



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA
ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS



**“IMPLEMENTACIÓN DEL TEOREMA DEL RESIDUO DE
CAUCHY USANDO ALGORITMOS DE MATLAB PARA LA
SOLUCIÓN DE INTEGRALES DE CONTORNO Y PROBLEMAS
CON VALOR INICIAL”**

TESIS

PRESENTADA POR:

Bach. WALTER HUANCA MACHACA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

**LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS**

PUNO – PERÚ

2020



Reporte de similitud

NOMBRE DEL TRABAJO

IMPLEMENTACIÓN DEL TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY USANDO ALGORITMOS DE MATLAB PARA LA SOLUCIÓN DE INTEGRALES DE CONTORNO Y PROBLEMAS CON VALOR INICIAL

AUTOR

WALTER HUANCA MACHACA

RECuento DE PALABRAS

15373 Words

RECuento DE CARACTERES

74384 Characters

RECuento DE PÁGINAS

106 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

2.4MB

FECHA DE ENTREGA

Sep 29, 2023 9:31 PM GMT-5

FECHA DEL INFORME

Sep 29, 2023 9:32 PM GMT-5


● 20% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos

- 17% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 11% Base de datos de trabajos entregados
- 4% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

● Excluir del Reporte de Similitud

- Material bibliográfico
- Coincidencia baja (menos de 12 palabras)
- Material citado
- Fuentes excluidas manualmente


Faustino Murillo Mamani
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
DNI. 29365471
CM. N° 555



[Resumen](#)



DEDICATORIA

A MIS PADRES

Padres Elías J. Huanca Mogrovejo y Bernardina Machaca Mamani que siempre me apoyaron incondicionalmente en la parte moral y económico para poder llegar a ser un profesional de bien.

A DIOS

Por darme la vida, salud y sabiduría a lo largo del estudio de pregrado.

A MI HIJA

Hady Lizeth Huanca Belizario mi motivo para seguir adelante y a mi sobrinita Sumiye Astrid Durand Huanca por brindarme alegría.



AGRADECIMIENTO

A LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO, Facultad de Ingeniería civil y Arquitectura, Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas por compartir sus conocimientos.

AL ASESOR DE TESIS, por sus orientaciones realizadas, aportación y haberme brindado su apoyo durante la ejecución del presente trabajo de investigación.

A LOS MIEMBROS DEL JURADO DE TESIS, por sus valiosos aportes y sugerencias en la realización y conclusión del presente trabajo de investigación.

A LOS COMPAÑEROS, por motivaciones que me brindaron en su momento, René Tacca Quispe, el amigo David Flores Coila, y mi primo Elmer R. Uscamayta, son las personas que me motivaron en momentos que yo ya desistía.



ÍNDICE GENERAL

DEDICATORIA

AGRADECIMIENTO

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE ANEXOS

ACRÓNIMOS

RESUMEN 13

ABSTRACT 14

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA, OBJETIVOS Y JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN 17

1.1. PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN 17

1.1.1. Descripción del problema 17

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA 18

1.2.1. Problema general 18

1.2.2. Problema específico 18

1.3. HIPÓTESIS 18

1.3.1. Hipótesis general 18

1.3.2. Hipótesis específica 18

1.4. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN 19

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN 19

1.5.1. Objetivo general 19

1.5.2. Objetivo específico 20



CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN	21
2.2. MARCO TEÓRICO	23
2.2.1. Números complejos (\mathbb{C})	23
2.2.2. Topología en el plano complejo	25
2.2.3. Funciones holomorfas.....	30
2.2.4. Funciones elementales	32
2.2.5. Límites en el plano complejo.....	33
2.2.6. Continuidad en plano complejo.....	35
2.2.7. Derivada en el plano complejo	35
2.2.8. Integrales en el plano complejo	37
2.2.9. Teorema fundamental del cálculo en el plano complejo	47
2.2.10. Teorema integral de Cauchy	47
2.2.11. Serie de Potencias.....	49
2.2.12. Serie de Laurent.....	51
2.2.13. Singularidades	56
2.2.15. Teorema de residuos de Cauchy	59
2.2.16. Índice y curva de Jordán.....	60
2.2.17. Aplicaciones del teorema del residuo de Cauchy	65
2.2.20. Transformada de Laplace	68
2.2.21. Transformada de la derivada	70

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. SEGÚN SU FINALIDAD	73
--------------------------------------	----



3.2. MÉTODO	73
3.3. TÉCNICA	73
3.4. ESTRATEGIA	73
3.5. MATERIALES.....	73
3.6. VARIABLES	73

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. APLICAMOS EL TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY PARA RESOLVER INTEGRALES DE CONTORNO DE FUNCIONES ANALÍTICAS COMPLEJAS EN FORMA ANALÍTICA, PARA FUNCIONES RACIONALES DE ORDEN 2.....	75
4.2. APLICAMOS EL TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY PARA RESOLVER INTEGRALES DE CONTORNO DE FUNCIONES ANALÍTICAS COMPLEJAS USANDO ALGORITMOS DE MATLAB	76
4.3. APLICAMOS EL TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY PARA RESOLVER INTEGRALES DE CONTORNO DE FUNCIONES ANALÍTICAS COMPLEJAS EN FORMA ANALÍTICA, PARA FUNCIONES RACIONALES DE ORDEN 2.....	77
4.4. APLICAMOS EL TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY PARA RESOLVER INTEGRALES DE CONTORNO DE FUNCIONES ANALÍTICAS COMPLEJAS DE FORMA ANALÍTICA, PARA FUNCIONES RACIONALES DE ORDEN 3.....	80
4.5. APLICAMOS EL TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY PARA RESOLVER INTEGRALES DE CONTORNO DE FUNCIONES	



ANÁLITICAS COMPLEJAS USANDO ALGORITMOS DE MATLAB, PARA FUNCIONES RACIONALES DE ORDEN 3.....	81
4.6. APLICAMOS EL TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY, PARA RESOLVER INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS USANDO ALGORITMOS DE MATLAB.....	84
4.7. PROCEDIMIENTO PARA EVALUAR LA INTEGRAL ANTERIOR POR ALGORITMOS DE MATLAB.....	86
4.8. APLICAMOS EL TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.....	89
V. CONCLUSIONES.....	93
VI. RECOMENDACIONES	94
VII. REFERENCIAS.....	95
ANEXOS.....	97

AREA : Matemáticas

TEMA: Teorema del residuo de Cauchy

LINEA DE INVESTIGACIÓN: Matemática aplicada

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 03 DE ENERO 2020



ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Contorno de integración.....	15
Figura 2: Representación de un número complejo	24
Figura 3: Punto interior	26
Figura 4: Conjunto cerrado.....	26
Figura 5: Conjunto frontera	27
Figura 6: Conjunto abierto.....	27
Figura 7: Conjunto conexo	28
Figura 8: Dominio arbitrario en \mathbb{C}	28
Figura 9: Dominio simplemente conexo	29
Figura 10: Dominio múltiplemente conexa.....	29
Figura 11: Punto interior a γ	30
Figura 12: Punto exterior a γ	30
Figura 13: Función compleja.....	31
Figura 14: Límites complejos.....	33
Figura 15: No existe límite	35
Figura 16: Representación gráfica de una función de valor complejo	37
Figura 17: Representación gráfica de una curva en \mathbb{C}	38
Figura 18: Tipos de curvas	40
Figura 19: Sentido positivo (+) y sentido negativo (-) de la curva.....	41
Figura 20: Parametrización $z(t)$	42
Figura 21: Traza de curva γ	42
Figura 22: Teorema integral de Cauchy	48
Figura 23: T.I.C. para dominio múltiplemente conexo.	48
Figura 24: Teorema de la deformación.....	49



Figura 25: Fórmula integral de Cauchy.....	49
Figura 26: Disco de convergencia en \mathbb{C}	50
Figura 27: Disco perforado en \mathbb{C}	51
Figura 28: Corona circular de la serie de Laurent.....	52
Figura 29: Punto singular aislado en \mathbb{C}	59
Figura 30: Complemento $\mathbb{C} - \Omega$	60
Figura 31: Índice z_1 respecto de γ	61
Figura 32: Representación de índices con respecto a γ	61
Figura 33: Curva de Jordan.....	62
Figura 34: Proceso de la transformada de Laplace.....	69
Figura 35: Circunferencia $\gamma: z - i = 3$	75
Figura 36: Solución en Matlab.....	77
Figura 37: Circulo unitario con un polo.....	77
Figura 38: Solución en Matlab.....	78
Figura 39: Círculos $\gamma: z = 2$	80
Figura 40: Solución en Matlab.....	82
Figura 41: Solución en Matlab.....	84
Figura 34: Gráfico de los polos.....	85
Figura 42: Solución en Matlab de integrales trigonométricas.....	88
Figura 43: Solución de integrales impropias en Matlab.....	89
Figura 44: Representación gráfica de la ecuación diferencial.....	91
Figura 45: Representación gráfica de la ecuación diferencial.....	92



ÍNDICE DE ANEXOS

Anexo A.	Transformada de Laplace.....	97
Anexo B.	Algunos comandos de importancia.....	98
Anexo C.	Operadores Aritméticas en Matlab	98
Anexo D.	Operadores lógicos y relacionales.....	99
Anexo E.	Formato de valores numéricos	100
Anexo F.	Conversión de valores numéricos a cadenas.....	100
Anexo G.	Conversión de cadenas a valores numéricos.....	100
Anexo H.	Variables simbólicas	101
Anexo I.	Funciones para evaluación de expresiones simbólicas	101
Anexo J.	Funciones de análisis matemático.....	102
Anexo K.	Sentencias para gráficos de Matlab.....	102
Anexo L.	Características e etiquetas para una gráfica	103
Anexo M.	Títulos y etiquetas	104



ACRÓNIMOS

Matlab (Matrix Laboratory)

GUI (Interfaz Gráfica de Usuario)

T.I.C. (Teorema Integral de Cauchy)

F.I.C. (Fórmula Integral de Cauchy)



RESUMEN

El presente trabajo de investigación denominado “Implementación del teorema del residuo de Cauchy usando algoritmos de Matlab para la solución de integrales de contorno y problemas con valor inicial”, está relacionado con la teoría del análisis complejo, básicamente en calculo integral complejo. Donde se presenta, la solución a integrales de contorno, para funciones analíticas sobre curvas cerradas y problemas lineales con valor inicial a partir de su función analítica. Esto debido a que el teorema del residuo de Cauchy no es muy difundido, en las escuelas profesionales de las universidades. En ese entender es necesario profundizar el teorema del residuo de Cauchy y buscar sus aplicaciones para un área específico, para ello usamos una herramienta de las tecnologías de información y comunicación como es el Matlab. El objetivo de la investigación es implementar el teorema del residuo de Cauchy para la solución de integrales de contorno sobre curvas cerradas, y problemas lineales con valor inicial usando algoritmos de Matlab. El método es lógico deductivo, porque se ha analizado, teoremas, proposiciones, corolarios y definiciones del cálculo integral complejo y conceptos básicos de ecuaciones diferenciales ordinarias. Finalmente, se logró implementar el teorema del residuo de Cauchy para la solución de integrales de contorno y problemas lineales con valor inicial, usado algoritmos de Matlab.

Palabras Clave: Funciones analíticas, teorema del residuo de Cauchy, algoritmos en Matlab.



ABSTRACT

The present research work called " Implementation of the Cauchy residual theorem using Matlab algorithms for the solution of contour integrals and problems with initial value ", is related to the theory of complex analysis, basically in complex integral calculus. Where it is presented, the solution to contour integrals, for analytical functions on closed curves and linear problems with initial value from its analytical function. This is because the Cauchy remainder theorem is not very widespread in professional schools at universities. In this understanding, it is necessary to deepen the Cauchy residue theorem and find its applications for a specific area, for this we use an information and communication technology tool such as Matlab. The objective of the research is to implement the Cauchy residue theorem for the solution of contour integrals on closed curves, and linear problems with initial value using Matlab algorithms. The method is logical deductive, because it has been analyzed, theorems, propositions, corollaries and definitions of complex integral calculus and basic concepts of ordinary differential equations. Finally, it was possible to implement the Cauchy residue theorem for the solution of contour integrals and linear problems with initial value, using Matlab algorithms.

Keywords: Analytical functions, Cauchy's residue theorem, Matlab algorithms.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

Por la reducida difusión del teorema de residuo de Cauchy en el área de ingenierías, el presente trabajo de investigación; realiza una implementación del teorema en mención usando el software Matlab como herramienta para la resolución de integrales de funciones analíticas sobre curvas cerradas y a problemas lineales con valores inicial.

Ejemplo 1.

Sea f analítica en Ω excepto en las singularidades aisladas z_1, \dots, z_n . Si γ una curva cerrada suave por partes en $\Omega - \{z_1, \dots, z_n\}$, y si γ es homotópica a un punto en Ω lo cual implica que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i [n(\gamma; z_1) \text{Res}(f; z_1) + \dots + n(\gamma; z_k) \text{Res}(f; z_k)].$$

Consideremos, por ejemplo $f(z) = \frac{\cos(2z)}{1+z^2}$ una función analítica y con singularidades aisladas en $z_1 = i$ y $z_2 = -i$, siendo las parametrizaciones correspondientes $\gamma_1: z(t) = 2e^{it}$ para $t \in [0, \pi]$ y $\text{Im } z \geq 0$, $\gamma_2 = [-R, R]$; así $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

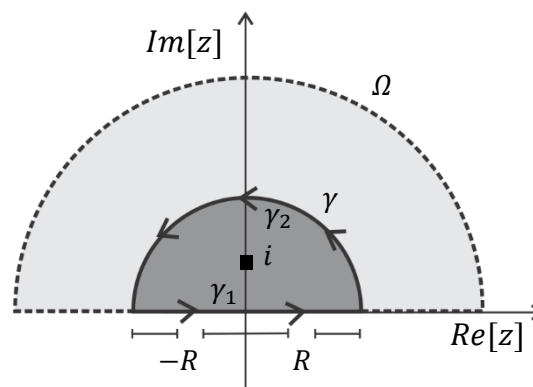


Figura 1: Contorno de integración



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{1+x^2} dz = \int_{\gamma} \frac{e^{i2z}}{1+z^2} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, z_1)) = \pi e^{-2}$$

Es una aplicación inmediata del teorema del residuo.

Ejemplo 2.

Considere el siguiente problema con valor inicial

$$y'' - 2y' + 2y = \cos(t), y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Puede obtenerse la solución usando el teorema de residuo a

$$F(s) = \frac{s^3 - 2s^2 + 2s - 2}{[(s-1)^2 + 1](1+s^2)}$$

$$y = \text{Res}(e^{st}F(s); 1+i) + \text{Res}(e^{st}F(s); 1-i) + \text{Res}(e^{st}F(s); -i) + \text{Res}(e^{st}F(s); i)$$

y realizando un cálculo inmediato de residuos en puntos singulares obtenemos

$$y = \frac{\cos(t) - 2\text{sen}(t)}{5} + \frac{e^t}{5} (4\cos(t) - 2\text{sen}(t))$$

De este modo, podemos realizar operaciones en cálculo integral complejo y en problemas lineales con valor inicial de un modo práctico, tanto en el ejemplo 1 y en el ejemplo 2 se ha aplicado el teorema del residuo de Cauchy para su solución rápida y eficiente.



I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA, OBJETIVOS Y JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN

1.1.1. Descripción del problema

El teorema del residuo de Cauchy, es consecuencia directa del teorema integral de Cauchy y forma parte fundamental de la teoría matemática de cálculo integral complejo. Su utilidad básica se fundamenta en la solución práctica, para resolver integrales reales e impropias y en problemas con valor inicial dentro de problemas físicos y de ingeniería como una herramienta más útil para estos efectos.

Esto debido a que el teorema del residuo de Cauchy, no es muy difundido en el área de ciencias e ingenierías. En ese entender es necesario profundizar el teorema del residuo y buscar sus aplicaciones en ciencias e ingenierías, para ello usamos bases de cálculo integral complejo y una herramienta de las tecnologías de información y comunicación como es el software Matlab, para el desarrollo de algoritmos; que sean una alternativa para solución de integrales de contorno y problemas lineales con valor inicial.

¿Será posible implementar algoritmos en Matlab para resolver integrales de contorno y soluciones a problemas con valor inicial?

El objetivo es analizar y demostrar el teorema del residuo de Cauchy e implementar algoritmos en Matlab para la aplicación del teorema de residuo en la resolución de integrales de contorno de funciones analíticas sobre curvas cerradas y problemas lineales con valor inicial.



1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

1.2.1. Problema general

En la presente investigación se plantea, responder la siguiente interrogante:

¿Será posible la implementación del teorema del residuo de Cauchy usando algoritmos de Matlab para la solución de integrales de contorno y problemas con valor inicial?

1.2.2. Problema específico

- ¿Qué alternativa presenta el teorema del residuo de Cauchy, para la solución a los problemas de cálculo integral complejo y problemas lineales con valor inicial de funciones analíticas?
- ¿Cuáles son las sentencias de Matlab que permiten la implementación de un algoritmo para el teorema del residuo de Cauchy, que pueda ser una alternativa de solución, a los problemas de cálculo integral complejo y problemas lineales con valor inicial de funciones analíticas?

1.3. HIPÓTESIS

1.3.1. Hipótesis general

La aplicación del algoritmo, es efectivamente una alternativa para la solución de integrales de contorno y problemas lineales con valor inicial.

1.3.2. Hipótesis específica

- La aplicación del teorema del residuo de Cauchy, es una alternativa de solución, a los problemas de cálculo integral complejo y problemas lineales con valor inicial de funciones analíticas.



- Las sentencias permiten el desarrollo de un algoritmo, para el teorema del residuo de Cauchy, que pueda ser una alternativa de solución, a los problemas de cálculo integral complejo y problemas lineales con valor inicial de funciones analíticas.

1.4. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

En la actualidad los TIC's es una herramienta que nos sirve para resolver problemas matemáticos de ingeniería, física, matemática, estadística, astrofísica y entre otras, para lo cual es necesario modelar o plantear un algoritmo que permita dar solución al problema. Por eso, formulamos una aplicación del teorema del residuo de Cauchy usando el software Matlab; los resultados que se obtendrá serán de mucha utilidad para los investigadores que deseen profundizar programación en el área de análisis complejo.

La obtención del resultado por medio de la aplicación del teorema del residuo para evaluar integrales de contorno y problemas lineales con valor inicial, por medio de la solución analítica puede ser muy tediosa. Para una solución alternativa y efectiva presentamos un algoritmo desarrollado en el software Matlab.

La investigación computacional, en ciencias e ingenierías es primordial para una visualización grafica de los resultados. La presente investigación será de mucha utilidad para estudiantes e investigadores que deseen ampliar su conocimiento; también para incentivar la investigación en computación matemática ya sea, modelando resultados abstractos de alguna teoría en ciencias e ingenierías.

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.5.1. Objetivo general

Analizar e implementar el teorema del residuo de Cauchy para resolver integrales de contorno de funciones analíticas complejas y problemas con valor inicial usando algoritmos de Matlab



1.5.2. Objetivo específico

- Demostrar el teorema del residuo de Cauchy, el cual es una alternativa de solución, a los problemas de cálculo integral complejo y problemas lineales con valor inicial de funciones analíticas.
- Analizar las sentencias de Matlab que permiten un desarrollo de un algoritmo, que pueda ser una alternativa de solución, a los problemas de cálculo integral complejo y problemas lineales con valor inicial de funciones analíticas.



CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Considero los siguientes trabajos, relacionados a la presente investigación:

- **H. M. TIWARI, VINAY KUMAR PATEL, ANIL MISHRA (2017).** Application of Cauchy's Residuo Theorem to Solve Complex Integral using MATLAB.

En este trabajo presenta, un nuevo enfoque de tecnología para calcular residuos, implementando Matlab sobre una curva cerrada círculo. En cual incluye cálculos de integrales, límites, series de Taylor y gráficos de funciones. Realizado en Dept. of Mathematics, Bhilai Institute of Technology, Raipur, Chhattisgarh, India.

- **OKO, NLIA, SAMBO, DACHOLLOM (2015).** Applications of Residue Inversion Formula for Laplace Transform to Initial Value Problem of Linear ODE's.

En este artículo, aplica inversa transformaciones de Laplace en las resoluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n , mediante el método tradicional es decir resolviendo en fracción parcial y el uso de tabla de transformada de Laplace. También da a conocer un ejemplo, que es posible calcular mediante el teorema de residuo. Realizado en Department Of Mathematics/Statistics, Akanu Ibiam Federal Polytechnic, Unwana Afikpo, Ebonyi State, Nigeria.

- **EFRACIO HERMINO ASIS LÓPEZ (2013).** Aplicación del Software Matlab como instrumento de enseñanza de matemática I en los estudiantes del I ciclo de la carrera de ingenierías de sistemas de la universidad de ciencias y humanidades.

En esta tesis de maestría, se vio cómo influye la aplicación del software Matlab como instrumento de enseñanza en el rendimiento académico en Matemática, en los



alumnos del I Ciclo de Ingeniería de Sistemas, de la Universidad Ciencias Humanidades Lima-Perú, en el periodo 2013-II y el objetivo general fue demostrar la influencia de la aplicación del software Matlab como instrumento de enseñanza en el rendimiento académico de matemática, en estos alumnos.

- **RAMOS FLORES SANTIAGO IGNACIO (2012).** Aplicación del programa Matlab en la resolución de ecuaciones diferenciales aplicado a la materia de Cálculo Tres.

Es una tesis de pregrado que ofrece una orientación teórica comprensible sobre ecuaciones diferenciales y su implementación en el software Matlab, estableciendo una comparación entre la resolución usual de las ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir, la resolución utilizando álgebra y cálculo; y, la resolución operando los comandos del programa de cálculo técnico científico Matlab. Realizada en la universidad católica de Santiago de guayaquil-Ecuador

- **VENTURA DE JESUS DAYNITTI (2007).** Aplicaciones del teorema del residuo.

En este artículo, estudia las funciones complejas para integrales complejas y la serie Laurent con el objetivo de demostrar el teorema residual con un objetivo específico, lo aplicó al cálculo de integrales impropias de funciones racionales e integrales, que implican funciones trigonométricas. Realizado en Universidade Federal de Santa Catarina-Brasil

- **GARCIA ANDRADE DAMARIS, VASQUEZ VASQUEZ RUDIS (2014).**

Teorema del residuo y algunas de sus aplicaciones.

Esta investigación indica que teorema del residuo nos permitirá hacer uso del cálculo de residuos para evaluar integrales de funciones cuyas trayectorias encierran varias singularidades independientemente de cualquier tipo de singularidad ya sea polo, removibles o esenciales. Realizado en universidad de el salvador de centro américa.



- **CASADO GARCIA ANGELA (2016).** Aplicación del Teorema de Residuos.

Esta investigación estudia y profundiza en algunas de las aplicaciones prácticas del teorema de residuos y otro resultado clave que profundiza para llegar a las formulaciones actuales del concepto de residuo y del teorema de los residuos es el llamando el teorema de Laurent. Realizado en la Universidad de la Rioja Logroño-España.

- **RAINWATER GREG. (2007)** Residue Theorems and their Applications Computing integrals once thought impossible to evaluate analytically.

En este trabajo introducen técnicas que pueden hacer posible lo imposible. En este presenta el teorema de residuo y aplico técnicas a integrales de ciertas formas que no pueden calcularse usando métodos en el cálculo de variables reales. Los teoremas de residuos no solo permiten llegar a una solución cerrada, sino que también pueden hacer que la evaluación de integrales sea mucho más fácil que antes. Realizado en California State University, Monterey Bay.

2.2. MARCO TEÓRICO

2.2.1. Números complejos (\mathbb{C})

Definición 2.2.1.1. (Números complejos) Es el conjunto de pares ordenados de números reales, simbólicamente tenemos:

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

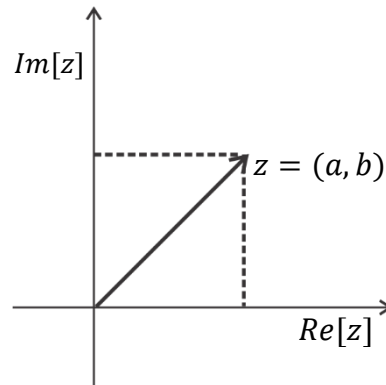


Figura 2: Representación de un número complejo

Definición 2.2.1.2. (Cuerpo complejo) Siendo $z = (a, b), w = (c, d)$ dos números complejos, adición y multiplicación definidos por:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Estas dos operaciones dotan a \mathbb{C} una estructura de cuerpo.

Definición 2.2.1.3. (Números puros e imaginarios) Siendo $z = (a, b)$ un número complejo, con $b = 0$, se tiene $z = (a, 0)$ el cual es llamado reales puros y con $a = 0$, se tiene $z = (0, b)$ es llamado número imaginario puro.

Definición 2.2.1.4. (Real puro) Siendo $z = (a, 0)$, con $z = a$ tenemos

$$a = (a, 0)$$

Definición 2.2.1.5. (Imaginario puro) Siendo $z = (0, b)$, con $z = i$ tenemos

$$i = (0, 1)$$

Teorema 2.2.1.6. (Forma binómica) Si $i = (0, 1)$ y $a = (a, 0)$, entonces



$$z = (a, b) = a + ib$$

Es llamada la forma binómica de un número complejo

Demostración: Sea $(a, b) \in \mathbb{C}$.

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0)$$

$$= a + (0, b)$$

Definición 2.2.1.4.

$$= a + b(0,1)$$

Definición 2.2.1.5.

$$= a + bi$$

Finalmente concluimos con un resultado muy importante el cual es:

$$i^2 = i * i = (0,1) * (0,1) = -1$$

Definición 2.2.1.7. (Conjugado, módulo) Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$, se define:

$$a = \operatorname{Re}(z), b = \operatorname{Im}(z)$$

$$\bar{z} = a - ib \text{ es el conjugado de } z$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ es el módulo de } z$$

2.2.2. Topología en el plano complejo

López (2002) afirma:

“En lo sucesivo, al plano \mathbb{C} lo supondremos dotado de la topología inducida por la norma euclídea de \mathbb{R}^2 ” (p.35).

Pues bien consideremos la topología usual de \mathbb{R}^2 en \mathbb{C}

Si $z \in \mathbb{C}$, $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ (norma euclídea)

Sea $z, w \in \mathbb{C}$ $d(z, w) = |z - w|$ (distancia euclídea)

Definición 2.2.2.1. (Punto interior) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{C} y z_0 un punto en Ω , z_0 es un punto interior de Ω si existe una vecindad de centro z_0 y radio $r > 0$ totalmente contenida en Ω . (Mosquera; Soto, 2016, p.11).

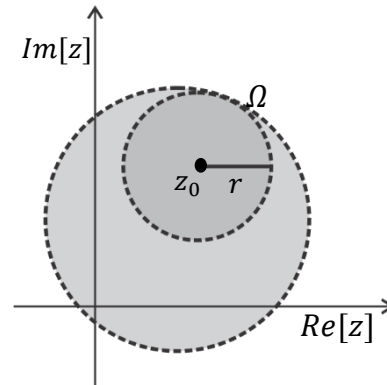


Figura 3: Punto interior

Definición 2.2.2.2. (Conjunto cerrado) Sea $\bar{\Omega} \subset \mathbb{C}$, $\bar{\Omega}$ es un conjunto cerrado en \mathbb{C} si su complemento es abierto. (Mosquera; Soto, 2016, p.11).

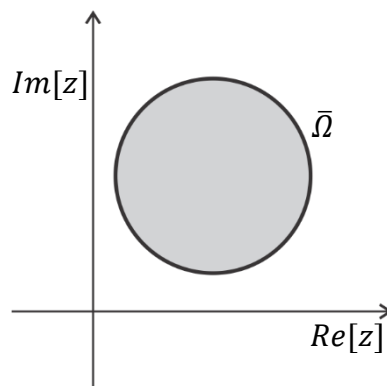


Figura 4: Conjunto cerrado

Definición 2.2.2.3. (Conjunto frontera) Sea Ω un subconjunto de \mathbb{C} y z_0 un punto en \mathbb{C} . z_0 es un punto frontera de Ω si toda vecindad de centro en z_0 y radio $r > 0$ contiene puntos que están en Ω y puntos que no están en Ω . (Mosquera; Soto, 2016, p.11).

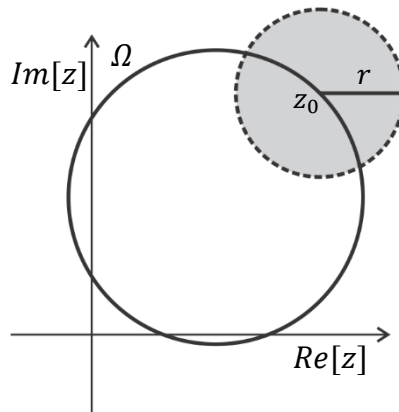


Figura 5: Conjunto frontera

Definición 2.2.2.4. (Conjunto abierto) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω es abierto en \mathbb{C} si y sólo si todo punto de Ω es interior. (Mosquera; Soto, 2016, p.11).

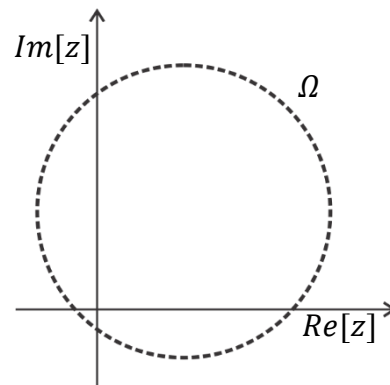


Figura 6: Conjunto abierto

Definición 2.2.2.5. (Acotado) Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es acotado, si existe $R > 0$ tal que $\Omega \subset D_R(0)$. (López, 2002, p.35).

Definición 2.2.2.6. (Compacto) Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es compacto cuando es cerrado y acotado. (López, 2002, p.35).

Definición 2.2.2.7. (Conjunto conexo) Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{C} , Ω es conexo si todo par de puntos de Ω se puede unir por una poligonal contenida en el conjunto.

(Mosquera; Soto, 2016, p.13).

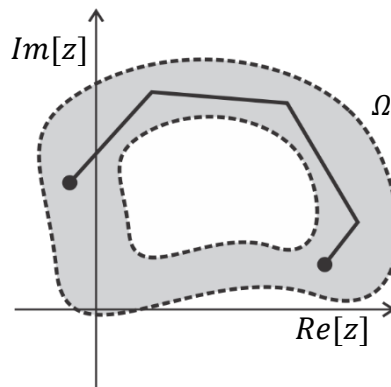


Figura 7: Conjunto conexo

Definición 2.2.2.8. (Dominio) Se dice que Ω es dominio, si es abierto y conexo en \mathbb{C} .

(Mosquera; Soto, 2016, p.13).

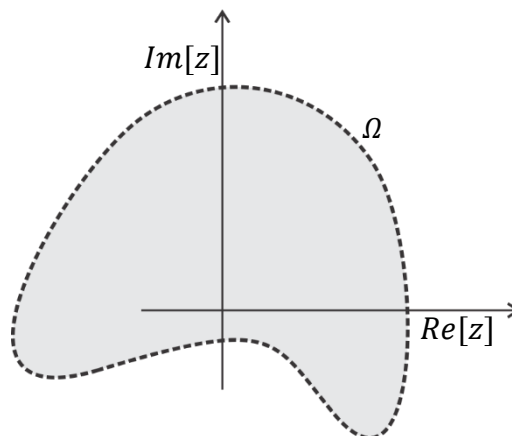


Figura 8: Dominio arbitrario en \mathbb{C}

Definición 2.2.2.9. (Simplemente conexo) Sea Ω un dominio de \mathbb{C} . Ω es simplemente conexo si cualquier camino cerrado $\gamma \in \mathcal{H}([0,1]; \Omega)$ es homotópico a un punto.

(Aparicio; Payá, 1985, p.193).

Intuitivamente un dominio es simplemente conexo cuando no tiene agujeros y γ puede deformarse continuamente en un punto. (Krantz, 2007, p.77)

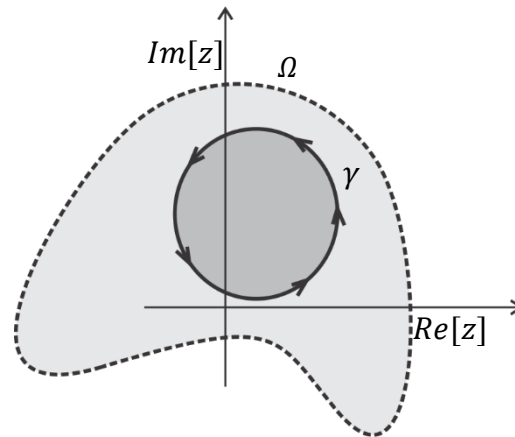


Figura 9: Dominio simplemente conexo

Observación: Si un dominio conexo, no es simplemente conexo, se dice que es múltiplemente conexo. (Aparicio; Payá, 1985. p.193).

Una interpretación gráfica se muestra en la siguiente figura.

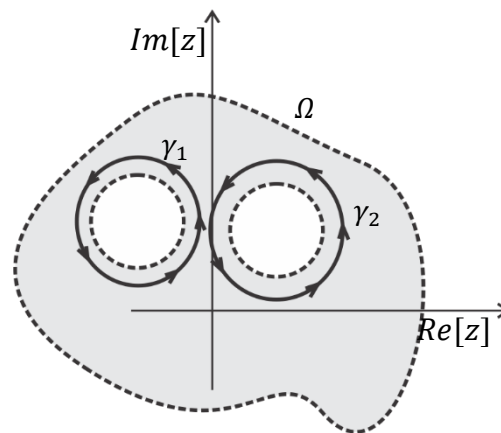


Figura 10: Dominio múltiplemente conexa

Observación: (Punto interior a una curva) Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto interior a una curva cerrada simple γ , si existe, $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset \gamma$, esta observación puede ver en (Aparicio; Payá, 1985, p.44).

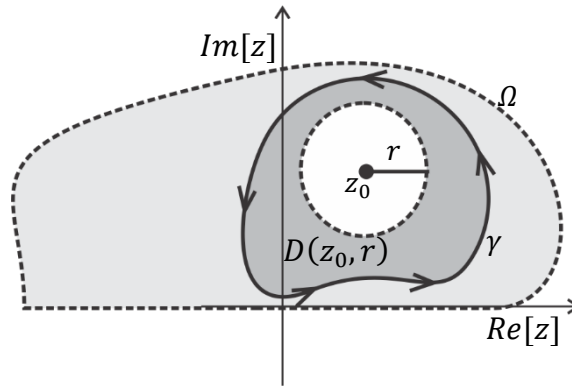


Figura 11: Punto interior a γ

Observación: (Punto exterior a curva) Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto exterior a una curva cerrada simple γ , si existe, $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \cap \gamma = \emptyset$, esta observación puede ver en (Aparicio; Payá, 1985, p.44).

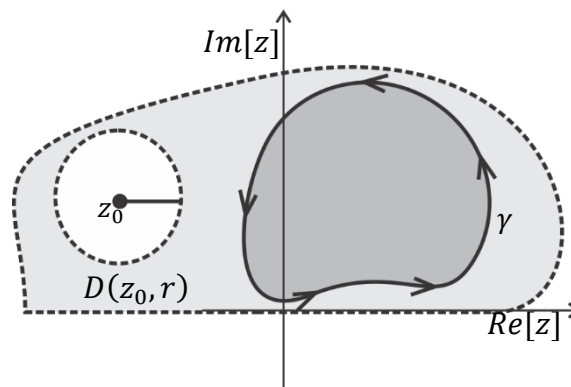


Figura 12: Punto exterior a γ

2.2.3. Funciones holomorfas

Definición 2.2.3.1. (Funcion compleja) Dado $\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω es un dominio. Se denomina función compleja de una variable compleja $f(z)$ a una aplicación $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que a cada valor z le corresponde un único número $w = f(z) \in \mathbb{C}$.

(Aparicio; Payá, 1985, p.59).

Las funciones complejas no son más que las funciones definidas en subconjuntos de \mathbb{R}^2 con valores en \mathbb{R}^2 .

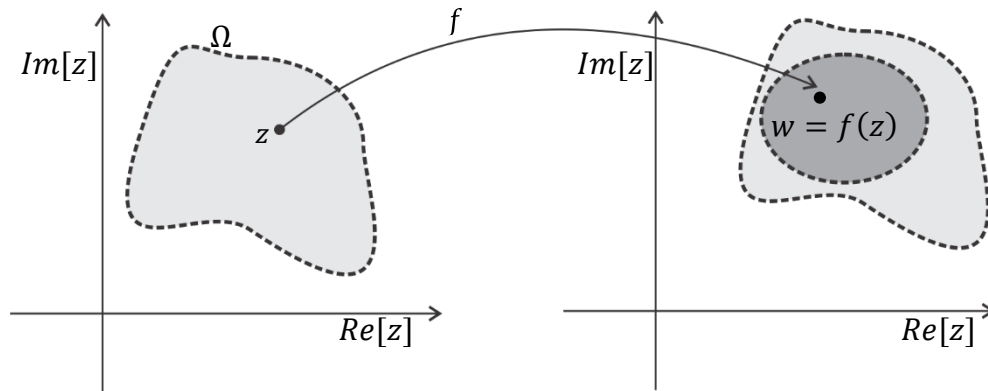


Figura 13: Función compleja

$$z = x + iy = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}$$

$$w = u + iv = (u, v) \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}$$

$$z \rightarrow f(z) = u + iv = u(x, y) + iv(x, y) = \text{Re } f + \text{Im } f$$

También $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ están definidas en \mathbb{R}^2 con valores en \mathbb{R} , son dos funciones de dos variables reales que representan la parte real y la parte imaginaria de $f(z)$.

Ejemplo 1.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, siendo Ω un dominio, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función definida por $f(z) = z^2$.

$$\begin{aligned} \text{Como } z = (x, y) = x + iy \rightarrow f(z) &= f(x, y) \\ &= (x + iy)^2 \\ &= x^2 - y^2 + 2ixy \\ &= u(x, y) + iv(x, y) \end{aligned}$$

2.2.4. Funciones elementales

Definición 2.2.4.1. (Constante, identidad) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, siendo Ω un dominio,

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función constante. identidad definida por:

$f(z) = c, \forall z \in \mathbb{C}$ con una asignación constante $c \in \mathbb{C}$.

$f(z) = z, \forall z \in \mathbb{C}$.

Definición. 2.2.4.2. (Función racional) Se denomina función racional a una función definida como cociente de dos polinomios $p(z)$ y $q(z)$.

$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ esta función está definida en todo \mathbb{C} , excepto en puntos donde anulen el denominador $Q(z)$, es decir, en las raíces de $Q(z)$.

Ejemplo 1. Sea $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, siendo Ω un dominio, una función definida por:

$$f(z) = \frac{z^2 + 4z - 2}{z^2 + 1}$$

es definida para todo valor de \mathbb{C} excepto para $z = i$ y $z = -i$.

Definición 2.2.4.3. (Función exponencial) Se llama función exponencial a la función definida en un dominio $\Omega, f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Definición 2.2.4.4. (Funciones trigonométricas) Una función trigonométrica compleja

$f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, siendo Ω un dominio y es definida por:

$$f(z) = \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$f(z) = \operatorname{cos} z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Estas funciones elementales están definidas en un dominio Ω .

(Aparicio; Payá, 1985, p.61).

2.2.5. Límites en el plano complejo

Definición 2.2.5.1. (Límites) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja y $z_0 \in \Omega$. Decimos que el número $w_0 \in \mathbb{C}$ es el límite de f cuando $z \rightarrow z_0$, si para todo $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que cuando $z \in \Omega$ y $0 < |z - z_0| < \delta$, entonces

$$|f(z) - w_0| < \epsilon. \text{ (Bernardo, 2006, p.65) y (Mosquera; Soto, 2016, p.27)}$$

Simbólicamente tenemos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon.$$

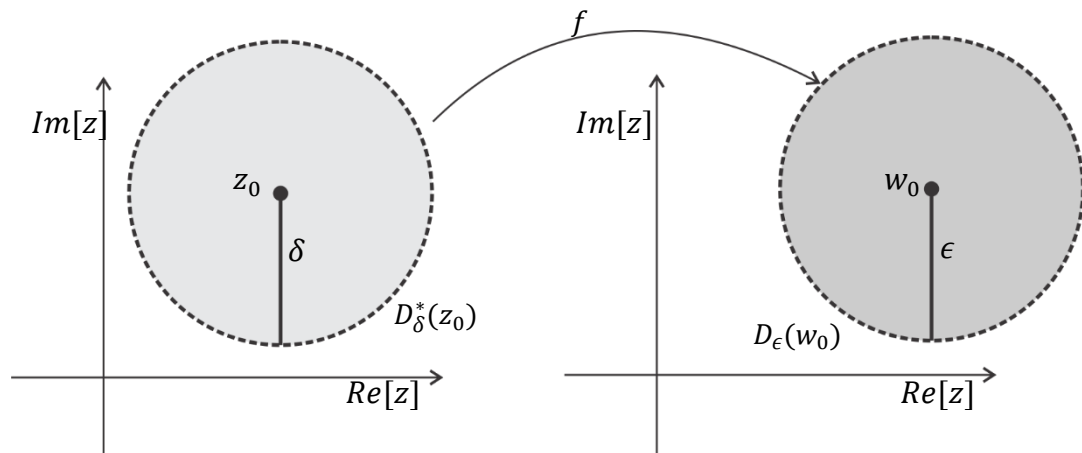


Figura14: Límites complejos

Nota: La interpretación geométrica de límites es en base a vecindad, es decir, para un disco dado tenemos:

$$D_\epsilon(w_0) = \{f(z) \in \mathbb{C} \text{ tal que } |f(z) - w_0| < \epsilon\}$$

existe otra vecindad

$$D_\delta^*(z_0) = D_\epsilon(w_0) - \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } 0 < |z - z_0| < \delta\}$$



Proposición 2.2.5.2. (Propiedades) Sea $f, g: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja definida en un abierto Ω .

Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_1$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = w_2$, entonces:

- $\lim_{z \rightarrow z_0} cf(z) = cw_1$, donde c es cualquier número complejo;
- $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = w_1 + w_2$
- $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)g(z)) = w_1w_2$

Ejemplo: Demostrar que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}}$ no existe

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + iy}{x - iy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + iy}{x - iy}$$

Solución. Debido a que un punto complejo tiene infinidad de caminos convergentes para ese punto, para este caso tomamos $C1: z = (x, 0) = x + i0$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \frac{x + i0}{x - i0} = \lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

para este caso tomamos $C2: z = (0, y) = 0 + iy$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} \frac{0 + iy}{0 - iy} = \lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} -\frac{iy}{iy} = -\lim_{y \rightarrow 0} 1 = -1$$

Puesto que el límite para el camino $C1$ y $C2$ son diferentes, por lo tanto, el límite no existe.

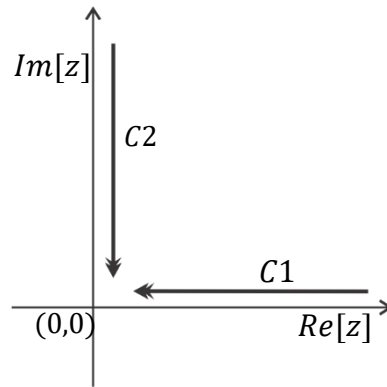


Figura 15: No existe límite

2.2.6. Continuidad en plano complejo

Definición 2.2.6.1. (Continuidad) Sea $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja y $z_0 \in \Omega$. La función f es continua en $z_0 \in \Omega$, sí y sólo si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

(Mosquera; Soto, 2016, p.29)

2.2.7. Derivada en el plano complejo

Definición 2.2.7.1. (Derivada) Sea f una función cuyo dominio de definición contiene una vecindad $|z - z_0| < \varepsilon$ de un punto z_0 . Diremos que f es derivable en z_0 , si existe

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathbb{C}$$

que se llama derivada de f en el punto z_0 y denotado por $f'(z_0)$. En este caso, decimos que f es derivable en z_0 . (Churchill, 2009, p.56)

Teorema 2.2.7.2. Si f es derivable en z_0 , entonces f es continua en z_0 .

Prueba.

por hipótesis tenemos que tenemos f es derivable.



$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \\ &= (f'(z_0))(0) = 0 \\ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) &= f(z_0)\end{aligned}$$

Finalmente concluimos esta sección con todas las definiciones anteriores, pasamos a definir una función holomorfa.

Definición 2.2.7.3. (Función holomorfa) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja. Decimos que f es holomorfa en Ω si $f'(z)$ existe para todo punto $z \in \Omega$. (Aparicio; Payá, 1985, p.94).

El teorema siguiente es idéntico a la que se emplea en el cálculo para evaluar funciones indeterminadas con funciones de variable real.

Teorema 2.2.7.4. (L'Hospital)

Si $f(z_0) = g(z_0) = 0$, y si $f(z)$ y $g(z)$ son derivables en z_0 con $g'(z_0) \neq 0$, entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

(Acevedo, 2006, p.86).

2.2.8. Integrales en el plano complejo

2.2.8.1. Integral de contorno

La integral de una función de valor complejo en una ruta o camino, en el plano complejo se introducirá a través de la integral de una función de valor complejo de una variable real, que a su vez se expresa en términos de una integral de Riemann ordinaria.

Definición 2.2.8.1.1. Una función de valor complejo

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \quad (a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b)$$

en un intervalo real se llama integrable, si $Re f, Im f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones integrables en el sentido del análisis real. (por ejemplo, en el sentido Riemann o en el sentido de función regulada. Qué noción de integral se va a utilizar no es importante, es esencial que todas las funciones continuas sean integrables)

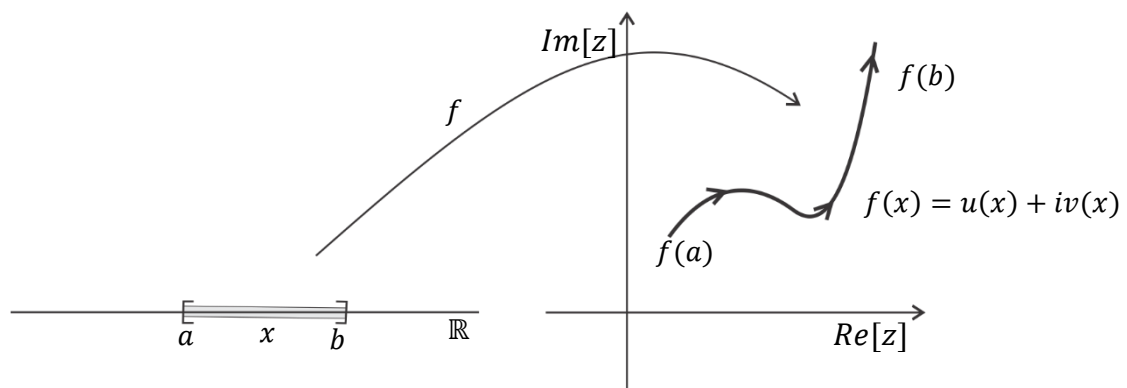


Figura 16: Representación gráfica de una función de valor complejo

La Integral de Riemann de f es definido en términos de su parte real e imaginario de f por

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b Re f(x)dx + i \int_a^b Im f(x)dx$$

- La linealidad es definida para λ y $\mu \in \mathbb{R}$ y $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ funciones continuas, entonces se cumple:

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

(Busam, 2009, p. 70).

Las siguientes definiciones de curva y caminos, serán citadas para su entendimiento, respecto a las definiciones de curva y camino.

Definición 2.2.8.1.2. (Curva) Sean $x = x(t)$ e $y = y(t)$ funciones continuas de una variable real t , definida para $t \in [a, b]$. Llamaremos curva al conjunto de puntos (x, y) determinado por estas ecuaciones. (Daynitti, 2007, p.25)

Definición 2.2.8.1.3. (Curva) Se define una curva como el rango de una función continua $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de valores complejos $z(t)$ definida en el intervalo $[a, b]$. es decir, una curva γ es el rango de una función dada por:

$z(t) = (x(t), y(t)) = x(t) + iy(t)$, para $a \leq t \leq b$, donde $x(t)$ y $y(t)$ son funciones continuas de valor real. (Mathews, 1997, p.30).

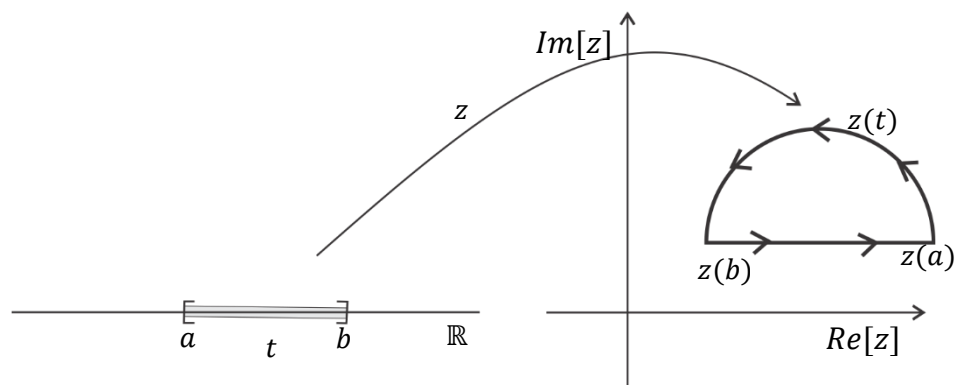


Figura 17: Representación gráfica de una curva en \mathbb{C}

De la primera definición tenemos las siguientes observaciones.

Observación: Las ecuaciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$ son llamadas ecuaciones paramétricas y t es un parámetro.

Observación: Si las ecuaciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$ son diferenciables no nulas, decimos que la curva es suave.

Observación: De la observación anterior, siendo x e y diferenciables, entonces z es diferenciable.

Observación: Si z es diferenciable en $[a, b]$, entonces z' define una función $z': [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.

Observación: Si $z': [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es continua, entonces decimos que la curva es continuamente diferenciable.

Las observaciones anteriores se pueden ver en. (Conway. 1978. p.33)

Definición 2.2.8.1.4. Una curva se llama suave por partes, si hay una partición

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

tal que las restricciones

$$\gamma_j = \gamma \Big|_{[\gamma_j, \gamma_{j+1}]} \quad \forall j, 0 \leq j < n, \quad \text{son suaves.}$$

(Busam, 2005, p.71)

De la segunda definición tenemos las siguientes observaciones.

Nosotros especificamos una curva γ como

$\gamma: z(t) = x(t) + iy(t)$ para $a \leq t \leq b$ y decimos que $z(t)$ es una parametrización de la curva γ .

- Una curva parametrizada suave (γ) se llama curva cerrada si su punto inicial y final coinciden, es decir, $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- Una curva parametrizada suave (γ) se llama curva simple, sí para $t_1 \neq t_2$ en $[a, b]$, entonces $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$, con la posible excepción del caso $\gamma(a) = \gamma(b)$. En este caso excepcional, γ es una curva cerrada simple.
- Una curva parametrizada suave (γ) es de Jordan si es cerrada y simple excepto en sus extremos.

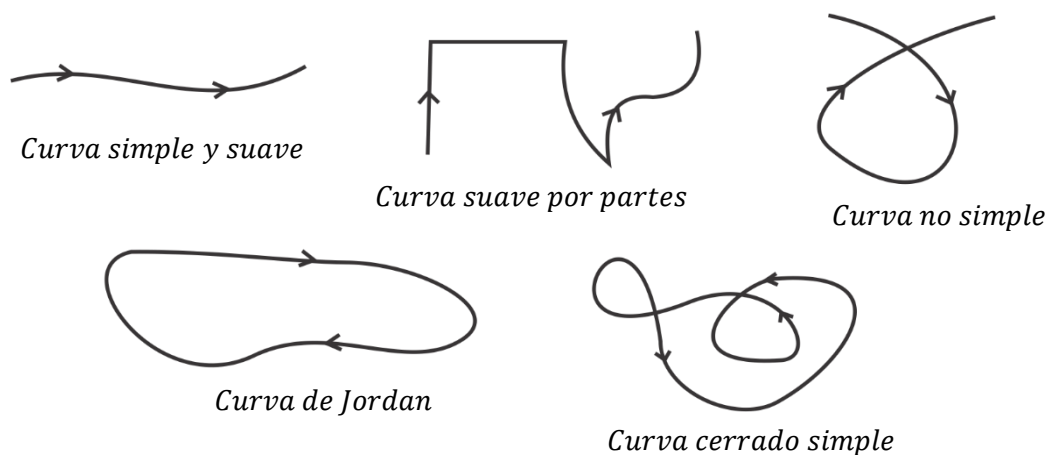


Figura 18: Tipos de curvas

Este último gráfico se puede ver en (Mosquera, 2016, p.71).

Observación: Una ecuación $z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b]$ es llamada ecuación paramétrica de la curva γ .

Definición 2.2.8.1.5. Supongamos que una curva γ se representada por $x = x(t)$ e $y = y(t), t \in [a, b]$. Llamaremos de sentido positivo sobre γ , el sentido en el cual una curva es trazada cuando el parámetro t crece de a para b . El sentido opuesto es llamado negativo. Usaremos la notación $-\gamma$ para representar una curva γ de orientación negativa.

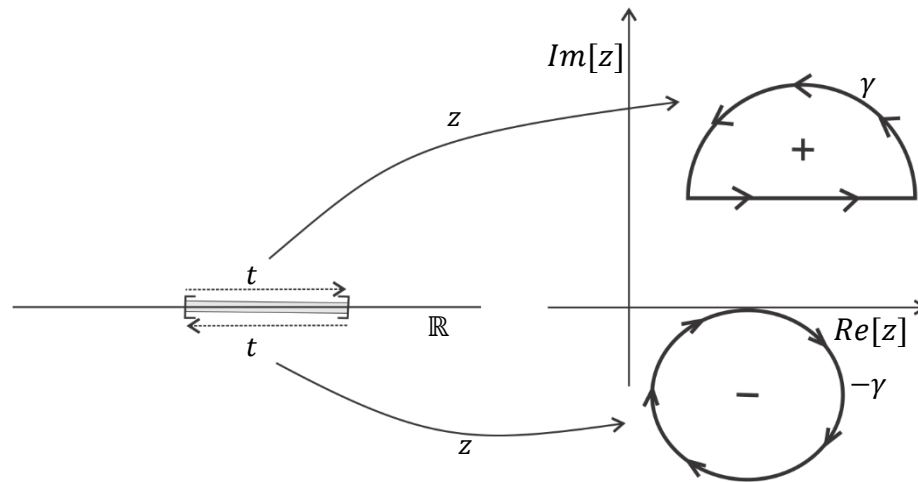


Figura 19: Sentido positivo (+) y sentido negativo (-) de la curva

Definición 2.2.8.1.6. Una parametrización $z(t)$ se dice regular si la derivada $z'(t)$ existe y es continua en $[a, b]$, con $z'(t) \neq 0$ para $a \leq t \leq b$. (Várelly, 2012, p. 32).

Ejemplo.

La parametrización $z(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ con $R > 0$ representa la circunferencia $(x)^2 + (y)^2 = R^2$ recorrida en sentido positivo. La parametrización $z(t)$ es regular ya que $z'(t) = iRe^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ con el mismo punto inicial y final ya que $z(0) = z(2\pi) = R$.

$$\begin{aligned}
 z(0) &= R(e^{i(0)}) \\
 &= R(\cos(0) - i \operatorname{sen}(0)) \\
 &= R(1 - 0) \\
 &= R
 \end{aligned}$$

Esto nos indica que para $0 \neq 2\pi$ se tiene $z(0) = z(2\pi)$ la curva es cerrada pero no simple.

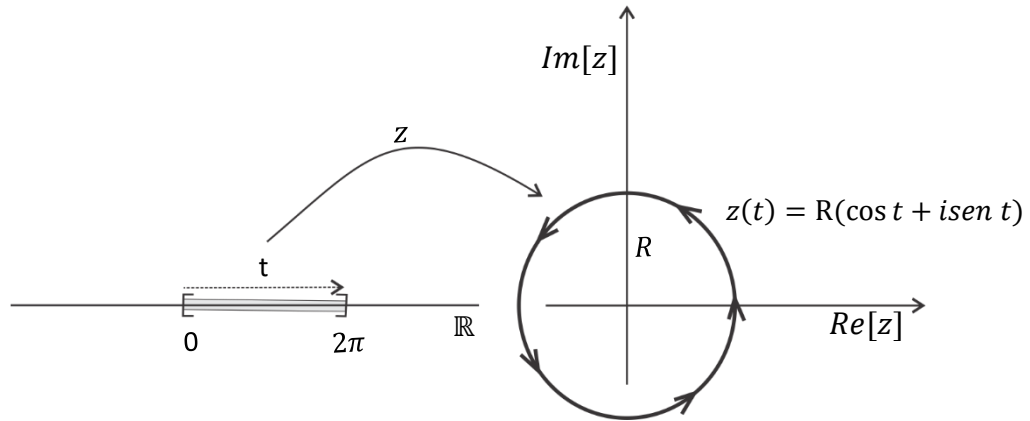


Figura 20: Parametrización $z(t)$

Seguidamente pasamos a definir caminos.

Definición 2.2.8.1.7. Una curva es una aplicación continua $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Si, además, γ es continuamente diferenciable, entonces γ es llamado un camino. El rango (o imagen o traza) de γ será denotado por γ^* . (Ash, Novinger, 2007, p.12).

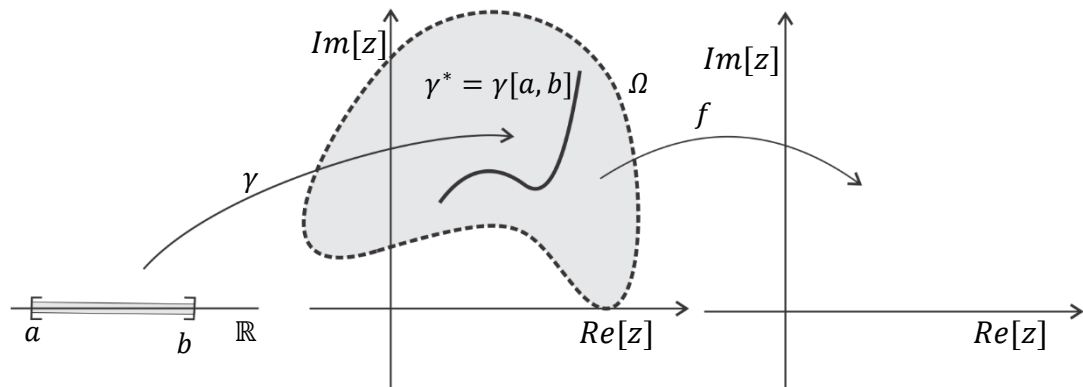


Figura 21: Traza de curva γ

Observación: La traza o soporte es denotado por:

$$\gamma^* = \gamma([a, b],$$

que es un subconjunto compacto de \mathbb{C} .

Ash (2007). Afirma:

Si γ^* está contenido en un Ω , se dice que γ es una curva (o camino) en Ω . (p.12)

Definición 2.2.8.1.8. Un camino en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una función continua $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. ($a < b$). Un camino es suave si γ' existe y además continua en $[a, b]$. Sea $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ una partición en $[a, b]$, entonces una camino $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ es suave por partes si es suave en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, n$.

(Chiang, 2017, p.3).

Definición 2.2.8.1.9. Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es suave por partes, que también la llamaremos camino, si existe una partición una partición de $[a, b]$,

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de manera que $\gamma^* = \gamma([t_{k-1}, t_k])$, es suave para $1 \leq k \leq n$.

(Garcia; Vasquez, 2014, p.19).

Observación: Se puede notar en las definiciones anteriores que una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ pasa a llamarse camino si existe una partición en $[a, b]$.

Definición 2.2.8.1.10. Una función $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continúa, definida en el intervalo I de \mathbb{R} , se llama camino o trayectoria en el espacio \mathbb{R}^n . (Ruiz, 1995, p. 432)

Definición 2.2.8.1.11. Se llama traza del camino $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, al conjunto (subconjunto de \mathbb{R}^n) de las imágenes de γ ; es decir,

$$tr(\gamma) = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^n : t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$$

(Ruiz, 1995, p. 432).

Mathews (1997) Afirma:

Una curva γ que se construye uniendo muchas curvas suaves de extremo a extremo se llama contorno. Sea $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \dots, \gamma_n$ que denota n curvas suaves de modo que



el punto terminal de γ_k coincide con el punto inicial de γ_{k+1} , para $k = 1, 2, \dots, n - 1$.

Entonces el contorno γ es expresado por la ecuación

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n.$$

Un sinónimo de contorno es camino. (p.162)

Ruiz (1995) afirma:

Designaremos con la palabra curva (en \mathbb{R}^n) la traza de un camino $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Esta palabra tiene un contenido geométrico más fuerte que camino o trayectoria, lo cual resulta muy conveniente para nuestro propósito, pues en ocasiones debemos distinguir al camino en sí, el cual es una función continua $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, del aspecto visual que presentan sus imágenes en conjunto, es decir, de la curva asociada a γ . (p.443)

Finalmente concluimos que una curva es la imagen de γ , $\gamma^* = \gamma(I)$

Ash (2007). Afirma:

Intuitivamente, si $z = \gamma(t)$ y t cambia una pequeña cantidad dt , entonces z cambia por $dz = \gamma'(t)dt$. Esto motiva la definición de la longitud L de un camino γ : (p.12)

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Ahora estamos preparados para definir la integral de una función de variable compleja.

Definición 2.2.8.1.12. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino, y sea $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja continua γ , es decir, $f: \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ es continua. La integral de línea de la función f a lo largo de la curva γ se define por:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$



Esta definición de integral puede ser expandido a curvas que sean suave por partes.

Teorema 2.2.8.1.13. Sean f y g funciones continuas sobre una curva suave γ descrito por la parametrización $\gamma: z(t) = x(t) + i y(t)$ con $a \leq t \leq b$. entonces

$$- \int_{\gamma} \lambda f(z) dz = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C}$$

$$- \int [f(z) + g(z)] dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz$$

$$- \int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

Teorema 2.2.8.1.14. Sean f una función continua sobre una curva suave γ definido por la parametrización $\gamma: z(t) = x(t) + i y(t)$ con $a \leq t \leq b$. entonces

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

Prueba:

Si $\gamma: z(t) = x(t) + i y(t)$ con $a \leq t \leq b$ y una reparametrización de orientación opuesta es:

$$-\gamma: z(a + b - t) = x(a + b - t) + i y(a + b - t) \text{ con } a \leq t \leq b$$

$$\begin{aligned} \int_{-\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(z(a + b - t)) z'(a + b - t) d(a + b - t) \\ &= \int_a^b f(z(a + b - t)) z'(a + b - t) (-dt) \end{aligned}$$

Hacemos un cambio de variable sea $s = a + b - t$ entonces $ds = -dt$ y si $t = a$, $s = b$ y si $t = b$, $s = a$

$$= \int_b^a f(z(s)) z'(s) (ds)$$

=

$$\begin{aligned} & - \int_a^b f(z(s))z'(s)(ds) \\ &= - \int_{\gamma} f(z)dz \end{aligned}$$

Teorema 2.2.8.1.15. Supongamos que f es continua en γ . Si $f(z)$ es acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \gamma$.

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq ML$$

donde L es la longitud de γ . (Mosquera, 2016, p.74).

Prueba.

Sea $z(t)$, $a \leq t \leq b$ una parametrización de γ y escribamos $\int_{\gamma} f(z)dz$ en forma polar,

$$\lambda = \frac{\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right|}{\int_{\gamma} f(z)dz} \quad \text{con } |\lambda| = 1 = \left| \frac{1}{e^{i\theta}} \right|$$

es decir $\int_{\gamma} f(z)dz = e^{i\theta} \left| \int_{\gamma} f(z)dz \right|$ para algún θ en \mathbb{R} , entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| &= e^{-i\theta} \int_{\gamma} f(z)dz \\ &= \int_a^b e^{-i\theta} f(z(t))z'(t)dt \\ &= \operatorname{Re} \left(\int_a^b e^{-i\theta} f(z(t))z'(t)dt \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(z(t))z'(t)) \\ &\leq \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt \\ &= \int_\gamma |f(z)||dz| \\ &\leq ML \end{aligned} \quad \text{l.q.q.p}$$

2.2.9. Teorema fundamental del cálculo en el plano complejo

Teorema 2.2.9.1. Sea $f(z)$ una función de variable compleja continua en una región $\Omega \subset \mathbb{C}$. Una función $F(z)$ holomorfa en Ω es una primitiva de $f(z)$ si $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. (Mosquera, 2016, p.74).

Teorema 2.2.9.2. Sea f una función continua en una región Ω y F una primitiva holomorfa de f en Ω . Si γ es una curva suave por partes contenida en Ω con parametrización $z(t)$, $a \leq t \leq b$ entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z(b)) - F(z(a))$$

en particular si γ es una curva cerrada simple entonces $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

(Mosquera, 2016, p.74).

2.2.10. Teorema integral de Cauchy

Teorema 2.2.10.1. (T.I.C.) Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo Ω , entonces $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para una curva cerrada simple $\gamma \subset \Omega$.

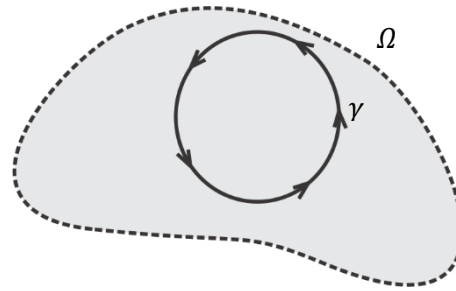


Figura 22: Teorema integral de Cauchy

Nota: La demostración de la integral de Cauchy para un disco puede ver en.

(Aparicio; Payá, 1985, p.206).

Nota: Usaremos (T.I.C.) por Teorema integral de Cauchy.

Teorema 2.2.10.2. (T.I.C. para dominio múltiplemente conexo) Si $f(z)$ es analítica en Ω , que contiene γ y las curvas cerradas simples γ_j contenidas en γ , entonces la integral a lo largo de γ es igual a la suma de todas las integrales a lo largo de γ_j y donde los $\gamma_j \cap \gamma_i \neq \emptyset$ para $i, j = 1, \dots, n$.

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \dots + \int_{\gamma_j} f(z)dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z)dz$$

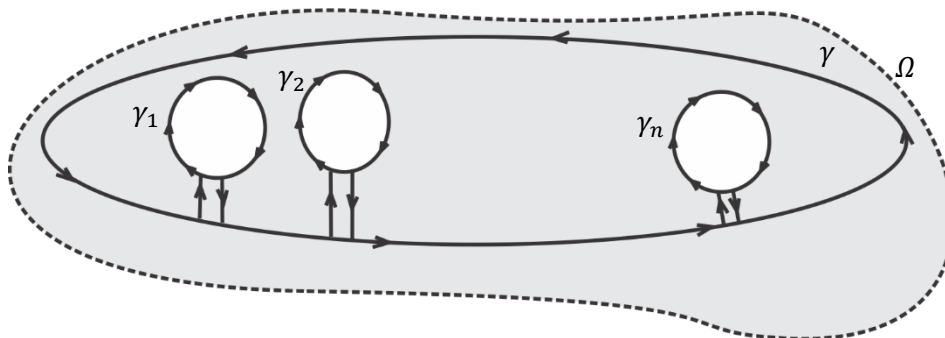


Figura 23: T.I.C. para dominio múltiplemente conexo.

Teorema 2.2.10.3. (Teorema de la deformación) Sea γ_1 y γ_2 trayectorias cerradas en el plano, γ_1 en el interior de γ_2 . Sea f diferenciable en un conjunto abierto que contiene ambas trayectorias y todos los puntos entre ellas. Entonces,

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

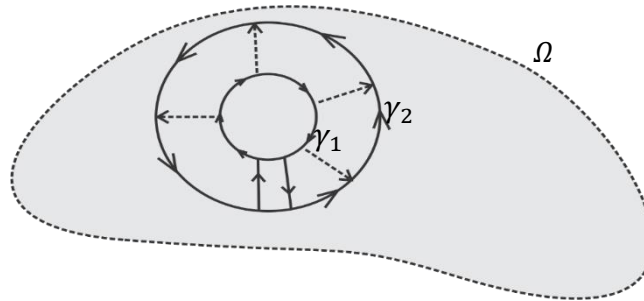


Figura 24: Teorema de la deformación.

Teorema 2.2.10.4. (F.I.C) Sea f analítica en una región simplemente conexa Ω , γ una curva cerrada simple con orientación en sentido contrario a las manecillas del reloj en Ω y z contenido en γ . Entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Tomada de (Aguilar; Monsiváis, 2004, p.218).

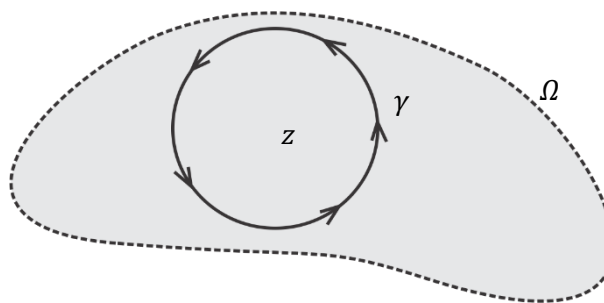


Figura 25: Fórmula integral de Cauchy.

2.2.11. Serie de Potencias

Definición 2.2.11.1. Se llama serie de potencias de centro z_0 y coeficientes complejos

a_0, a_1, a_2, \dots a una serie de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + \infty$$

Como una ilustración inicial consideremos la serie geométrica.

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + \infty$$

- La serie geométrica converge para todo z en el interior del círculo $|z| < 1$.

Si z está en este disco es posible calcular su suma, esta es

$$1 + z + z^2 + \dots = \frac{1}{1 - z}$$

- La serie diverge para todo z tal que $|z| \geq 1$.

Teorema 2.2.11.2. Si la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ converge para algún valor de z en \mathbb{C} entonces existe un número real $R > 0$ tal que

La serie converge absolutamente para todo z tal que $|z - z_0| < R$

La serie diverge para todo z tal que $|z - z_0| > R$. (Mosquera, 2016, p.96).

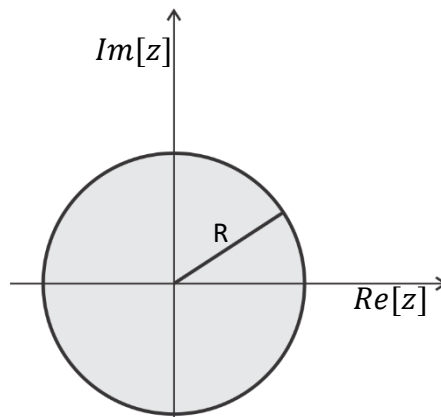


Figura 26: Disco de convergencia en \mathbb{C}

Definición 2.2.11.5. (Analítica) Sea $\Omega \neq \emptyset \subset \mathbb{C}$. Una función $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se dice analítica en $z_0 \in \Omega$, sí existe una serie de potencias centrada en z_0 con radio $r > 0$ tal que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

2.2.12. Serie de Laurent

Definición 2.2.12.1. Se llama la serie de Laurent, o serie doble, a una serie definida de la forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k}(z - z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

La primera conformada por la suma de potencias negativas llamadas la parte principal y la segunda consta de sumas de potencias positivas llamada parte analítica.

En esta parte veremos como un punto aislado de un disco posee una expansión en serie llamada de Laurent

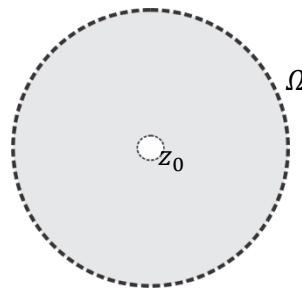


Figura 27: Disco perforado en \mathbb{C}

Si $f: \Omega - \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica, entonces posee una expansión de Laurent

Teorema 2.2.12.2. (Laurent) Si $f(z)$ es una función analítica en una región anular

$R_1 < |z - z_0| < R_2$, centrado en z_0 , entonces $f(z)$ se puede expresar como

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in A$$

Esta expansión de Laurent es única, sus coeficientes están dados por

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{k+1}}, \quad |z - z_0| < R_2, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$b_{-k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(w)(w - z_0)^{k-1} dw, \quad R_1 < |z - z_0| \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

La prueba de este teorema se puede ver en (Mosquera, 2016. p. 106). y

(Conway, 1978, p.108). la construcción de la función analítica.

Prueba.

Donde $\gamma_1(\theta) = z_0 + r_1 e^{i\theta}$, $\gamma_2(\theta) = z_0 + r_2 e^{i\theta}$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, los números a_k y b_{-k} son llamados coeficientes de Cauchy.

Por tanto, f estará definida y será analítica en la corona circular

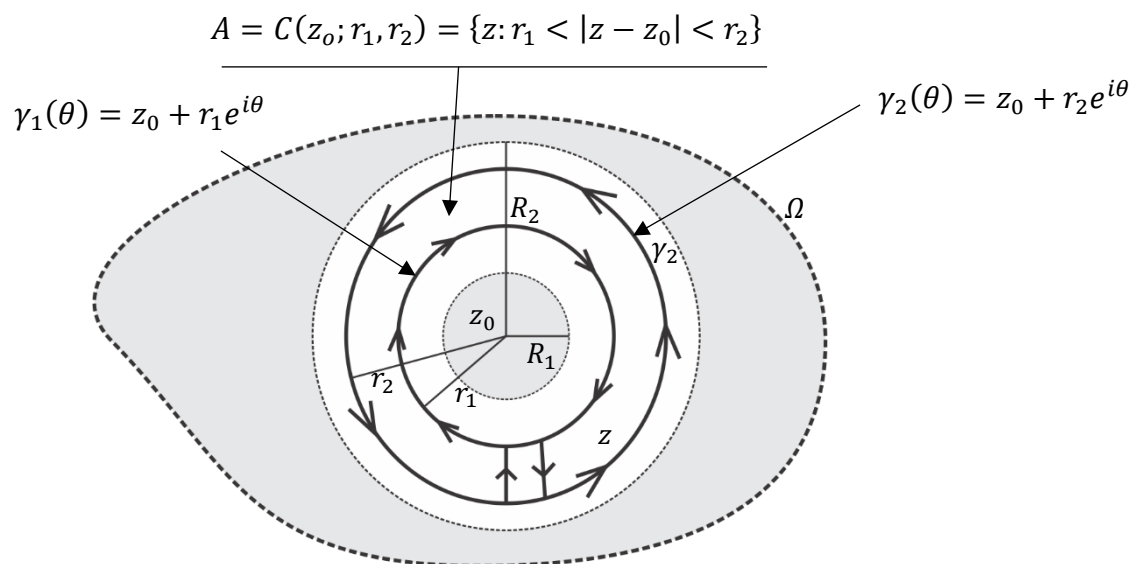


Figura 28: Corona circular de la serie de Laurent

Sea $f(z)$ analítica en una región anular o corona circular $A = C(z_0; r_1, r_2)$.

Si A es una región de convergencia con $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, de modo que la corona cerrada \bar{A} está contenida en $C(z_0; R_1, R_2)$, tomemos una curva cerrada

$S_1 + \gamma_2 - \gamma_1 - S_2$ a un punto en $C(z_0; R_1, R_2)$.

Por el formula integral de Cauchy tenemos:



$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S+\gamma_2-\gamma_1-S} \frac{f(w)}{w-z} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dz \\
 &\equiv f_1(z) - f_2(z) \quad \forall z \in A
 \end{aligned}$$

Pasamos a construir $f_1(z)$

$$\begin{aligned}
 f_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z_0+z_0-z} dw \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z_0-(z-z_0)} dw \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} dw \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)} \left(\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}\right) dw \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k\right) dw
 \end{aligned}$$

La serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k$ converge en $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$ (*)

En (*) hacemos lo siguiente:

si $w = w_2 \in \gamma_2, |w_2 - z_0| = r_2 \Rightarrow |z - z_0| < r_2$

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k \quad (1)$$

Pasamos a construir $f_2(z)$.

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{-z+w} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{-z+z_0+w-z_0} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{-(z-z_0)+(w-z_0)} dw \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(z-z_0)\left(1-\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)} dw \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(z-z_0)} \left(\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}\right) dw \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(z-z_0)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^k\right) dw \end{aligned}$$

La serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^k$ converge en $\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right| < 1$ (**)

En (**) hacemos lo siguiente:

si $w = w_1 \in \gamma_1$, $|w_1 - z_0| = r_1 \Rightarrow r_1 < |z - z_0|$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(z-z_0)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^k\right) dw \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(z-z_0)^{k+1}} dw \sum_{k=0}^{\infty} (w-z_0)^k \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-k}} dw \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^{-k-1} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-k+1}} dw \sum_{k=0+1}^{\infty} (z-z_0)^{-k-1+1} \end{aligned}$$

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{-k+1}} dw \sum_{k=0+\infty} (z - z_0)^{-k} \quad (2)$$

Finalmente sumando (1) y (2) obtenemos la serie de Laurent.

$$f(z) \equiv f_1(z) - f_2(z) \quad \forall z \in A$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw \quad \text{de } f_1(z)$$

$$b_{-k} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{-k+1}} dw \quad \text{de } f_2(z)$$

$$f(z) = b_{-k} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^k} + a_k \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k$$

Ejemplo.

La función

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3} \quad z \neq 0$$

Se puede expresar como serie de Laurent con $z_0 = 0$ un polo de orden 3.

$$f(z) = \frac{1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \infty}{z^3}$$

$$f(z) = \frac{1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \infty}{z^3}$$

$$= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} z + \frac{1}{5!} z^2 + \dots + \infty$$

$$= f_1\left(\frac{1}{z}\right) + f_2(z)$$

Luego pasamos a ver el coeficiente usando un teorema que no mencionamos, según la investigación no fue necesario el cual es (F.I.C para derivadas)

$$b_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w)dw = \frac{1}{2\pi i} \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = \frac{1}{2!}$$

2.2.13. Singularidades

Definición 2.2.13.1. (Singularidad) Se dice que una función tiene una singularidad en $z = z_0$ si f no es analítica en z_0 , y en todo entorno de z_0 existen puntos donde la función es analítica.

Definición 2.2.13.2. (Singularidad aislada) Se dice que una función f tiene una singularidad aislada en $z = z_0$ si f no es analítica en z_0 , y existe un número $R > 0$ tal que f es analítica en $\{z; 0 < |z - z_0| < R\}$. (Aparicio, 1987, p.245).

Definición 2.2.13.3. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de una función f . Recibe el nombre de residuo de f en z_0 el coeficiente de $\frac{1}{z-z_0}$ en el desarrollo en serie de Laurent de f en el punto z_0 , de manera que si

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in D(z_0; 0, R),$$

y denotamos con $Res(f, z_0) = a_{-1}$

2.2.14. Clasificación de singularidades.

- Si z_0 es un polo de orden 1, decimos que es un polo simple o polo de f .

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$$

- Si z_0 es un polo de orden k , de una función un valuada de $f(z)$.



$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z) \right)$$

- Si $z = a$ es una singularidad evitable, se puede demostrar que su residuo es 0
- Si un número infinito de b_n diferentes de cero, decimos que z_0 es una singularidad esencial o un polo de orden infinito de f .

Sea f una función analítica dentro de γ y sobre ella, excepto en z_0 , el cual es un punto singular aislado de orden 1, entonces la serie de Laurent en ese punto sería

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^0 (z - z_0)^k$$

y dado que $f(z)$ es analítico en todas partes, y no en z_0 , entonces $f(z)$ puede escribirse como

$$f(z) = \frac{b_{-1}}{(z - z_0)} + g(z)$$

donde $g(z)$ es analítico en el punto z_0

$(z - z_0)f(z) = b_{-1} + g(z)(z - z_0)$ aplicamos límite a ambos lados y tenemos así:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = b_{-1} + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)(z - z_0) \text{ donde } \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)(z - z_0) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = b_{-1} = Res(f, z_0)$$

Teorema 2.2.13.2. Si $f(z)$ tiene un polo de orden k en $z = z_0$, entonces

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)]$$

Prueba.

Teniendo z_0 como el polo de f de orden k , para un disco perforado de z_0 podemos expresar cualquier $z \rightarrow f(z)$ como sigue

$$f(z) = \frac{b_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{b_{-k-1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{b_{-1}}{(z - z_0)} + \varphi(z)$$

Donde $\varphi(z)$ es analítica en $z = z_0$ y $b_k \neq 0$. En la ecuación anterior tenemos:

$$(z - z_0)^k f(z) = b_{-k} + \frac{b_{-k-1}(z - z_0)^k}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{b_{-1}(z - z_0)^k}{z - z_0} + \varphi(z)(z - z_0)^k$$

$$(z - z_0)^k f(z) = b_{-k} + b_{-k-1}(z - z_0)^{k-(k-1)} + \dots + b_{-1}(z - z_0)^{k-1} + \varphi(z)(z - z_0)^k$$

$$(z - z_0)^k f(z) = b_{-k} + b_{-k-1}(z - z_0)^1 + b_{-1}(z - z_0)^{k-1} + \varphi(z)(z - z_0)^k$$

$$\begin{aligned} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)] &= \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [b_{-1}(k - 1)! + \varphi(z)(z - z_0)^k] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [b_{-1}(k - 1)! + \varphi(z)(z - z_0)^k] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} b_{-1}(k - 1)! + \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \varphi(z)(z - z_0)^k \right) \\ &= b_{-1}(k - 1)! + \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \varphi(z)(z - z_0)^k \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \varphi(z)(z - z_0)^k \right) = 0 \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene la prueba

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)] \right) = b_{-1}(k - 1)!$$

$$Res(f, z_0) = b_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)] \right)$$

2.2.15. Teorema de residuos de Cauchy

Para cualquier curva cerrada simple y por partes γ en Ω , y cualquier función analítica $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se tiene:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Una pregunta natural en este contexto es la siguiente: Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio simplemente conexo arbitrario. ¿Cómo podemos caracterizar todas las curvas cerradas simple y por partes γ en Ω , que satisfacen $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ para cualquier función analítica $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$?

Si nos aislamos de ese punto singular de la siguiente forma:

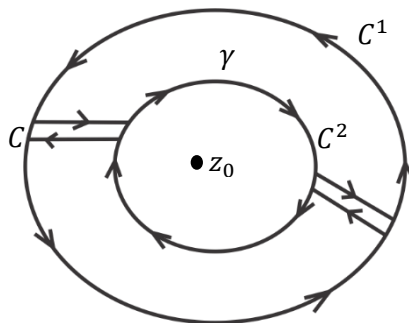


Figura 29: Punto singular aislado en \mathbb{C}

De la figura tenemos

$$\int_C f(z)dz = \int_{C^1} f(z)dz + \int_{C^2} f(z)dz + \int_{\gamma} f(z)dz$$

por el (T.I.C.) tenemos que:

$$\int_C f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz$$

Este es exactamente el caso para aquellas curvas cerradas γ en Ω que no “rodean” ningún punto del complemento $\mathbb{C} - \Omega$. Especialmente, los dominios elementales se caracterizan por la propiedad de que el “el interior de Ω ” se encuentra completamente en Ω . Intuitivamente, esto significa que Ω no tiene “agujeros”.

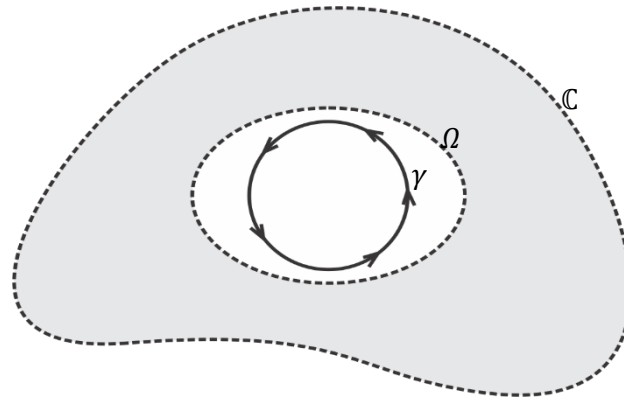


Figura 30: Complemento $\mathbb{C} - \Omega$

2.2.16. Índice y curva de Jordán

Teorema 2.2.15.1. (Índice) Sea γ una curva cerrada simple y orientado positivamente en \mathbb{C} , cuya imagen no contiene el punto $z_1 \in \mathbb{C}$. La fórmula que define el índice del punto z_1 con respecto a γ al número:

$$\text{Ind}_\gamma(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_1}$$

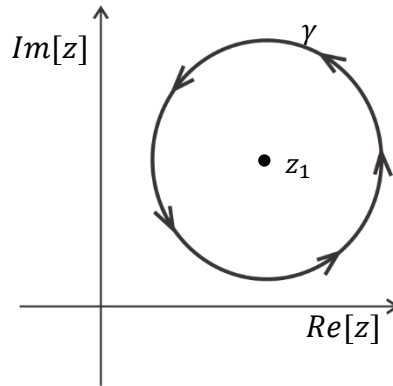


Figura 31: Índice z_1 respecto de γ

Se puede demostrar que la integral involucrada en la definición del índice de un número z_1 para la curva γ mide la variación total del argumento de $\gamma(t)$, mientras t recorre el intervalo de parámetros de γ .

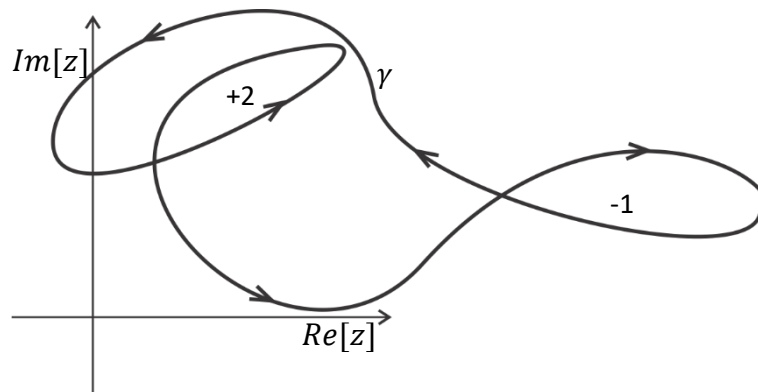


Figura 32: Representación de índices con respecto a γ

Usando el índice de un número, podemos definir lo que debe entenderse bajo "el interior" y "el exterior" de una curva.

Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva cerrada simple, entonces definimos

$$\text{Int}(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} - \gamma^*; \text{Ind}_\gamma(z) \neq 0\}$$

$$Ext(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} - \gamma^*; Ind_\gamma(z) = 0\}$$

Nosotros siempre tenemos

$$\mathbb{C} - \gamma^* = Int(\gamma) \cup Ext(\gamma) \text{ (unión disjunta)}$$

Si γ es una curva cerrada en Ω , entonces $Int(\gamma) \subset \Omega$.

Teorema 2.2.15.2. Sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ una curva de Jordan. El complemento $\mathbb{C} - \gamma$ es exactamente la unión de dos regiones Ω_I, Ω_E , de manera que Ω_I es acotada y simplemente conexa, mientras que Ω_E es no acotada.

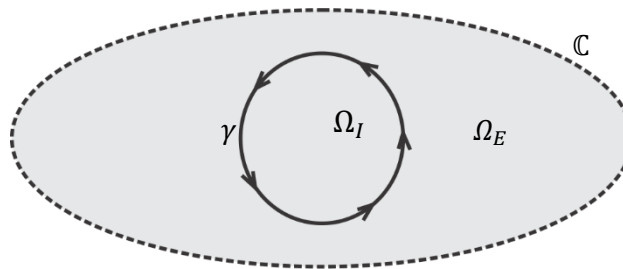


Figura 33: Curva de Jordan

Teorema 2.2.15.3. (Teorema de residuo de Cauchy) Suponga que la función

$f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica en todas partes en un dominio Ω simplemente conexo, excepto en singularidades aisladas en $z_1; z_2; \dots \dots \dots; z_n$. Sea γ un contorno de Jordan orientado positivamente que no pase por ninguna singularidad. Luego

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n Res(f, z_j)$$

Prueba.

Supongamos que tiene z_n singularidades aisladas encerradas en una curva de Jordán γ , expandimos f alrededor de cada una de sus singularidades z_j una serie Laurent,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^j (z - z_j)^k, \quad 1 \leq j \leq n \quad (1)$$

Por definición $\text{Res}(f, z_j) = b_{-1}^j$, para $1 \leq j \leq n$.

Por el teorema integral de Cauchy para dominio múltiplemente conexo tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_j} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz \\ &= \int_{\gamma_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^1 (z - z_1)^k + \int_{\gamma_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 (z - z_2)^k + \dots + \int_{\gamma_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^n (z - z_n)^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^1 \int_{\gamma_1} (z - z_1)^k + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 \int_{\gamma_2} (z - z_2)^k + \dots + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^n \int_{\gamma_n} (z - z_n)^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^j \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} (z - z_j)^k dz = \sum_{j=1}^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^j \int_{\gamma_j} (z - z_j)^k dz \end{aligned}$$

La suma de la variable j hace referencia a cada una de las γ_j y la suma será γ . Por lo tanto

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^j \int_{\gamma_j} (z - z_j)^k dz$$

luego usando la definición del contorno de integración tenemos:

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \int_0^{2\pi} g(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

donde $g(\gamma(t))$ es continua y diferenciable en $[a, b]$. Sabemos que la forma polar de un

número complejo $z = (x, y)$ para un disco de radio R y cada punto del disco se expresa

de la siguiente forma $(R\text{sen}(\theta), R\text{cos}(\theta))$ para $\theta \in [0, 2\pi]$ y sea este punto igual a z , es decir:

$$z = (R\text{sen}(\theta), R\text{cos}(\theta)) = R\text{sen}(\theta) + iR\text{cos}(\theta) = R(\text{sen}(\theta) + i\text{cos}(\theta)) = Re^{i\theta}$$

podemos hacer que $(z - z_j)^k = g(z)$ y $\gamma(\theta) = z_j + Re^{i\theta}$ y esta última un círculo para el punto singular aislado e integramos a ambos lados y teniendo: $\gamma'(\theta) = iRe^{i\theta}$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_j} (z - z_j)^k dz &= \int_{\gamma_j} g(z) dz \\ &= \int_0^{2\pi} g(\gamma(\theta)) \gamma'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (\gamma(\theta) - z_j)^k iRe^{i\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (z_j + Re^{i\theta} - z_j)^k iRe^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^k iRe^{i\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} iR^{k+1} e^{i\theta(k+1)} d\theta \end{aligned}$$

Sabemos que $k = -\infty$ hasta $+\infty$ y por eso el siguiente paso será integrar a lo largo de cada una γ_j para obtener.

$$= iR^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(k+1)} d\theta$$

Así que, si $k = -1$, entonces lo siguiente es válido.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^j \int_{\gamma_j} (z - z_j)^k dz = \sum_{j=1}^n \sum_{k=-1}^1 a_{-1}^j (2\pi i) = 2\pi i \sum_{j=1}^n a_{-1}^j$$

Sabemos que la parte principal toma valor sobre $b_{-1}^j = a_{-1}^j = \text{Res}(f, z_j)$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j)$$



2.2.17. Aplicaciones del teorema del residuo de Cauchy

2.2.18. Integrales trigonométricas.

Para integrales de la forma:

$$\int_0^{2\pi} F(\cos(t), \operatorname{sen}(t)) dt$$

puede evaluarse usando el teorema de residuos haciendo las sustituciones siguientes

primero consideramos la nueva variable $z = e^{it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. Aquí, uno observa que z está en el círculo unitario $\gamma(0, 1)$.

$$dz = ie^{it} dt \Rightarrow dt = \frac{dz}{iz}, \text{ además } \cos(t) = \frac{z+z^{-1}}{2} \text{ y } \operatorname{sen}(t) = \frac{z-z^{-1}}{2i}$$

Finalmente, la integral anterior en la nueva variable z se tiene:

$$\int_{\gamma} F\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}$$

2.2.19. Integrales impropias.

Este teorema también tiene aplicaciones cuando se integra a lo largo de la línea real. Algunas integrales reales no pueden ser evaluadas por el cálculo normal, esto se debe a que el integrando no tiene una antiderivada "simple" (ver el teorema fundamental del cálculo). Sin embargo, podemos evaluarlos usando variables complejas y el teorema del residuo. Esta es una de las aplicaciones más importantes de la teoría de los residuos.

Notaciones.

$C_r^+(0)$: un semicírculo de radio r centrado en el origen en la mitad superior del plano complejo, sin incluir el diámetro.

Proceso de 3 pasos

Aquí hemos dividido el proceso en 3 pasos, para que pueda seguir lo que está haciendo y no perder resultados importantes.

- El paso 1: Asignar la función real en la integral original a una función compleja en el plano, y también identificar las singularidades de esta función.
- El paso 2: Verificar que la integral a lo largo del contorno $C_r^+(0)$ converja a 0 cuando $r \rightarrow \infty$. Esto significará que la integral a lo largo de la línea real $(-r, r)$ cuando $r \rightarrow \infty$ es igual a la integral a lo largo del contorno cerrado C^+ menos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r^+(0)} f(z) dz$$

Simbólicamente tenemos

$$\int_{C^+} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r^+(0)} f(z) dz + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx$$

$$I = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = \int_{C^+} f(z) dz - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r^+(0)} f(z) dz$$

Si

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r^+(0)} f(z) dz \rightarrow 0 \Rightarrow I = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = \int_{C^+} f(z) dz$$

Finalmente

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = \int_{C^+ = \gamma} f(z) dz$$

- El paso 3: Utilizando el teorema de residuos para evaluar la integral $\gamma^+ = C^+$ calculando los residuos en las singularidades encontradas en el paso uno que se encuentran por encima del eje real

Ejemplo: evaluar

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$$

Solución.

Paso 1. Asignar una función real en la integral a una función compleja

$$I_{\gamma^+} = \int_{\gamma^+} f(z) dz = \int_{\gamma^+} \frac{1}{z^2 + 1} dz \text{ pasamos a identificar las raíces } z_1 = -i \text{ y } z_2 = i$$

Paso 2. Analizando la convergencia de la integral en el semicírculo $C_r^+(0)$: $|z| = r$, podemos usar la desigualdad triangular para obtener $|f(z)| \leq M$ del teorema (2.2.4.11).

Recordar: Sabemos que desigualdad triangular nos dice que:

$$|z^2 + 1| \leq |z^2| + |1|, \quad |z^2 - (-1)| \geq ||z^2| - |-1||,$$

y por otro lado de tiene una propiedad de $|z|^2 = z^2$ por lo que

$$|z^2 - (-1)| \geq |z^2 - 1| \geq |z|^2 - 1 = r^2 - 1$$

$$\Rightarrow |z^2 + 1| \geq r^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|z^2 + 1|} \leq \frac{1}{r^2 - 1}$$

$$\text{Así } |f(z)| = \frac{1}{|z^2 + 1|} \leq \frac{1}{r^2 - 1} = M$$

Usando el límite en teorema integral podemos mostrar

$$\left| \int_{C_r^+(0)} f(z) dz \right| = \int_{C_r^+(0)} |f(z)| |dz| = |f(z)| \int_{C_r^+(0)} |dz| \leq ML \leq \frac{1}{r^2 - 1} \pi r \rightarrow 0$$

Tenga en cuenta que, como $r \rightarrow \infty$, $\frac{1}{(r-1)^2} \pi r \rightarrow 0$, así que, mediante el proceso anterior

la integral también debe tender a 0.

$$\int_{C^+} f(z) dz = \int_{C_r^+(0)} f(z) dz + \int_{-r}^r f(x) dx \quad (*)$$

Aplicamos límite para $r \rightarrow \infty$ en la ecuación (*)

$$I = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma^+} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r^+(0)} f(z) dz$$

$$I = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = \int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 1}$$

Paso 3. Encontrar el residuo para el polo $z_1 = i$ que se encuentra dentro γ

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{1}{z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z - i}{(z - i)(z + i)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z + i} = \frac{1}{2i}$$

Luego el teorema de los residuos

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 1} = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} \right) = \pi$$

2.2.20. Transformada de Laplace

Definición 2.2.17.1. Sea $f(t)$ una función definida para $t \in [0, \infty >$. La transformada de Laplace de $f(t)$ es la función $F(s)$ definida por la integral

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

El dominio de $F(s)$ es el conjunto de todos los valores de s para los cuales la integral converge. (Brannan, 2007, p.311).

Una de sus principales aplicaciones es convertir el problema de resolver una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes en el dominio t en un problema que implica operaciones algebraicas en el dominio de s .

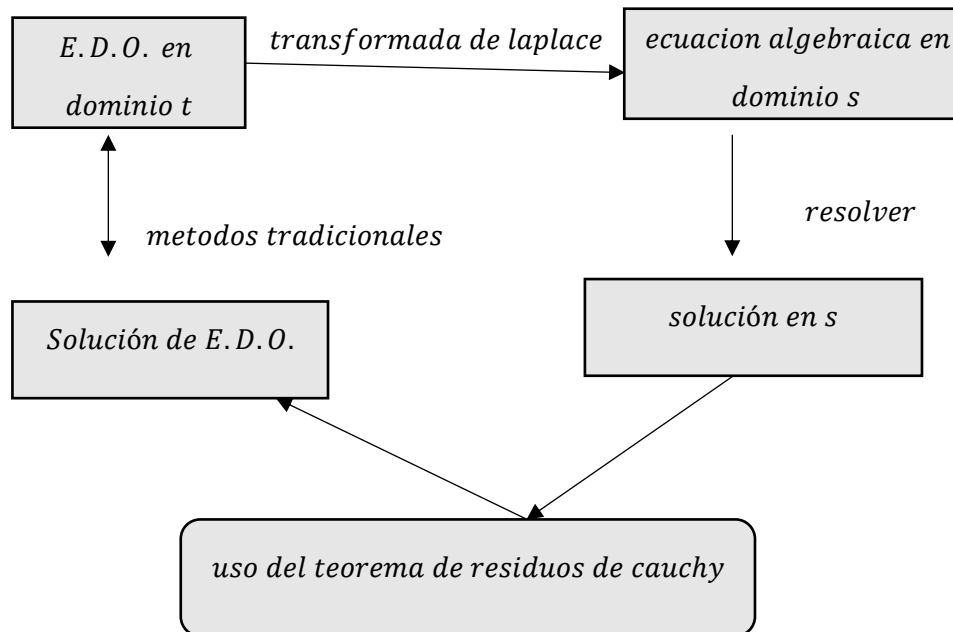


Figura 34: Proceso de la transformada de Laplace

Observación: Una integral impropia sobre un intervalo abierto de la forma

$$\int_a^{\infty} f(t)dt$$

Se define como un límite de integrales sobre intervalos finitos de la siguiente forma

$$\int_a^{\infty} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t)dt$$

Si la integral existe para $x > a$, y si existe el límite cuando $x \rightarrow \infty$, se dice que la integral impropia converge hacia el valor del límite. (Brannan, 2007, p.310).

Definición 2.2.17.2. Se dice que una función f es continua por tramos en un intervalo

$a \leq t \leq b$ si el intervalo se puede dividir mediante una cantidad finita de puntos

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de modo que:

- f es continua en cada subintervalo abierto $t_{i-1} < t < t_i$, y

- f tiende a un límite finito al acercarse a los extremos de cada subintervalo, desde el interior de cada subintervalo. (Brannan, 2007, p.314).

Definición 2.2.17.3. Una función $f(t)$ es de orden exponencial si existe $s \in \mathbb{R}$ tal

$$\text{que } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-st} = 0$$

2.2.21. Transformada de la derivada

Teorema 2.2.18.1. Sea $f(t)$ una función de orden exponencial, continua para todo

$t \geq 0$. Si $f'(t)$ es continua a trozos para $t \geq 0$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3\mathcal{L}\{f(t)\} - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Prueba:

Sabemos $f(t)$ tiene una derivada de la forma $f'(t)$, y teniendo la definición de transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t) dt$, definimos la transformada de Laplace de la derivada de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}f'(t)dt \text{ vista así es una integral por partes que tiene la siguiente}$$

$$\text{forma: } \int u dv = uv - \int v du \text{ donde } u = e^{-st} \Rightarrow du = -se^{-st}dt \text{ y } dv = f'(t) \Rightarrow$$

$$\int dv = \int f'(t)dt \Leftrightarrow v = f(t).$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}f'(t)dt = |e^{-st}f(t)|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)(-se^{-st}dt)$$

Luego para poder reemplazar los límites de integración en $e^{-st}f(t)$ no es posible, para eso aplicamos la definición (2.2.17.3).



$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \left(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) - e^{-s(0)} f(0)\right) - \int_0^{\infty} f(t)(-se^{-st} dt)$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) + s \int_0^{\infty} f(t)(e^{-st} dt) = -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Observación:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \quad (*)$$

Y si hacemos lo siguiente, se puede deducir para los demás transformadas de derivada.

$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0)$, pues su derivada $\frac{d}{dt} f' = f''$, reemplazamos (*) para la

segunda derivada y tenemos:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s(s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)) - f'(0) = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \text{ l.q.q.p}$$

Teorema 2.2.18.2. Si la transformada de Laplace esta dado por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

Entonces $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ donde $f(t)$ es la suma de los residuos de $e^{st}F(s)$ en los polos de $F(s)$.

Ejemplo

Considere la ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes

$$y'' - 2y' + 2y = \cos(t), y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Solución:

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{2y'\} + \mathcal{L}\{2y\} = \mathcal{L}\{\cos(t)\}$$

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - 2s\mathcal{L}\{y\} + 2y(0) + 2\mathcal{L}\{y\} = \frac{s}{s^2 + 1}$$



$$s^2 \mathcal{L}\{y\} - s - 2s \mathcal{L}\{y\} + 2 + 2 \mathcal{L}\{y\} = \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}\{y\}(s^2 - 2s + 2) - s + 2 = \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}\{y\}(s^2 - 2s + 2) = \frac{s}{s^2 + 1} + s - 2 = \frac{s + (s - 2)(s^2 + 1)}{s^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{s + (s - 2)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 - 2s + 2)} = \frac{s^3 - 2s^2 + 2s - 2}{s^4 - 2s^3 + 3s^2 - 2s + 2}$$

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y\} = \frac{s^3 - 2s^2 + 2s - 2}{s^4 - 2s^3 + 3s^2 - 2s + 2}$$

Esta expresión escrita en función de sus polos tenemos:

$$F(s) = Y(s) = \mathcal{L}\{y\} = \frac{s^3 - 2s^2 + 2s - 2}{(s - (1 - i))(s - (1 + i))(s - i)(s + i)}$$

$$y(t) = \text{Res}(e^{st}F(s); 1 + i) + \text{Res}(e^{st}F(s); 1 - i) + \text{Res}(e^{st}F(s); -i) + \text{Res}(e^{st}F(s); i)$$

$$y(t) = \frac{\cos(t) - 2\text{sen}(t)}{5} + \frac{e^t}{5}(4\cos(t) - 2\text{sen}(t))$$



CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. SEGÚN SU FINALIDAD

La investigación es de tipo teórica y aplicada, esto debido a la generación de conocimientos y buscar una estrategia para profundizar los conocimientos y luego aplicar estas con el uso de herramientas tecnológicas en el tema de investigación.

3.2. MÉTODO

El método que se usó es inductivo-deductivo y analítico que va de lo concreto a lo abstracto.

3.3. TÉCNICA

El procedimiento fue de lectura y análisis de definiciones, propiedades, teoremas en el cálculo diferencial complejo y cálculo integral complejo.

3.4. ESTRATEGIA

Búsqueda de información teórica de la materia a investigar.

3.5. MATERIALES

- Una laptop Toshiba i3-2350M CPU@2.30 GHz(4CPUs).
- Un software Matlab Versión 9.2(R2018a). con licencia de uso personal.

3.6. VARIABLES

3.6.1 Variable Independiente

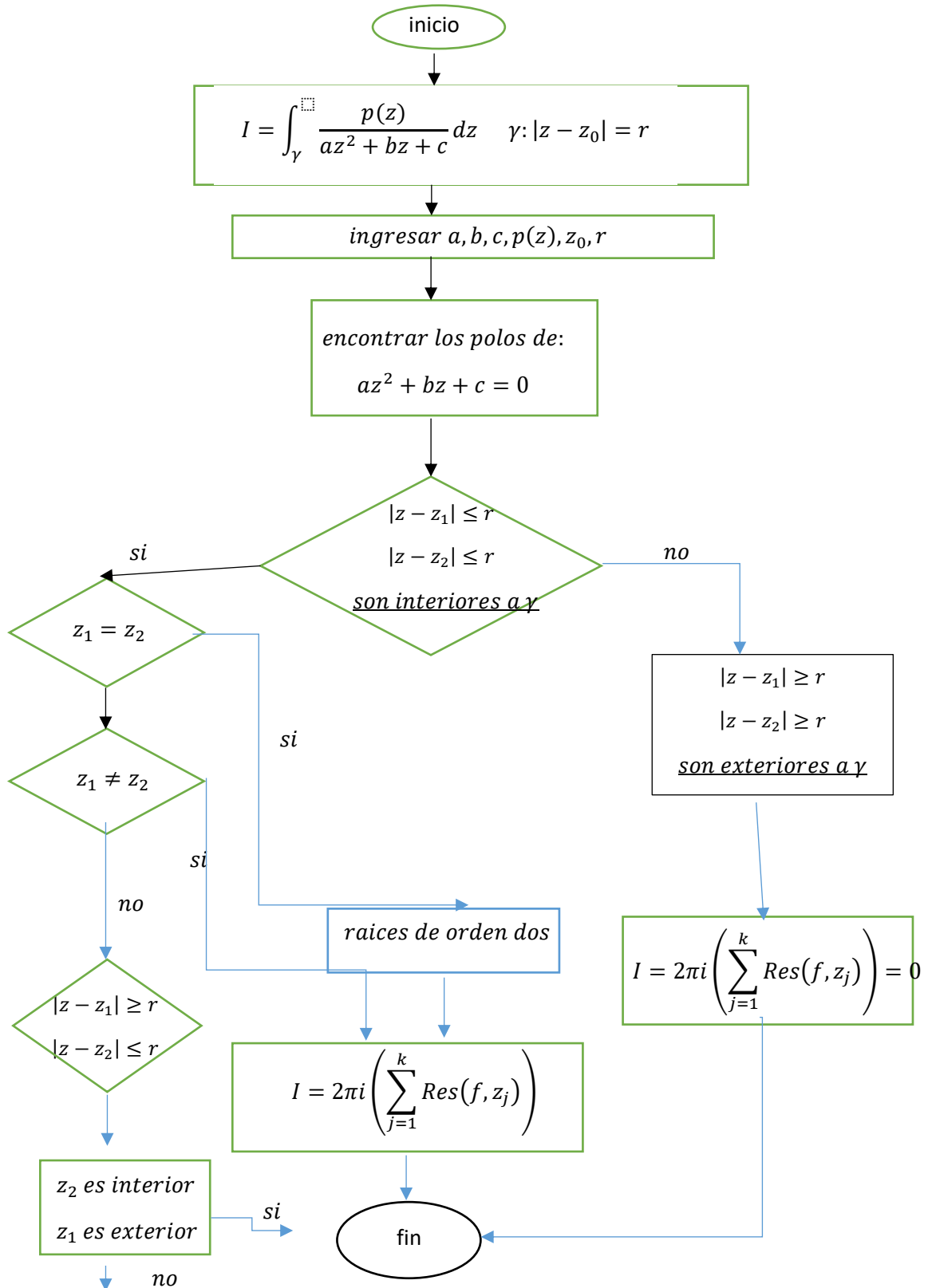
Teorema del residuo de Cauchy

3.6.2 Variable Dependiente

El algoritmo para la solución de integrales de contorno

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN



4.1. APLICAMOS EL TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY PARA RESOLVER INTEGRALES DE CONTORNO DE FUNCIONES ANALÍTICAS COMPLEJAS EN FORMA ANALÍTICA, PARA FUNCIONES RACIONALES DE ORDEN 2

Ejemplo

Sea $f(z) = \frac{4-3z}{z^2-z}$ y $\gamma: |z - i| = 3$, evaluar $\int_{\gamma} f(z)dz$

Solución

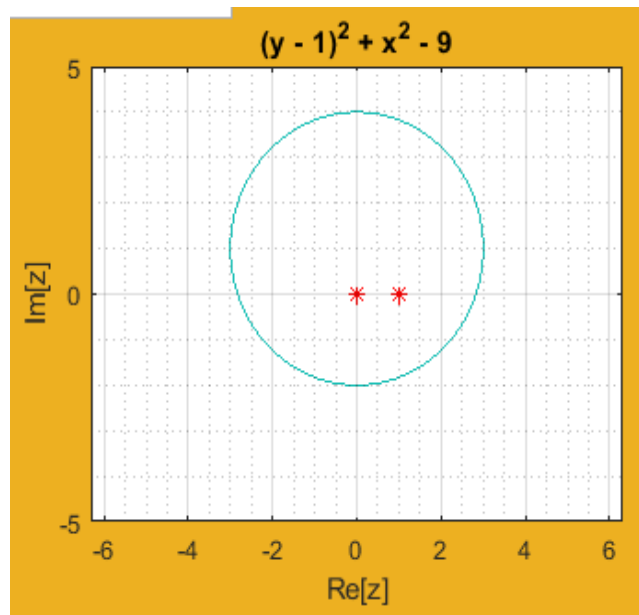


Figura 35: Circunferencia $\gamma: |z - i| = 3$

Los polos $f(z)$ están dados por $z = 0$ y $z = 1$, son polos de orden uno, sabemos que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \left(\sum_i^2 \text{Res}(f(z), z_i) \right)$$

siendo z_i polos de orden 1 para los cuales se sigue el siguiente proceso:

$z_1 = 0$ tenemos:

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} (z - 0) \frac{4-3z}{z^2-z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{4-3z}{z-1} = -4$$

$z_2 = 1$ tenemos:



$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_2)f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} (z - 1) \frac{4-3z}{z^2-z} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{4-3z}{z} = 1$$

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i(-4 + 1) = -6\pi i$$

4.2. APLICAMOS EL TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY PARA RESOLVER INTEGRALES DE CONTORNO DE FUNCIONES ANALÍTICAS COMPLEJAS USANDO ALGORITMOS DE MATLAB

```

raiz =
    0
    1
z1 = 0
z2 = 1
FN = 4 - 3*z
FD = z^2 - z
funcion = (3*z - 4)/(- z^2 + z)
ord = 1

m1 = 1
polo1 = 0
z1 = 0
FFF = (z*(3*z - 4))/(- z^2 + z)
SFF = -(3*z - 4)/(z - 1)
phiiif = -(3*z - 4)/(z - 1)
y = -(3*z - 4)/(z - 1)
res1 = -4
k1 = -4.0
ord = 1
m1 = 1
polo2 = 1
z2 = 1
FFF = ((3*z - 4)*(z - 1))/(- z^2 + z)
SFF = -(3*z - 4)/z
phiif = -(3*z - 4)/z
rrr = -(3*z - 4)/z
res2 = 1
k2 = 1.0
rrFF = -pi*6.0i

```

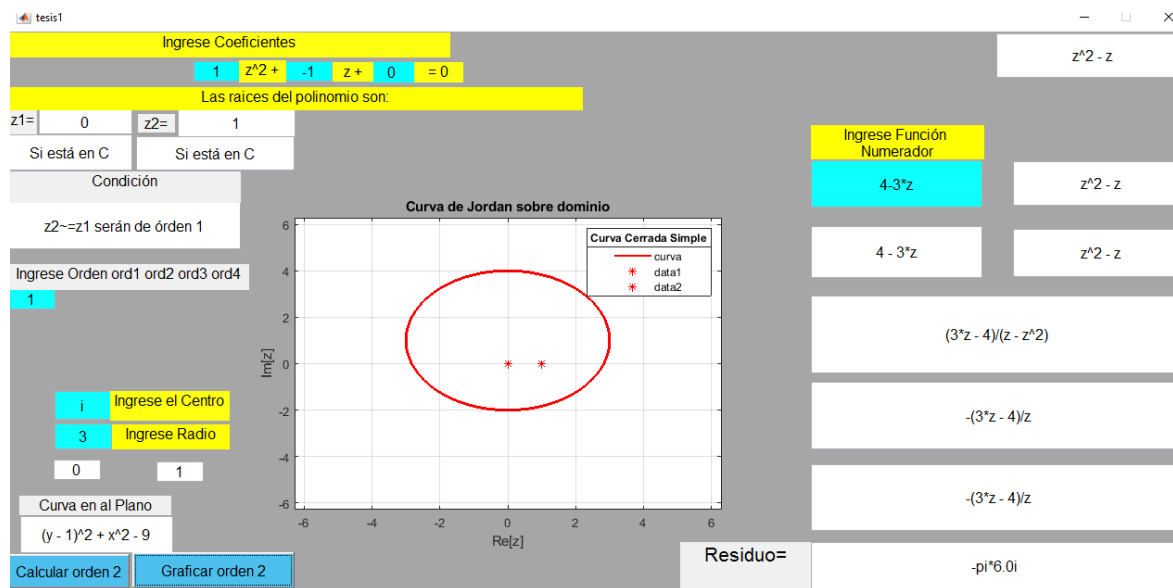


Figura 36: Solución en Matlab

4.3. APLICAMOS EL TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY PARA RESOLVER INTEGRALES DE CONTORNO DE FUNCIONES ANALÍTICAS COMPLEJAS EN FORMA ANALÍTICA, PARA FUNCIONES RACIONALES DE ORDEN 2

Ejemplo

Evaluar la integral

$$\int_{\gamma} \frac{z - 3}{z^2 - 2z} , \gamma(t) = e^{it} \text{ con } t \in [0, 2\pi]$$

Solución

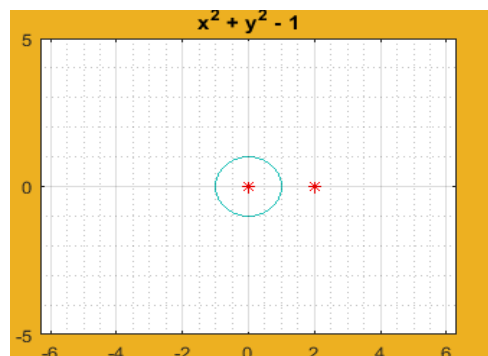


Figura 37: Circulo unitario con un polo

Los polos $f(z)$ están dados por $z = 0$, $z = 2$ son polos, sabemos que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \left(\sum_i^2 \text{Res}(f(z), z_i) \right)$$

siendo z_i polos de orden 1 para los cuales se sigue el siguiente proceso:

$z_1 = 0$ tenemos:

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} (z - 0)f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{z + 3}{z(z - 2)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z + 3}{z - 2} = -\frac{3}{2}$$

$z = 2$ tenemos que no está en interior a γ :

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \left(-\frac{3}{2} \right) = -3\pi i$$

Este mismo resultado obtenemos el siguiente resultado con algoritmos de Matlab.

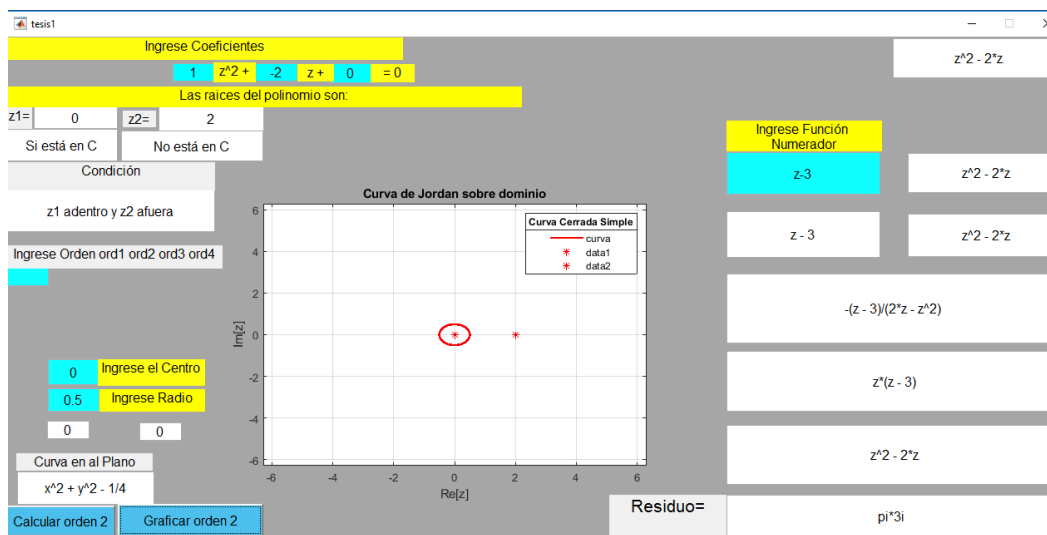
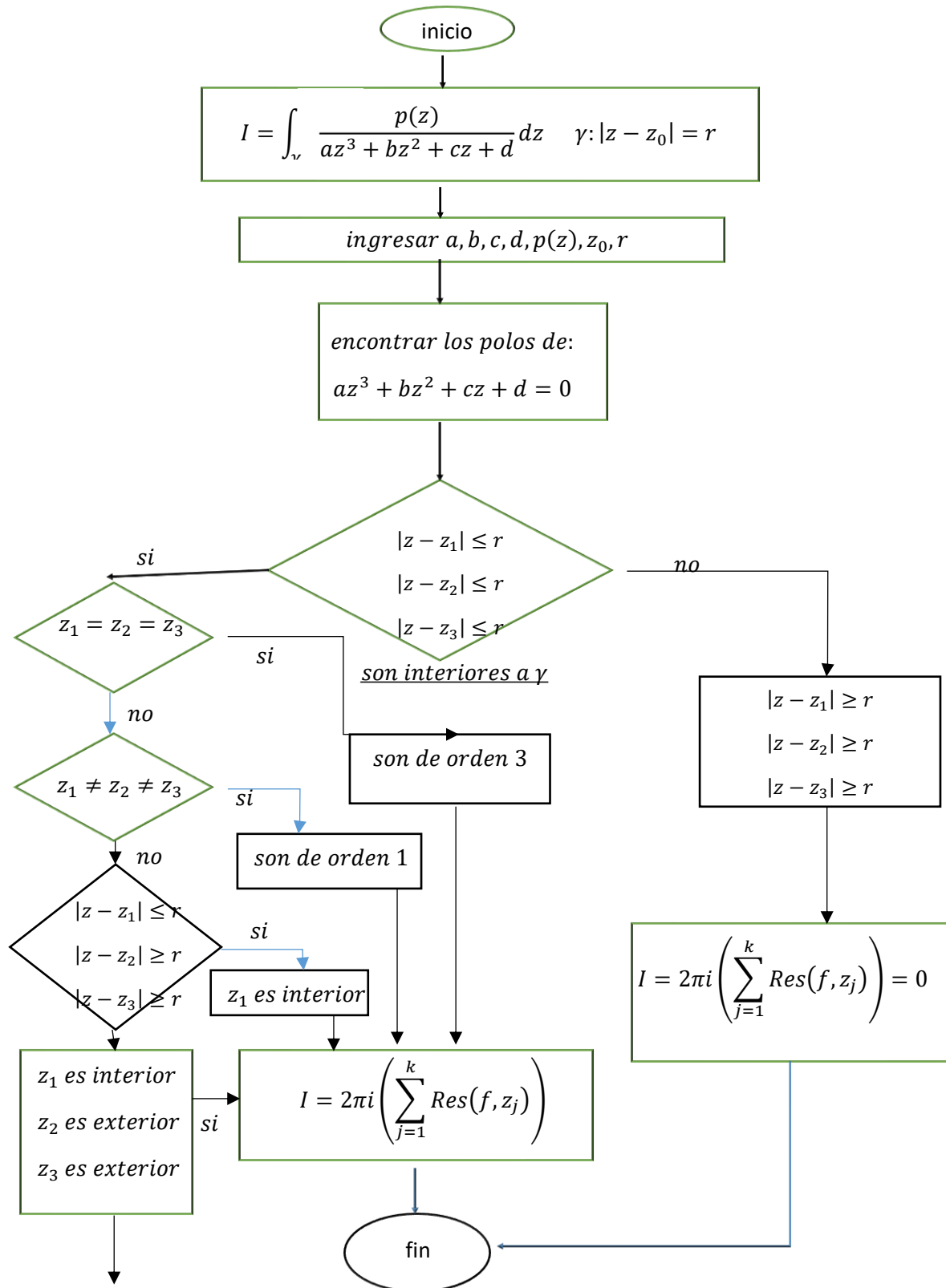


Figura 38: Solución en Matlab



4.4. APLICAMOS EL TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY PARA RESOLVER INTEGRALES DE CONTORNO DE FUNCIONES ANALÍTICAS COMPLEJAS DE FORMA ANALÍTICA, PARA FUNCIONES RACIONALES DE ORDEN 3.

Ejemplo

Evaluar la integral tomado de (Churchill, 2009, p.248)

$$\int_{\gamma} \frac{\cosh(\pi z)}{z(z^2 + 1)} dz$$

Siendo $\gamma: |z| = 2$

Solución

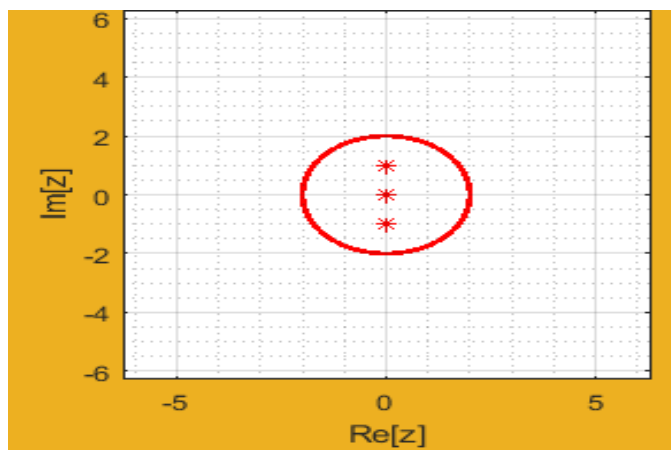


Figura 39: Círculos $\gamma: |z| = 2$

Los polos $f(z)$ están dados por $z = 0$, $z = i$ y $z = -i$ son polos, sabemos que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(\sum_i^3 \text{Res}(f(z), z_i) \right)$$

siendo z_i polos de orden 1 para los cuales se sigue el siguiente proceso:

$z_1 = 0$ tenemos:

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} (z - 0) \frac{\cosh(\pi z)}{z(z^2 + 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cosh(\pi z)}{(z^2 + 1)} = 1$$



$z_2 = i$ tenemos:

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_2)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{\cosh(\pi z)}{z(z^2+1)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\cosh(\pi z)}{z(z+i)} = \frac{1}{2}$$

$z_2 = -i$ tenemos:

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_2)f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i) \frac{\cosh(\pi z)}{z(z^2+1)} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{\cosh(\pi z)}{z(z-i)} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 4\pi i$$

4.5. APLICAMOS EL TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY PARA RESOLVER INTEGRALES DE CONTORNO DE FUNCIONES ANALÍTICAS COMPLEJAS USANDO ALGORITMOS DE MATLAB, PARA FUNCIONES RACIONALES DE ORDEN 3.

```

z1 = 0
z2 = 0 + 1i
z3 = 0 - 1i
curv = x^2 + y^2 - 4
FN = cosh(pi*z)
FD = z^3 + z
funcion = cosh(pi*z)/(z^3 + z)

ord = 1
m1 = 1
z1 = 0
phif = (z*cosh(pi*z))/(z^3 + z)
phiif = cosh(pi*z)/((z - 1i)*(z + 1i))
dphif = 1
rr1 = 1

ord = 1
m1 = 1
z2 = 1i
phif = (cosh(pi*z)*(z - 1i))/(z^3 + z)
phiif = cosh(pi*z)/(z*(z + 1i))
dphif = 1/2
rr2 = 1/2

ord = 1
m1 = 1
z3 = -1i

```

$$\text{phif} = (\cosh(\pi \cdot z) \cdot (z + 1)) / (z^3 + z)$$

$$\text{phiif} = \cosh(\pi \cdot z) / (z \cdot (z - 1))$$

$$\text{dphif} = 1/2$$

$$\text{rr3} = 1/2$$

$$\text{rrff} = \pi \cdot 4i$$

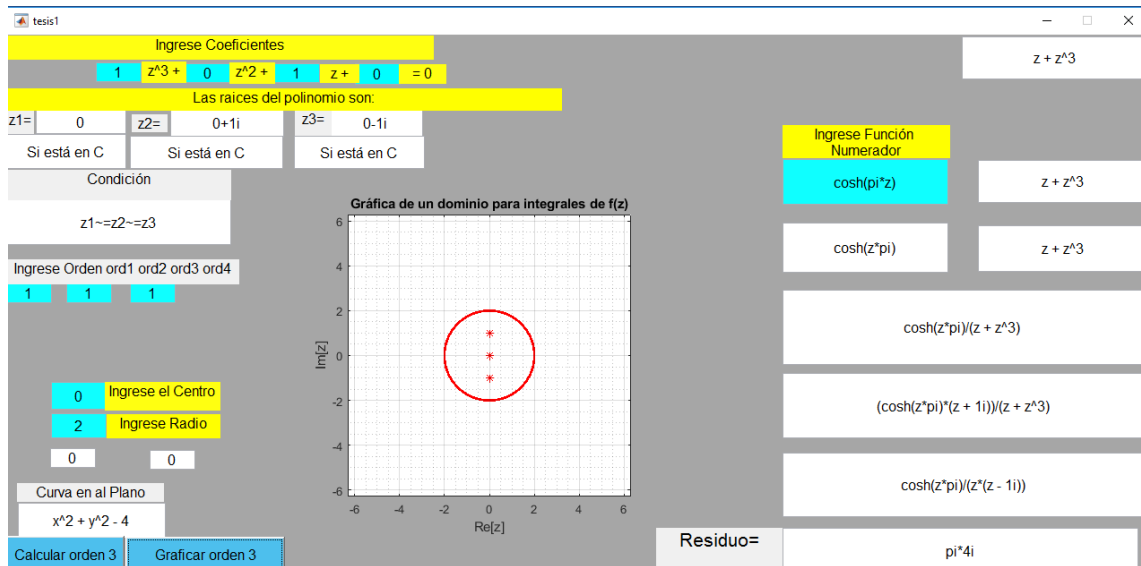
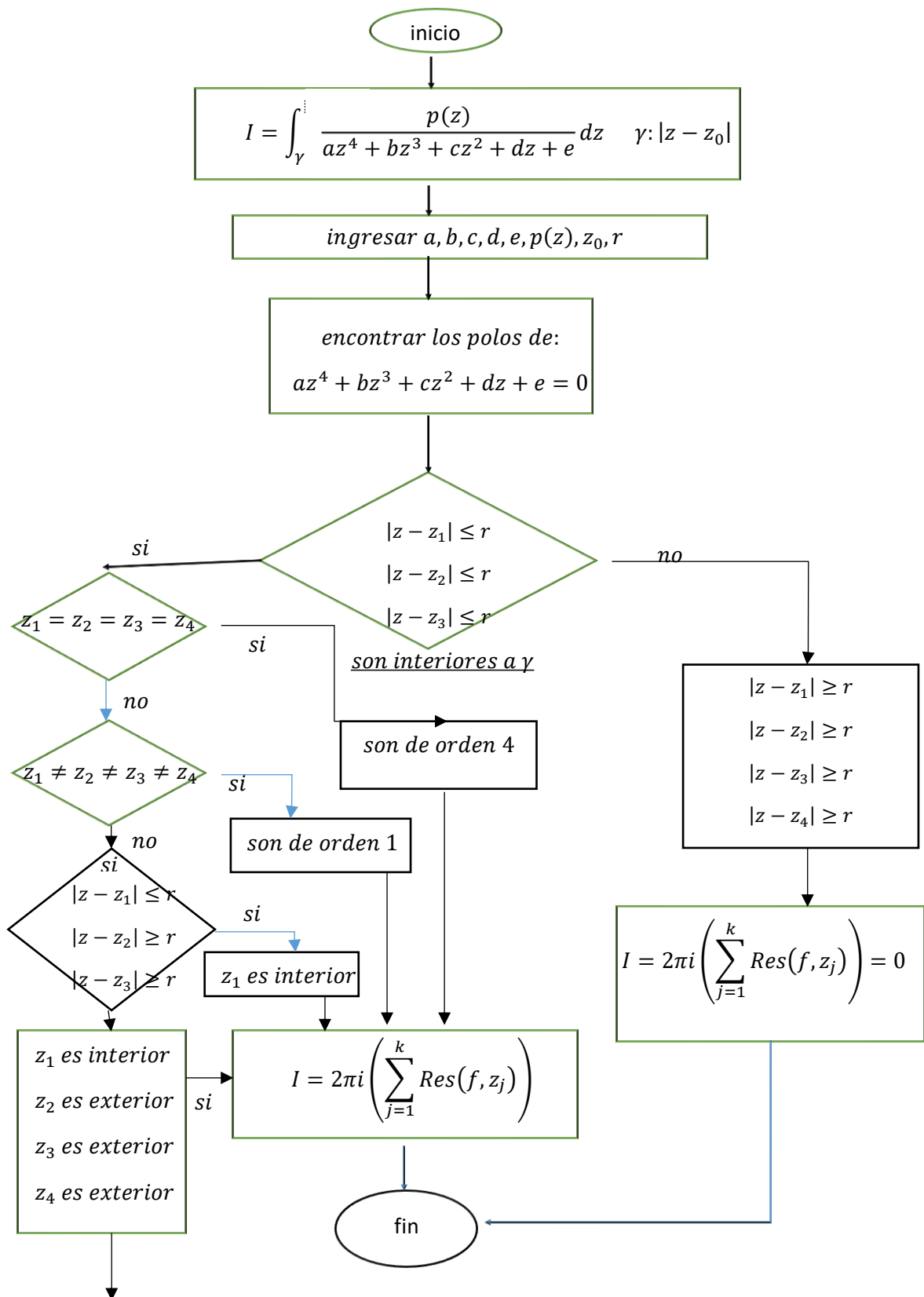


Figura 40: Solución en Matlab



Ejemplo.

Evaluar la integral

$$\int_{|z-(-4i)|} \frac{\cos z}{4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z + 6} dz$$

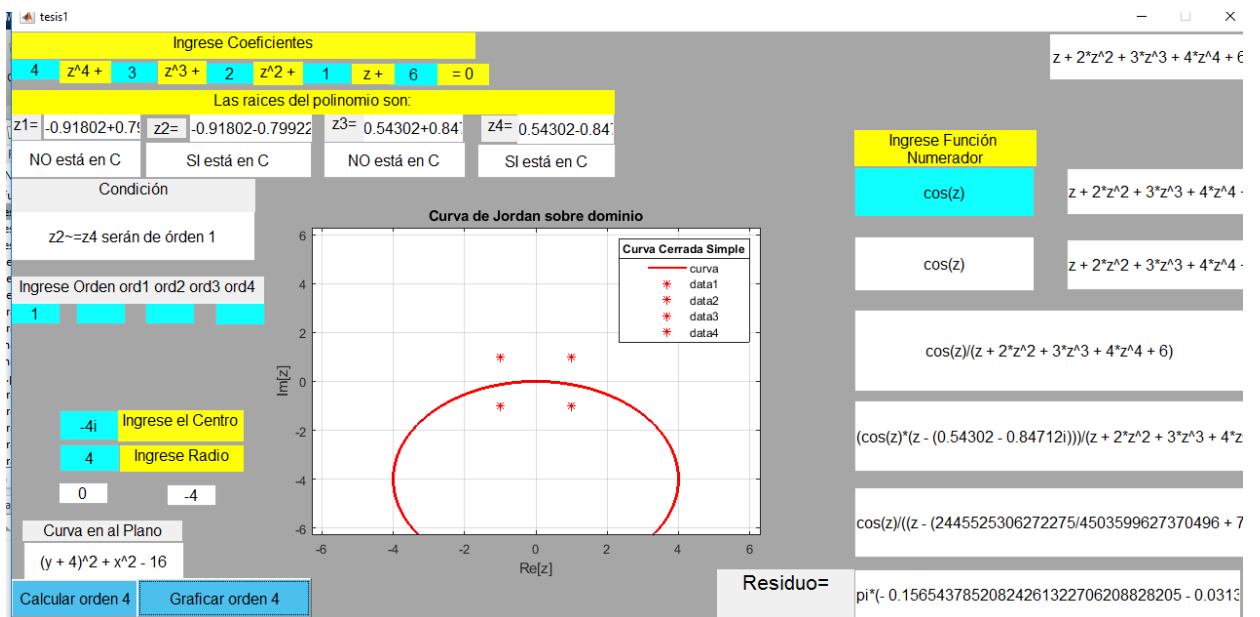


Figura 41: Solución en Matlab

Integrales Trigonométricas

4.6. APLICAMOS EL TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY, PARA RESOLVER INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS USANDO ALGORITMOS DE MATLAB.

Ejemplo

Evaluar la siguiente integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \sin^2(t)} dt = \pi\sqrt{2}$$

Solución:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{1 + \left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)^2} \frac{dz}{iz} = \int_{\gamma} \frac{1}{1 + \left(\frac{z^2 - 1}{2iz}\right)^2} \frac{dz}{iz} = \int_{\gamma} \frac{-4z^2}{-4z^2 + (z^2 - 1)^2} \frac{dz}{iz}$$

$$= \int_{\gamma} \frac{4iz}{-4z^2 + z^4 - 2z^2 + 1} dz = \int_{\gamma} \frac{4iz}{z^4 - 6z^2 + 1} dz$$

Sea $q(z) = z^4 - 6z^2 + 1$, el denominador polinomial. Podemos encontrar sus raíces por la fórmula cuadrática aplicada a $w^2 - 6w + 1$ que tiene raíces $w = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Dado que $w^2 = z$, las raíces de $q(z)$ son dos conjuntos de valores dados como: $z_1 = \sqrt[2]{3 + 2\sqrt{2}} = 2.4142$, $z_2 = -\sqrt[2]{3 + 2\sqrt{2}} = -2.4142$, $z_3 = -\sqrt[2]{3 - 2\sqrt{2}} = -0.4142$ y $z_4 = \sqrt[2]{3 - 2\sqrt{2}} = 0.4142$. Las dos últimas raíces z se encuentran dentro del círculo de la unidad, mientras que las otras no, por lo que pueden descartarse esos puntos.

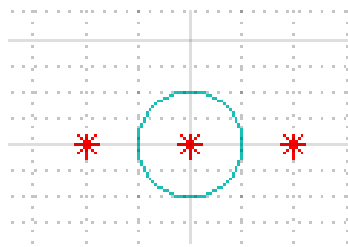


Figura 34: Gráfico de los polos

Por el teorema del residuo de Cauchy, tenemos para un $g(z) = \frac{4iz}{z^4 - 6z^2 + 1}$

$$\int_{\gamma} \frac{4iz}{z^4 - 6z^2 + 1} dz = 2\pi i (\text{Res}(g(z), z_3) + \text{Res}(g(z), z_4)) \quad (1)$$

Siendo los polos simples de orden 1

$$\text{Res}(g(z), z_3) = \lim_{z \rightarrow z_3} (z - z_3) \frac{z}{z^4 - 6z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow z_3} (z - z_3) \frac{z}{z^4 - 6z^2 + 1}$$



$$= \lim_{z \rightarrow z_3} \frac{z^2 - zz_3}{z^4 - 6z^2 + 1}$$

este límite $\rightarrow 0$

Por ello aplicamos el teorema de L'hospital y con $z_3 = -\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

$$= \lim_{z \rightarrow z_3} \frac{z^2 - zz_3}{z^4 - 6z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow z_3} \frac{2z - z_3}{4z^3 - 12z} = \frac{2z_3 - z_3}{4z_3^3 - 12z_3} = \frac{z_3}{z_3(4z_3^2 - 12)}$$

$$\frac{1}{4(z_3^2 - 3)} = \frac{1}{4((3 - 2\sqrt{2}) - 3)} = -\frac{1}{8\sqrt{2}}$$

Como $z_3 = -z_4$, tenemos sus mismos cuadrados. Al examinar el cálculo anterior del residuo en z_3 , encontramos que el residuo en z_4 posee el mismo valor.

Finalmente, ahora podemos evaluar la integral:

$$\int_{\gamma} \frac{4iz}{z^4 - 6z^2 + 1} dz = 4i(2\pi i(2(-\frac{1}{8\sqrt{2}}))) = \pi\sqrt{2} = 4.4429$$

4.7. PROCEDIMIENTO PARA EVALUAR LA INTEGRAL ANTERIOR POR ALGORITMOS DE MATLAB

```
p =
1 0 -6 0 1
raiz =
2.4142
-2.4142
-0.4142
0.4142
z1 =
2.4142
z2 =
-2.4142
z3 =
-0.4142
z4 =
0.4142
ans =
logical
1
FN =
z*4i
FD =
```



```
z^4 - 6*z^2 + 1
funcion =
(z*4i)/(z^4 - 6*z^2 + 1)
ord =
1
m1 =
1
polo3 =
-0.41421
z3 =
-0.41421
FFF =
(z*(z + 0.41421)*4i)/(z^4 - 6*z^2 + 1)
SFF =
(z*(z + 0.41421)*4i)/(z^4 - 6*z^2 + 1)
phiif =
(z*4i)/((z - 3730904090310553/9007199254740992)*(z -
679540706243517/281474976710656))*(z + 679540706243517/281474976710656))
res1 =
-0.35355168580269515058464116205547i
ord =
1
m1 =
1
polo4 =
0.41421
z4 =
0.41421
FFF =
(z*(z - 0.41421)*4i)/(z^4 - 6*z^2 + 1)
SFF =
(z*(z - 0.41421)*4i)/(z^4 - 6*z^2 + 1)
phiif =
(z*4i)/((z + 0.41421)*(z - 679540706243517/281474976710656))*(z +
679540706243517/281474976710656))
res2 =
-0.35355320614625663823022979106827i
rrFF = 4.4428814570936538794815971726671
```

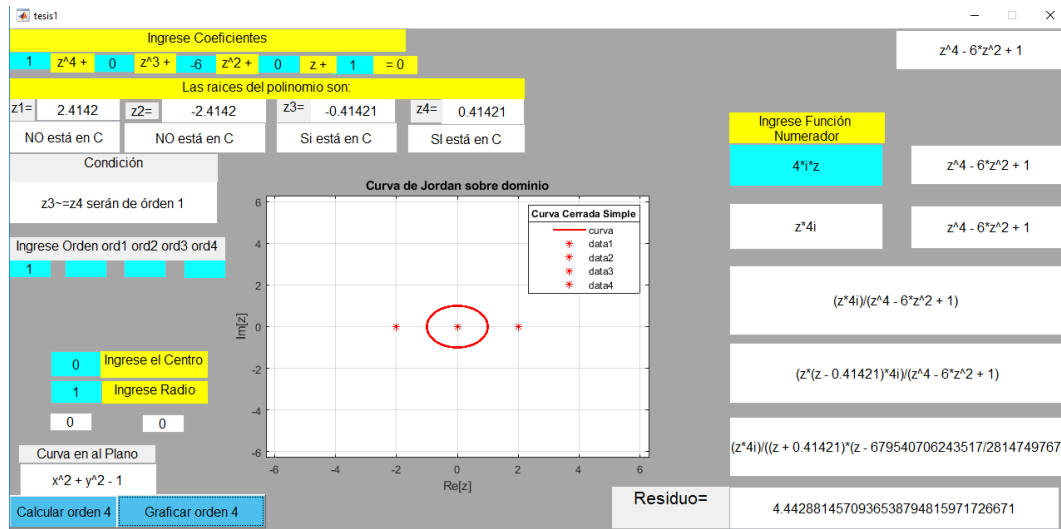


Figura 42: Solución en Matlab de integrales trigonométricas

Integrales Impropias (Complejizando el integrando)

Ejemplos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2 + 1} dx$$

La elección obvia para la complejización del integrando es

$$f(z) = \frac{\cos(2z)}{z^2 + 1}, \text{ sabemos que } \cos(2z) = \frac{e^{i2z} + e^{-i2z}}{2} \text{ por lo que:}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{i2z} + e^{-i2z}}{2(z^2 + 1)} = \frac{e^{i2(x+iy)} + e^{-i2(x+iy)}}{2(z^2 + 1)} = \frac{e^{i2x-2y} + e^{-i2x+2y}}{2(z^2 + 1)} \\ &= \frac{e^{i2x}e^{-2y} + e^{-i2x}e^{2y}}{2(z^2 + 1)} \end{aligned}$$

Ahora $|e^{i2z}| = |e^{i2x}e^{-2y}| = |e^{-2y}| \leq 1$ en γ pero $|e^{-i2x}e^{2y}| = |e^{2y}|$ se vuelve

bastante grande en γ cuando r es grande y positivo. $g(z) = \frac{e^{i2z}}{z^2 + 1}$

Por supuesto, los polos de g están en i y $-i$. De estos dos, solo uno está dentro del contorno. Por un lado (para $r > 1$),

$$\int_{\gamma} g(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(g, i)) \text{Ind}_{\gamma}(i) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{e^{i2z}}{z^2 + 1}$$

$$= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{e^{i2z}}{(z - i)(z + i)} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{i2z}}{(z + i)} = 2\pi i \frac{e^{2ii}}{2i} = 2\pi i \frac{e^{-2}}{2i} = \pi e^{-2}$$

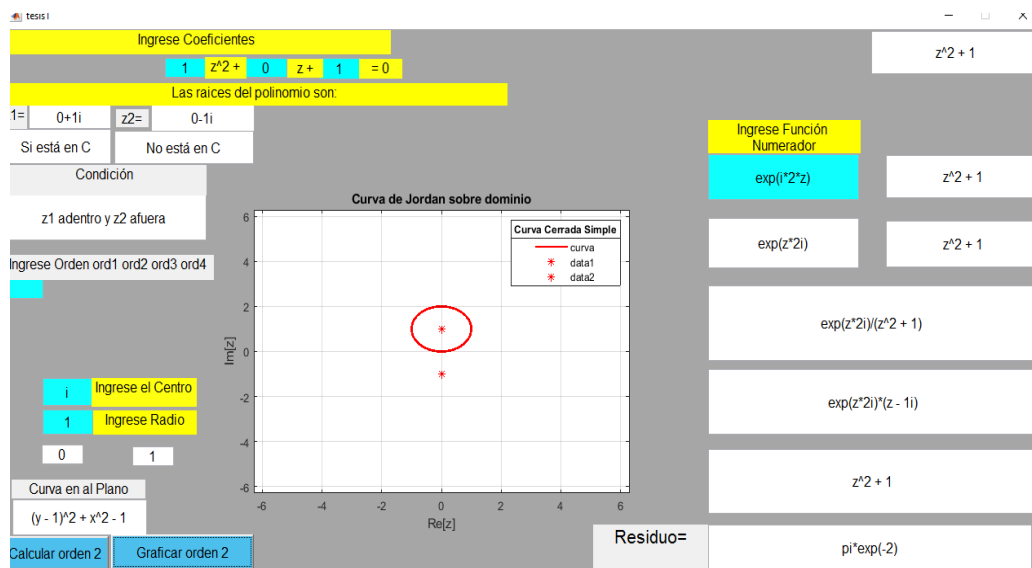


Figura 43: Solución de integrales impropias en Matlab

4.8. APLICAMOS EL TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Ejemplo

Sea la ecuación diferencial con coeficientes constantes de la forma:

$$y' + 2y = 1, \quad y(0) = 1$$

Solución.

$$\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{2y\} = \mathcal{L}\{1\}$$



$$s\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0) + 2\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s} \quad \text{sea} \quad Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$$

$$sY(s) - 1 + 2Y(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s)(s + 2) = \frac{1}{s} + 1 \Rightarrow F(s) = Y(s) = \frac{s + 1}{s(s + 2)}$$

De esta forma se obtiene una función racional $F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$, pasamos a aplicar el

Teorema de los Residuos de Cauchy en los polos $s = 0$ y $s = -2$ que son de orden 1

$$\text{Res}(F(s)e^{st}, 0) = \lim_{s \rightarrow 0} (s - 0)e^{st} \frac{s + 1}{s(s + 2)} = \lim_{s \rightarrow 0} e^{st} \frac{s + 1}{s + 2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Res}(F(s)e^{st}, -2) = \lim_{s \rightarrow -2} (s + 2)e^{st} \frac{s + 1}{s(s + 2)} = \lim_{s \rightarrow -2} e^{st} \frac{s + 1}{s} = \frac{1}{2}e^{-2t}$$

Finalmente tenemos la suma de residuos para la solución general de la ecuación diferencial.

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

```

Dy(t) =
diff(y(t), t)
eqn1(t) =
2*y(t) + diff(y(t), t) == 1
L_eqn1 =
s*laplace(y(t), t, s) - y(0) + 2*laplace(y(t), t, s) == 1/s
L_eqn2 =
2*Ys - y(0) + Ys*s == 1/s
L_eqn3 =
2*Ys + Ys*s - 1 == 1/s
Ys1 =
(1/s + 1)/(s + 2)
YsCollect =
(s + 1)/(s^2 + 2*s)
s + 1
-----
2
s + 2 s

phi =

((s + 1)*(s + 2))/(s^2 + 2*s)

```

res1 =

1/2

Yt1 =

$\exp(-2*t)/2 + 1/2$

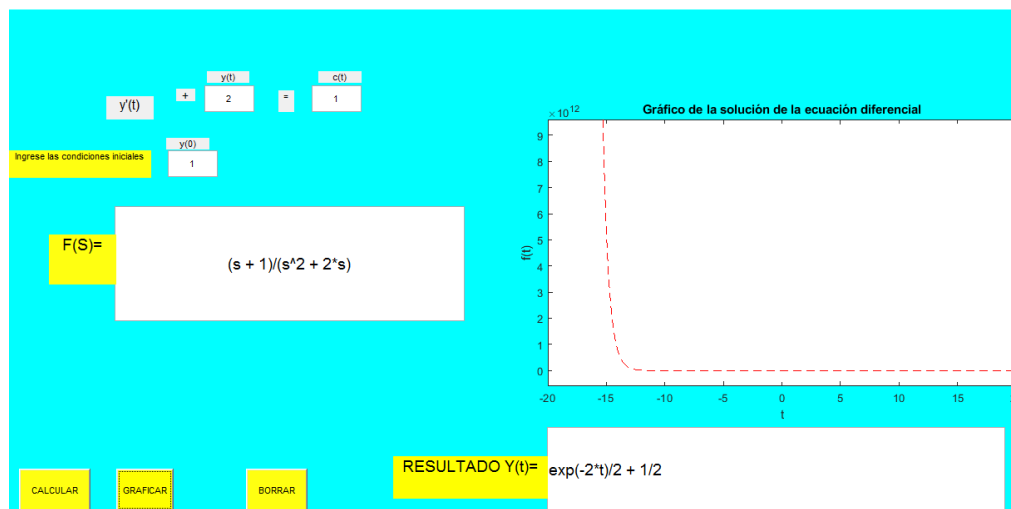


Figura 44: Representación gráfica de la ecuación diferencial

Ejemplo

Considere la ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes

$$y'' - 2y' + 2y = \cos(t), y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Dy(t) =

diff(y(t), t)

D2y(t) =

diff(y(t), t, t)

eqn21(t) =

$2*y(t) - 2*diff(y(t), t) + diff(y(t), t, t) == \cos(t)$

L_eqn21 =

$$2*y(0) - 2*s*\text{laplace}(y(t), t, s) - s*y(0) + s^2*\text{laplace}(y(t), t, s) - \text{subs}(\text{diff}(y(t), t), t, 0) + 2*\text{laplace}(y(t), t, s) == s/(s^2 + 1)$$

L_eqn22 =

$$2*Ys + 2*y(0) - 2*Ys*s - s*y(0) - \text{subs}(\text{diff}(y(t), t), t, 0) + Ys*s^2 == s/(s^2 + 1)$$

L_eqn23 =

$$2*Ys - s - 2*Ys*s + Ys*s^2 + 2 == s/(s^2 + 1)$$

Ys21 =

$$(s + s/(s^2 + 1) - 2)/(s^2 - 2*s + 2)$$

YsCollect =

$$(s^3 - 2*s^2 + 2*s - 2)/(s^4 - 2*s^3 + 3*s^2 - 2*s + 2)$$

Yt21 =

$$\cos(t)/5 - (2*\sin(t))/5 + (4*\exp(t)*(\cos(t) - \sin(t)/2))/5$$

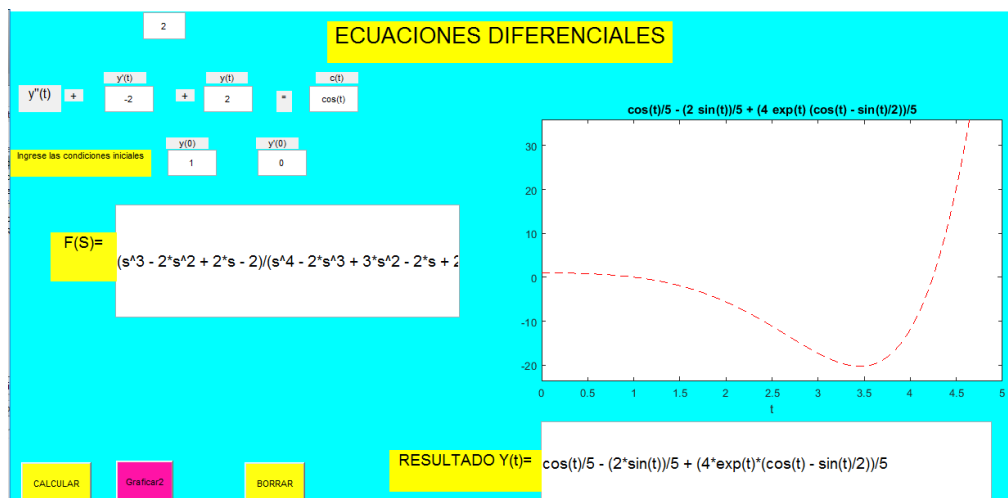


Figura 45: Representación gráfica de la ecuación diferencial



V. CONCLUSIONES

- Se verificó que la aplicación del algoritmo, es efectivamente una alternativa para la solución de integrales de contorno y problemas lineales con valor inicial con mayor efectividad y en menor tiempo.
- Se analizó y se demostró que la aplicación del teorema del residuo de Cauchy, es una alternativa de solución, a los problemas de cálculo integral complejo y problemas lineales con valor inicial de funciones analíticas, y que este desarrollo analítico demanda más tiempo.
- Se identificó las sentencias que permiten el desarrollo de un algoritmo, para el teorema del residuo de Cauchy, que pueda ser una alternativa de solución, a los problemas de cálculo integral complejo y problemas lineales con valor inicial de funciones analíticas



VI. RECOMENDACIONES

- Se recomienda el uso del teorema del residuo de Cauchy para la solución de integrales reales, donde la integración se realiza en un intervalo, a integrales de contorno en el plano complejo.
- Use el software Matlab como un instrumento, puesto que cada sentencia constituye un elemento para la construcción de algoritmos que permiten un efectivo método para solución de modelos matemáticos.



VII. REFERENCIAS

- Acevedo Frías, B. (2006). Variable compleja.
- Aparicio, C., & Payá, R. (1985). Análisis Matemático I. Servicio de Publicaciones de la.
- Ash, R. B., & Novinger, W. P. (2007). Complex Analysis.
- Busam, R. & Freitag, E. (2009). Complex Analysis. By Springer-Verlag, New York Inc. Berlin Heidelberg.
- B. Conway, John. (1978). Functions of One Complex Variable. By Springer-Verlag, New York Inc.
- Brannan, J. R., & Boyce, W. E. (2015). Differential equations: An introduction to modern methods and applications. John Wiley & Sons.
- Carreira, M. A., & de Nápoles, S. M. (1998). Variável complexa: teoria elementar e exercícios resolvidos.
- Chiang, M. (2017, p.3). Complex Function theory. Hong Kong: Cheung.
- Daynitti, J. ((2007)). Aplicações do teorema do resíduo. (*Tesis de licenciatura*). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- Freitag. Eberhart, Busam. Rolf. (2009). Complex Analysis. Springer-verlag Berlin Heidelberg
- Galindo Soto, F., Tristán Vega, L. A., Sanz Gil, J., Gómez Pérez, J., Lastra Sedano, A., & Jiménez Garrido, J. J. (2015). Guía teórico-práctica de Variable Compleja para estudios de Grado.
- García Andrade, D. E., Vásquez, V., & Bladimir, R. (2014). Teorema del residuo y algunas de sus aplicaciones (tesis de pregrado). Universidad de El Salvador.
- H. Mathews, J, W. Howell, Russell. (1997). Complex Analysis for Mathematics and Engineering. Times Mirror Higher Education Group, Inc.
- Krantz, S. G. (2007). Complex Variables: a physical approach with applications and MATLAB. Chapman and Hall/CRC.



- López-Gómez, J. (2001). Ecuaciones diferenciales y variable compleja. Con teoría.
- Mosquera-López, S., & Soto-Agreda, O. F. (2016). Un primer curso sobre Variable Compleja.
- Orbegoso G. Alhiet, Muñoz V. Cristian, Villalta R. Alfonso. (2010). Matlab 2010. Por Macro E.I.R.L. Lima-Perú.
- Pregrado, T. O. (1998). Datos de Identificación (Doctoral dissertation, Universidad Central de Venezuela).
- Ruiz, C. P., & de Jesús, C. (1995). Cálculo vectorial. Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Várilly Boyle, J. C. (2012). MA-702: Variable compleja.
- Ward Brown J, V. Churchill, R. (2009). Complex Variables and Applications. Americas, New York. The McGraw-Hill Companies, Inc.



ANEXOS

Anexo 1. Transformada de Laplace.

Función $f(t)$	Transformada	Condición
$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$	
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$a \neq b$
$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	$a \neq b$
$\text{sen}(t)$	$\frac{1}{s^2 + 1}$	
$\text{cos}(t)$	$\frac{s}{s^2 + 1}$	
$\text{senh}(t)$	$\frac{1}{s^2 - 1}$	
$\text{cos}(t)$	$\frac{s}{s^2 - 1}$	



Anexo 2. Algunos comandos de importancia

Nombre de variable	Significado	Valor
<i>ans</i>	<i>respuesta reciente</i>	<i>cambia con la respuesta</i>
<i>pi</i>	π	3.1416
<i>i, j</i>	<i>unidad imaginaria</i>	$0 + 1.0000i$
<i>inf</i>	<i>infinito</i>	∞
<i>NaN</i>	<i>no es un número</i>	—

Anexo 3. Operadores Aritméticas en Matlab

Operadores Aritméticos	Significado
+	<i>suma</i>
—	<i>resta</i>
*	<i>multiplicación</i>
/	<i>división</i>
^	<i>potenciación</i>



Anexo 4. Operadores lógicos y relacionales

Operadores	Descripción
$\&$	<i>Devuelve el valor de 1 en cada posición, donde los elementos</i>
$\sim =$	<i>$a \sim = b$: establece la condición de $a \neq b$</i>
$>$	<i>$a > b$: establece la condición de a mayor que b</i>
$<$	<i>$a < b$: establece la condición de a menor que b</i>
$> =$	<i>$a > = b$: establece la condición de a mayor o igual que b</i>
$< =$	<i>$a < = b$: establece la condición de a menor o igual que b</i>
$==$	<i>$a == b$: establece la condición de a igual que b</i>



Anexo 5. Formato de valores numéricos

Tipo	Resultado
<i>short</i>	Escala de formato a 5 dígitos
<i>rat</i>	En forma de fracción

Anexo 6. Conversión de valores numéricos a cadenas

Comando	Valor
<i>char</i>	<i>cadena de caracteres</i>
<i>int2str</i>	convierte un entero positivo o negativo a un tipo carácter
<i>num2str</i>	Convierte un tipo numérico a un tipo de carácter.

Anexo 7. Conversión de cadenas a valores numéricos.

Comando	Operación
<i>str2num</i>	Convierte un tipo de carácter a numérico
<i>str2double</i>	Convierte un tipo de carácter a numérico



Anexo 8. Variables simbólicas.

Función	Descripción
$\text{syms } x, y, \dots, z$	Convierte x, y, \dots, z en simbólicas
syms	Lista de variables simbólicas en el espacio de trabajo.
$\text{pretty}(w)$	Convierte la expresión simbólica w en escritura matemática.
$\text{simplify}(E)$	Simplifica o reduce la expresión dada E
$\text{vpa}(E, n)$	Devuelve el resultado de la expresión E con n cifras significativas.

Anexo 9. Funciones para evaluación de expresiones simbólicas.

Función	Descripción
$\text{subs}(f, a)$	Evalúa la función f en a
$\text{subs}(f, a, b)$	Sustituye en la función f el valor de a por el valor de b
$\text{subs}(f, (a, b), (x, y))$	Sustituye valores de a, b en valores de x, y .

Anexo 10. Funciones de análisis matemático.

Función	Descripción
$limit(f, a)$	Calcula el límite de la función f , cuando z tiende a a .
$diff(f, z)$	Calcula la derivada de f respecto de z .
$diff(f, z, n)$	Calcula la n -ésima derivada f respecto de z
$dsolve('E', 'u')$	Resuelve la ecuación diferencial E , dónde u es la variable independiente.

Anexo 11. Sentencias para gráficos de Matlab.

Comandos	Descripción
$plot(x, y)$	Dibuja el conjunto de puntos (x, y) en el plano.
$fplot('f', [a, b])$	Grafica la función f en el intervalo $[a, b]$
$ezplot()$	Grafica la función f en el intervalo $[a, b]$, adicionándole el título por defecto.



Anexo 12. Características e etiquetas para una gráfica.

Tipo de marca

Caracteres	Descripción
.	punto
*	asterisco

Color de línea

Especificador	Color
<i>r</i>	rojo
<i>g</i>	verde

Tipos de línea

Caracteres	Estilos de línea
—	continua
-- --	guiones



Anexo 13. Títulos y etiquetas.

Comando	Descripción
<i>title('texto')</i>	Añade el título en la parte superior
<i>xLabel('texto')</i>	Sitúa el texto en eje x
<i>yLabel('texto')</i>	Sitúa el texto en eje y
<i>grid</i>	Inserta rejillas
<i>hold</i>	Permite mantener el Gráfico existente con todas sus propiedades