corchete de Lie
g_{ij}	:	Metrica Riemanniana
\mathbb{H}^n	:	Espacio Hiperbólico
G	:	Grupo de Lie
∇	:	Conexión en M
$\frac{Dv}{dt}$:	Derivada covariante
\mathbb{L}^4	:	Espacio de Lorentz
Herm(2)	:	Matriz hermitica
$SL(2, \mathbb{C})$:	Grupo de Lie complejo de dimensión 2
ϕ^*	:	Matriz transpuesta y conjugada de ϕ
e_0, e_1, e_2, e_3	:	Bases de \mathbb{L}^4
N^3	:	Cono positivo nula
w, w_j^i	:	Formas canonicas
ϕ	:	Forma cuadratica holomorfa



RESUMEN

La representación de Bryant se basa en datos holomorfos y establece una correspondencia entre las superficies de curvatura media constante en el espacio hiperbólico y ciertos objetos holomorfos. Esta representación es similar a la fórmula de representación de Weierstrass en el espacio euclidiano. El estudio de la representación de Bryant ha sido realizado por varios matemáticos, y se ha refinado y generalizado a lo largo del tiempo. Se han explorado extensiones de esta representación en diferentes contextos geométricos y se han obtenido resultados interesantes. En concreto, la representación de Bryant de las superficies de curvatura media constante es un importante resultado en la teoría de superficies. Esta representación utiliza datos holomorfos y establece una correspondencia entre estas superficies y ciertos objetos holomorfos. Ha sido estudiada y generalizada por varios matemáticos, y se han obtenido resultados significativos en diversos contextos geométricos.

Palabras clave: Representación de Bryant, Superficie, Geometría diferencial.



ABSTRACT

Bryant's representation is based on holomorphic data and establishes a correspondence between surfaces of constant mean curvature in hyperbolic space and certain holomorphic objects. This representation is similar to the Weierstrass representation formula in Euclidean space. The study of the Bryant representation has been carried out by several mathematicians, and has been refined and generalized over time. Extensions of this representation have been explored in different geometric contexts and interesting results have been obtained. In particular, Bryant's representation of surfaces of constant mean curvature is an important result in surface theory. This representation uses holomorphic data and establishes a correspondence between these surfaces and certain holomorphic objects. It has been studied and generalized by several mathematicians, and significant results have been obtained in various geometric contexts.

Keywords: Bryant representation, Surface, differential geometry.



CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. JUSTIFICACIÓN

La representación de Bryant se refiere a un método utilizado para visualizar superficies de curvatura media constante en el espacio tridimensional. Fue desarrollado por Robert L. Bryant, un matemático estadounidense conocido por sus contribuciones en geometría diferencial. En geometría diferencial, la curvatura media de una superficie en un punto dado mide cómo se curva la superficie en ese punto. Una superficie se dice que tiene curvatura media constante si su curvatura media es la misma en todos los puntos. La representación de Bryant proporciona una forma de visualizar estas superficies mediante una proyección en el espacio euclidiano tridimensional. La idea principal es considerar las superficies como grafos inmersos en el espacio tridimensional, donde los vértices representan los puntos de curvatura media constante y las aristas conectan los vértices vecinos. Esta representación tiene varias propiedades interesantes. Por ejemplo, las curvas en las superficies de curvatura media constante se proyectan como líneas rectas en el espacio euclidiano, lo que facilita el estudio de propiedades geométricas. Además, la representación de Bryant también permite visualizar la interacción entre diferentes partes de la superficie y revelar patrones y estructuras ocultas. En resumen, la representación de Bryant es una herramienta útil en la geometría diferencial para visualizar y estudiar superficies de curvatura media constante en el espacio tridimensional. Proporciona una forma intuitiva de comprender y analizar estas superficies y ha sido utilizada en diversos estudios e investigaciones en el campo de la geometría diferencial.



1.2. ANTECEDENTES

Camacho (2006), en su trabajo proporciona una prueba uniforme y completa del Teorema Fundamental de Superficies en R^3 , un resultado crucial en la teoría de clasificación de superficies. El teorema aborda dos preguntas fundamentales: si una superficie está determinada por su primera y segunda forma fundamental, y si es posible construir una superficie dadas dos formas cuadráticas que sean su primera y segunda forma fundamental.

Para responder a estas preguntas, se utiliza el Teorema de Frobenius, cuya demostración se basa en el Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Estos resultados, junto con el Teorema de la Función Implícita, son los pilares principales de la Topología diferencial y el Cálculo en Variedades, según se menciona en (Araújo, 2001).

El trabajo demuestra de manera completa el Teorema Fundamental de Superficies al combinar estos resultados. Se menciona que Bonnet (Belén, 2020) ha estudiado ampliamente las preguntas anteriores, y se proporciona una formulación clásica de sus resultados en [Bryant, 1987, Do Carmo y Flaherty Francis, 1992, Lima, 1973, Marcel Berger, 1998] desde una perspectiva moderna.

Se destaca que en la literatura básica de geometría actual es difícil encontrar una exposición completa de estos resultados. Sin embargo, se hace referencia al texto de Stoker (Lima, 1973), que se considera magnífico, aunque no ofrece una prueba unificada del Teorema Fundamental de Superficies.

En resumen, este trabajo presenta una prueba uniforme y completa del Teorema Fundamental de Superficies en R^3 , responde a preguntas importantes sobre la determinación de superficies por su primera y segunda forma fundamental, y proporciona



una construcción de superficies a partir de formas cuadráticas.

Cavalcante Oliveira (2018), en su tesis se estudian dos espacios homogéneos de dos parámetros, específicamente el grupo de Heisenberg $E(0,12)$. El enfoque principal se centra en las superficies de ángulo constante dentro de este grupo y se procede a su clasificación. Además, se presentan herramientas fundamentales necesarias para el estudio.

El objetivo principal de este trabajo es demostrar una generalización de una proposición que se aplica en el espacio Euclidiano. Dicha proposición establece condiciones bajo las cuales una superficie, homeomorfa a un disco y con curvatura media constante, puede ser considerada totalmente umbílica. La demostración de esta generalización se lleva a cabo mediante la utilización de la diferencial de Abresch-Rosenberg y los pares de Codazzi.

García, s.f., en investigación se centra en la teoría de superficies de curvatura media constante uno en el espacio hiperbólico. Se menciona que esta teoría se inició con el trabajo seminal de R. Bryant, donde obtuvo una representación de tales superficies en términos de datos holomorfos, siguiendo una analogía con la fórmula de representación de Weierstrass en R^3 . Posteriormente, otros matemáticos contribuyeron en el tema, como (Umehara M., 1993), quienes refinaron el trabajo de Bryant y construyeron una variedad de ejemplos de superficies de curvatura media uno en H^3 , conocidas como superficies de Bryant.

(de Oliveira, 1994), en su tesis se estudian las superficies con curvatura media constante en el espacio hiperbólico de Robert Bryant. Las superficies en tal espacio con curvatura igual a uno poseen propiedades similares y válidas en el espacio euclidiano

Se menciona que A.J. Small reinterpretó las superficies de Bryant y proporcionó una fórmula tipo Weierstrass para estas superficies, utilizando operaciones algebraicas en



las derivadas de segundo orden de un par de funciones holomorfas. Además, se señala que se han realizado muchas otras contribuciones al respecto. Se destaca que Bianchi también proporcionó un método explícito para construir superficies de curvatura media constante uno en el espacio hiperbólico a partir de datos holomorfos.

El resumen indica que se presentará una demostración alternativa del resultado de Bryant, con el objetivo de utilizar técnicas estándar de la teoría de subvariedades y obtener una representación meromorfa para una clase de superficies. Se menciona que esto es importante, ya que permite un estudio preciso de la geometría global de dicha familia, aprovechando los poderosos teoremas del análisis complejo.

Se concluye mencionando que esta demostración alternativa puede sugerir generalizaciones de la teoría, algo que ha sido explorado en investigaciones recientes en el campo de otras teorías geométricas.

En resumen, este trabajo presenta una demostración alternativa del resultado de Bryant sobre las superficies de curvatura media constante uno en el espacio hiperbólico. Se destacan las contribuciones anteriores en el tema y se resalta la importancia de obtener una representación meromorfa para facilitar el estudio de la geometría global de estas superficies y explorar posibles generalizaciones en otras teorías geométricas. (Calderón Barreda et al., 2021), en esta memoria se aborda la noción de curvatura en superficies, un concepto interesante que carece de una definición única. Dependiendo de los aspectos que se deseen estudiar en relación con una superficie, se utilizan diferentes definiciones, siendo las más comunes las de curvatura de Gauss y curvatura media.

El objetivo de esta memoria es estudiar superficies con curvatura de Gauss y curvatura media constantes, presentando clasificaciones y diferentes ejemplos de cada tipo. Esto proporcionará un recorrido por la historia de la búsqueda de este tipo de



superficies.

Además, se tratan conceptos de geometría intrínseca y extrínseca, introduciendo resultados interesantes como la curvatura de Casorati, las conjeturas de Hopf y Willmore, y el teorema de inmersión de Nash.

En resumen, esta memoria se enfoca en el estudio de superficies con curvatura de Gauss y curvatura media constantes. Se presentan clasificaciones y ejemplos, y se exploran conceptos de geometría intrínseca y extrínseca, junto con resultados relevantes en el campo.

1.3. HIPÓTESIS DEL TRABAJO

Es posible hacer la representación de Bryant de las superficies de curvatura media constante en el espacio hiperbólico H^3 , puesto que la representación de Bryant de las superficies de curvatura media constante ofrece una herramienta efectiva y versátil para estudiar y comprender las propiedades geométricas y topológicas de estas superficies en el contexto de la geometría diferencial.

1.4. OBJETIVOS GENERALES

Encontrar la representación de Bryant de las superficies de curvatura media constante en el espacio hiperbólico H^3 .

1.5. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudiar y analizar las propiedades de las superficies de curvatura media constante
- Mostrar que la curvatura media depende de los coeficientes de la segunda forma fundamental en \mathbb{L}^4 .



CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. EL ESPACIO EUCLIDIANO \mathbb{R}^n

El espacio euclidiano n -dimensional $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, es el producto cartesiano de n factores \mathbb{R} . Los elementos de \mathbb{R}^n son llamados puntos o vectores que tienen la forma $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Sean $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ elementos de \mathbb{R}^n y $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, se define la adición $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ y el producto $\lambda_1 \mathbf{x}$, como

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda_1 \mathbf{x} = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_1 x_n)$$

El vector $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ es el elemento neutro para la adición y se llama origen de coordenadas y $-\mathbf{x} = (-x_1, \dots, -x_n)$ es el simétrico de \mathbf{x} .

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes igualdades

- a. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
- b. $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$
- c. $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = -\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- d. $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$
- e. $\lambda_1(\lambda_2 \mathbf{x}) = (\lambda_1 \lambda_2) \mathbf{x}$
- f. $(\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x} + \lambda_2 \mathbf{x}$
- g. $\lambda_1(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda_1 \mathbf{x} + \lambda_1 \mathbf{y}$



Definición 2.1. Un producto interno en un espacio vectorial real E es una correspondencia que para cada $x, y \in E$ un número real, denotado por $\langle x, y \rangle$, de tal modo que, para $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumplen (Elon, 2004)

- a. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- b. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- c. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- d. $\langle x, x \rangle > 0$, si $x \neq 0$

Existen muchos ejemplos de producto interno, sin embargo el producto interno más usado es el producto interno canónico.

Definición 2.2. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, el número real

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

se llama producto interno canónico de x por y . (Elon, 2014)

Se dice que dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$, son ortogonales, y se escribe $x \perp y$, si $\langle x, y \rangle = 0$.

La longitud de un vector en \mathbb{R}^n , está relacionada al producto interno.

Definición 2.3. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, el número real

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

se llama norma (o longitud) del vector x , y satisface las siguientes propiedades (Elon, 2004)

- a. $|x + y| \leq |x| + |y|$



- b. $|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|$
- c. $|x| > 0$, si $x \neq 0$.

Si se usa el producto interno canónico, se tiene la norma canónica definida como

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

si $|x| = 1$, se dice que x es un vector unitario, y todo vector de $u \in \mathbb{R}^n$, se puede expresar como vector unitario mediante $u = \frac{x}{|x|}$, para todo $x \neq 0$.

Teorema 2.1. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$$

vale la igualdad si, y solamente si, uno de los vectores es múltiplo escalar del otro. (Elon, 2004)

Las normas en un espacio vectorial dan origen a la idea de distancia entre dos puntos del espacio vectorial.

Definición 2.4. Sean $x, y \in E$, la distancia de x a y está definida por

$$d(x, y) = |x - y|$$

La distancia goza de las siguientes propiedades, para $x, y, z \in E$ (Elon, 2004)

- a. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
- b. $d(x, y) = d(y, x)$
- c. $d(x, y) > 0$, si $x \neq y$

estas propiedades se derivan inmediatamente de las propiedades de la norma en un espacio

vectorial real. La primera propiedad es la más importante que es llamada la desigualdad triangular.

2.2. TOPOLOGÍA EN \mathbb{R}^n

Definición 2.5. Sea $a \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, se definen la bola abierta, bola cerrada y esfera, respectivamente, con centro en a y radio r , como (Elon, 2004)

- a. $B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}$
- b. $B[a; r] = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq r\}$
- c. $S[a; r] = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = r\}$

Una notación especial está reservada para la esfera unitaria de dimensión $n - 1$:

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$$

Así, S^{n-1} denota la esfera con centro en el origen y de radio 1. Si $n = 2$, S^1 es llamada la circunferencia unitaria.

Definición 2.6. Se dice que un conjunto $X \in \mathbb{R}^n$ está acotado, si está contenido en alguna bola cerrada $B[a; r]$. (Elon, 2014)

Decir que X está contenido en alguna bola cerrada, es equivalente a: Un subconjunto X está acotado si existe un número $c > 0$ tal que $|x| \leq c$ para todo $x \in X$.

Definición 2.7. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Un punto $a \in \mathbb{R}^n$ se llama punto de acumulación de X si toda bola abierta con centro en a contiene algún punto de X , diferente de a . Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \varepsilon$. (Elon, 2004)

El conjunto de todos los puntos de acumulación del conjunto X , está denotado por X' , donde X' es llamado el conjunto derivado de X .

Definición 2.8. Sea $a \in X \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que el punto a es interior al conjunto X si, para

algún $r > 0$, se tiene que $B(a; r) \subset X$. El conjunto $\text{int.}X$ de los puntos interiores a X se llama el interior del conjunto X . Si $a \in \text{int.}X$, se dice que X es una vecindad de a . (Elon, 2014)

Decir que a es un punto interior al conjunto X significa que todos los puntos suficientemente cercanos al punto a también pertenecen al conjunto X . Puesto que $a \in \text{int.}X$, entonces $\text{int.}X \subset X$.

Si un punto $a \in X$ no es punto interior a X es equivalente afirmar que toda bola con centro en a contiene puntos del complemento del conjunto X , es decir, para todo $\delta > 0$ existe $y \in \mathbb{R}^n - X$ tal que $|y - a| < \delta$.

Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$ el semi-plano superior cerrado (figura 1). Si $p = (a, b)$ con $b > 0$, entonces $p \in \text{int.}X$.

En efecto,

$$\begin{aligned}(x, y) \in B(p; b) &\Rightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < b \\ &\Rightarrow \sqrt{(y - b)^2} \leq \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < b \\ &\Rightarrow y^2 - 2by + b^2 < b^2 \\ &\Rightarrow y^2 < 2by \\ &\Rightarrow y > 0\end{aligned}$$

es decir, $(x, y) \in X$, y $B(p; b) \subset X$. Por lo tanto $p \in \text{int } X$.

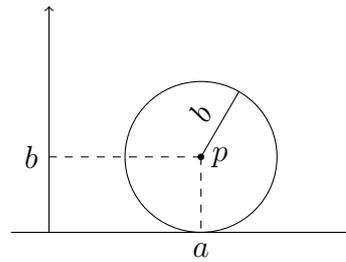


Figura 1

Semi-plano superior cerrado

Definición 2.9. Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se llama abierto si todos sus puntos son interiores, es decir, si para cada $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $B(x; \delta) \subset X$. Así, X es abierto si, y solamente si, $\text{int } X = X$. (Elon, 2004)

Una bola abierta $B(a; r) \subset \mathbb{R}^n$ es un ejemplo de conjunto abierto, también es abierto el conjunto $X = \mathbb{R}^n - B[a; r]$, o sea, el complemento de la bola cerrada, pero la bola cerrada $B[a; r]$ en \mathbb{R}^n no es un conjunto abierto.

Definición 2.10. La frontera de un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto $\text{fr.}X$ (o ∂X) formado por los puntos de X que no son interiores a X , juntamente con los puntos de $\mathbb{R}^n - X$ que no son interiores a $\mathbb{R}^n - X$. (Elon, 2014)

Dado un conjunto X y un punto $a \in \mathbb{R}^n$, se tiene tres posibilidades: o $a \in \text{int.}X$, o $a \in \text{int.}\mathbb{R}^n - X$, o $a \in \text{fr.}X$. Los puntos que pertenecen a la frontera de X son llamados puntos frontera de X .

En el semi-plano superior cerrado $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$, el conjunto frontera es $\text{fr.}X = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\} = \text{eje } x$.

Definición 2.11. Una sucesión en \mathbb{R}^n es una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$, que asocia a cada número natural k un punto $x_k \in \mathbb{R}^n$. (Elon, 2014)

Las sucesiones se denotan por: (x_1, \dots, x_n) , $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ o simplemente (x_k) . Se dice que una sucesión (x_k) es convergente si existe $a = \lim x_k$, es decir, si para todo $\varepsilon > 0$



existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0$ implica $|x - a| < \varepsilon$.

Definición 2.12. Un punto $a \in \mathbb{R}^n$ se dice que es adherente a un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ si es el límite de una sucesión de los puntos de ese conjunto. (Elon, 2004)

El conjunto de los puntos adherentes a X se llama la clausura de X y es denotado por \bar{X} . Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se llama cerrado si contiene todos sus puntos adherentes, es decir, si $\bar{X} = X$.

Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si, y solamente si, su complemento $\mathbb{R}^n - F$ es abierto. Equivalentemente, $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si, y solamente si, $\mathbb{R}^n - A$ es cerrado.

Definición 2.13. Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si es cerrado y acotado. (Elon, 2014)

Decir que un conjunto K es compacto, es equivalente a: Toda sucesión de puntos $x_k \in K$ posee una subsucesión que converge a un punto de K .

Una aplicación $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida en el conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, asocia a cada punto $x \in X$ su imagen $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Las funciones $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, se llaman las funciones coordenadas de f . Entonces f puede escribirse como $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Definición 2.14. Se dice que f es continua en el punto $a \in X$ si, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

. (Elon, 2014)

En términos de bolas: para cada bola $B(f(a); \varepsilon)$ dada, existe una bola $B(a; \delta)$ tal que $f(B(a; \delta) \cap X) \subset B(f(a); \varepsilon)$. Se dice que $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua en el conjunto X si f es continua en todos los puntos $a \in X$. La continuidad de la aplicación f en el punto a es independiente de las normas en \mathbb{R}^n . La compuesta de dos

aplicaciones continuas es continua y la aplicación es continua en un punto si, y solamente si, sus funciones coordenadas son continuas en ese punto.

Teorema 2.2. La imagen $f(K)$ del conjunto compacto $K \subset X$ por la aplicación continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ es también un conjunto compacto. (Elon, 2014)

Toda función real $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continua en un conjunto compacto K alcanza sus valores mínimo y máximo en los puntos de K .

Una caracterización de las funciones continuas es la siguiente: Sea $X \subset \mathbb{R}^m$, la aplicación $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua si, y solamente si, la imagen inversa $f^{-1}(A)$ de todo conjunto abierto A en \mathbb{R}^n es un conjunto abierto en X .

Definición 2.15. Un homeomorfismo del conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ sobre un conjunto $Y \subset \mathbb{R}^n$ es una biyección continua $f : X \rightarrow Y$ cuya inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ también es continua. (Elon, 2014)

Si $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, se dice que X y Y son homeomorfos. La aplicación compuesta de dos homeomorfismos es un homeomorfismo. También el inverso de un homeomorfismo es un homeomorfismo.

Definición 2.16. La aplicación $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida en el abierto $U \subset \mathbb{R}^m$, se dice que es diferenciable en el punto $a \in U$ si existe una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que (Elon, 2004)

$$f(a + v) - f(a) = T \cdot v + r(v), \text{ donde } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$$

La transformación lineal T es llamada la derivada de f en el punto a y es denotada por $f'(a)$.

La transformación lineal $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ posee, en relación a las bases canónicas,

una matriz llamada la matriz jacobiana de f en el punto a , denotada por $Jf(a)$.

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}$$

donde $f = (f_1, \dots, f_n)$ y $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Teorema 2.3. Sean $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n, g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciables en los puntos $a \in U, b = f(a) \in V$, con $f(U) \subset V$. entonces $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ es diferenciable en el punto a y

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$$

(Elon, 2014)

Este teorema quiere decir que la derivada de la aplicación compuesta es la compuesta de las derivadas, y es llamada la regla de la cadena.

Si $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en el intervalo I , con $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es una función biyectiva creciente sobre $J = f(I)$, y la función inversa $f^{-1} : J \rightarrow I$ también es derivable, con $[f^{-1}]' = \frac{1}{f'(x)}$, es decir, la derivada de la función inversa depende de la derivada de la función f .

Definición 2.17. Sea $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos. una aplicación $f : U \rightarrow V$ se llama un difeomorfismo entre U y V si es biyectiva diferenciable, cuya inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ también es diferenciable. Entonces se dice que U y V son difeomorfos. (Elon, 2014)

Teorema 2.4 (Teorema de la aplicación inversa). Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clase $\mathcal{C}^k (k \geq 1)$ en el abierto $U \subset \mathbb{R}^m$. Si $a \in U$ es tal que $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es invertible entonces existe una bola abierta $B = B(a; \delta) \subset U$ tal que la restricción $f|_B$ es un difeomorfismo sobre

un abierto V . (Elon, 2014)

2.3. CURVAS

En esta sección se desarrolla la teoría de curvas en el espacio, estudiando sus parametrizaciones que representan la gráfica de las curvas y el recorrido de las mismas.

Definición 2.18. Una curva parametrizada es una aplicación diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de un intervalo abierto $I = (a, b)$ de la recta real \mathbb{R} en \mathbb{R}^3 . (Carmo, 2016)

La diferenciabilidad de α está dada por sus funciones coordenadas, es decir, sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ o $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, la aplicación $\alpha' : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ es la derivada de α llamada vector velocidad o vector tangente. La imagen del conjunto $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$ es llamada la traza de α .

Las curvas en \mathbb{R}^3 , de la forma $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t), 0)$, se pueden escribir como $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, es decir es una curva en el plano \mathbb{R}^2 .

Un ejemplo importante en \mathbb{R}^2 es la circunferencia de radio 1 y recorrido en sentido antihorario (figura 2)

$$\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = (\cos t, \sin t)$$

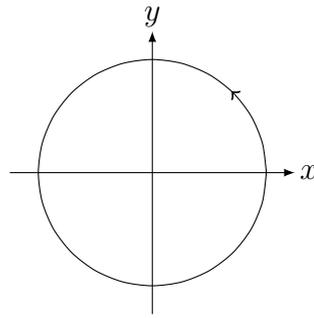


Figura 2

Circunferencia unitaria en \mathbb{R}^2

La curva parametrizada dada por

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad t \in \mathbb{R}$$

con $ab > 0$, tiene su traza en \mathbb{R}^3 llamada hélice cilíndrica construida sobre el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ (figura 3)

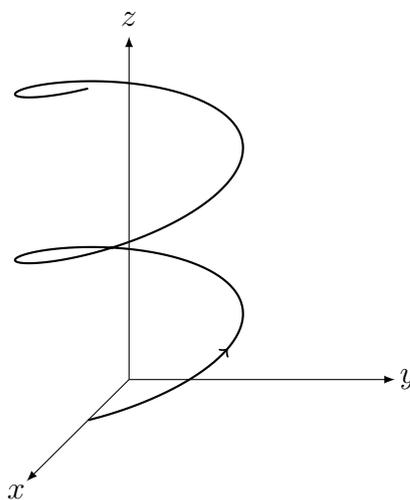


Figura 3

Hélice cilíndrica

Definición 2.19. Se dice que una curva parametrizada diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es regular si $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. (González, 2010)

Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, llamada la parábola de Neill, definida por

$$\alpha(t) = (t^2, t^3), \quad t \in \mathbb{R}$$

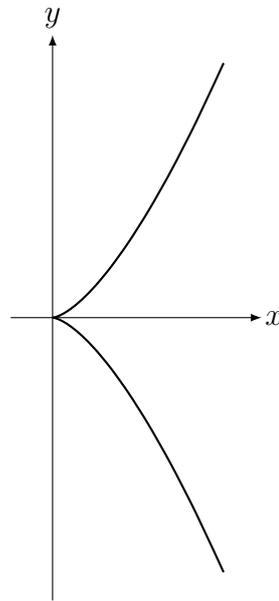


Figura 4

Parábola de Neill

Esta curva es diferenciable pero no es regular puesto que $\alpha'(0) = 0$.

La gráfica de una función $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable sobre un intervalo abierto es una curva regular en \mathbb{R}^2 , dada por

$$\alpha(t) = (t, g(t)), \quad t \in I$$

, por ejemplo, la gráfica de $g(t) = t^2$ dada por la parábola $y = x^2$.

Definición 2.20. La rapidez en $t \in I$ de la curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es $|\alpha'(t)|$. La longitud de arco entre t_1 y t_2 es

$$\int_{t_1}^{t_2} |\alpha'(t)| dt$$

(Tapp, 2016)

Se denota por ℓ o $\ell(\alpha)$ a la longitud de arco de la curva α , el término parametrizado por longitud de arco está dado para curvas con rapidez 1, es decir $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$, así $\ell(\alpha) = t_2 - t_1$.

En términos de producto interno, la longitud de curva se escribe como sigue

$$\ell(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} dt$$

tomando la norma euclidiana, se tiene

$$\ell(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

Definición 2.21. Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva regular parametrizada por longitud de arco, entonces la curvatura de α en $s \in I$ es el número real

$$k(s) = |\alpha''(s)|$$

(Tenenblat, 2008)

Sea la circunferencia de radio a parametrizada por longitud de arco

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{a}, a \operatorname{sen} \frac{s}{a}, 0 \right), \quad s \in \mathbb{R}$$



La curvatura de α es $k(s) = \frac{1}{a}$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Puesto que una curva regular parametrizada por longitud de arco tiene $|\alpha'(s)| = \sqrt{\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle} = 1$, implica que $\langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0$, es decir, $\alpha'(s)$ es ortogonal a $\alpha''(s)$, de donde se define un vector unitario en la dirección de $\alpha''(s)$.

Definición 2.22. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizada por longitud de arco tal que $k(s) > 0$. el vector

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{dk(s)}$$

es llamado el vector normal de α en s . Tenenblat, 2008

Si se denota por $t(s)$ al vector unitario $\alpha'(s)$, se tiene que $t(s)$ y $n(s)$ son vectores ortonormales y

$$t'(s) = k(s)n(s)$$

Definición 2.23. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizada por longitud de arco tal que $k(s) > 0$. El vector binormal a α en s es

$$b(s) = t(s) \times n(s)$$

(Tenenblat, 2008)

El vector binormal b junto con t y n forman una base ortonormal de \mathbb{R}^3 que es llamado el triedro de Frenet de la curva α en s .

Derivando el vector binormal

$$b'(s) = t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) = t(s) \times n'(s)$$

esto implica, que $b'(s)$ es ortogonal a $t(s)$.

Definición 2.24. El número real $\tau(s)$ definido por

$$b'(s) = \tau(s)n(s)$$

es llamado torsión de la curva en s . (Tenenblat, 2008)

Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva regular, parametrizada por longitud de arco, tal que $k(s) > 0$, para todo $s \in I$, entonces el triedro de Frenet definido por $t(s)$, $n(s)$ y $b(s)$ satisface las siguientes ecuaciones

$$t'(s) = k(s)n(s)$$

$$n'(s) = -k(s)t(s) - \tau(s)b(s)$$

$$b'(s) = \tau(s)n(s)$$

que son llamadas las fórmulas de Frenet.

2.4. SUPERFICIES REGULARES

Definición 2.25. Un subconjunto S de \mathbb{R}^3 se llama superficie regular si, para cada $p \in S$, existe una vecindad abierta $v \subset \mathbb{R}^3$ de p , un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, y una biyección $X : U \rightarrow V \cap S$ con las siguientes propiedades: (Araújo, 2001)

- X es de clase \mathcal{C}^∞ ;
- X es un homeomorfismo
- Para cualquier $q \in U$ la matriz jacobiana JX tiene rango dos.

La figura ?? representa la definición de superficie regular en \mathbb{R}^3 .

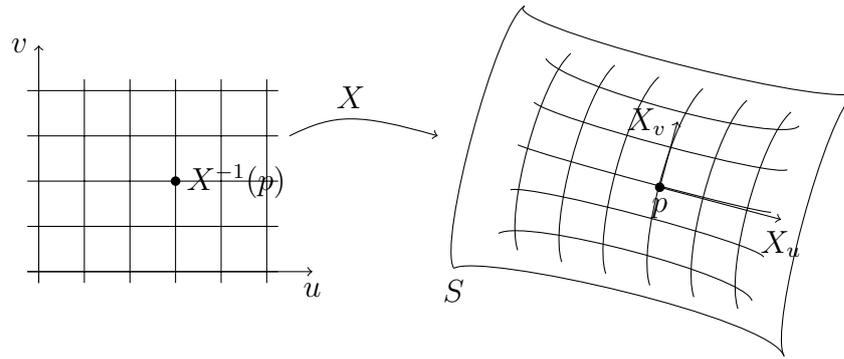


Figura 5

Superficie regular

Para cada $p \in S$, la aplicación $X \rightarrow U \rightarrow V \cap S$ es llamada parametrización de S en p , o sistema de coordenadas locales de S en p . Las columnas de la matriz $JX(u, v)$ son los vectores X_u y X_v , de tal modo que de la condición 3. se tiene que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- La matriz $JX(u, v)$ tiene rango dos.
- $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.
- Los vectores X_u y X_v son linealmente independientes.
- $X_u(u, v) \times X_v(u, v) \neq 0$.

El plano en \mathbb{R}^3 , es una superficie regular que está parametrizado por

$$X(u, v) = (x_0 + ua_1 + vb_1, y_0 + ua_2 + vb_2, z_0 + ua_3 + vb_3)$$

donde $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, además (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) son linealmente independientes.

El cilindro circular

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$



es una superficie regular, para cada $x \neq 1$, parametrizado por

$$X(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$$

La esfera S^2 es una superficie regular parametrizado por

$$X(u, v) = (\operatorname{sen} v \cos u, \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \cos v)$$

El gráfico de la función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una superficie regular parametrizada por

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

Sea $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$, $u \in I \subset \mathbb{R}$ una curva regular, tal que $f(u)$ no se anula, entonces, la aplicación

$$X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \operatorname{sen} v, g(u))$$

donde $u \in I$ y $v \in \mathbb{R}$ es una superficie regular, llamada superficie de rotación de la curva α en torno al eje z .

Definición 2.26. Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, y $\lambda \in \mathbb{R}$ es la imagen de f . (Tapp, 2016)

- El conjunto $f^{-1}(\lambda) = \{p \in U : f(p) = \lambda\}$ es llamado pre-imagen de λ .
- λ es llamado un valor regular de f si para todo $p \in f^{-1}(\lambda)$, la matriz jacobiana para f en p es diferente de la matriz cero. es decir, si

$$df_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right) \neq (0, 0, 0)$$

Teorema 2.5. Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, y $\lambda \in \mathbb{R}$ es la imagen

de f . Si λ es un valor regular de f , entonces la pre-imagen $f^{-1}(\lambda)$ es una superficie regular. (Tapp, 2016)

Dada una superficie regular S , parametrizada por X , se puede obtener varias superficies que tienen la misma traza que X , de la siguiente forma

Proposición 2.1. Sea S una superficie regular parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Si $h : \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ es una aplicación diferenciable, cuyo determinante de la matriz jacobiana no se anula y $h(\bar{U}) = U$ entonces, $Y = X \circ h$ es una parametrización que tiene el mismo trazo que X . (Tenenblat, 2008)

A la aplicación Y de la proposición anterior se le llama una reparametrización de X por h y h es llamada un cambio de parámetros.

Para el estudio del cálculo diferencial entre superficies, por ejemplo $f : S \rightarrow \bar{S}$ una función entre dos superficies regulares S y \bar{S} , el dominio está en el espacio tangente y no en la misma superficie, así se da una definición de espacio tangente que su existencia está garantizada por la condición 3. de la definición de superficie regular.

Definición 2.27. Se define el espacio tangente a una superficie regular S en un punto p , denotado por $T_p S$, como el conjunto de los vectores velocidad en el punto p , de las curvas cuyo trazo está en S .

$$T_p S = \{\alpha'(0); \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \text{ es } \mathcal{C}^\infty \text{ y } \alpha(0) = p\}$$

(Araújo, 2001)

El espacio tangente $T_p S$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 de dimensión 2, esto denota que $p + T_p S$ es llamado el plano tangente a S en p .



La curva α en coordenadas locales está dada por

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t))$$

α es diferenciable si, y solamente si, u y v son diferenciables, y

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u + v'(t)X_v$$

siendo el vector velocidad un elemento del subespacio vectorial T_pS , implica que $\{X_u, X_v\}$ es una base en cada punto de la superficie regular. La derivada de $f : S \rightarrow \bar{S}$ en el punto p es la aplicación $df_p : T_pS \rightarrow T_{f(p)}\bar{S}$, definida por

$$df_p(\alpha'(0)) = (f \circ \alpha)'(0), \quad \alpha'(0) \in T_pS$$

Una propiedad importante de las superficies en el espacio \mathbb{R}^3 es conocer cada lado de la superficie, por ejemplo, en la esfera uno puede estar dentro o fuera de la esfera, es decir la esfera tiene dos caras, sin embargo existen superficies como la banda de Möbius en donde no se pueden diferenciar encontrar dos caras que son llamadas superficies con una sola cara, a esta propiedad de las superficies se les llama orientabilidad. Para determinar si una superficie es orientable se necesita de un vector que es ortogonal al plano tangente.

Definición 2.28. Un vector normal a S en p es un vector en \mathbb{R}^3 que es ortogonal a T_pS . Es decir, $N \in \mathbb{R}^3$ es llamado vector normal a S en p si $\langle N, v \rangle = 0$ para todo $v \in T_pS$. Un vector normal unitario a S en p es un vector normal de longitud uno, o equivalentemente, una orientación para T_pS . (Tapp, 2016)

Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ una parametrización de la superficie regular S con $X(q) = p$. Puesto que X_u y X_v generan T_pS , entonces su producto cruz es ortogonal a



$T_p S$, así el vector normal unitario en p está dado por

$$N(p) = \frac{X_u(q) \times X_v(q)}{|X_u(q) \times X_v(q)|}$$

Definición 2.29. Un campo vectorial sobre una superficie regular S es una aplicación diferenciable $v : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. El es llamado campo tangente si $v(p) \in T_p S$ para todo $p \in S$. El es llamado campo normal si para todo $p \in S$, $v(p)$ es un vector normal a S en p . (Tapp, 2016)

Ya que N es ortogonal a un plano en \mathbb{R}^3 , entonces el plano tiene dos orientaciones, una dada por N y la otra por su simétrico $-N$.

Definición 2.30. Una superficie regular S es orientable si es posible elegir, para cada $p \in S$, una orientación en $T_p S$ que varíe continuamente con p . (Araújo, 2001)

En otra palabras, una superficie S es orientable, si existe una aplicación continua $N : S \rightarrow S^2$ (donde S^2 es la esfera unitaria en \mathbb{R}^3) tal que, para cada p , $N(p)$ es ortogonal a $T_p S$. A un campo de vectores N , así, se le llama una orientación de S .

Proposición 2.2. Cualquier superficie conexa orientable tiene exactamente dos orientaciones distintas. (Araújo, 2001)

Ejemplos de superficies orientables son la esfera, el plano, etc; y la superficie no orientable es la famosa banda de Möbius.

Para el estudio de las curvaturas en una superficie es necesario definir las propiedades intrínsecas de las superficie, una de ellas es llamada la primera forma fundamental, que está asociada a una forma cuadrática.

Definición 2.31. Sea S una superficie regular parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, para



todo $q \in U$, con $X(q) = p$, la aplicación

$$I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$I_p(x) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2$$

es llamada la primera forma fundamental de S en p . (Tenenblat, 2008)

La aplicación I_p es una forma cuadrática definida positiva, esta forma cuadrática puede ser expresada en la base $\{X_u, X_v\}$ del $T_p S$, sea $\alpha(t) = X(u(t), vt)$ con $p = \alpha(0)$, se tiene

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle u'X_u + v'X_v, u'X_u + v'X_v \rangle_p \\ &= I_p(X_u)[u']^2 + 2\langle X_u, X_v \rangle_p u'v' + I_p(X_v)[v']^2 \\ &= E[u']^2 + 2Fu'v' + G[v']^2 \end{aligned}$$

donde E, F y G son llamados los coeficientes de la primera forma fundamental para la parametrización $X(u, v)$, definidos por

$$E(u, v) = I_p(X_u) = \langle X_u, X_u \rangle$$

$$F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle$$

$$G(u, v) = I_p(X_v) = \langle X_v, X_v \rangle$$



La matriz de la forma cuadrática I_p asociada a la base $\{X_u, X_v\}$ de T_pS es

$$M = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

Las propiedades extrínsecas de las superficies regulares están dadas por la orientación de estas superficies y para ello se define la aplicación de Gauss.

Definición 2.32. Dada una superficie orientada, la aplicación de Gauss es el campo de vectores normales $N : S \rightarrow S^2$ que define la orientación de S . (Araújo, 2001)

Los espacios tangentes T_pS y $T_{N(p)}S^2$ son el mismo subespacio de \mathbb{R}^3 , así la diferencial de la aplicación de Gauss, se denota por

$$dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$$

Proposición 2.3. La diferencial $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ de la aplicación de Gauss es una aplicación lineal autoadjunta. (Carmo, 2016)

El hecho de que la diferencial de la aplicación de Gauss sea autoadjunta, se puede asociar a una forma cuadrática en T_pS , dada por

$$Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$$

Definición 2.33. La forma cuadrática II_p , definida en T_pS por

$$II_p = -\langle dN_p(v), v \rangle$$

es llamada la segunda forma fundamental de S en p . (Carmo, 2016)

Definición 2.34. Sea C una curva regular en S pasando por $p \in S$, k la curvatura de C en p , y $\cos \theta = \langle n, N \rangle$, donde n es el vector normal a C y N es el vector normal a S en p . El número $k_n = k \cos \theta$ es llamado la curvatura normal de $C \subset S$ en p . (Carmo, 2016)

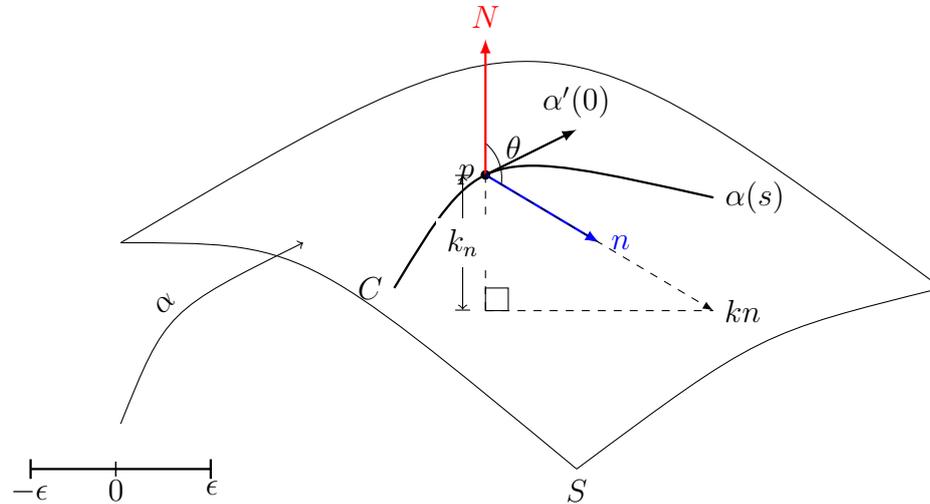


Figura 6

k_n es curvatura normal de C en p

La curvatura normal k_n es la proyección del vector kn sobre la normal N a la superficie S en p .

En la diferencial de la aplicación de Gauss, para cada $p \in S$, existe una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p S$ tal que $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$ y $dN(e_2) = -k_2 e_2$, donde $(k_1 \geq k_2)$.

Definición 2.35. La curvatura normal máxima k_1 y la curvatura normal mínima k_2 son llamadas curvaturas principales en p ; las correspondientes direcciones, es decir, las direcciones dadas por los autovectores e_1 y e_2 son llamados direcciones principales en p . (Carmo, 2016)

Definición 2.36. Sea $p \in S$ y sea $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ la diferencial de la aplicación de Gauss. El determinante de dN_p es la curvatura gaussiana K de S en p . El negativo de la mitad de la traza de dN_p es llamada la curvatura media H de S en p . (Carmo, 2016)

En términos de las curvaturas principales, la curvatura gaussiana y la curvatura

media están dadas por

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

En un cambio de orientación de la superficie, el determinante no cambia y la traza cambia de signo, es decir, en un cambio de orientación la curvatura gaussiana no cambia y la curvatura media cambia de signo.

Definición 2.37. Un punto de una superficie es llamado

- a. Elíptico si $\det(dN_p) > 0$
- b. Hiperbólico si $\det(dN_p) < 0$
- c. Parabólico si $\det(dN_p) = 0$, con $dN_p \neq 0$
- d. Plano si $dN_p = 0$

(Carmo, 2016)

Los puntos en la superficie no dependen de la orientación.

Para conocer algunas propiedades de la aplicación de Gauss, es necesario escribir en coordenadas locales. Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización de la superficie S que es compatible con la orientación N de S , es decir,

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$$

y sea $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ una curva parametrizada en S , con $\alpha(0) = p$, de donde

$$\alpha'(t) = X_u u' + X_v v'$$

y la diferencial de la aplicación de Gauss

$$dN = N_u u' + N_v v'$$

como $N_u, N_v \in T_p S$, entonces

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11} X_u + a_{21} X_v \\ N_v &= a_{a2} X_u + a_{22} X_v \end{aligned} \tag{2.1}$$

Puesto que $\{X_u, X_v\}$ es la base del $T_p S$, la segunda forma fundamental se puede escribir como

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= - \langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle \\ &= - \langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= e[u']^2 + 2f u' v' + g[v']^2 \end{aligned}$$

donde e, f y g son llamados los coeficientes de la segunda forma fundamental, y se definen como

$$\begin{aligned} e &= - \langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle \\ f &= - \langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle = - \langle N_u, X_v \rangle \\ g &= - \langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle \end{aligned}$$

Los elementos (a_{ij}) de la matriz de la diferencial de la aplicación de Gauss, con respecto



a la base $\{X_u, X_v\}$, como

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ a_{22} &= \frac{eF - gE}{EG - F^2} \end{aligned}$$

Las ecuaciones dadas en (2.1), juntamente con los valores a_{ij} , son llamadas las ecuaciones de Weingarten.

La curvatura de Gauss y la curvatura media en términos de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental, se escriben como

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad \text{y} \quad H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

La relación que existe entre la curvatura normal y las dos formas fundamentales, es como sigue: Sea $X(u, v)$ una parametrización de la superficie regular S y sea $q = (u_0, v_0)$. La curvatura normal en p , con $X(q) = p$, que para cada vector $w \in T_p S$ no nulo, le asocia

$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)}$$

si w es una curva parametrizada por longitud de arco, entonces $I_p(w) = |w|^2$, es decir,

$$k_n(w) = II_p(w)$$

Sea $X(u, v)$ una parametrización de una superficie orientada S , a cada punto de $X(U)$ le

corresponde un triedro (X_u, X_v, N) . Se expresa las derivadas de segundo orden de X con respecto al triedro:

$$\begin{aligned}X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + \lambda_1 N \\X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + \lambda_2 N \\X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + \lambda_3 N \\X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + \lambda_4 N\end{aligned}\tag{2.2}$$

Para obtener los λ_1 , a la primera ecuación se le hace el producto interior con N , de donde resulta que

$$e = \lambda_1$$

análogamente, se obtienen $\lambda_2 = \lambda_3 = f$ y $\lambda_4 = g$.

Los coeficientes γ_{ij}^k son llamados los símbolos de Christoffel de la parametrización $X(u, v)$, ellos son simétricos en relación a los sub-índices, es decir $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Resolviendo el sistema, es posible obtener relaciones entre los símbolos de Christoffel, con ayuda de la identidad

$$(X_{uu})_v = (X_{uv})_u$$

de donde, la curvatura de Gauss se expresa como

$$K = \frac{1}{E}((\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^2)(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) + \Gamma_{11}^2(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1)\tag{2.3}$$

esta fórmula es llamada la fórmula de Gauss, su importancia se debe a que solamente envuelve coeficientes de la primera forma fundamental, los símbolos de Christoffel y su derivadas. Esta discusión forma parte de la demostración del siguiente teorema debido a Gauss y que él mismo le llamó teorema de Egrégio, Do Carmo en Carmo, 2016 le llama

teorema Egregium (Gauss).

Teorema 2.6. La curvatura de Gauss es invariante por isometrías locales. Más precisamente, si $f : U \subset S \rightarrow \bar{S}$ por una isometría local entonces, para cualquier p en U , la curvatura de S en p es igual a la curvatura de \bar{S} en $f(p)$. (Araújo, 2001)

2.5. VARIEDADES DIFERENCIABLES

Los espacios que se definen en \mathbb{R}^n son importantes, pues ellos tienen abiertos, cerrados y se definen métrica u homeomorfismos entre dos conjuntos y para tener conjuntos parecidos en otro espacio, se estudian las llamadas variedades.

Definición 2.38. Una variedad M de dimensión n , o n -variedad, es un espacio topológico con las siguientes propiedades: (Boothby, 1986)

- a. M es de Hausdorff,
- b. M es localmente euclidiano de dimensión n , y
- c. M tiene una base contable de conjuntos abiertos.

Un ejemplo de n -variedad es el conjunto M abierto en \mathbb{R}^n .

La idea de generalizar a una variedad es agregando diferenciabilidad.

Definición 2.39. Una variedad diferenciable de dimensión n es un conjunto M y una familia de aplicaciones inyectivas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, definidos en los abiertos U_α de \mathbb{R}^n en M , tales que se cumplen las siguientes condiciones.

- a. $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$
- b. Para todo par x_α, x_β , con $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, los conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ y $x_\beta^{-1}(W)$ son abiertos en \mathbb{R}^n y las aplicaciones $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha^{-1}$ son diferenciables.
- c. La familia $\{(U, x_\alpha)\}$ es máxima relativa a las condiciones 1. y 2. (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)



Al par (U, x_α) (o a la aplicación x_α) con $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ se le llama una parametrización o sistema de coordenadas de M en p . Una familia $\{(U, x_\alpha)\}$ satisfaciendo las condiciones 1. y 2. es llamada una estructura diferenciable. Dada una estructura diferenciable, es posible completarla en una máxima; Elon Lages Lima en su libro (Lima, 1973) encuentra el maximal a una estructura diferenciable.

Un ejemplo de estructura diferenciable es el espacio \mathbb{R}^n , éste espacio tiene un sistema de coordenadas cartesianas, cada punto punto de \mathbb{R}^n es una n -upla de números reales, tomando $x(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ como la aplicación identidad, esta aplicación es inyectiva, cubre todo el espacio \mathbb{R}^n .

Definición 2.40. Una variedad diferenciable M , es llamada variedad de Hausdorff si M , con la topología dada, es un espacio de Hausdorff.

El cálculo diferencial entre espacios euclidianos se extiende a las variedades diferenciables. La dimensión de la variedad está dada por la dimensión del espacio en donde está definida la parametrización de la variedad M , es decir, si $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ es la parametrización de M , su dimensión es n y una variedad diferenciable de dimensión n se denota por M^n .

Definición 2.41. Sean M^m y N^n variedades de clase \mathcal{C}^r ($r \geq 1$). Se dice que una aplicación $f : M \rightarrow N$ es diferenciable en el punto $p \in M$ si existen sistemas de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ y $Y : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow N$ con $p \in U$ y $f(U) \subset V$ tales que

$$Y^{-1} \circ f \circ x : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es diferenciable en $x^{-1}(p)$. (Lima, 1973)

La aplicación

$$f_{xy} = y^{-1} \circ f \circ x$$



es llamada la expresión de f en el sistema de coordenadas x e y . En particular $f; M \rightarrow N$ es continua en el punto $p \in M$.

La diferenciabilidad de la expresión de f es independiente de los sistemas de coordenadas, esto es debido a la condición 2 de la definición de variedad diferenciable.

Se dice que $f : M \rightarrow N$ es diferenciable si f es diferenciable en todos los puntos de M . Y $f : M \rightarrow N$ es de clase \mathcal{C}^k ($k \leq r$) si, para cada $p \in M$ la expresión de f es de clase \mathcal{C}^k .

Definición 2.42. Un difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ es una biyección cuya inversa es también diferenciable. Si ambas f y f^{-1} son de clase \mathcal{C}^k , se dice que f es un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^k . (Lima, 1973)

Sea M^m una variedad de clase \mathcal{C}^k y $x : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ un sistema de coordenadas en M . Entonces x es un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^k , en donde, la expresión en los sistemas x y x^{-1} es la aplicación identidad $\text{id}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Las curvas diferenciables son las aplicaciones diferenciables $\alpha : I \rightarrow M$, donde I es un intervalo abierto de la recta real. La condición de diferenciabilidad de α implica que α sea continua y que, dado un sistema de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$, para todo subintervalo J tal que $\alpha(J) \subset x(U)$, la compuesta $x^{-1} \circ \alpha : J \rightarrow U$ sea una curva diferenciable en \mathbb{R}^m .

El espacio tangente $T_p S$ de superficies regulares en \mathbb{R}^3 , está conformado por el conjunto de vectores tangentes $v \in \mathbb{R}^3$ en p , de las curvas diferenciables contenidos en S , y por lo tanto el espacio tangente de una superficie regular está contenido en \mathbb{R}^3 .

Si M es una variedad diferenciable de dimensión n , los vectores tangentes v no pertenecen al espacio \mathbb{R}^n , estos vectores se obtienen abstractamente, pues M no está

contenida en ningún espacio euclidiano.

Sea M una variedad de clase \mathcal{C}^k y sea $p \in M$. Denotamos por C_p el conjunto de todas las curvas $\lambda : J \rightarrow M$, definidos en un intervalo abierto J , conteniendo 0, tal que $\lambda(0) = p$ y λ es diferenciable en 0. Si $\lambda \in C_p$ y $x : U \rightarrow M$ es un sistema de coordenadas en M , con $p \in x(U)$, la imagen $\lambda(J)$ no está enteramente contenida en $x(U)$. En tal caso, la restricción $x^{-1} \circ \lambda$, está reduciendo suficientemente el dominio de λ a un intervalo J' , conteniendo 0, tal que $\lambda(J') \subset x(U)$.

Definición 2.43. Se dice que curvas $\lambda, \mu \in C_p$ son equivalentes, y se escribe $\lambda \sim \mu$, si existe un sistema de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, con $p \in x(U)$, tal que $x^{-1} \circ \lambda : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $x^{-1} \circ \mu : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tienen el mismo vector velocidad en $t = 0$, es decir, $(x^{-1} \circ \lambda)'(0) = (x^{-1} \circ \mu)'(0)$. (Lima, 1973)

La igualdad $(x^{-1} \circ \lambda)'(0) = (x^{-1} \circ \mu)'(0)$ es verdadera para todo sistema de coordenadas $x : U \rightarrow M$, $p \in x(U)$. Entonces la relación $\lambda \sim \mu$ es una relación de equivalencia en C_p .

Definición 2.44. El conjunto cociente C_p / \sim denotado por $T_p M$ es llamado el espacio tangente a la variedad M en el punto p . (Lima, 1973)

El espacio tangente a una variedad diferenciable M en un punto p , es el conjunto de todos los vectores tangentes a M en p , Así

$$T_p M = \{v : v \text{ es un vector tangente en } p\}$$

Sea M^n un variedad diferenciable, el conjunto

$$TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\}$$

es llamado fibrado tangente de M . Sea $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ la estructura diferenciable de M . Y sea (x_1, x_2, \dots, x_n) las coordenadas de U_α y $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ las bases asociadas en los espacios tangentes de $x_\alpha(U_\alpha)$. Para cada α , se define

$$y_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$$

por

$$y_\alpha(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n) = \left(x_\alpha(x_1, \dots, x_n), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

donde $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definición 2.45. Un campo de vectores X en una variedad diferenciable M es una correspondencia que a cada punto $p \in M$ asocia un vector $X(p) \in T_pM$. (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

Considerando una parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, se puede escribir

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

donde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función en U y $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ es la base asociada a la parametrización x . Se dice que X es diferenciable si y sólo si, las funciones a_i son diferenciables para alguna parametrización.

Es útil pensar en un campo de vectores como una aplicación

$$X : D \rightarrow F$$

del conjunto D de las funciones diferenciables en M en el conjunto F de las funciones en M , es decir, todo campo de vectores asocia el conjunto de funciones diferenciables con

valores en M en el conjunto de funciones en M , definida del siguiente modo

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

Sea $\varphi : M \rightarrow M$ un difeomorfismo, $v \in T_p M$ y f es una función diferenciable en una vecindad de $\varphi(p)$, entonces

$$(d\varphi(v)f)\varphi(p) = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \varphi \circ \alpha) \right|_{t=0} = v(f \circ \varphi)(p)$$

Sea $\mathcal{X}(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales sobre M , en donde este conjunto resulta ser un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , si f es una función sobre M y $X \in \mathcal{X}(M)$, entonces $fX \in \mathcal{X}(M)$. Si X e Y son campos diferenciables en M y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, es posible considerar las funciones $X(Yf)$ e $Y(Xf)$ que envuelven derivadas de orden superior.

Lema 2.1. Sean X e Y campos vectoriales diferenciables en una variedad diferenciable M . Entonces existe un único campo vectorial Z tal que, para todo $f \in D(M)$,

$$Zf = (XY - YX)f$$

(Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

El campo vectorial Z dado por el lema anterior es llamado Corchete de Lie de X e Y , y es denotado por

$$[X, Y] = XY - YX$$

El corchete de Lie en coordenadas locales está dada por

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^n \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

donde

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

La operación corchete de Lie posee las siguientes propiedades como se establece en la siguiente proposición.

Proposición 2.4. Si X, Y y Z son campos diferenciables en M , a, b son números reales, y f, g son funciones diferenciables, entonces: (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

- $[X, Y] = -[Y, X]$ (anticonmutatividad)
- $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (linealidad)
- $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidad de Jacobi)
- $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

El corchete de Lie $[X, Y]$ puede ser interpretado como una derivación de Y a lo largo de las trayectorias de X . Además, si dos campos X, Y conmutan en la operación corchete, entonces $[X, Y] = 0$.

Definición 2.46. Sean M^m y N^n variedades diferenciables. Una aplicación diferenciable $\varphi : M \rightarrow N$ es una inmersión si

$$d\varphi : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$$

es inyectiva para todo $p \in M$. (Lima, 1973)

2.6. MÉTRICA RIEMANNIANA

En el estudio de la geometría, las métricas tienen importancia, porque permiten calcular distancias, áreas, etc. Estas medidas se realizan en una variedad diferenciable.

Definición 2.47. Sea M una variedad diferenciable. Una métrica riemanniana (o estructura riemanniana) en M es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in M$ un producto

interno \langle , \rangle (es decir, una forma bilineal simétrica, definida positiva) en el espacio tangente $T_p M$, que varía diferenciablemente con p en el siguiente sentido: Si $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ es un sistema de coordenadas locales en torno de p , con $x(x_1, \dots, x_n) = q \in x(U)$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$, entonces

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

es una función diferenciable en U . (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

Esta definición no depende de la elección del sistema de coordenadas. Las funciones g_{ij} son llamadas expresiones de la métrica riemanniana en el sistema de coordenadas $x : U \rightarrow M$.

Definición 2.48. Una variedad diferenciable para la cual se define una métrica riemanniana se denomina una variedad riemanniana. (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

Ejemplo 2.1. Si $M = \mathbb{R}^n$, el espacio euclidiano de dimensión n , con la métrica euclidiana. Identificando $\frac{\partial}{\partial x_i}$ con $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. La métrica está dada por $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, \mathbb{R}^n es llamado espacio euclidiano de dimensión n y la geometría riemanniana de este espacio es la geometría métrica euclidiana. (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

Ejemplo 2.2. El espacio hiperbólico \mathbb{H}^n .

Considere el semiespacio superior \mathbb{R}^n , dado por

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$$

Con la topología inducida como abierto de \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n es una variedad diferenciable de dimensión n . Se define en \mathbb{H}^n la métrica

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{(x_n)^2}$$

entonces \mathbb{H}^n es una variedad riemanniana llamada el espacio hiperbólico de dimensión n .

Ejemplo 2.3. Un grupo de Lie es un grupo G con una estructura diferenciable tal que la aplicación $G \times G \rightarrow G$ dada por $(x, y) \rightarrow xy^{-1}$, $x, y \in G$, es diferenciable. Las traslaciones a la izquierda L_x y a la derecha R_x dadas por $L_x : G \rightarrow G$, $L_x(y) = xy$; $R_x : G \rightarrow G$, $R_x(y) = yx$ son difeomorfismos.

Dada una variedad diferenciable M , se denota por $\mathcal{X}(M)$ como el conjunto de los campos vectoriales de clase \mathcal{C}^∞ y por $D(M)$ el anillo de las funciones reales de clase \mathcal{C}^∞ .

Definición 2.49. Sea M una variedad diferenciable. Una conexión afín ∇ en M es una aplicación

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

denotada por $(X; Y) \rightarrow \nabla_X Y$ que satisface las siguientes propiedades. (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

- a. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
- b. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- c. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

La conexión afín $\nabla_X Y$ se interpreta como la derivada direccional.

Proposición 2.5. Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ . Entonces existe una única correspondencia que asocia a un campo vectorial V a lo largo de la curva diferencial $c : I \rightarrow M$ en otro campo vectorial $\frac{DV}{dt}$ a lo largo de c , denominado derivada covariante de V a lo largo de c , tal que

- a. $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$
- b. $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, donde V es un campo de vectores a lo largo de c y f es una función diferenciable en I .

- c. Si V es inducido por un campo de vectores $Y \in \mathcal{X}(M)$, es decir, $V(t) = Y(c(t))$, entonces $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y$. (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

En un sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) en torno de p , se escribe

$$X = \sum_i x_i X_i, \quad Y = \sum_j y_j X_j$$

donde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, se tiene

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_i x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right) \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{i,j} x_i X_i (y_j) X_j \end{aligned}$$

Haciendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, donde $\Gamma_{ij}^k : V \rightarrow \mathbb{R}$ son llamados los símbolos de Christoffel de la conexión ∇ asociadas al sistema de coordenadas. Las funciones Γ_{ij}^k son funciones diferenciables y

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{i,j} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k$$

esto muestra, que $\nabla_X Y(p)$ depende de $x_i(p)$, $y_k(p)$ y de las derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k según X .

Definición 2.50. Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ . Un campo vectorial V a lo largo de una curva $c_I \rightarrow M$ es llamado paralelo si $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$. (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

Proposición 2.6. Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ . Sea $c : I \rightarrow M$ una curva diferenciable en M y V_0 un vector tangente a M en $c(t_0)$, $t_0 \in I$. Entonces existe un único campo de vectores paralelo V a lo largo de c , tal que $V(t_0) = V_0$, ($V(t)$

es llamado el transporte paralelo de $V(t_0)$ a lo largo de c). (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

La derivada covariante permite definir transporte paralelo a lo largo de curvas dependiendo de la métrica, en particular la derivada covariante permite definir geodésicas que son curvas cuyo vector tangente es paralelo, es decir tiene derivada covariante nula. Con la métrica euclidiana la geodésica es el segmento de recta que une dos puntos y es caracterizada por la trayectoria de menor longitud.

Definición 2.51. Una curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ es una geodésica en t_0 si $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$; si γ es geodésica en t , para todo $t \in I$, se dice que γ es una geodésica. (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

Si $\gamma : [a, b] \subset I \rightarrow M$ es una geodésica, la restricción de γ a $[a, b]$ es llamada (segmento de) geodésica uniendo $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$. Es usado también la palabra geodésica a la imagen $\gamma(I)$ de una geodésica γ .

A partir de la definición de una geodésica y de la derivada covariante en términos de un sistema coordenadas y de los símbolos de Christoffel, es determinado las ecuaciones diferenciales que satisfacen una geodésica.

Sea (U, x) un sistema de coordenadas en torno de $\gamma(t_0)$. En U .

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

γ es una geodésica, si sólo si,

$$0 = \frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \sum_k \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

equivalentemente

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

la cual es un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Para el estudio del sistema de ecuaciones diferenciales es conveniente considerar el fibrado tangente TM . Si (U, x) es un sistema de coordenadas en M , entonces todo vector del espacio tangente $T_q M$ se puede escribir como $\sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Toda curva diferenciable $\gamma : I \rightarrow M$ determina una curva $t \rightarrow \left(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t) \right)$ en TM . Si γ es una geodésica entonces, en TU , la curva

$$t \rightarrow \left(x_1(t), \dots, x_n(t), \frac{dx_1(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt} \right)$$

satisface el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx_k}{dt} = y_k \\ \frac{dy_k}{dt} = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k y_i y_j, \quad k = 1, \dots, n \end{cases}$$

en términos de coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ de TU .

Definición 2.52. Sea M una variedad diferencial con una conexión afín ∇ y una métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La conexión se llama compatible con la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, si para toda curva diferenciable c y cualesquier pares de campos de vectores paralelos P y P' a lo largo de c , se tiene $\langle P, P' \rangle = \text{constante}$. (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

Proposición 2.7. Sea M una variedad riemanniana. Una conexión ∇ en M es compatible con la métrica si y sólo si, para todo par V y W de campos de vectores a lo largo de la

curva diferenciable $c_I \rightarrow M$ se tiene

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I$$

(Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

Corolario 2.1. Una conexión ∇ en una variedad riemanniana M es compatible con la métrica si y sólo si

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

(Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

Definición 2.53. Una conexión afín ∇ en una variedad diferenciable M es llamada simétrica si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

En un sistema de coordenadas (U, x) , la simetría implica que

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

para todo $i, j = 1, \dots, n$. La última ecuación implica que

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

es decir, los símbolos de Christoffel son invariantes al intercambio de subíndices.

Teorema 2.7 (Levi-Civita). Dada una variedad riemanniana M , existe una única conexión afín ∇ en M satisfaciendo las condiciones

- a. ∇ es simétrica.
- b. ∇ es compatible con la métrica riemanniana. (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

La conexión dada por el teorema anterior es denominada conexión de Levi-Civita o conexión riemanniana de M .

Sea (U, x) un sistema de coordenadas, donde

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$$

Entonces

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{km} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\}$$

donde $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$.

Como la matriz (g_{km}) admite inversa (g^{km}) , entonces los símbolos de Christoffel de la conexión riemanniana en términos de la métrica se escriben como

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}$$

y la derivada covariante como

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt} \right\} X_k$$

A continuación, se define el operador curvatura, y sus propiedades utilizando los símbolos de Christoffel.

Definición 2.54. La curvatura R de una variedad riemanniana M es una correspondencia que asocia a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ una aplicación $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow (M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M)$$

donde ∇ es la conexión riemanniana de M . (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

Si $M = \mathbb{R}^n$, para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$, con $Z = (z_1, \dots, z_n)$,

$$\nabla_X Z = (Xz_1, \dots, Xz_n)$$

y

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \dots, YXz_n)$$

Entonces

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z = 0$$

Proposición 2.8. La curvatura R de una variedad riemanniana tiene las siguientes propiedades

a. R es bilineal en $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, es decir,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2)$$

para todo $f, g \in D(M)$ y $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$

b. Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, el operador curvatura $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ es lineal, es decir,

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z$$

para todo $f \in D(M)$ y $Z, W \in \mathcal{X}(M)$. (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

Proposición 2.9 (Primera identidad de Bianchi).

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

(Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

Usando la siguiente notación

$$\langle R(X, Y)Z, T \rangle = (X, Y, Z, T)$$

son válidas las siguiente igualdades

- $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$
- $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$
- $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$
- $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$

Al operador curvatura, está relacionado la curvatura seccional o curvatura riemanniana que se define a continuación

Definición 2.55. Dado un espacio vectorial V . Se define la expresión

$$|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

como el área del paralelogramo bidimensional determinado por el par de vectores $x, y \in V$.

(Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

Proposición 2.10. Sea $\sigma \subset T_p M$ un subespacio bidimensional del espacio tangente $T_p M$ y sean $x, y \in \sigma$ dos vectores linealmente independientes. Entonces

$$K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}$$

no depende de la elección de los vectores $x, y \in \sigma$. (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

Definición 2.56. Dado un punto $p \in M$ y un subespacio bidimensional $\sigma \subset T_p M$ el número real $K(x, y) = K(\sigma)$, donde $\{x, y\}$ es una base cualesquiera de σ , es llamado curvatura seccional de σ en p . (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

El espacio hiperbólico \mathbb{H}^n tiene curvatura seccional -1 .

Proposición 2.11. Si $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, la aplicación $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \rightarrow \mathcal{X}(U)^\perp$ dada por

$$B(X; Y) = \bar{\nabla}_X \bar{Y} - \nabla_X Y$$

es bilineal y simétrica. (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

Sea $p \in M$ y $\eta \in (T_p M)^\perp$, la aplicación $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle$$

$x, y \in T_p M$, es una forma bilineal simétrica.

Definición 2.57. La forma cuadrática II_η definida en $T_p M$ por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

es llamada la segunda forma fundamental de f en p según el vector normal η . (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

La aplicación bilineal H_η se asocia a la aplicación autoadjunta $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle$$

Definición 2.58. Una inmersión $f : M \rightarrow \bar{M}$ es mínima si para todo $p \in M$ y todo

$\eta \in (T_p M)^\perp$ se tiene que traza $S_\eta = 0$. (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992)

En un sistema de coordenadas E_1, \dots, E_n en $\mathcal{X}(U)^\perp$, se escribe

$$B(x, y) = \sum_i H_i(x, y) E_i$$

$x, y \in T_p M$, $i = 1, \dots, m$, donde $H_i = H_{E_i}$. El vector normal dado por

$$H = \frac{1}{n} \sum_i (\text{traza } S_i) E_i$$

donde $S_i = S_{E_i}$, no depende del referencial E_i . El vector H es llamado el vector curvatura media de f . f es mínima si y sólo si $H(p) = 0$, para todo $p \in M$.

Definición 2.59. Llamaremos a la 2-forma compleja Q

$$Q = \psi dw^2$$

diferencial de Hopf de la superficie ψ . (Cerezo Cid, 2022)

Sea $U \subset \mathbb{C}$, consideremos los operadores $\partial_z = (\partial_s - i\partial_t)/2$, y $\partial_{\bar{z}} = (\partial_s + i\partial_t)/2$, y sea $z = s + it$. Entonces la ecuación de Liouville se escribe como

$$(\log \phi)_{z\bar{z}} = -(c/2)\phi$$

si $ds^2 = \lambda|dz|^2$ es una métrica riemanniana en U , entonces λ satisface la ecuación de Liouville si y sólo si ds^2 tiene curvatura constante de valor c .

Teorema 2.8. La única solución del problema de Cauchy para la ecuación de Liouville es

$$\phi(s, t) = \frac{4|g'(z)|^2}{(1 + c|g(z)|^2)^2}, \quad z = s + it$$



donde $g(z)$ es una extensión meromórfica de $g(s) = \pi(\alpha(s))$.



CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Dado un punto en la superficie con curvatura media constante, calcular las curvaturas principales en ese punto. Las curvaturas principales son los valores propios de la segunda forma fundamental de la superficie y representan las tasas de curvatura en las direcciones principales. Utiliza las curvaturas principales para determinar las posiciones relativas de los vértices en el espacio tridimensional. Para ello, se puede utilizar fórmulas específicas dependiendo de la curvatura media constante que se está considerando, como curvatura media constante positiva, negativa o cero. Conecta los vértices vecinos con aristas rectas en el espacio tridimensional. Las aristas deben seguir las relaciones de conectividad de la superficie original.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. EL ESPACIO HIPERBÓLICO

Definición 4.1. Sea f la forma bilineal simétrica sobre \mathbb{R}^4 con la forma cuadrática

$$q(x, y, z, t) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Un operador lineal T sobre \mathbb{R}^4 que preserve esta forma bilineal (o cuadrática) particular, se llama transformación de Lorentz, y el grupo que preserve f se llama grupo de Lorentz. (Hoffman et al., 1973)

El modelo hermítico de \mathbb{H}^3 , está dado por:

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \in \text{Herm} (2)$$

donde Herm (2) es el conjunto de las matrices hermitianas de orden 2, el producto lorentziano está dado por

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \bar{b}_1 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ \bar{b}_2 & c_2 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{2}(a_1c_2 + a_2c_1 - b_1\bar{b}_2 - b_2\bar{b}_1)$$

El espacio de Lorentz es el conjunto

$$\mathbb{L}^4 = (\mathbb{R}^4, \langle, \rangle)$$



donde, considerando el punto $x = (x_0, x_1, x_2, x_3,)$ de \mathbb{R}^4 , está definido como

$$\langle x, x \rangle = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

El grupo de Lie complejo

$$SL(2, \mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : \det(A) = 1\}$$

actúa sobre \mathbb{L}^4 mediante

$$\phi \in SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \phi \cdot m = \phi m \phi^*$$

$m \in \text{Herm}(2)$, $\phi^* = \bar{\phi}^t$, es decir, ϕ^* denota la matriz transpuesta y conjugada de ϕ .

Puesto que $\det(\phi) = \det(\phi^*) = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \det(\phi m \phi^*) &= \det(\phi) \det(m) \det(\phi^*) \\ &= \det(m) \end{aligned}$$

Esto implica que la acción preserva la métrica y la orientación de \mathbb{L}^4 .

El espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 es el conjunto

$$\mathbb{H}^3 = \{x \in \mathbb{L}^4 : -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1, x_0 > 0\}$$

La métrica inducida de \mathbb{L}^4 está dada por

$$\langle m, m \rangle = -\det(m)$$

En efecto, sea $m = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned}\langle m, m \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{2}(ac + ac - b\bar{b} - b\bar{b}) \\ &= -(ac - b\bar{b}) \\ &= -\det(m)\end{aligned}$$

Definición 4.2. Una superficie de Bryant es una superficie en \mathbb{H}^3 de curvatura media constante 1. (Collin et al., 2001)

Sea F una variedad conexa de las bases (e_0, e_1, e_2, e_3) de \mathbb{L}^4 que satisface las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 &> 0 \\ x^0(e_0) &> 0 \\ \langle e_\alpha, e_\beta \rangle &= \begin{cases} -1, & \text{si } \alpha, \beta = 0 \\ 0, & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1, & \text{si } \alpha = \beta = 1, 2 \text{ o } 3 \end{cases}\end{aligned}$$

El espacio F es una subvariedad suave de $\mathbb{L}^4 \times \mathbb{L}^4 \times \mathbb{L}^4 \times \mathbb{L}^4$. donde $e_\alpha : F \rightarrow \mathbb{L}^4$ tal que

$$de_\alpha = e_\beta w_\alpha^\beta$$

escribiendo w^i por w_0^i , se tiene

$$de_0 = e_i w^i$$

$$de_i = e_0 w^i + e_j w_j^i$$

$$0 = w_j^i + w_i^j$$

Además, se tienen

$$dw^i = -w_j^i \wedge w^j$$

$$dw_j^i = -w_k^i \wedge w_j^k - w^i \wedge w^j$$

La aplicación $e_0 : F \rightarrow \mathbb{H}^3$ es una sumersión. Y $e_1, e_2, e_3 \in T_{e_0} \mathbb{H}^3$, se tiene

$$e_0^*(ds^2) = \langle de_0, de_0 \rangle = (w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2$$

Sea $N^3 \subset \mathbb{L}^4$, que denota el cono positivo nulo

$$N^3 = \{v \in \mathbb{L}^4 : \langle v, v \rangle = 0 \text{ y } x^0(v) > 0\}$$

La aplicación $e_0 + e_3 : F \rightarrow N^3$ es una sumersión suave. Sea $d\rho^2$ la métrica de N^3 , se tiene

$$d(e_0 + e_3) = (e_0 + e_3)w^3 + e_1(w^1 + w_3^1) + e_2(w^2 + w_3^2)$$

y

$$(e_0 + e_3)^*(d\rho^2) = \langle d(e_0 + e_3), d(e_0 + e_3) \rangle = (w^1 + w_3^1)^2 + (w^2 + w_3^2)^2$$

Sea $[e_0 + e_3] : F \rightarrow S_\infty^2$ una aplicación que denota la línea que pasa por $e_0 + e_3$.

Usando $SL(2, \mathbb{C})$ para parametrizar F como sigue

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y sea $e_\alpha(g) = g \cdot e_\alpha = g e_\alpha g^*$. Entonces la aplicación $g \mapsto (e_\alpha(g))$ es una aplicación de $SL(2, \mathbb{C})$ sobre F . Las formas canónicas w^i, w_j^i sobre esta aplicación son invariantes a la izquierda. Por lo tanto se verifica la ecuación

$$g^{-1}dg = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w^3 + iw_1^2 & (w^1 - w_3^1) + i(w^2 - w_3^2) \\ (w^1 + w_3^1) - i(w^2 + w_3^2) & -(w^3 + iw_1^2) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

La métrica de Cartan-Killing en $SL(2, \mathbb{C})$ está dada por la forma cuadrática holomorfa

$$\phi = -4 \det(g^{-1}dg)$$

Definición 4.3. Si M^2 es una superficie de Riemann, una aplicación holomorfa

$$F : M^2 \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$$

es llamada nula si $F^*(\phi) = 0$. Bryant, 1987

Se define la aplicación $e_3 : M \rightarrow \mathbb{L}^4$, donde $e_3 df = w^3 = 0$, así

$$ds_f^2 = (w^1)^2 + (w^2)^2$$

el área inducido en M es $dA_f = w^1 \wedge w^2 > 0$. Puesto que $dw^3 = -w_1^3 \wedge w^1 - w_2^3 \wedge w^2 = 0$,

se sigue que existen funciones suaves $h_{ij} = h_{ji}$ $i, j = 1, 2$, tal que

$$\begin{pmatrix} w_1^3 \\ w_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}$$

$$w_1^3 = h_{11}w^1 + h_{12}w^2$$

,

$$w_2^3 = h_{21}w^1 + h_{22}w^2$$

Entonces, la segunda forma cuadrática se escribe como

$$II = h_{11}(w^1)^2 + 2h_{12}w^1w^2 + h_{22}(w^2)^2$$

y la curvatura media, está dada por

$$H = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22})$$

4.2. TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE BRYANT

En esta sección se presenta el resultado principal de la investigación.

Teorema 4.1. Sea M^2 una superficie de Riemann y sea $F : M^2 \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ una inmersión nula. Entonces $e_0 \circ F = f : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ es una inmersión conforme suave con $H = 1$. Recíprocamente, si M^2 es simplemente conexa y $f : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ es una inmersión con $H = 1$, entonces existe $F : M^2 \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ que es holomorfo con respecto a la estructura compleja inducida en M^2 tal que $f = e_0 \circ F$. (Bryant, 1987)

Demostración. Considerando la siguiente notación

$$w = w^1 + iw^2, \quad \pi = w_1^3 - iw_2^3$$

La ecuación (4.1) se escribe como

$$g^{-1}dg = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w^3 + iw_1^2 & (w^1 + w_1^3) + i(w^2 + w_2^3) \\ (w^1 - w_1^3) - i(w^2 - w_2^3) & -(w^3 + iw_1^2) \end{bmatrix}$$

$$(w^1 + w_1^3) + i(w^2 + w_2^3) = (w^1 + iw^2) + (w_1^3 + iw_2^3) = w + \bar{\pi}; \text{ y}$$

$$(w^1 - w_1^3) - i(w^2 - w_2^3) = (w^1 - iw^2) - (w_1^3 - iw_2^3) = \bar{w} - \pi$$

Entonces

$$g^{-1}dg = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w^3 + iw_1^2 & w + \bar{\pi} \\ \bar{w} - \pi & -(w^3 + iw_1^2) \end{bmatrix}$$

Denotando

$$F^*(w^3 + iw_1^2) = 2\alpha$$

$$F^*(w + \bar{\pi}) = 2\gamma \tag{4.2}$$

$$F^*(\bar{w} - \pi) = 2\beta$$

donde α, β y γ son 1-formas en M^2 y

$$F^*(g^{-1}dg) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

Por hipótesis, $F : M^2 \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ es una inmersión holomorfa nula, es decir, $F^*(\phi) = 0$.

Entonces

$$\begin{aligned}0 &= F^*(\phi) = F^*(-4 \det(g^{-1}dg)) \\0 &= -4(-\alpha^2 - \beta\gamma) \\0 &= 4(\alpha^2 + \beta\gamma) \\0 &= \alpha^2 + \beta\gamma\end{aligned}\tag{4.3}$$

De la propiedad $z + \bar{z} = 2\Re z$, se tiene

$$F^*(w^3) = \alpha + \bar{\alpha}$$

y de la propiedad de $\bar{\bar{z}} = z$, se tiene

$$F^*(w) = \bar{\beta} + \gamma$$

Ahora, sea $f = e_0 \circ F$, entonces

$$\begin{aligned}f^*(ds^2) &= F^*((w^3)^2 + w\bar{w}) \\&= (\alpha + \bar{\alpha})^2 + (\bar{\beta} + \gamma)(\beta + \bar{\gamma}) \\&= \alpha^2 + 2\alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2 + \beta\bar{\beta} + \bar{\beta}\bar{\gamma} + \beta\gamma + \gamma\bar{\gamma} \\&= (\alpha^2 + \beta\gamma) + (2\bar{\alpha}\alpha + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma}) + (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}\bar{\gamma}) \\f^*(ds^2) &= 2\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma}\end{aligned}\tag{4.4}$$

Esta expresión es definida positiva, la aplicación $f : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ es una inmersión conforme con la métrica inducida $ds_f^2 = f^*(ds^2)$.

Sea $U \subset M$ un conjunto abierto simplemente conexo sobre el cual existe una



1-forma ϕ del tipo $(1, 0)$ tal que

$$ds_f^2 = \phi\bar{\phi}$$

en U . M es cubierto por tales conjuntos abiertos. Restringiendo a U , existen funciones A, B y C en U satisfaciendo

$$F^*(w^3 + iw_1^2) = 2A\phi$$

$$F^*(\bar{w} - \pi) = 2B\phi$$

$$F^*(w + \bar{\pi}) = 2C\phi$$

de las ecuaciones (4.2), se tienen

$$\alpha = A\phi$$

$$\beta = B\phi$$

$$\gamma = C\phi$$

reemplazando en la ecuación (4.3), se tiene

$$0 = \alpha^2 + \beta\gamma$$

$$0 = (A\phi)^2 + (B\phi)(C\phi)$$

$$0 = A^2 + BC$$

y de la ecuación (4.4)

$$\begin{aligned}2\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} &= f^*(ds^2) = ds_f^2 = \phi\bar{\phi} \\2(A\phi)\overline{(A\phi)} + (B\phi)\overline{(B\phi)} + (C\phi)\overline{(C\phi)} &= \phi\bar{\phi} \\2A\bar{A}(\phi\bar{\phi}) + B\bar{B}(\phi\bar{\phi}) + C\bar{C}(\phi\bar{\phi}) &= \phi\bar{\phi} \\2A\bar{A} + B\bar{B} + C\bar{C} &= 1\end{aligned}\tag{4.5}$$

Puesto que U es simplemente conexo, existen funciones p, q en U tal que

$$\begin{aligned}A &= pq \\B &= p^2 \\C &= -q^2\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación (4.5), se tiene

$$\begin{aligned}2(pq)(\bar{p}\bar{q}) + p^2\bar{p}^2 + q^2\bar{q}^2 &= 1 \\(p\bar{p})^2 + 2(p\bar{p})(q\bar{q}) + (q\bar{q})^2 &= 1 \\(p\bar{p} + q\bar{q})^2 &= 1 \\p\bar{p} + q\bar{q} &= 1\end{aligned}$$

Puesto que $A\phi, B\phi$ y $C\phi$ son holomorfas en U , entonces

$$\frac{p}{q} = \frac{A}{q^2} = -\frac{A\phi}{C\phi}$$

es meromorfa en U . La 1-forma $pdq - qdp$ del tipo $(1,0)$ tiene las siguientes

representaciones

$$pdq - qdp = \begin{cases} p^2 d(q/p) & \text{donde } p \neq 0 \\ -q^2 d(p/q) & \text{donde } q \neq 0 \end{cases}$$

Sea $h : U \rightarrow SU(2)$ definida por

$$h = \begin{pmatrix} q & -\bar{p} \\ p & \bar{q} \end{pmatrix}$$

Entonces $e_0 \circ (Fh) = e_0 \circ F$ puesto que h toma valores en $SU(2)$. Además

$$\begin{aligned} (Fh)^*(g^{-1}dg)(v) &= (g^{-1}dg)(d(Fh)(v)) \\ &= (Fh)^{-1}d(Fh)(v) \\ &= h^{-1}F^{-1}dF(v)h + h^{-1}F^{-1}Fdh(v) \\ &= h^{-1}(g^{-1}dg)(df)(v)v + h^{-1}dh(v) \\ &= h^{-1}F^*(g^{-1}dg)(v)h + h^{-1}dh(v) \\ (Fh)^*(g^{-1}dg)(v) &= h^{-1}F^*(g^{-1}dg)h + h^{-1}dh \end{aligned}$$

esto es:

$$(Fh)^{-1}d(Fh) = h^{-1}(F^{-1}dF)h + h^{-1}dh$$

en función de las formas tenemos:

$$\frac{1}{2}(Fh)^* \begin{bmatrix} w^3 + iw_1^2 & w + \bar{\pi} \\ \bar{w} - \pi & -(w^3 + iw_1^2) \end{bmatrix} = h^{-1} \begin{bmatrix} pq & -q^2 \\ p^2 & -pq \end{bmatrix} \phi h + h^{-1}dh \quad (4.6)$$

calculando por separado se tiene:

$$\begin{aligned}
 h^{-1} \begin{bmatrix} pq & -q^2 \\ p^2 & -pq \end{bmatrix} \phi h &= \begin{bmatrix} \bar{q} & \bar{p} \\ -p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pq & -q^2 \\ p^2 & -pq \end{bmatrix} \phi \begin{bmatrix} q & -\bar{p} \\ p & -\bar{q} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} pq\bar{q} + p^2\bar{p} & -q^2\bar{q} - p\bar{p}q \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q\phi & -\bar{p}\phi \\ p\phi & -\bar{q}\phi \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -\phi[(p\bar{p})^2 + 2(p\bar{p})(q\bar{q}) + (q\bar{q})^2] \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -\phi(p\bar{p} + q\bar{q})^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 h^{-1} \begin{bmatrix} pq & -q^2 \\ p^2 & -pq \end{bmatrix} \phi h &= \begin{bmatrix} 0 & -\phi \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h^{-1} dh &= \begin{bmatrix} \bar{q} & \bar{p} \\ -p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq & -d\bar{p} \\ dp & d\bar{q} \end{bmatrix} \\
 h^{-1} dh &= \begin{bmatrix} \bar{q}dq + \bar{p}dp & -\bar{q}d\bar{p} + \bar{p}d\bar{q} \\ -pdq + qdp & pd\bar{p} + qd\bar{q} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

reemplazando en la ecuación (4.6)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(Fh)^* \begin{bmatrix} w^3 + iw_1^2 & w + \bar{\pi} \\ \bar{w} - \pi & -(w^3 + iw_1^2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\phi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{q}dq + \bar{p}dp & -\bar{q}d\bar{p} + \bar{p}d\bar{q} \\ -pdq + qdp & pd\bar{p} + qd\bar{q} \end{bmatrix} \\
 \frac{1}{2}(Fh)^* \begin{bmatrix} w^3 + iw_1^2 & w + \bar{\pi} \\ \bar{w} - \pi & -(w^3 + iw_1^2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{q}dp + \bar{p}dp & \bar{p}d\bar{q} - \bar{q}d\bar{p} - \phi \\ qdp - pdq & pd\bar{p} + qd\bar{q} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



Entonces

$$(Fh)^*(w + \bar{\pi}) = 2(\bar{p}d\bar{q} - \bar{q}d\bar{p} - \phi)$$

$$(Fh)^*(\bar{w} - \pi) = 2(qdp - pdq)$$

$$(Fh)^*(w^3 + iw_1^2) = 2(\bar{q}dq + \bar{p}dp)$$

Por lo tanto,

$$(Fh)^*(w) = -\phi$$

$$(Fh)^*(w^3) = 0$$

$Fh : U \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ es un campo orientado en U de la inmersión $f = e_0 \circ F = e_0(Fh)$,

entonces

$$(Fh)^*(\pi) = \bar{w} - 2(qdp - pdq)$$

y puesto que $qdp - pdq$ es del tipo $(1, 0)$ podemos escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (Fh)^*(\pi) &= -\bar{\phi} + \psi\phi \\ &= (Fh)^*(w_1^3 - iw_2^3) \end{aligned}$$

entonces tenemos:

$$(Fh)^*(w_1^3) = \Re[(Fh)^*(\pi)]$$

$$(Fh)^*(w_2^3) = -\text{Im}[(Fh)^*(\pi)]$$

calculamos la parte **real** e **imaginaria** de $(Fh)^*(\pi)$.

$$\begin{aligned}\Re[(Fh)^*(\pi)] &= \frac{1}{2}(Fh)^*(\pi + \bar{\pi}) \\ &= \frac{1}{2}(\psi\phi - \bar{\phi} + \bar{\psi}\bar{\phi} - \phi) \\ &= \frac{1}{2}(\psi\phi - \phi + \bar{\psi}\bar{\phi} - \bar{\phi}) \\ &= \frac{1}{2}(\phi(\psi - 1) + \bar{\phi}(\bar{\psi} - 1)) \\ &= \Re[\phi(\psi - 1)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-Im[(Fh)^*(\pi)] &= \frac{1}{2}(Fh)^*(i\pi - i\bar{\pi}) \\ &= \frac{1}{2}(i(\psi\phi - \bar{\phi}) - i(\bar{\psi}\bar{\phi} - \phi)) \\ &= \frac{i}{2}(\psi\phi - \bar{\phi} - \bar{\psi}\bar{\phi} + \phi) \\ &= \frac{i}{2}(\psi\phi + \phi - \bar{\psi}\bar{\phi} - \bar{\phi}) \\ &= \frac{i}{2}(\phi(\psi + 1) - \bar{\phi}(\bar{\psi} + 1)) \\ &= -Im[\phi(\psi + 1)]\end{aligned}$$

Identificando $(Fh)^*(w_i^j)$ con w_i^j , $i, j = 0, 1, 2, 3$ y haciendo $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ tenemos:

$$\begin{aligned}w_1^3 &= \Re\{[(\psi_1 - 1) + i\psi_2](-w^1 - iw^2)\} \\ &= \Re\{-(\psi_1 - 1)w^1 - i(\psi_1 - 1)w^2 - i\psi_2w^1 + \psi_2w^2\} \\ &= \Re[(1 - \psi_1)w^1 + \psi_2w^2 - i(\psi_2w^1 + (\psi_1 - 1)w^2)] \\ w_1^3 &= (1 - \psi_1)w^1 + \psi_2w^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_2^3 &= -\operatorname{Im}\{[(\psi_1 + 1) + i\psi_2](-w^1 - iw^2)\} \\&= -\operatorname{Im}\{-(\psi_1 + 1)w^1 - i(\psi_1 + 1)w^2 - i\psi_2w^1 + \psi_2w^2\} \\&= -\operatorname{Im}[(1 - \psi_1)w^1 + \psi_2w^2 - i(\psi_2w^1 + (\psi_1 + 1)w^2)] \\w_2^3 &= \psi_2w^1 + (\psi_1 + 1)w^2\end{aligned}$$

Si se sabe que:

$$\begin{bmatrix} w_1^3 \\ w_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^3 \\ w_2^3 \end{bmatrix}$$

entonces se tiene

$$\begin{aligned}w_1^3 &= h_{11}w^1 + h_{12}w^2 = (1 - \psi_1)w^1 + \psi_2w^2 \\w_2^3 &= h_{21}w^1 + h_{22}w^2 = \psi_2w^1 + (\psi_1 + 1)w^2\end{aligned}$$

de esta igualdad se obtiene que

$$h_{11} = (1 - \psi_1), \quad h_{12} = h_{21} = \psi_2, \quad h_{22} = (\psi_1 + 1)$$

si se tiene que

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22}) \\H &= \frac{1}{2}((1 - \psi_1) + (\psi_1 + 1)) \\H &= 1\end{aligned}$$

Recíprocamente, sea M^2 simplemente conexo y sea $f : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ una inmersión



con $H = 1$, existe una $(1,0)$ forma ϕ definida globalmente en M^2 por

$$ds_f^2 = \phi \bar{\phi}$$

Sea $g : M^2 \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ tal que

$$e_0 g(p) = g(p) e_0 \overline{g(p)} = g(p) \overline{g(p)} = f$$

consideramos G de $SL(2, \mathbb{C})$ en \mathcal{F} dado por:

$$G : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{F}$$

$$g(p) \mapsto (e_0 g(p), e_1 g(p), e_2 g(p), e_3 g(p))$$

escogemos ϕ de modo $(G \circ g)^*(w) = -\phi$, entonces

$$\begin{aligned} g^*(g^{-1}dg) &= \frac{1}{2} g^* \begin{bmatrix} w^3 + iw_1^3 & w + \bar{\pi} \\ \bar{w} + \pi & -(w^3 + iw_1^3) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\rho & -2\phi - \bar{\eta} \\ \eta & -i\rho \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde $\rho = g^*(w_1^3)$ (forma real) y $\eta = g^*(\bar{w} - \pi)$

$$\eta = (w^1 - iw^2) - h_{11}w^1 - h_{12}w^2 + ih_{12}w^1 + ih_{22}w^2$$

Usando el hecho de que $H = 1$ tenemos que

$$H = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22})$$

$$2 = h_{11} + h_{22}$$

$$1 - h_{11} = h_{22}$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned}\eta &= w^1 - iw^2 - h_{11}w^1 - h_{12}w^2 + ih_{12}w^1 + ih_{22}w^2 \\ &= (1 - h_{11} + ih_{12})w^1 + (ih_{22} - i - h_{12})w^2 \\ &= (1 - h_{11} + ih_{12})w^1 + ((2 - h_{11}) - 1 + ih_{12})iw^2 \\ &= (1 - h_{11} + ih_{12})w^1 + (1 - h_{11} + ih_{12})iw^2 \\ &= (1 - h_{11} + ih_{12})(w^1 + iw^2) \\ \eta &= (1 - h_{11} + ih_{12})w\end{aligned}$$

es de la forma del tipo (1,0).

Consideremos la 1-forma μ en M^2 con valores en $SU(2)$ definida por

$$\mu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\rho & -\bar{\eta} \\ \eta & -i\rho \end{pmatrix}$$

la 1-forma μ satisface $d\mu = -\mu \wedge \mu$ de hecho:

$$d\mu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} id\rho & -d\bar{\eta} \\ d\eta & -id\rho \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad g^*(w_i^j) = w_i^j$$

tenemos:

$$\begin{aligned} d\rho &= dw_1^2 = (1 + h_{12}^2 - h_{11}h_{22})w^1 \wedge w^2 \\ &= (1 + h_{12}^2 - h_{11}(2 - h_{11}))w^1 \wedge w^2 \\ d\rho &= (1 - 2h_{11} + h_{11}^2 + h_{12}^2)\frac{1}{2}w \wedge \bar{w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\eta &= d\bar{w} - d\pi = dw^1 - idw^2 - dw_1^3 + idw_2^3 \\ &= -w_2^1 \wedge w^2 + iw_1^2 \wedge w^1 + w_2^3 \wedge w_1^2 + i(-w_1^3 \wedge w_2^1) \\ &= w_1^2 \wedge w^2 + iw_1^2 \wedge w^1 + w_2^3 \wedge w_1^2 + iw_1^3 \wedge w_1^2 \\ &= i(\rho \wedge (w^1 - iw^2)) + i((w^3 - iw_2^3) \wedge \rho) \\ &= i(\rho \wedge \bar{w} + \pi \wedge \rho) \\ &= i(\rho(\bar{w} - \pi)) \end{aligned}$$

reemplazando los resultados en $d\mu$, obteniendo

$$\begin{aligned} d\mu &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(1 - 2h_{11} + h_{11}^2 + h_{12}^2)\frac{1}{2}w \wedge \bar{w} & i\rho(w - \bar{\pi}) \\ i\rho(\bar{w} - \pi) & (1 - 2h_{11} + h_{11}^2 + h_{12}^2)\frac{1}{2}w \wedge \bar{w} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \bar{\eta} \wedge \eta & 2i\rho \wedge \bar{\eta} \\ 2i\rho \wedge \eta & \eta \wedge \bar{\eta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\mu \wedge \mu &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -i\rho & \bar{\eta} \\ -\eta & i\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\rho & -\bar{\eta} \\ \eta & -i\rho \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \bar{\eta} \wedge \eta & 2i\rho \wedge \bar{\eta} \\ 2i\rho \wedge \eta & \eta \wedge \bar{\eta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



esto es $d\mu = -\mu \wedge \mu$

Dada una aplicación $h : M^2 \rightarrow SU(2)$ tenemos

$$\begin{aligned}d(h\mu) &= dh \wedge \mu + hd\mu \\ &= dh \wedge \mu + h(-\mu \wedge \mu) \\ &= dh \wedge \mu - dh \wedge \mu \\ d(h\mu) &= 0\end{aligned}$$

pues $-h\mu = -dh$ con la ecuación diferencial $dh = h\mu$

tiene solución si y solo si $dh \wedge \mu + hd\mu = 0$

que es la condición de compatibilidad, existe

$u = h^{-1}dh$ de la forma

$$h = \begin{pmatrix} q & -\bar{\rho} \\ \rho & \bar{q} \end{pmatrix}$$

para p, q funciones diferenciales en M^2



Sea $F = gh^{-1}$ y calculamos $F^{-1}dF$

$$dF = dgh^{-1} + gdh^{-1}$$

$$F^{-1}dF = hg^{-1}(dgh^{-1} + gdh^{-1})$$

$$= h(g^{-1}dg)h^{-1} + h(g^{-1}g)dh^{-1}$$

$$= h(g^{-1}dg)h^{-1} + hdh^{-1}$$

$$= h\mu h^{-1} + h \begin{bmatrix} 0 & -\phi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} h^{-1} + hdh^{-1}$$

$$= dhh^{-1} + hdh^{-1} + h \begin{bmatrix} 0 & -\phi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} h^{-1}$$

si se sabe que I es la matriz identidad

$$hh^{-1} = I$$

$$dhh^{-1} + hdh^{-1} = 0$$

$$\begin{aligned} F^{-1}dF &= h \begin{bmatrix} 0 & -\phi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} h^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} q & -\bar{p} \\ p & \bar{q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\phi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q} & \bar{p} \\ -\bar{p} & q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -q\phi \\ 0 & -p\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q} & \bar{p} \\ -\bar{p} & q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} pq\phi & -q^2\phi \\ p^2\phi & -pq\phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} pq & -q^2 \\ p^2 & -pq \end{bmatrix} \phi \\ dF &= F \begin{bmatrix} pq & -q^2 \\ p^2 & -pq \end{bmatrix} \phi \end{aligned}$$

Por lo tanto dF es de clase (1,0) y podemos concluir que $F : M^2 \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ es holomorfa.

Asi mismo F es un inmersión nula pues:

$$\begin{aligned} \det(F^{-1}dF) &= \begin{vmatrix} pq & -q^2 \\ p^2 & -pq \end{vmatrix} \phi^2 \\ &= (-p^2q^2 + p^2q^2)\phi^2 \end{aligned}$$

$$\det(F^{-1}dF) = 0$$

y satisface

$$e_0F = e_0(gh^{-1}) = eg = f$$



Si $F_1, F_2 : M^2 \leftarrow SU(2, \mathbb{C})$ son holomorfas, se tiene

$$F_1 = F_2 h$$

entonces $h : M^2 \leftarrow SL(2, \mathbb{C})$ es una aplicación holomorfa de M^2 en $SL(2, \mathbb{C})$. Por lo tanto $SU(2)$ es una subvariedad de $SL(2, \mathbb{C})$ y por lo tanto h es constante. \square



V. CONCLUSIONES

Al finalizar el trabajo de investigación se llegó a la siguiente conclusión.

- Se demostró el teorema de la representación de Bryant utilizando la curvatura media en términos de los coeficientes de la segunda forma fundamental
- Se realizó un estudio de las superficies de curvatura media en el espacio euclidiano tridimensional y en el espacio hiperbólico de dimensión tres en el modelo hermitico.
- La curvatura media se logró mostrar que depende solamente de los coeficientes de la segunda forma fundamental.



VI. RECOMENDACIONES

- El teorema de representación de Bryant también se puede demostrar mediante la diferencial de Hopf de la superficie viene dado por $Q = q(z)dz^2$ donde Q es una 2-forma holomorfa.
- el teorema de representación de Bryant es un resultado útil para las demostraciones en curvatura total finita para superficies en \mathbb{H}^3



VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Araújo, P. V. (2001). *Geometría Diferencial*. IMCA.
- Barreda, C. (año). *Superficie de curvatura constante*. Universidad de Cantabria.
- Belén, T. (2020). *Representaciones conformes de superficies de CURVATURA 189 GAUSSIANA o curvatura media constante en 3-variedades*. PUBLISHER.
- Bolton, J. (AÑO). *A first Course in Differential Geometry*. Cambridge University Press.
- Boothby, W. M. (1986). *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*. Academic press.
- Bryant, R. L. (1987). Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space. *Astérisque*, 154(155), 321-347.
- Calderón Barreda, D., et al. (2021). Superficies de curvatura constante.
- CAMACHO, A. (2006). *Teorema fundamental de superficies y el criterio de Frobenius*. PUBLISHER.
- Carmo, M. D. (2016). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Dover Publications.
- Cerezo Cid, A. (2022). El problema de Hopf para superficies de Weingarten.
- Collin, P., Hauswirth, L., & Rosenberg, H. (2001). The geometry of finite topology Bryant surfaces. *Annals of mathematics*, 153(3), 623-659.
- de Oliveira, M. C. A. (1994). Superficies com Curvatura Média Constante um no Espaço Hierbolico. *Sao Paulo*, 75.
- del Castillo, T., & Tominich. (2020). *Differentiable manifolds*. Springer.
- Do Carmo, M. P., & Flaherty Francis, J. (1992). *Riemannian geometry* (Vol. 6). Springer.
- Elon, L. L. (2004). *Curso de Análise Vol. 2*. IMPA.
- Elon, L. L. (2014). *Análise Real Vol. 2l*. IMPA.
- Gálvez, J. A., & Mira, P. (2005). The Cauchy problem for the Liouville equation and Bryant surfaces. *Advances in Mathematics*, 195(2), 456-490.



- García, J. M. E. (s.f.). Representación de Bryant.
- González, J. A. P. (2010). *Un curso de geometría diferencial: teoría, problemas, soluciones y prácticas con ordenador* (Vol. 47). Editorial CSIC-CSIC Press.
- Hoffman, K., Kunze, R., Finsterbusch, H. E., et al. (1973). *Álgebra lineal*. Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Joel Robbin, D. S. (2022). *Intrduction to Differential Geometry*. PUBLISHER.
- Lang, S. (1985). *Differential manifolds*. Springer.
- Lima, E. L. (1973). *Variedades diferenciáveis*. Impa.
- Marcel Berger, B. G. (1998). *Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces*. Springer.
- Oliveira, C. (2018). *Superfícies com Curvatura Média ou Angulo Constante em \mathbb{N}^3* . Universidade de Brasília.
- Oscar Palmas, G. R. V. (2008). *Curso de Geometría Diferencial*. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Richard Millman, G. P. (1977). *Elements of Differential Geometry*. Prentice-Hall Inc.
- Rosenberg, H. (1999). Bryant surfaces. En *The global theory of minimal surfaces in flat spaces*.
- Sánchez Morgado, H., & Palmas Velasco, O. A. (2007). *Geometría riemanniana*. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Tapp, K. (2016). *Differential geometry of curves and surfaces*. Springer.
- Tenenblat, K. (2008). *Introducao a Geometria Diferencial*. Blucher.
- Umehara M., Y. (1993). *Complete Surfaces of Constant Mean Curvature-1 in the 191 Hyperbolic 3-space*. PUBLISHER.



DECLARACIÓN JURADA DE AUTENTICIDAD DE TESIS

Por el presente documento, Yo Jesús Harino Mamani Pampa,
identificado con DNI 70337282 en mi condición de egresado de:

Escuela Profesional, Programa de Segunda Especialidad, Programa de Maestría o Doctorado
Ciencias Físico Matemáticas

informo que he elaborado el/la Tesis o Trabajo de Investigación denominada:
" La Representación de Bryant de las Superficies
de curvatura media Constante. "

Es un tema original.

Declaro que el presente trabajo de tesis es elaborado por mi persona y **no existe plagio/copia** de ninguna naturaleza, en especial de otro documento de investigación (tesis, revista, texto, congreso, o similar) presentado por persona natural o jurídica alguna ante instituciones académicas, profesionales, de investigación o similares, en el país o en el extranjero.

Dejo constancia que las citas de otros autores han sido debidamente identificadas en el trabajo de investigación, por lo que no asumiré como tuyas las opiniones vertidas por terceros, ya sea de fuentes encontradas en medios escritos, digitales o Internet.

Asimismo, ratifico que soy plenamente consciente de todo el contenido de la tesis y asumo la responsabilidad de cualquier error u omisión en el documento, así como de las connotaciones éticas y legales involucradas.

En caso de incumplimiento de esta declaración, me someto a las disposiciones legales vigentes y a las sanciones correspondientes de igual forma me someto a las sanciones establecidas en las Directivas y otras normas internas, así como las que me alcancen del Código Civil y Normas Legales conexas por el incumplimiento del presente compromiso

Puno 03 de Julio del 2024

FIRMA (obligatoria)



Huella



AUTORIZACIÓN PARA EL DEPÓSITO DE TESIS O TRABAJO DE INVESTIGACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL

Por el presente documento, Yo Jesús Marino Mamani Pampa,
identificado con DNI 70337282 en mi condición de egresado de:

Escuela Profesional, Programa de Segunda Especialidad, Programa de Maestría o Doctorado

Ciencias Físico Matemáticas.

informo que he elaborado el/la Tesis o Trabajo de Investigación denominada:

“ La Representación de Bryant de las
Superficies de Curvatura Media
Constante. ”

para la obtención de Grado, Título Profesional o Segunda Especialidad.

Por medio del presente documento, afirmo y garantizo ser el legítimo, único y exclusivo titular de todos los derechos de propiedad intelectual sobre los documentos arriba mencionados, las obras, los contenidos, los productos y/o las creaciones en general (en adelante, los “Contenidos”) que serán incluidos en el repositorio institucional de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno.

También, doy seguridad de que los contenidos entregados se encuentran libres de toda contraseña, restricción o medida tecnológica de protección, con la finalidad de permitir que se puedan leer, descargar, reproducir, distribuir, imprimir, buscar y enlazar los textos completos, sin limitación alguna.

Autorizo a la Universidad Nacional del Altiplano de Puno a publicar los Contenidos en el Repositorio Institucional y, en consecuencia, en el Repositorio Nacional Digital de Ciencia, Tecnología e Innovación de Acceso Abierto, sobre la base de lo establecido en la Ley N° 30035, sus normas reglamentarias, modificatorias, sustitutorias y conexas, y de acuerdo con las políticas de acceso abierto que la Universidad aplique en relación con sus Repositorios Institucionales. Autorizo expresamente toda consulta y uso de los Contenidos, por parte de cualquier persona, por el tiempo de duración de los derechos patrimoniales de autor y derechos conexos, a título gratuito y a nivel mundial.

En consecuencia, la Universidad tendrá la posibilidad de divulgar y difundir los Contenidos, de manera total o parcial, sin limitación alguna y sin derecho a pago de contraprestación, remuneración ni regalía alguna a favor mío; en los medios, canales y plataformas que la Universidad y/o el Estado de la República del Perú determinen, a nivel mundial, sin restricción geográfica alguna y de manera indefinida, pudiendo crear y/o extraer los metadatos sobre los Contenidos, e incluir los Contenidos en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.

Autorizo que los Contenidos sean puestos a disposición del público a través de la siguiente licencia:

Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visita: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

En señal de conformidad, suscribo el presente documento.

Puno 03 de Julio del 2024

FIRMA (obligatoria)



Huella