



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO**  
**FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN**  
**ESCUELA PROFESIONAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA**



**“NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE  
TAREAS ESTRUCTURALES DE NÚMEROS RACIONALES  
Y EL LOGRO DE APRENDIZAJE DEL ÁREA DE  
MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES DE LA  
I.E.S. 91 JOSÉ IGNACIO MIRANDA DE  
LA CIUDAD DE JULIACA - 2020”**

**TESIS**

**PRESENTADA POR:**

**Bach. LISBETH MARINÉH ZELA LÓPEZ**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:**

**LICENCIADA EN EDUCACIÓN, ESPECIALIDAD DE  
MATEMÁTICA, COMPUTACIÓN E INFORMÁTICA**

**PUNO – PERÚ**

**2022**



## DEDICATORIA

*A mi madre MARHYSOL por estar siempre dispuesta a apoyarme en el cumplimiento de todos mis objetivos profesionales y a mi padre HERNAN por desear y anhelar lo mejor para mi vida. Gracias por forjar mi formación con su ejemplo y amor incondicional.*

*A mi pequeña hermana ANYALI MARINEH, más que una hermana una hija, por tomarme como ejemplo, lo que me motiva a ser mejor cada día.*

*A mi abuela GUMERCINDA, por su carácter, sabiduría y consejos que fueron de gran ayuda durante mi etapa universitaria.*



## AGRADECIMIENTOS

*A la Universidad Nacional del Altiplano Puno, especialmente a la Facultad de Educación, por haberme acogido en sus aulas durante mi formación profesional y por su encomiable labor de formar profesionales idóneos y con vocación de servicio.*

*A mis jurados y docentes de la especialidad de Matemática, Computación e Informática, por su conocimiento brindado durante la carrera profesional y a mi asesor, por su acertado asesoramiento en la presente investigación*

*A mi madre Marhysol, por aportar de manera incondicional en la realización y cumplimiento de este objetivo.*

*Mi sincero reconocimiento a todas las personas que con sus palabras de aliento y apoyo han contribuido a hacer realidad esta tesis.*



# ÍNDICE GENERAL

**DEDICATORIA**

**AGRADECIMIENTOS**

**ÍNDICE GENERAL**

**ÍNDICE DE TABLAS**

**ÍNDICE DE FIGURAS**

**INDICE DE ACRÓNIMOS**

**RESUMEN ..... 9**

**ABSTRACT..... 10**

## **CAPÍTULO I**

### **INTRODUCCIÓN**

**1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA..... 13**

**1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA ..... 16**

1.2.1. Problema General ..... 16

1.2.2. Problemas específicos ..... 17

**1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN ..... 17**

1.3.1. Hipótesis general ..... 17

1.3.2. Hipótesis específicas ..... 17

**1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO ..... 18**

**1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN..... 21**

1.5.1. Objetivo general ..... 21

1.5.2. Objetivos específicos..... 21

## **CAPÍTULO II**

### **REVISIÓN DE LITERATURA**

**2.1 ANTECEDENTES ..... 22**

**2.2. MARCO TEÓRICO ..... 29**



2.2.1. Razonamiento algebraico .....	29
2.2.2. Niveles de algebrización .....	33
2.2.3. Dificultades de aprendizaje del algebra escolar .....	42
2.2.4. Logros de aprendizaje .....	46
2.2.5. Números racionales .....	49
2.2.6. Competencias, capacidades y contenidos vinculados a la investigación ....	51
<b>2.3. MARCO CONCEPTUAL .....</b>	<b>58</b>
<b>CAPÍTULO III</b>	
<b>MATERIALES Y MÉTODOS</b>	
<b>3.1 UBICACIÓN GEOGRÁFICA DEL ESTUDIO.....</b>	<b>60</b>
<b>3.2 POBLACIÓN Y MUESTRA DEL ESTUDIO .....</b>	<b>60</b>
<b>3.3 ENFOQUE DE INVESTIGACIÓN .....</b>	<b>63</b>
<b>3.5 NIVEL DE INVESTIGACIÓN.....</b>	<b>63</b>
<b>3.6 DISEÑO DE INVESTIGACIÓN.....</b>	<b>64</b>
<b>3.7 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS.....</b>	<b>65</b>
<b>3.8 TRATAMIENTO ESTADÍSTICO DE LOS DATOS .....</b>	<b>67</b>
<b>CAPÍTULO IV</b>	
<b>RESULTADOS Y DISCUSIÓN</b>	
<b>4.1 RESULTADOS.....</b>	<b>69</b>
<b>4.2 DISCUSIÓN .....</b>	<b>83</b>
<b>V. CONCLUSIONES .....</b>	<b>93</b>
<b>VI. RECOMENDACIONES .....</b>	<b>95</b>
<b>VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>97</b>
<b>ANEXOS.....</b>	<b>106</b>

**ÁREA:** Interdisciplinaridad en la dinámica educativa: teoría y métodos de investigación de la didáctica de la matemática

**TEMA:** Niveles de algebrización.

**Fecha de sustentación: 04/feb/2022**



## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 1.</b> Estudiantes del segundo grado de la I.E.S. 91 “José Ignacio Miranda” de la ciudad de Juliaca, 2020.....	60
<b>Tabla 2.</b> Muestra de estudio de los estudiantes del segundo grado de la I.E.S. 91 “José Ignacio Miranda” de la ciudad de Juliaca, 2020.....	62
<b>Tabla 3.</b> Análisis del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales (Tarea 1).....	70
<b>Tabla 4.</b> Análisis del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales (Tarea 2).....	71
<b>Tabla 5.</b> Análisis del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales (Tarea 3).....	73
<b>Tabla 6.</b> Análisis del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales (Tarea 4).....	75
<b>Tabla 7.</b> Análisis del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales. ....	76
<b>Tabla 8.</b> Análisis del nivel de logro del área de matemática .....	78
<b>Tabla 9.</b> Prueba de Normalidad de Kolmogorov-Smirnov .....	81
<b>Tabla 10.</b> Correlación de Spearman del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y logro de aprendizaje del área de matemáticas. ..	82



## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 1.</b> Resultados del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales (tarea 1).....	70
<b>Figura 2.</b> Resultados del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales (tarea 2).....	72
<b>Figura 3.</b> Resultados del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales (tarea 3).....	73
<b>Figura 4.</b> Resultados del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales (tarea 4).....	75
<b>Figura 5.</b> Resultados del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales.....	77
<b>Figura 6.</b> Resultados del nivel de logro del área de matemáticas.....	79



## INDICE DE ACRÓNIMOS

CN. Currículo Nacional.

EBR. Educación Básica Regular.

ECE. Evaluación Censal de Estudiantes

EOS. Enfoque Ontosemiótico

IES. Institución Educativa Secundaria.

MINEDU. Ministerio de Educación.

NCTM. Consejo Nacional de Profesores de Matemática.

PISA. Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos.

PME. Psychology of Mathematics Education.

RA. Razonamiento Algebraico.

RAE. Razonamiento Algebraico Elemental.

OCDE. Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico

TAD. Teoría Antropológica de la Didáctica.



## RESUMEN

En la presente investigación se priorizó los procesos de pensamiento matemático como una de las dificultades que presentan la mayoría de los estudiantes, estas dificultades están asociadas al uso de símbolos literales, la comprensión de conceptos propios del álgebra, la capacidad de hacer uso de representaciones semióticas para externar este razonamiento de generalidad, entre otras dificultades que afectan el logro de aprendizaje del área de matemática. Por ello, se tuvo como objetivo determinar si existe relación entre el nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y el logro de aprendizaje en el área de matemática en estudiantes del segundo grado de la Institución Educativa Secundaria 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca – 2020. En la metodología, el nivel de investigación es descriptivo, el diseño es correlacional, como instrumentos de investigación se seleccionó el cuestionario, basado en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática que permitió determinar la presencia o ausencia de rasgos característicos de los niveles de algebrización y la ficha de análisis documental que permitió obtener información del logro de aprendizaje de los estudiantes en el área de matemática. Para el hallazgo de la correlación entre las variables de estudio se ha usado el Coeficiente de Correlación de Spearman, de acuerdo a la prueba de normalidad. De los resultados más significativos se obtuvo que existe evidencia estadística suficiente para afirmar que hay una correlación significativa entre las variables de estudio, con un valor  $\rho=0.384$  que corresponde a un nivel de correlación positiva moderada, lo que significa que a mayor nivel de algebrización, mayor será el logro de aprendizaje en el área de matemática. Del análisis procedimental de las cuatro tareas estructurales de números racionales se concluyó que los estudiantes muestran un “nivel incipiente de algebrización” y del análisis descriptivo de la variable nivel de aprendizaje logrado en el área de matemática se concluyó que los estudiantes se encuentran en “proceso de aprendizaje”, por lo cual requieren de acompañamiento durante un tiempo razonable para lograr el aprendizaje.

**Palabras clave:** Algebrización, aprendizaje, enfoque, tarea estructural, números racionales.



## ABSTRACT

In the present investigation, mathematical thought processes were prioritized as one of the difficulties that most students present, these difficulties are associated with the use of literal symbols, the understanding of concepts typical of algebra, the ability to make use of semiotic representations to externalize this reasoning of generality, among other difficulties that affect the achievement of learning in the area of mathematics. Therefore, the objective was to determine if there is a relationship between the level of algebrization in the resolution of structural tasks of rational numbers and the achievement of learning in the area of mathematics in second grade students of the Secondary Educational Institution 91 José Ignacio Miranda de the city of Juliaca - 2020. In the methodology, the level of research is descriptive, the design is correlational, as research instruments the questionnaire was selected, based on the ontosemiotic approach to knowledge and mathematical instruction that allowed determining the presence or absence of characteristic features of the algebrization levels and the documentary analysis sheet that allowed obtaining information on the learning achievement of the students in the area of mathematics. To find the correlation between the study variables, the Spearman Correlation Coefficient has been used, according to the normality test. From the most significant results, it was obtained that there is sufficient statistical evidence to affirm that there is a significant correlation between the study variables, with a  $\rho=0.384$  value that corresponds to a moderate positive correlation level, which means that at a higher level of algebrization, the greater the learning achievement in the area of mathematics. From the procedural analysis of the four structural tasks of rational numbers, it was concluded that the students show an "incipient level of algebrization" and from the descriptive analysis of the variable level of learning achieved in the area of mathematics, it was concluded that the students are in a "process of learning", for which they require accompaniment for a reasonable time to achieve learning.

**Key words:** Algebrization, learning, focus, structural task, rational numbers.



# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

En el Perú, la educación matemática responde a las orientaciones del Currículo Nacional, documento que reconoce la importancia de las matemáticas para lograr el desarrollo integral de los estudiantes.; no obstante, la matemática ha sido y continúa siendo una de las áreas curriculares en las que tradicionalmente los estudiantes presentan dificultades, especialmente en el tránsito de la educación primaria donde se prioriza los métodos aritméticos a la educación secundaria donde se hace uso de métodos algebraicos, los cuales implican ideas más complejas y abstractas dentro de las matemáticas escolares. Lo señalado, pone en evidencia la importancia del desarrollo del pensamiento algebraico; lo cual supone, un cambio en el razonamiento del estudiante para resolver problemas y diseñar modelos matemáticos, dentro de la propia matemática, en otras áreas del conocimiento y en situaciones reales de la vida cotidiana.

En tal sentido, la presente investigación pretende determinar si existe relación entre el nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y el logro de aprendizaje en el área de matemática en estudiantes del segundo grado de la Institución Educativa Secundaria 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca – 2020, en el marco del enfoque ontosemiótico en las que intervienen prácticas, objetos y procesos que implican nuevos niveles de generalidad apoyado en representaciones simbólicas de los objetos correspondientes.

En esta perspectiva, el presente documento muestra el proceso seguido durante la labor de investigación, el cual está organizado en cuatro capítulos.



El primer capítulo comprende el planteamiento del problema, donde se realiza un análisis de la situación problemática real; hipótesis de investigación, las cuales son explicaciones tentativas del fenómeno a investigar; justificación de la investigación y los objetivos de investigación, aspectos que permitieron afinar y estructurar más formalmente la idea de investigación.

El segundo capítulo contiene el marco teórico donde se analizan antecedentes, investigaciones y teorías, considerados válidos para el presente estudio.

El tercer capítulo integra aspectos concernientes a la metodología o estrategia para investigar el problema; tipo y diseño de investigación, población y muestra; técnicas e instrumentos de recolección de datos.

El cuarto capítulo, ilustra los resultados de la investigación; el procedimiento estadístico con su correspondiente análisis y prueba de hipótesis; interpretación y discusión de resultados acorde al criterio sintético.

Finalmente se consignan las conclusiones, sugerencias pertinentes y las referencias bibliográficas y se adjunta los anexos.



## 1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La sociedad actual, está caracterizada por el uso generalizado de la matemática en todas las actividades humanas como una herramienta esencial en muchos campos y constituye el lenguaje básico de la ciencia y la tecnología, debido a que genera un modelo de pensamiento, fomenta la capacidad de abstracción y es una poderosa herramienta de modelación de la realidad, además de que adquiere significado en la formación del hombre contemporáneo como parte integrante de su personalidad.

En la sociedad actual, se requiere que las personas sean capaces de pensar lógicamente, pero también de tener un pensamiento divergente para encontrar soluciones novedosas a problemas que hasta ahora desconocemos, en ese entender, el pensamiento matemático se convierte en una necesidad para el desarrollo integral de cada persona, en atención al compromiso y la responsabilidad social que se tiene, en este pensamiento están incluidas todas las formas posibles de construcción de ideas matemáticas en una gran variedad de tareas; por lo tanto, el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a sus múltiples tareas (Cantoral y otros, 2005).

En el contexto escolar, el pensamiento matemático busca que los estudiantes desarrollen esa forma de razonar tanto lógica como no convencional y que al hacerlo aprecien el valor de ese pensamiento, lo que se traduce en actitudes y valores favorables hacia las matemáticas, su utilidad y su valor científico y cultural. Por ello es considerada como una disciplina básica de cualquier currículo.

En este marco, el Ministerio de Educación tiene como una de sus políticas prioritizadas el asegurar que todos los estudiantes de educación básica regular del país, logren aprendizajes de calidad con énfasis en las matemáticas, lograr este objetivo de



política en el ámbito de la matemática representa un gran desafío, debido a los bajos resultados que se tienen en esta área curricular y respecto de los cuales es muy poco lo que se ha podido avanzar; tal como lo muestran los resultados de la prueba del Programa para la evaluación Internacional de Alumnos (PISA) 2018, realizados por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), quien destaca que el Perú ocupó el puesto 64 de 77 países, obteniendo un promedio de 401 en el 2018 mejorando notablemente en relación al 2015, en la que obtuvo un promedio de 387; no obstante, los resultados están muy por debajo de nuestros pares en Latinoamérica. De la misma manera, en la última Evaluación Censal de Estudiantes (ECE) de segundo grado de secundaria realizado el 2018, tan solo el 10.6% de los estudiantes alcanzó el nivel satisfactorio en matemática en la Región de Puno. (Unidad de Medición de la Calidad, 2018). Con lo cual se muestra de manera consistente y fehaciente que existen problemas en el logro del aprendizaje de las matemáticas.

Ahora bien, según Socas (2011) las dificultades que tienen los estudiantes con respecto al aprendizaje de las matemáticas tienen que ver con cinco aspectos importantes: la complejidad de los objetos matemáticos, los procesos de pensamiento matemático, los procesos de enseñanza, los procesos de cognición de los estudiantes y las dificultades a la actitud afectiva y emocional hacia la matemática. En la presente investigación se ha priorizado los procesos de pensamiento matemático como una de las dificultades más resaltantes y menos estudiada, que presentan la mayoría de los estudiantes de las instituciones educativas de nivel secundario de la región Puno, especialmente durante el proceso de transición del pensamiento aritmético que generalmente se desarrolla durante toda la primaria al pensamiento algebraico que aparece de manera abrupta en la educación secundaria (Kieran, 2007); (Rojas y Vergel, 2015). Además, estas deficiencias se han notado más al resolver tareas estructurales en



números racionales, Godino, et al., (2012) y en Kieran (2007). Estas dificultades están asociadas generalmente al uso de símbolos literales o “letras” y al significado que se le asigna a dichas “letras” en contextos matemáticos, también muestran dificultades para comprender y manejar conceptos propios del álgebra (incógnita, número general y variable), así como para comprender que las operaciones en álgebra pueden no llevar a un resultado numérico y que, a la larga, pueden quedar como operaciones suspendidas. Además, a la capacidad de hacer uso de representaciones semióticas para externar este razonamiento de generalidad (simbolismos alfanuméricos).

En tal sentido, es necesario que los docentes que tienen a su cargo el área de matemática, construyan ideas algebraicas en la actividad matemática de los estudiantes, que involucren la comprensión de las relaciones funcionales, la generalización de patrones y de relaciones numéricas, el trabajo con la estructura, el simbolismo y la modelización como medios de expresión, y la formalización de generalizaciones. Del mismo modo, es necesario que los docentes ayuden a los estudiantes a usar métodos algebraicos para resolver problemas ya que el uso de métodos predominantemente aritméticos puede resultar un obstáculo para el desarrollo del pensamiento algebraico. Tal como afirma Radford (2011):

“El pensamiento algebraico es de ninguna manera natural, algo que aparecerá y se desarrollará una vez que los estudiantes hayan madurado. El pensamiento algebraico es un tipo de reflexión y acción cultural muy sofisticado, un modo de pensamiento que fue refinado sucesivamente a lo largo de siglos antes que alcanzara su forma actual, por eso no basta con elaborar propuestas curriculares que incluyan el álgebra desde los primeros niveles educativos, es necesario que los maestros participen de la visión ampliada del álgebra que proponen diversas investigaciones y experiencias



didácticas a fin de que estén capacitados para transformar las tareas matemáticas escolares hacia el logro de niveles progresivos de algebrización”.

En consecuencia, estas cuestiones no son triviales si tenemos en cuenta la abundante literatura existente donde se aborda esta problemática (Carraher y Schliemann, (2007); Kieran, (2007); Cai y Knuth, (2011); tampoco son intrascendentes desde el punto de vista educativo, ya que involucran diversas maneras de concebir la propia actividad matemática, así como su enseñanza y aprendizaje en la escuela.

Por tal motivo, es importante determinar la relación que existe entre los niveles de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y el logro de aprendizaje del área de matemática en estudiantes de la Institución Educativa .Secundaria INA 91 “José Ignacio Miranda” de la ciudad de Juliaca, basado en una perspectiva ontosemiótica del razonamiento algebraico escolar, debido a que este tipo de razonamiento funcional está en el corazón de las matemáticas y en los procesos de formalización y generalización que son procesos centrales de la matemática.

## **1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA**

### **1.2.1. Problema General**

¿Qué relación existe entre los niveles de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y el logro de aprendizaje en el área de matemática en estudiantes del segundo grado de la Institución Educativa Secundaria 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca - 2020?



### **1.2.2. Problemas específicos**

- ¿Cuál es el nivel de algebrización que prevalece en la resolución de tareas estructurales de números racionales en los estudiantes del segundo grado de la Institución Educativa Secundaria 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca – 2020?
- ¿Cuál es el nivel de aprendizaje logrado en el área de matemática en estudiantes del segundo grado de la Institución Educativa Secundaria 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca – 2020?

## **1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN**

### **1.3.1. Hipótesis general**

Existe una relación positiva entre el nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y el logro de aprendizaje en el área de matemática en los estudiantes del segundo grado de la I.E.S. 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca – 2020.

### **1.3.2. Hipótesis específicas**

- El nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales es incipiente en los estudiantes del segundo grado de la IES 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca, 2020.
- El nivel de aprendizaje logrado en el área de matemática está en proceso en los estudiantes del segundo grado de la 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca, 2020.



#### 1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

Justificamos el presente trabajo de investigación considerando las implicancias teóricas, prácticas y metodológicas con los cuales pretendemos aportar al colectivo social educativo y la comunidad científica

En el orden teórico la investigación es relevante, porque se aplica como herramienta teórica el Enfoque Ontosemiótico del Razonamiento Algebraico Escolar (EOS) para identificar procesos algebraicos, los cuales son usados para elaborar un modelo de niveles de algebrización de las prácticas matemáticas, este modelo permite analizar la frontera entre el razonamiento aritmético y el razonamiento algebraico desarrollado en la práctica matemática por los estudiantes, también permite distinguir la caracterización de los niveles del razonamiento algebraico, distinguibles de un nivel inferior a niveles más avanzados (Godino et.al., 2014). Tales niveles se definirán teniendo en cuenta los tipos de representaciones usadas, los procesos de generalización implicados, y el cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática correspondiente.

Otro aspecto teórico que nos ha permitido conocer la presente investigación, es como se desarrolla cognitivamente el razonamiento algebraico, entendiendo al algebra no como una rama de la matemática que emplea números, letras y signos para poder hacer referencia a múltiples operaciones aritméticas; sino más bien, como una forma de pensar y actuar en matemáticas, caracterizada esencialmente por la intervención y emergencia de objetos intensivos de niveles progresivos de generalidad, ya que los procesos de algebrización no solamente se pueden aplicar a tareas propias de la aritmética, sino también a la medida, la geometría, el análisis de datos, etc. Por lo que, el álgebra es más que un instrumento de modelización y un lenguaje simbólico; es una



actitud a generalizar; por tanto, a simbolizar y operar con símbolos, que penetra todas sus ramas y las impulsa hacia nuevos niveles de creatividad matemática. (Socas, 2011).

Además, se considera a los números racionales en la resolución de tareas matemáticas, por la complejidad y gran capacidad de abstracción en el proceso de construcción del conocimiento en el ámbito escolar y porque en las prácticas preprofesionales se ha podido observar que existe un importante número de estudiantes con serias dificultades para razonar sobre ideas abstractas de este tema y como deben interpretar las fracciones en diferentes contextos (situaciones de medición, parte todo, cociente, razones y proporciones), además de utilizar la notación decimal para expresar fracciones y relacionar estas dos notaciones con la de porcentajes; con ello se deduce la importancia de la comprensión de la fracción y sus significados por parte de los estudiantes, para acceder al conjunto de los números racionales.

Desde el punto de vista práctico, los resultados de la presente investigación nos han permitido identificar el nivel de algebrización logrado por los estudiantes del segundo grado de educación secundaria. Es decir, si los estudiantes tienen básicamente niveles de generalidad, combinada con el uso de diversos registros de representación semiótica, sus transformaciones y conversiones, en el marco del enfoque ontosemiótico caracterizada por la presencia de diferentes tipos de configuraciones ontosemióticas (Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy, 2011) en las que intervienen prácticas, objetos y procesos que implican nuevos niveles de generalidad apoyado en representaciones simbólicas de los objetos correspondientes.

Asimismo, el reconocimiento de los niveles de algebrización ayuda a identificar y resolver posibles discontinuidades en los niveles de generalidad, representación,



cálculo y construcción de nuevos objetos algebraicos, los cuales dificultan la progresión del aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes.

Además, permite que los docentes puedan mejorar el razonamiento algebraico de los estudiantes, especialmente en el nivel de secundaria a través de una visión ampliada del álgebra que proponen diversas investigaciones y experiencias didácticas para transformar las tareas escolares de matemáticas hacia el logro de niveles progresivos de algebrización.

El estudio también ha permitido identificar el nivel de aprendizaje logrado en el área de matemática por los estudiantes de segundo grado de secundaria. Dado que el razonamiento o pensamiento algebraico debe de incluirse desde la enseñanza primaria (Cai & Knuth, 2011; Carpenter, Franke & Levi, 2003; Kaput, 2000), para que los estudiantes de educación secundaria no tengan dificultades al momento de transitar del razonamiento aritmético que se da en el nivel primario al razonamiento algebraico, así como también de eliminar su tardía y abrupta introducción en la escuela secundaria (Carpenter, 2003).

Asimismo, se ha logrado establecer el grado de relación que existe entre las dos variables de estudio; es decir, se visualiza cómo se relacionan estas dos variables, cómo se comporta una variable conociendo el comportamiento de otra variable relacionada, estableciendo su grado de correlación, pero sin pretender dar una explicación completa (de causa y efecto) al fenómeno investigado, sólo investiga grados de correlación; es decir, que dimensiona las variables.

Desde el punto de vista metodológico la presente investigación ha permitido aplicar la metodología científica como un proceso racional sistematizado, coherente con todos sus procedimientos, empleando una estrategia adecuada al tipo de investigación,



para generar nuevos conocimientos, los cuales a su vez producirán nuevas ideas e interrogantes, lo que permitirá en avance de la ciencia y la tecnología.

## **1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN**

### **1.5.1. Objetivo general**

Determinar si existe relación entre el nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y el logro de aprendizaje en el área de matemática en estudiantes del segundo grado de la I.E.S. 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca – 2020.

### **1.5.2. Objetivos específicos**

- Identificar el nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales en los estudiantes del segundo grado de la IES 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca-2020.
- Identificar el nivel de aprendizaje logrado en el área de matemática en estudiantes del segundo grado de la IES 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca-2020



## CAPÍTULO II

### REVISIÓN DE LITERATURA

#### 2.1 ANTECEDENTES

Dentro de la gama de investigaciones realizadas acerca de la temática sobre los niveles de algebrización y logro de aprendizaje de las matemáticas, no se encontraron antecedentes a nivel nacional e internacional que tienen relación con la presente investigación, los que damos a conocer a continuación:

García (2018) realizó un trabajo de investigación titulado. “Niveles de algebrización que alcanzan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de tareas estructurales de números racionales”. Estudio en el cual se concluye que predominan las generalizaciones para valores cercanos, ya que los estudiantes manifiestan procedimientos aritméticos. Luego de los resultados, el nivel de algebrización predominante en los estudiantes en cada tarea fue nivel 1, ya que realizan correctamente las propiedades y operaciones, además de realizar generalizaciones. Asimismo, podemos concluir que los estudiantes están listos para avanzar a otro nivel y que sí pueden resolver estos tipos de tarea. Esto se visualiza en las soluciones de los estudiantes que logran alcanzar rasgos del nivel 3 de algebrización, ya que utilizan variables y realizan tratamientos para encontrar un patrón general.

Trujillo, (2017). Realizó una investigación titulada “Configuración epistémica e identificación de niveles de algebrización en tareas estructurales de los textos oficiales del V ciclo de educación primaria”, luego del análisis de los libros de matemática 5, sobre operaciones y propiedades de los números naturales se concluye que existe ausencia de situaciones problemas de comparación, combinación, conjeturas y validación, siendo esta última con respecto a las tareas estructurales asociadas a las



fracciones y decimales. Cabe señalar que la ausencia de esta situación conlleva a que el estudiante no produzca y valide diferentes propiedades. Así mismo se realizó un análisis de dichas configuraciones cuyo principal hallazgo fue la ausencia de significados, tal es el caso de la combinación, la cual se caracteriza por tener situaciones problemas donde se hace referencia a la relación que existe entre una colección y dos sub colecciones disjuntas de la misma. Por otro lado, en una sola tarea se adjudicó un nivel de algebrización; esto debido a la característica de ser una ecuación de la forma  $ax + b = c$  y entender la división como operación inversa de la multiplicación. Por otro lado, en una visión global del libro Matemática 5 observamos que se consideran situaciones que en gran mayoría son de índole extramatemática esto es, situaciones relacionadas con el mundo real; sin embargo, no se establecen conexiones con otras áreas del conocimiento. Esto diverge de lo planteado en el currículo nacional que establece que las áreas deben propiciar la integración de diversos campos del conocimiento acorde con las etapas del desarrollo del estudiante, por ello, la presente investigación muestra que es necesario organizar las tareas estructurales de tal modo que permitan la integración de diferentes campos del conocimiento.

Martínez (2014), se dio la tarea de investigar sobre: “La caracterización del razonamiento algebraico elemental de estudiantes de primaria según niveles de algebrización”. La investigación aborda la correspondencia entre los niveles de algebrización propuestos por Godino, Aké, Gonzalo y Wilhelmi (2014), las tareas de naturaleza algebraica en los libros de texto, y los desempeños que exhiben los escolares de primaria cuando se enfrentan a dichas tareas, llegándose a las siguientes conclusiones: En cuanto a los niveles de algebrización, si bien permiten ubicar ciertos niveles teóricos de actividad matemática, parecen no adecuarse en todos los casos para describir la diversidad de tareas de naturaleza algebraica propuestas en los libros de



texto estudiados. Se observan algunas dualidades al clasificar cierto tipo de tareas en un nivel determinado de algebrización, lo que dificulta la identificación del mismo, a pesar de que las tareas naturaleza algebraica parecen claras; sin embargo, no es fácil ubicarlas en un nivel de algebrización, por ello es importante indicar que los niveles de algebrización pueden ser usados para identificar una “ruta algebraica” en el conjunto de tareas propuestas en los libros de texto. Entendemos como “ruta algebraica” una secuenciación de tareas cuya naturaleza algebraica es atribuida según los niveles, y que señalan el proceso gradual de introducción del razonamiento algebraico elemental a través de las tareas. En cuanto a los textos estudiados, se pudo observar que proponen tareas diversas de naturaleza algebraica. A partir de las Tablas 4 a la 8, en las cuales se puede apreciar la introducción paulatina y sistemática de tareas de naturaleza algebraica; sin embargo, se pudo notar que se introduce muy tempranamente aspectos simbólicos y variacionales, por lo que muchos niños no pudieron lidiar con tales ejercicios. En cuanto al desempeño de los niños con las tareas de naturaleza algebraica ha sobrepasado las expectativas del investigador, los niños respondieron a la mayoría de las tareas que se ubicaron en sus respectivos grados. Desde esta perspectiva los niños son, espontáneamente competentes al resolver ciertas tareas. Parece haber una correspondencia entre el nivel de algebrización en el que se encuentra el estudiante y el grado de escolaridad en el que está inscrito.

Godino, et. al., (2009). Describe y analiza los resultados de aplicar el cuestionario CDM-RAE a una muestra de estudiantes del Grado en Educación Primaria. El objetivo es la elaboración de un diagnóstico sobre la competencia algebraica elemental y su didáctica de los futuros maestros, que permita enmarcar un programa formativo para estos, y que, finalmente, garantice procesos de estudio efectivos en la Educación Primaria. La muestra estuvo compuesta por 597 estudiantes de las



Universidades de Granada, Jaén, Pública de Navarra, Santiago de Compostela en España y de Aveiro en Portugal. El análisis cuantitativo de los resultados permitió explorar las características psicométricas del instrumento (índices de dificultad, discriminación, fiabilidad y validez). La comparación entre las distintas universidades participantes revela el énfasis psicopedagógico del Plan de estudios vigente y muestra una formación disciplinar deficiente, que, en particular, no incluye el bloque de razonamiento algebraico. Los resultados muestran un bajo nivel de conocimientos, generalizado en las distintas componentes del conocimiento didáctico - matemático, con diferencias significativas entre las universidades. Se concluye que es necesario revisar los programas de formación y planificar el diseño de acciones formativas específicas sobre los contenidos algebraicos elementales, a fin de capacitar a los futuros maestros para que puedan promover en los alumnos de primaria el progresivo desarrollo del pensamiento algebraico.

Godino, et. al. (2014) En su artículo titulado: Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros”. Propone cuatro niveles de algebrización para orientar la acción del maestro de primaria que trate de impulsar la progresión del pensamiento matemático de los alumnos hacia niveles progresivos de generalización y eficacia representacional y operatoria. Así mismo da a conocer los rasgos característicos de los niveles de razonamiento algebraico elemental. También propone utilizar tres criterios para distinguir los niveles de razonamiento algebraico elemental (RAE): 1. la presencia de «objetos algebraicos» intensivos (esto es, entidades que tienen un carácter de generalidad o de indeterminación). 2. El tratamiento que se aplica a estos objetos (operaciones, transformaciones basadas en la aplicación de propiedades estructurales). 3. Tipos de lenguajes usados. Los niveles de algebrización que propone están relacionados con los dos aspectos que Kaput (2008)



identifica como característicos del álgebra y del razonamiento algebraico: por un lado, el álgebra como simbolización sistemática de generalizaciones de regularidades y restricciones; por otro, el álgebra como razonamiento guiado sintácticamente y acciones sobre generalizaciones expresadas en sistemas de símbolos convencionales.

Godino, et. al. (2014) Realiza un estudio donde analiza una experiencia formativa de maestros de Educación Primaria orientada al desarrollo de conocimientos para discriminar objetos algebraicos y distintos niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. La experiencia se realizó en un curso sobre “Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria” donde el razonamiento algebraico elemental fue un tema transversal respecto a los restantes bloques temáticos. La metodología de investigación fue la ingeniería didáctica, entendida en sentido generalizado y basada en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. Las actividades sobre razonamiento algebraico elemental fueron realizadas por 56 estudiantes. El estudio preliminar indica la pertinencia del contenido para la formación de maestros, mientras que los resultados sugieren que el reconocimiento de objetos algebraicos y la asignación de niveles de algebrización es una competencia difícil de lograr con los medios asignados en el proceso formativo. Este artículo es un resultado parcial de la tesis doctoral de Aké (2013); otra tesis doctoral centrada también en la formación de maestros en razonamiento algebraico es la de Castro (2011). El marco del enfoque ontosemiótico ha sido utilizado en otras investigaciones sobre álgebra que no se relacionan con la distinción de niveles de algebrización. Este es el caso de Montiel, Wilhelmi, Vidakovic y Elstak (2012) y de Sbitneva, Moreno, Rivera y García (2015).

Rojas y Vergel (2013) En su artículo denominado “Procesos de generalización y pensamiento algebraico”, aborda por una parte, algunas actividades relacionadas con



generalización de patrones figurales y/o numéricos, como recurso didáctico orientado a ubicar en los referentes teóricos elementos para el análisis de las producciones matemáticas de niños y jóvenes en torno a actividades; por otra parte, actividades orientadas a posibilitar y potenciar conexiones entre conceptos de la matemática escolar asociados a los pensamientos numérico, métrico y variacional.

Rivas (2021), quien realizó un estudio sobre los “Niveles de algebrización en las actividades propuestas para la adquisición del lenguaje algebraico en los libros de texto de 1° de secundaria EBR, Perú”, en sus conclusiones menciona que, el sistema educativo del país se encuentra ante una precariedad con respecto al desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes de educación secundaria, debido a que las tareas propuestas en el libro de texto de primero de secundaria distribuidas en las escuelas públicas del Perú, están vinculadas a un nivel incipiente y algunas actividades a un nivel intermedio de algebrización, siendo esta la causa del bajo nivel en el que se ubica el Perú frente a los resultados de la prueba PISA. Además, que se promueve una sola competencia del área de matemáticas, debido a que la mayoría de las actividades están vinculadas solo a la competencia resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

Carrillo et al. (2019) sobre los “Niveles de algebrización que alcanzan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de una tarea estructural de números racionales”, en el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS). Concluyen que, del análisis realizado los estudiantes desarrollan un nivel de algebrización 1, predominando las generalizaciones para valores cercanos a través de la aplicación de procedimientos aritméticos en sus operaciones y que, por otro lado, los argumentos utilizados por su muestra emplean las dualidades extensivos- intensivos y que la mayoría de ellos, a partir de este tipo de tareas, recién muestran argumentos para justificar sus soluciones.



Coz y Castillo (2019) en su trabajo de investigación “Desarrollo del pensamiento algebraico en alumnos del primer y segundo grado de educación secundaria de la Institución educativa particular Ingeniería de Huancayo”, concluyeron que el noventa por ciento que cursó el grado uno del nivel secundario está ubicado en el nivel cero de algebrización, según la propuesta de Juan Godino y Aké, aclarando que esto no significa que los estudiantes no dieron con la respuesta adecuada, sino que muchos de ellos no supieron justificar sus procedimientos de forma algebraica, resolviendo por otros métodos como el aritmético y a través de gráficos. Así mismo, de los estudiantes que cursaban el segundo año de educación secundaria, el ochentaicinco por ciento está en el nivel cero de algebrización, lo que les permite afirmar que estos estudiantes no resolvieron las actividades planteadas algebraicamente sino utilizando procedimientos aritméticos y gráficos, ya que en una cantidad considerable de estudiantes dieron con la respuesta correcta.

Belizario, (2017) sobre “Evaluación del conocimiento algebraico en docentes del área de matemática de educación secundaria de la ciudad de Puno” se ha llegado a la conclusión, que los docentes muestran un nivel regular de conocimiento algebraico, con una nota promedio de 15.31, con diferencias significativas entre los niveles de algebrización.

Bendezú, (2020) en su trabajo de investigación titulado: “Planificación curricular y logros de aprendizaje de las matemáticas en una institución educativa secundaria de Huancavelica”, en una de sus conclusiones menciona que el nivel de logro en matemáticas de los estudiantes del primero al quinto grado de educación secundaria es regular, ya que alcanzan una media de 12,09 en la escala vigesimal, lo que involucra que el 59,83% de los estudiantes se ubican en ese promedio, que de acuerdo al MINEDU (2014), estarían en el nivel de proceso de logro de aprendizaje del área de matemática.



## 2.2. MARCO TEÓRICO

### 2.2.1. Razonamiento algebraico

Para Godino y Font (2003) “el razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas, a medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones”.

Así mismo, Radford (2011) menciona que el pensamiento algebraico es un tipo de reflexión y acción cultural muy sofisticado, un modo de pensamiento que fue refinado sucesivamente a lo largo de siglos antes que alcanzara su forma actual. De igual modo, Kaput y Blanton (2002) lo interpreta de la siguiente manera:

“Por razonamiento algebraico, nos referimos al compromiso de los estudiantes en actos regulares de generalización acerca de los datos, las relaciones y las operaciones matemáticas, estableciendo sus generalizaciones a través de actos públicos de elaborar conjeturas y de argumentación, las cuales se expresan en formas cada vez crecientes de formalización”. (p.19).

Este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas concebida como la ciencia de los patrones y el orden, ya que es difícil encontrar un área de las matemáticas en la que formalizar y generalizar no sea central, por ello muchos investigadores en el campo de la educación matemática centran su atención en la identificación de los rasgos característicos para poder promover



el razonamiento algebraico, mencionando por ejemplo a Godino y Font (2003, p.8), algunas características del razonamiento algebraico para estos autores, son sencillas de adquirir por los niños, y son:

- Los patrones o regularidades existen y aparecen de manera natural en las matemáticas.
- Pueden ser reconocidos, ampliados, o generalizados.
- El mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes.
- Los patrones se encuentran en situaciones físicas, geométricas y numéricas.
- Podemos ser más eficaces al expresar las generalizaciones de patrones y relaciones usando símbolos.
- Las variables son símbolos que se ponen en lugar de los números o de un cierto rango de números.

Kieran (2007), apoyándose en propuestas de diversos autores, elabora un modelo que sintetiza las actividades del álgebra escolar en tres tipos: generacional, transformacional y global o de meta-nivel.

Las actividades de tipo generacional, implican la formación de expresiones y ecuaciones, las cuales considera como los objetos del álgebra. Incluye en esta categoría como ejemplos típicos, a) ecuaciones que contienen una incógnita que representan situaciones problema, b) expresiones de generalidad que surgen de patrones geométricos o secuencias numéricas, c) expresiones de reglas que gobiernan relaciones numéricas.

Las actividades de tipo transformacional (o actividades basadas en reglas), incluyen, por ejemplo, agrupar términos semejantes, factorizar,



desarrollar, sustituir una expresión por otra, sumar y multiplicar expresiones polinómicas, resolver ecuaciones e inecuaciones, simplificar expresiones, sustituir valores numéricos en expresiones, trabajar con ecuaciones y expresiones equivalentes etc. Aunque la mayor parte de estas actividades se interesan por los cambios en la forma simbólica de una expresión o ecuación que mantienen la equivalencia, esto no implica que se trate de actividades rutinarias ya que su justificación implica la aplicación de axiomas y propiedades de las estructuras correspondientes.

La tercera categoría de actividades propuesta por Kieran (2007) y denominada global/o de nivel meta, sugiere el uso de procesos matemáticos más generales. Son actividades para las que el álgebra se usa como una herramienta, pero que no son exclusivas del álgebra.

En concreto, se incluye en esta categoría la resolución de problemas, modelización, estudio de patrones generalizables, justificar y probar, formular predicciones y conjeturas, estudiar el cambio en situaciones funcionales, buscar relaciones o estructura etc. -"actividades que se pueden ciertamente realizar sin usar expresiones simbólico-literales algebraicas".

Parece que hay consenso en que uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico es su manera de abordar los procesos de generalización matemática, esto es, el estudio de situaciones en las que se pasa de considerar casos particulares de situaciones, conceptos, procedimientos etc., (objetos determinados) a las clases o tipos de tales objetos.



Kieran (1989), menciona que "para una caracterización significativa del razonamiento algebraico no es suficiente ver lo general en lo particular, se debe ser capaz de expresarlo algebraicamente" (p, 165). Esa expresión es una condición previa para la manipulación de las representaciones simbólicas que produce otras equivalentes más útiles para la resolución de los problemas. Sin embargo, una tendencia reciente entre los investigadores propone separar el simbolismo algebraico del pensamiento algebraico. "Esta consideración separada es impulsada por dos factores: (1) el reconocimiento de la posibilidad de manipulación simbólica sin sentido, y (2) la tendencia en la escuela elemental de introducir el 'álgebra temprana', esto es, focalizar la atención en la estructura más bien que en el cálculo".

Desde el punto de vista del enfoque ontosemiotico, se puede caracterizar en términos de los tipos de objetos (extensivo o particular e intensivo o general) y procesos que intervienen en la práctica matemática, los investigadores indican que estas van a desempeñar un rol de gran envergadura, siendo la generalización uno de los rasgos característicos del álgebra. Al respecto, Godino et al. (2014) consideran que una práctica matemática de naturaleza algebraica debe contener ciertos tipos de objetos algebraicos, siendo estos: estructuras, funciones y modelización.

Para el caso de nuestro trabajo de investigación, haremos hincapié en el objeto "Estructuras", que para Godino et al. (2014) están conformadas por: relación de equivalencia, propiedades y operaciones, ecuaciones e inecuaciones. De forma más específica, abordamos en el presente trabajo de investigación las



operaciones y propiedades de las estructuras numéricas de los números racionales las cuales denominaremos tareas estructurales.

### 2.2.2. Niveles de algebrización

El razonamiento algebraico es desarrollado a través de tareas matemáticas específicas cuyas soluciones conllevan prácticas matemáticas que ayudan a diferenciar los niveles de algebrización en función de objetos, significados y procesos que se requieren y surgen durante la solución de determinada tarea. Al respecto, Godino y Burgos (2017) realizan una revisión del desarrollo del razonamiento algebraico elemental (RAE) desde el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos (EOS), este enfoque se centra en la actividad del sujeto, de tal forma que una misma situación puede ser abordada según diferentes niveles de algebrización; es así, que el EOS propuesto por (Godino et al., 2012; Godino et al., 2014) prevé una evolución en distintos niveles de algebrización, teniendo en cuenta tres criterios básicos:

- La presencia de objetos algebraicos intensivos (esto es, entidades que tienen un carácter de generalidad o de indeterminación)
- Tipo de lenguajes usados para expresar los objetos algebraicos.
- El tratamiento que se aplica (operaciones, transformaciones basadas en la aplicación de propiedades estructurales).

La idea es hacer explícita la generalidad en el campo de las estructuras y la modelización de situaciones matemáticas al tiempo que se opera o calcula con dicha generalidad.



Godino et al., (2014) también afirma que, en el proceso de algebrización de los estudiantes en la actividad matemática escolar se encuentran diferentes niveles dependiendo de la manera en la que se resuelve una tarea, el sujeto puede ser clasificado en un nivel u otro. Estos niveles se enmarcan entre un nivel 0 de algebrización (ausencia de razonamiento algebraico) y un tercer nivel (actividad algebraica), distinguiendo dos niveles de algebrización primarios (protoalgebraicos). Los cuales se detallan a continuación:

**a) Ausencia de razonamiento algebraico (nivel 0).**

Este nivel está caracterizado por la intervención de objetos particulares expresados en un lenguaje natural, numérico, icónico, gestual; no se reconocen relaciones y propiedades de las operaciones; es decir, cuando se limita a realizar lo que pide el enunciado sin pensar (a prueba y error).

**Ejemplo 1:** “Suma y compara los resultados:”

$$24386 + 6035; 6035 + 24386$$

$$24386 + 6035 + 715; 6035 + 715 + 24386$$

En el ejemplo, hay dos operaciones que nos piden la misma suma, pero con los números cambiados de orden (propiedad conmutativa). Si el alumno se limita a realizar las operaciones pedidas y comprobar que los resultados son iguales, no se produce ningún razonamiento algebraico.

**Ejemplo 2.** “Si de cada 3 alumnos que van andando hay 1 que va en coche, de cada 4 alumnos en total (3+1) hay 1 que va andando (la cuarta parte);



por lo tanto, de cada 200 alumnos, 50 irían en coche (la cuarta parte) y de cada 12 alumnos, 3 irían en coche, por lo que  $50$  (la cuarta parte de  $200$ ) +  $3$  (la cuarta parte de  $12$ ) =  $53$  alumnos. La solución sería  $53$  alumnos irían en coche mientras que el triple de  $53$ , es decir,  $159$  irían andando”.

En este segundo ejemplo, se aprecia que se realizan únicamente cálculos con números particulares y no se pone en juego el uso de propiedades, por lo que no hay manifestación de algún objeto algebraico.

### **b) Nivel incipiente de algebrización (nivel 1)**

Este nivel se caracteriza por el reconocimiento de relaciones y propiedades de las operaciones expresadas en un lenguaje natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que expresen cantidades desconocidas; es decir, cuando piensa sobre lo que le pide el enunciado del ejercicio, reconoce y utiliza las propiedades matemáticas, pero no usa símbolos para referirse a un número variable. Ejemplo: (el mismo utilizado para el nivel anterior).

#### **Ejemplo 1.** “Suma y compara los resultados:”

$$24386 + 6035; 6035 + 24386$$

$$24386 + 6035 + 715; 6035 + 715 + 24386$$

Para este nivel de algebrización, si el sujeto piensa:  $24386+6035$  es  $30421$  (calculado en el primer apartado), entonces para calcular el resultado del apartado segundo,  $24386+6035+715$  es suficiente añadir  $715$  al resultado



30421 (del apartado anterior). Al obtener los resultados de esta manera, se habla de un nivel 1 de algebrización.

**Ejemplo 2.** “es esta situación se observa que hay dos medios de locomoción para ir a la escuela, andando y en coche. Se nos dice que por cada alumno que va en coche, hay 3 que van andando. En este punto podemos llegar a la siguiente proporción:

4 (niños en total)                     $\rightarrow$     3 van andando

212 (niños en la escuela)         $\rightarrow$     x van andando

De donde  $x = 159$  niños que van andando

Una vez que obtenemos el número que va andando a clase, solo queda restar al número total de alumnos lo que van andando, para que obtengamos los que acuden al colegio en coche

$$221 - 159 = 53 \text{ niños van en coche}$$

En esta solución se aprecia la identificación del concepto de proporción y su asociación con la regla de tres. Se denota con una letra el valor que se desconoce, aunque su valor es hallado aplicando un procedimiento básicamente aritmético.

### c) Nivel intermedio de algebrización (nivel 2)

Este nivel se caracteriza por el uso de un lenguaje alfanumérico a través del reconocimiento y planteamiento de ecuaciones de la forma  $Ax \pm$



$B = C$ . Es decir, cuando se utilizan variables expresadas con lenguaje simbólico - literal para referirse al valor que se quiere calcular.

**Ejemplo 1.** “Una caja mágica duplica el número de monedas que metas en ella, pero después de usarla cada vez se deben pagar 4 monedas. Juan probó e introdujo sus monedas en la caja y, efectivamente, se duplicaron. Pagó 4 monedas y volvió a intentarlo. De nuevo se duplicaron, pero al pagar las 4 monedas se quedó sin dinero. ¿Cuántas monedas tenía Juan al principio?”

La cantidad desconocida de monedas (incógnita) se representa simbólicamente mediante una ecuación:

$$2(2n - 4) - 4 = 0; 4n - 8 - 4 = 0; 4n - 12 = 0; n = 3$$

Si el sujeto la plantea y la realiza para resolver el problema, se afirma que se halla en el nivel 2 de algebrización.

**Ejemplo 2.**

$$212 = x + 3x$$

$$212 = 4x$$

$$x = 212 / 4$$

$x = 53$ ; entonces 53 alumnos van en coche y  $212 - 53 = 159$  alumnos van andando.

En la solución planteada se pone de manifiesto conceptos como ecuación e incógnita. Se trata de una ecuación de la forma  $Ax \pm B = C$ , en



la que de acuerdo con Puig y Rojano (2004) no se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia, por lo tanto, no se opera con el valor que se desconoce. En este caso se modeliza adecuadamente el problema traduciendo de un lenguaje verbal a un lenguaje alfanumérico.

**d) Nivel consolidado de algebrización (nivel 3).**

Este nivel se caracteriza por el empleo de un lenguaje alfanumérico; los símbolos se usan de manera analítica y se opera con las indeterminadas o variables planteando ecuaciones de las formas  $Ax \pm B = Cx + D$ . Es decir, cuando se generan objetos representados de manera simbólica-literal y se opera con ellos. Se realizan transformaciones conservando siempre la equivalencia.

**Ejemplo 1:** “Hay seis asientos entre sillas y taburetes. Las sillas tienen cuatro patas y los taburetes tienen tres. En total hay 20 patas. ¿Cuántas sillas y cuántos taburetes hay?”

Si es T el número de taburetes y S el número de sillas. El total entre ambos deben sumar 6, entonces,  $T + S = 6$ . Por otro lado, hay un total de 20 patas:  $3T + 4S = 20$ . Como de  $T + S = 6$ , se obtiene que  $T = 6 - S$ ; por tanto,  $3(6 - S) + 4S = 20$ , de donde  $18 + S = 20$ . Finalmente,  $S = 2$ . Si  $S = 2$ , entonces  $T = 4$ . Se deben tener 4 taburetes y 2 sillas para tener una total de 20 patas.



Al ser capaz de deducir una formula a partir del enunciado, utilizar dos incógnitas, una equivalencia y operar con ello, se afirma que el sujeto se encuentra en un nivel 3 de algebrización.

### **Ejemplo 2.**

X = alumnos en coche

Y = alumnos andando

$$x + y = 212$$

$$x + 3x = 212$$

$$y = 3x$$

$$4x = 212$$

$$x = 53$$

Por lo tanto  $y = 159$

En esta solución se reconocen dos incógnitas (x, y), una expresada en términos de otra; esta acción sugiere el reconocimiento de cierta dependencia entre las incógnitas, aunque una posterior sustitución en la expresión principal ( $x + y = 212$ ) reduce las 2 ecuaciones a una expresión de la forma  $Ax \pm B = C$  el planteamiento inicial supone un nivel 3 de algebrización.

#### **2.2.2.1 Reconocimiento de los niveles de algebrización**

Para el reconocimiento de los niveles de algebrización de las prácticas matemáticas se han aplicado las nociones de práctica, objeto y proceso del Enfoque Ontosemiótico (configuración ontosemiótica) que permiten hacer un análisis de la actividad matemática, buscando significados de estas nociones; sin



embargo, la noción de significado pragmático de un objeto, permite hacer un análisis más a detalle.

Por ejemplo, sobre el álgebra escolar se considera que no hay un único significado de referencia, sino diversos, dependiendo del contexto, marco institucional o de las comunidades de prácticas en que tal objeto desempeña su función. El problema esencial que se debe abordar es cómo articular los diversos significados en la progresión de los aprendizajes de los estudiantes, a medida que transitan por los diferentes niveles educativos y contextos institucionales, por ese motivo se desarrolla el presente trabajo de investigación, al querer relacionar los niveles de algebrización con los logros de aprendizaje.

Por otra parte, la definición de niveles de conocimiento y competencia en cualquier campo del saber, como puede ser la geometría o el álgebra, se enfrenta a un problema de difícil solución. El conocimiento tiene, en general, una estructura compleja cuya naturaleza es más bien arborescente que lineal; por tanto, una propuesta de niveles discretos de razonamiento algebraico, como ocurre también con los niveles de razonamiento geométrico de van Hiele, debe justificar por qué se proponen cierta cantidad de niveles, y no un número diferente y si es posible y útil, definir niveles intermedios o subniveles. Teniendo en cuenta que se trata de una modelización, y por tanto, una simplificación de una realidad compleja, como es el conocimiento en un campo específico, la definición de subniveles es una cuestión abierta a futuros desarrollos, como ocurre también con el modelo de los niveles de van Hiele. En todo caso, como todo modelo, es necesariamente una descripción simplificada.



Para el Enfoque Ontosemiótico, los niveles de razonamiento algebraico se han propuesto para modelizar el conocimiento institucional y personal que se pone en juego en las prácticas operativas, discursivas y normativas implicadas en la resolución de problemas matemáticos, esto es, es una descripción de la actividad matemática que se hace bajo la perspectiva de los objetos y procesos característicos del álgebra. Se aplican, por tanto, de manera local y en unas circunstancias temporales y contextuales determinadas.

Un mismo problema se puede abordar de diferentes maneras en un momento dado, y cada manera puede implicar niveles de algebrización diferentes. Por ello, se considera necesario y útil abordar el estudio de los niveles de algebrización desde una perspectiva más macroscópica, tanto desde el punto de vista institucional como personal.

Según la perspectiva ontosemiótica del razonamiento algebraico escolar, el punto de vista institucional se trataría de calificar como más o menos algebraicas determinadas formaciones epistemológicas que se despliegan ecológicamente a lo largo de un periodo histórico, o de diferentes etapas curriculares y según la perspectiva del TAD, las etapas del proceso de algebrización parece que tienen este carácter.

En el segundo caso, esto es, desde el punto de vista personal, el estudio de niveles de algebrización se puede contemplar desde la perspectiva de niveles de desarrollo cognitivo, esto es, como etapas en la vida del estudiante de matemáticas que se pueden calificar como de incremento progresivo más o menos consolidado de conocimiento y competencia algebraica.



Es necesario que los profesores tengan una visión ampliada del álgebra Cai y Knuth, (2011); Godino, et. al., (2012) a fin de que estén capacitados para transformar las tareas matemáticas escolares hacia el logro de niveles progresivos de algebrización y tal vez hacia el logro del aprendizaje matemático en general.

El modelo de niveles de algebrización de la actividad matemática propuesto por Godino et al. (2015) puede ayudar a que los docentes conozcan las características del razonamiento algebraico mediante el reconocimiento de los objetos y procesos matemáticos propios del mismo, lo cual supone que discriminen la actividad matemática propiamente aritmética de la algebraica, y dentro de la algebraica reconozcan distintos niveles de desarrollo del razonamiento algebraico.

### **2.2.3. Dificultades de aprendizaje del álgebra escolar**

Es importante conocer las dificultades de aprendizaje en el álgebra escolar, debido a que son una fuente de información sobre la forma en que los niños interpretan los problemas y cómo utilizan los diferentes procedimientos algebraicos, por ese motivo se realizaron diversas investigaciones al respecto, identificando al álgebra como una manera restrictiva como lenguaje simbólico, y orientada básicamente a la resolución de ecuaciones y estudio de los polinomios, que aparece de manera abrupta en el nivel secundario, sin continuidad con los temas de aritmética, medida y geometría tratados en primaria, es en esta aproximación, que según Carraher Y Schliemann (2007) se atribuyen las dificultades mostradas por los estudiantes sobre el álgebra, en gran medida, a las limitaciones de cómo se introduce la aritmética y de manera más



general la matemática elemental en los estudiantes, en esa misma línea Godino et. al., (2012), menciona que las dificultades que muestran los estudiantes de secundaria sobre el álgebra son, en gran medida, las limitaciones de cómo se introduce la aritmética y las matemáticas de formal general en el nivel primario.

Con respecto a este último tema, Carpenter, et. al. (2003) aseveran que una gran cantidad de estudiantes concibe la aritmética como una serie de operaciones y no piensan mucho sobre las propiedades de las estructuras numéricas. Por ende, al estudiar álgebra no comprenden que los recursos que utilizan para resolver ecuaciones y simplificar expresiones están basados en las propiedades de los mismos. Esto supone que la aritmética tiene una naturaleza propiamente algebraica, es decir, casos genéricos cuyo sistema puede ser estudiado de manera sucinta en la literatura algebraica.

Por otro lado, Carraher, et.al. (como se citó en Aké, 2013) plantean que las definiciones y los términos algebraicos deben ser estudiados como un conjunto de la matemática elemental. Para ellos, el sentido algebraico de las operaciones aritméticas no es obligatorio, sino un elemento indispensable, en tanto que los preceptos que guían la resolución de ecuaciones en álgebra se ajustan a las propiedades estructurales de los conjuntos numéricos.

Asimismo, Socas (2011) asegura que aquellos conocimientos que facilitan la transición del pensamiento numérico al algebraico y que tienen que ver con ideas acerca de los distintos tipos de números y de las relaciones numéricas, en particular las ideas de estructuras y procesos numéricos



constituyen la base para la Aritmética Generalizada, la cual involucra la formulación y manipulación de relaciones y propiedades numéricas.

Varios investigadores de la International Group de Investigación Psychology of Mathematics Education (PME) abordan principalmente tres temas que han surgido desde 1977 en la investigación del PME, siendo estos los siguientes:

- La transición de la aritmética al álgebra.
- El uso de herramientas tecnológicas y un enfoque en múltiples representaciones y generalización.
- La búsqueda de propuestas que mejoren la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en la Educación Secundaria.

Además, la misma autora desde 1982 hasta 1992, acentúa que las dificultades de los estudiantes de secundaria en el tránsito de la aritmética al álgebra se centran en la necesidad de manipular letras y dotar a esta actividad de significado. También afirma que la manipulación de las variables como valores particulares forma parte de una estructura de números naturales. Es en ese sentido que los estudiantes, requieren primero de dominar las habilidades de manipulación simbólica para luego dar paso a aprender acerca de la finalidad y el uso del álgebra, según dio a conocer (Aké, 2013).

Así mismo, diversas investigaciones (Wagner; Kieran, 1989; Bednarz; Kieran; Lee, 1996; Kieran, 2007; Filloy; Rojano; Puig, 2008) han evidenciado las dificultades de los niños en el tránsito desde la aritmética hasta el álgebra en la escuela secundaria. Estas investigaciones han descrito aproximaciones al



razonamiento algebraico que posteriormente permitieron aportar datos experimentales y justificaciones teóricas para apoyar la inclusión del álgebra desde la escuela primaria.

Kieran (1989, 1992) resalta que las dificultades de los estudiantes de secundaria en el tránsito de la aritmética al álgebra se centran en la necesidad de manipular letras y dotar a esta actividad de significado, lo que supone un cambio notable en las convenciones usadas en la aritmética y el álgebra.

En razón a la dificultad del álgebra, y a que las competencias algebraicas de carácter simbólico son el resultado de un proceso de maduración más general que se desarrolla a lo largo del tiempo, se justifica que su enseñanza se inicie desde la escuela primaria (Carpenter, et. al., 2003).

Conocer estas dificultades también es importante, porque permite avanzar en la clarificación de la naturaleza del razonamiento algebraico, el mismo que es necesario desde el punto de vista educativo, pues como afirma Radford (2000), necesitamos profundizar en nuestra propia comprensión de la naturaleza del pensamiento algebraico y la manera en que se relaciona con la generalización. La elaboración de un modelo comprensivo puede ayudar a articular coherentemente el currículo matemático escolar con los distintos niveles escolares, y facilitar el diseño de actividades instruccionales que favorezcan el surgimiento y consolidación progresivos del razonamiento algebraico y así evitar que el tránsito de la aritmética al álgebra cree surcos que imposibiliten el libre pase, mientras que en la aritmética se opera con números concretos; en álgebra, se opera con cantidades infinitas.



#### 2.2.4. Logros de aprendizaje

Los logros de aprendizaje, según Hernán y Villaroel (1998), son:

“el resultado de los aprendizajes alcanzados por los estudiantes al final de un periodo o año académico como consecuencia del proceso enseñanza – aprendizaje. Los logros del aprendizaje se verifican a través de indicadores de logro que son señales, pistas observables del desempeño humano, que dan cuenta externamente de lo que está sucediendo internamente (en el educando) y que exige una comprensión e interpretación pedagógica por parte del docente. Son como una ventana o un mirador a través del cual se pueden apreciar los pensamientos, sentimientos, logros y otras realidades humanas” (p. 8).

Según el Ministerio de Educación (2005) es el rendimiento académico alcanzado por los estudiantes como consecuencia de la intervención didáctica, el mismo que se evidencia por las calificaciones obtenidas al finalizar un periodo académico; en las rutas del aprendizaje (2018), la principal razón de ser del sistema educativo es que los estudiantes aprendan y que nadie se quede atrás. Por eso se propone como visión de futuro para la educación nacional, lograr aprendizajes que: Permitan desarrollar capacidades para actuar en el mundo afrontando toda clase de retos, en el plano personal, social, productivo, ciudadano y posibiliten seguir aprendiendo a lo largo de la vida, es decir, aprender a aprender con autonomía, eficacia y de manera permanente, lo que significa ir ampliando y progresando en el desarrollo de las competencias.



El Currículo Nacional define al logro de aprendizaje como pautas, conductas o acciones que deben manifestar los estudiantes mediante el desarrollo de conocimientos, habilidades, capacidades y actitudes, a través del proceso de enseñanza-aprendizaje, y están sintetizados en las competencias de área.

#### **2.2.4.1. Niveles de logro de aprendizaje**

Para evaluar el logro de aprendizaje se cuenta con una escala de calificación común a todas las modalidades y niveles de la Educación Básica, siendo esta la siguiente:

- AD, logro destacado, cuando el estudiante evidencia un nivel superior a lo esperado respecto a la competencia. Esto quiere decir que demuestra aprendizajes que van más allá del nivel esperado.
- A, logro esperado, cuando el estudiante evidencia el nivel esperado respecto a la competencia, demostrando manejo satisfactorio en todas las tareas propuestas y en el tiempo programado.
- B, en proceso, cuando el estudiante está próximo o cerca al nivel esperado respecto a la competencia, para lo cual requiere acompañamiento durante un tiempo razonable para lograrlo.
- C, en inicio, cuando el estudiante muestra un progreso mínimo en una competencia de acuerdo al nivel esperado. Evidencia con frecuencia dificultades en el desarrollo de las tareas, por lo que necesita mayor tiempo de acompañamiento e intervención del docente.

Esta escala de evaluación permite obtener los resultados de los aprendizajes de los estudiantes mediante un proceso permanente de comunicación y reflexión, este proceso se considera formativo, integral y



continuo, y busca identificar los avances, dificultades y logros de los estudiantes con el fin de brindarles el apoyo pedagógico que necesiten para mejorar.

Para el caso de la presente investigación, se busca clarificar los problemas de aprendizaje y de enseñanza relacionados con las nuevas tareas y competencias algebraicas y articular coherentemente el currículo matemático escolar con los distintos niveles escolares, así como facilitar el diseño de actividades instruccionales que favorezcan el surgimiento y consolidación progresivos del razonamiento algebraico, y por ende de la generalización (rasgo característico del razonamiento algebraico), la cual se aplica a todas las situaciones que se puedan modelizar en términos matemáticos, debido a que el lenguaje algebraico está presente en mayor o menor grado como herramienta de trabajo en todas las ramas de las matemáticas.

En ese sentido, es importante poder apreciar algunas características del álgebra, tales como: el uso de símbolos, habitualmente letras, que designan elementos variables o genéricos de conjuntos de números, u otras clases de objetos matemáticos; y la expresión de relaciones entre objetos mediante ecuaciones, fórmulas, funciones, y la aplicación de unas reglas sintácticas de transformación de las expresiones.

Sin embargo, estas características del álgebra son sólo su parte superficial. La parte esencial lo constituye la actividad que se hace con estos instrumentos de modelización matemática para poder construir progresivamente según niveles educativos, ya que la modelización algebraica es una cuestión de grado. Se tiene también, el cálculo literal, basado en las propiedades estructurales de los conjuntos numéricos, en el caso del presente trabajo, de los



números racionales, que se suelen iniciar normalmente en secundaria, pero que se pueden iniciar en el nivel primario e incluye los procesos de simbolización, expresión de relaciones, identificación de patrones, propios de los primeros niveles de algebrización.

#### **2.2.4.2. Evaluación del logro de aprendizaje**

El Currículo Nacional de la Educación Básica plantea para la evaluación de los aprendizajes el enfoque formativo; es decir, la evaluación es un proceso sistemático en el que se recoge y valora información relevante acerca del nivel de desarrollo de las competencias en cada estudiante, con el fin de contribuir oportunamente a mejorar su aprendizaje. (Minedu, 2016)

Una evaluación formativa enfocada en competencias busca, en diversos tramos del proceso valorar el desempeño de los estudiantes al resolver situaciones o problemas que signifiquen retos genuinos para ellos y que les permitan poner en juego, integrar y combinar diversas capacidades, identificar el nivel actual en el que se encuentran los estudiantes respecto de las competencias con el fin de ayudarlos a avanzar hacia niveles más altos, crear oportunidades continuas para que el estudiante demuestre hasta dónde es capaz de combinar de manera pertinente las diversas capacidades que integran una competencia, antes que verificar la adquisición aislada de contenidos o habilidades o distinguir entre los que aprueban y no aprueban. (Currículo Nacional et al, 2016, p.178).

#### **2.2.5. Números racionales**

Las matemáticas son el estudio de las estructuras y, en particular, el estudio de estructuras numéricas, entendiendo éstas como conjunto de entes



numéricos expresados simbólicamente, y dotados de unas operaciones y de unas relaciones. Las ideas matemáticas que sustentan estas estructuras numéricas pueden aparecer trabajando con modelos, mediante la manipulación de los objetos, la observación del resultado de sus acciones, y la comunicación de los resultados obtenidos.

De este modo, las ideas que aparecen, y que ya no se refieren a los propios objetos, se conforman como entidades abstractas sostenidas por un sistema simbólico con el que se formulan enunciados y demostraciones. Por tanto, y de acuerdo con Lesh (1997), el aprendizaje de las estructuras matemáticas no solamente consiste en la manipulación de símbolos, implica además interpretar situaciones matemáticamente; también implica cuantificar, visualizar o coordinar sistemas estructuralmente interesantes; y, por supuesto, implica utilizar un lenguaje especializado, símbolos, esquemas, gráficos y otros sistemas de representación.

En este trabajo de investigación hacemos hincapié al uso y gestión de sistemas de representación, debido a que desempeña un papel central en la comprensión de las ideas matemáticas, puesto que un análisis profundo de las características sintácticas y semánticas que subyacen en el sistema de representación utilizado, fortalece la comprensión de las mencionadas ideas matemáticas, para Castro, (1997) surgen las nociones de sistemas de representación como un modo de expresar y simbolizar las estructuras numéricas mediante signos, reglas y enunciados, y para el caso de los números racionales, los sistemas de representación más usuales son: la notación fraccionaria y la notación decimal.



El cuerpo ordenado de los números racionales, resultado de la simetrización para la ley producto del dominio de integridad de los números enteros, se presenta como un conocimiento explícito y bien delimitado, formalmente estructurado, coherente en su fundamentación lógica y necesario para dar solución a determinados problemas numéricos, geométricos y algebraicos (Feferman, 1989). Esta construcción formal sintetiza una historia de más de 7.000 años y un proceso dialéctico de ensayos, interpretaciones, errores, desarrollos conceptuales y formalizaciones que han llevado a la configuración actual del concepto matemático de Número Racional (Benoit et al., 1992). Queda así configurado un concepto sin duda complejo porque recoge y sintetiza todos los aspectos considerados a lo largo de su proceso constructivo, porque engloba a los diferentes constructos y a sus correspondientes sistemas de representación. Giménez, (1991); Streefland, (1991); Behr, et. al., (1993), y porque comprende una multiplicidad de fenómenos, problemas y situaciones de la vida real que se modelizan mediante este campo numérico (Freudenthal, 1983; Behr, Lesh, Post y Silver, 1983; Rico y otros, 1984).

Bajo esa premisa, la inclusión de los números racionales dentro del currículo de matemáticas de la Educación Básica Regular (EBR) queda plenamente justificada por su interés fenomenológico y conceptual Giménez, (1991); Sowder, (1995), que permite desarrollar una diversidad de competencias cognitivas en los sujetos en edad escolar (Streefland, 1991; Thompson, 1995).

#### **2.2.6. Competencias, capacidades y contenidos vinculados a la investigación**

Los estudiantes a lo largo de la Educación Básica Regular desarrollan competencias y capacidades, las cuales se definen como la facultad de toda



persona para actuar conscientemente sobre una realidad, sea para resolver un problema o cumplir un objetivo, haciendo uso flexible y creativo de los conocimientos, las habilidades, las destrezas, la información o las herramientas que tenga disponibles y considere pertinentes a la situación.

En las rutas de aprendizaje para el área de matemática, se menciona la organización de las competencias propuestas en la Educación Básica Regular sobre la base de cuatro situaciones o capacidades. La definición de estas cuatro situaciones se sostiene en la idea de que la matemática se ha desarrollado como un medio para describir, comprender e interpretar los fenómenos naturales y sociales que han motivado el desarrollo de determinados procedimientos y conceptos matemáticos propios de cada situación; estas capacidades, en esencia son procesos cognitivos; sin embargo, están relacionadas con contenidos, que son el cuerpo de conocimientos que sustenta la matemática, como lo evidencia la historia de la Matemática.

A continuación, mencionaremos solo las competencias, capacidades y contenidos que se relacionan directamente con el presente trabajo de investigación:

#### **2.2.6.1. Competencias y capacidades matemáticas**

- a) **Resuelve problemas de cantidad.** La competencia consiste en que el estudiante solucione problemas o plantee nuevos problemas que le demanden construir y comprender las nociones de cantidad, de número, de sistemas numéricos, sus operaciones y propiedades. Además, dotar de significado a estos conocimientos en la situación y usarlos para



representar o reproducir las relaciones entre sus datos y condiciones. Implica también discernir si la solución buscada requiere darse como una estimación o cálculo exacto, y para ello selecciona estrategias, procedimientos, unidades de medida y diversos recursos. El razonamiento lógico en esta competencia es usado cuando el estudiante hace comparaciones, explica a través de analogías, induce propiedades a partir de casos particulares o ejemplos, en el proceso de resolución del problema.

Esta competencia se desarrolla a través de las cuatro capacidades matemáticas las que se interrelacionan para manifestar formas de actuar y pensar en el estudiante. Siendo estas capacidades, las siguientes:

- Traduce cantidades a expresiones numéricas: es transformar las relaciones entre los datos y condiciones de un problema a una expresión numérica (modelo) que reproduzca las relaciones entre estos; esta expresión se comporta como un sistema compuesto por números, operaciones y sus propiedades. Es plantear problemas a partir de una situación o una expresión numérica dada. También implica evaluar si el resultado obtenido o la expresión numérica formulada (modelo), cumplen las condiciones iniciales del problema.
- Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones: es expresar la comprensión de los conceptos numéricos, las operaciones y propiedades, las unidades de medida, las relaciones que establece entre ellos; usando lenguaje numérico y diversas representaciones; así como leer sus representaciones e información con contenido numérico.



- Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo: es seleccionar, adaptar, combinar o crear una variedad de estrategias, procedimientos como el cálculo mental y escrito, la estimación, la aproximación y medición, comparar cantidades; y emplear diversos recursos.
- Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones: es elaborar afirmaciones sobre las posibles relaciones entre números naturales, enteros, racionales, reales, sus operaciones y propiedades; basado en comparaciones y experiencias en las que induce propiedades a partir de casos particulares; así como explicarlas con analogías, justificarlas, validarlas o refutarlas con ejemplos y contraejemplos.

**b) Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.** La competencia consiste en que el estudiante logre caracterizar equivalencias y generalizar regularidades y el cambio de una magnitud con respecto de otra, a través de reglas generales que le permitan encontrar valores desconocidos, determinar restricciones y hacer predicciones sobre el comportamiento de un fenómeno. Para ello plantea ecuaciones, inecuaciones y funciones, y usa estrategias, procedimientos y propiedades para resolverlas, graficarlas o manipular expresiones simbólicas. Así también razona de manera inductiva y deductiva, para determinar leyes generales mediante varios ejemplos, propiedades y contraejemplos.



Esta competencia se desarrolla a través de las cuatro capacidades matemáticas:

- Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas: significa transformar los datos, valores desconocidos, variables y relaciones de un problema a una expresión gráfica o algebraica (modelo) que generalice la interacción entre estos. Implica también evaluar el resultado o la expresión formulada con respecto a las condiciones de la situación; y formular preguntas o problemas a partir de una situación o una expresión.
- Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas: significa expresar su comprensión de la noción, concepto o propiedades de los patrones, funciones, ecuaciones e inecuaciones estableciendo relaciones entre estas; usando lenguaje algebraico y diversas representaciones. Así como interpretar información que presente contenido algebraico.
- Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales: es seleccionar, adaptar, combinar o crear, procedimientos, estrategias y algunas propiedades para simplificar o transformar ecuaciones, inecuaciones y expresiones simbólicas que le permitan resolver ecuaciones, determinar dominios y rangos, representar rectas, parábolas, y diversas funciones.
- Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia: significa elaborar afirmaciones sobre variables, reglas algebraicas y propiedades algebraicas, razonando de manera



inductiva para generalizar una regla y de manera deductiva probando y comprobando propiedades y nuevas relaciones.

**c) Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.** La

competencia Consiste en que el estudiante se oriente y describa la posición y el movimiento de objetos y de sí mismo en el espacio, visualizando, interpretando y relacionando las características de los objetos con formas geométricas bidimensionales y tridimensionales. Implica que realice mediciones directas o indirectas de la superficie, del perímetro, del volumen y de la capacidad de los objetos, y que logre construir representaciones de las formas geométricas para diseñar objetos, planos y maquetas, usando instrumentos, estrategias y procedimientos de construcción y medida. Además, describa trayectorias y rutas, usando sistemas de referencia y lenguaje geométrico. Esta competencia implica la combinación de las siguientes capacidades:

- **Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones:** es construir un modelo que reproduzca las características de los objetos, su localización y movimiento, mediante formas geométricas, sus elementos y propiedades; la ubicación y transformaciones en el plano. Es también evaluar si el modelo cumple con las condiciones dadas en el problema.
- **Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas:** es comunicar su comprensión de las propiedades de las formas geométricas, sus transformaciones y la ubicación en un



sistema de referencia; es también establecer relaciones entre estas formas, usando lenguaje geométrico y representaciones gráficas o simbólicas.

- Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio: es seleccionar, adaptar, combinar o crear, una variedad de estrategias, procedimientos y recursos para construir formas geométricas, trazar rutas, medir o estimar distancias y superficies, y transformar las formas bidimensionales y tridimensionales.
- Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas: es elaborar afirmaciones sobre las posibles relaciones entre los elementos y las propiedades de las formas geométricas a partir de su exploración o visualización. Asimismo, justificarlas, validarlas o refutarlas, basado en su experiencia, ejemplos o contraejemplos, y conocimientos sobre propiedades geométricas; usando el razonamiento inductivo o deductivo.

#### **2.2.6.2. Contenidos**

Los contenidos abordados en el presente trabajo de investigación, según las tareas propuestas, y que será necesario como conocimiento previo de los estudiantes para el desarrollo de dichas tareas son:

- Fracciones (Definición, clasificación, operaciones, propiedades, representaciones).
- Planteo de ecuaciones (Simbolización, ecuaciones, operaciones).
- Razonamiento inductivo (Problemas de regularidad).



- Áreas cuadrangulares (Tema de perímetros y áreas de regiones cuadrangulares).

### 2.3. MARCO CONCEPTUAL

- a) Algebrización.** Consiste esencialmente en una atribución de carácter algebraico a tareas matemáticas que originalmente tenían una intencionalidad numérica o geométrica. (blanton y kaput, 2005)
- b) Pensamiento algebraico.** El pensamiento algebraico es visto como una habilidad para transitar del análisis del contexto a la estructura. Destreza que se aprecia cuando el estudiante logra “identificar propiedades generales que son instanciadas en situaciones particulares como relaciones entre los elementos” (mason et.al., 2009)
- c) Razonamiento algebraico.** El razonamiento algebraico implica identificar patrones y regularidades, codificarlos, generalizarlos y formalizarlos en cualquier contexto, sea este matemático o no. A medida que se avanza en estas habilidades, se refina paralelamente el uso del lenguaje y del simbolismo que representa y permite comunicar el pensamiento algebraico, y de manera espontánea y llena de significado, se da lugar al uso de las variables, las ecuaciones y las funciones. (martínez, 2014)
- d) Niveles de algebrización.** Para definir los niveles o grados de algebrización se describen características de las prácticas realizadas para resolver tareas matemáticas, enmarcados entre un nivel cero de algebrización (ausencia de razonamiento algebraico) y un tercer nivel en el que la actividad matemática se puede considerar como propiamente algebraica. Los criterios básicos para definir los niveles de algebrización son: generalización, unitarización, formalización y ostensión y transformación. (godino, et.al., 2014)



- e) **Aprendizaje.** Se denomina aprendizaje al proceso de adquisición de conocimientos, habilidades, valores y actitudes, posibilitado mediante el estudio, la enseñanza o la experiencia. Dicho proceso puede ser entendido a partir de diversas posturas, lo que implica que existen diferentes teorías vinculadas al hecho de aprender. La psicología conductista, por ejemplo, describe el aprendizaje de acuerdo a los cambios que pueden observarse en la conducta de un sujeto. (vidal y fernández, 2015)
- f) **Logro de aprendizaje.** Es el resultado de los aprendizajes alcanzados por los estudiantes al final de un periodo o año académico como consecuencia del proceso enseñanza – aprendizaje. Los logros del aprendizaje se verifican a través de indicadores de logro que son señales, pistas observables del desempeño humano, que dan cuenta externamente de lo que está sucediendo internamente (en el educando) y que exige una comprensión e interpretación pedagógica por parte del docente. Son como una ventana o un mirador a través del cual se pueden apreciar los pensamientos, sentimientos, logros y otras realidades humanas (Ministerio de Educación, 2011).

## CAPÍTULO III

### MATERIALES Y MÉTODOS

#### 3.1 UBICACIÓN GEOGRÁFICA DEL ESTUDIO

La investigación se realizó en la ciudad de Juliaca, provincia San Román, ubicada en la jurisdicción de la Región Puno, se localiza a 15° 29' 27" de latitud sur y 70° 07' 37" de longitud oeste, está situada a 3824 m.s.n.m. en la meseta del Collao, al noreste del Lago Titicaca Los datos se obtendrán de los estudiantes del segundo grado de educación secundaria matriculados y con asistencia regular a la institución educativa secundaria 91 "José Ignacio Miranda".

#### 3.2 POBLACIÓN Y MUESTRA DEL ESTUDIO

##### 3.2.1. Población

La población de estudio, según Hernández et. al. (2014): "Es el conjunto de todos los casos que concuerdan con una serie de especificaciones", sobre el cual se pretende generalizar los resultados. En atribución a esta definición, la población de estudio está conformada por todos los estudiantes de segundo grado de la Institución Educativa Secundaria 91 "José Ignacio Miranda" de la ciudad de Juliaca, tal como se muestra en la Tabla 1.

**Tabla 1.**

*Estudiantes del segundo grado de la I.E.S. 91 "José Ignacio Miranda" de la ciudad de Juliaca, 2020.*

ESTRATOS	POBLACIÓN
SEGUNDO "A"	30
SEGUNDO "B"	30
SEGUNDO "C"	30
SEGUNDO "D"	30
<b>TOTAL</b>	<b>120</b>

Fuente. Área de gestión institucional estadística. UGEL San Román.



### 3.2.2. MUESTRA

Según Hernández, et al., (2010). “La muestra es un subgrupo de la población de interés sobre el cual se recolectarán datos, y que tiene que definirse y delimitarse de antemano con precisión, además de que debe ser representativo de la población”

En tal sentido para que la muestra sea representativa, el tipo de muestreo elegido es el probabilístico estratificado, puesto que la elección de los elementos no depende solo de la probabilidad; sino también, fueron escogidos en relación a estratos o categorías, Fidias, (2006) pues no bastó que cada uno de los elementos muestrales tengan la misma probabilidad de ser elegidos; sino, además fue necesario estratificar la muestra en relación a secciones, para luego hacer la escogencia al azar en cada estrato.

Es así que el número de sujetos de la muestra de estudio asciende a un total de 108 estudiantes, tal como se muestra en el procedimiento y tabla 2.

#### **Tamaño de la muestra:**

$$n = (Z^2 \cdot p \cdot q \cdot N) / (N \cdot E^2 + Z^2 \cdot p \cdot q)$$

#### **Donde:**

n = Tamaño de la muestra

Z = Nivel de confianza

p = Variable positiva

q = Variable negativa

E = Precisión o error



N = Tamaño de población

**Datos:**

$$Z = 95\% \Rightarrow Z = 1.96$$

$$p = 0.5$$

$$q = 0.5$$

$$E = 3\% \Rightarrow 0.03$$

$$N = 75$$

**Reemplazando en la fórmula:**

$$n = \frac{1.96^2(0.5)(0.5)(120)}{(120)0.03^2 + 1.96^2(0.5)(0.5)}$$

$$n = \frac{115.25}{1.0684} = 107.87 = 108$$

**Muestra por estratos:**

$$n = \frac{n_1}{N} * n$$

**Tabla 2.**

*Muestra de estudio de los estudiantes del segundo grado de la I.E.S. 91 “José Ignacio Miranda” de la ciudad de Juliaca, 2020.*

ESTRATOS	POBLACIÓN	MUESTRA POR ESTRATOS
SEGUNDO A	30	27
SEGUNDO B	30	27
SEGUNDO C	30	27
SEGUNDO D	30	27
TOTAL	120	108

Fuente: Elaboración propia



### **3.3 ENFOQUE DE INVESTIGACIÓN**

La presente investigación corresponde al enfoque cuantitativo, porque utiliza la recolección y el análisis de datos para probar la hipótesis, con base en la medición numérica y el análisis estadístico, para establecer patrones de comportamiento y probar teorías. (Hernández, 2014).

### **3.4 TIPO DE INVESTIGACIÓN**

En el ámbito de la investigación, encontramos una gama de clasificaciones de tipos de investigación, para el presente trabajo tendremos en cuenta lo establecido por Landeau, (2007) quien refiere que de acuerdo a los propósitos que persigue es básica, porque se realiza para obtener nuevos conocimientos y nuevos campos de investigación, sin un fin práctico específico e inmediato. Según su carácter, es correlacional, pues tiene la finalidad de conocer la relación que existe entre dos variables. Según su naturaleza es cuantitativa, pues se centra fundamentalmente en los aspectos observables y susceptibles de cuantificación de los fenómenos, utiliza la metodología empírica –analítico y se sirve de pruebas estadísticas para el análisis de datos. Según su alcance temporal es transversal o seccional porque el estudio se realiza en un único momento.

### **3.5 NIVEL DE INVESTIGACIÓN**

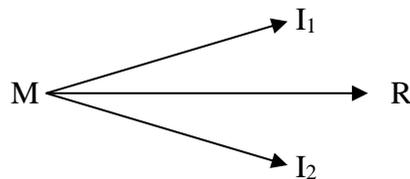
El nivel de investigación por la naturaleza del problema corresponde al descriptivo, porque describe un fenómeno social en una circunstancia temporal y geográfica determinada, siendo su finalidad describir y/o estimar parámetros como frecuencias o porcentajes.

### 3.6 DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

El termino diseño, según Hernández, et al., (2010) “se refiere al plan o estrategia concebida para obtener la información que se desea”. Sánchez y Reyes, (1998), al respecto señalan que un diseño de investigación puede ser definido como una estructura u organización esquematizada que adopta el investigador para relacionar y controlar las variables de estudio.

En base a lo expuesto el diseño de la investigación que se considera para el presente estudio es el Diseño Transeccional o Transversal Correlacional - No Causal. Este tipo de diseño se limita a establecer relaciones entre las variables sin precisar sentido de causalidad o pretender analizar relaciones causales; por lo cual, se fundamenta en planteamientos e hipótesis correlacionales. Siendo el diagrama o esquema de este diseño el siguiente:

#### Notación funcional



#### *Donde:*

M = Muestra

I<sub>1</sub> = Información de la variable gestión de los procesos pedagógicos

I<sub>2</sub> = Información de la variable desempeño docente

R = Grado de relación existente entre las dos variables de estudio

(Sánchez, 1998).

### 3.7 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

En la presente investigación, la técnica usada para medir la variable nivel de algebrización fue la encuesta; por lo tanto, el instrumento básico para esta técnica es el cuestionario que podemos definir como el “documento que recoge de forma organizada los indicadores de las variables implicadas en el objetivo de la encuesta” (Padilla, et. al., 1998).

El cuestionario usado para la presente investigación es un instrumento adaptado por García (2017) y propuesta por Godino, et. al, (2007); Godino, (2012), sobre la caracterización de los niveles de algebrización basado en el enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática. El cual fue validado y probado en estudiantes de secundaria.

El instrumento sobre la caracterización de los niveles de algebrización, aplica cuatro tareas estructurales de números racionales a estudiantes de segundo grado de secundaria, dichas tareas permiten realizar conjeturas, validaciones y encontrar regularidades que requieran realizar generalizaciones y así promover un nivel de algebrización mayor, lo que a su vez permitirá determinar la presencia o ausencia de ciertos rasgos o características de razonamiento algebraico, de acuerdo a los objetivos de cada tarea:

- **Objetivo de la tarea 1:** La tarea presentada tiene como finalidad que el estudiante realice, en un primer momento, casos particulares con procedimientos aritméticos, para que a partir de estos resultados realice conjeturas y generalice considerando valores cercanos. Asimismo, que justifiquen y validen los valores que satisfacen la expresión que está denotada con variables y así argumentando su respuesta.



- **Objetivo de la tarea 2:** La tarea presentada tiene como finalidad que el estudiante reconozca el contexto de medida induciendo con casos particulares al momento de completar la tabla. También se requiere que argumenten sus procedimientos, así como el cálculo de área de un rectángulo y el desarrollo adecuado en las operaciones con números racionales. Finalmente, se espera que pueda encontrar una solución para cualquier caso, para esto será necesario representar con variables.
- **Objetivo de la tarea 3:** La tarea presentada tiene como finalidad que el estudiante resuelva, en un primer momento, casos particulares para que reconozca a la suma de números impares consecutivos con procedimientos aritméticos, para que, a partir de estos resultados, realice conjeturas y generalice para valores lejanos, es decir, que el estudiante sea flexible en su solución para buscar una estrategia que le ayude a generalizar encontrando una regularidad que se obtiene para cualquier par de sumandos consecutivos (impares) en sus respuestas y denote con variables para un término general (como el doble del término que se encuentra entre ambos sumandos).
- **Objetivo de la tarea 4:** La tarea presentada tiene como finalidad que el estudiante realice conjeturas y valide su resultado a través de generalizaciones. Asimismo, que justifiquen en sus argumentos de su respuesta.

La técnica usada para medir la variable nivel de logro de aprendizaje en el área de matemática fue el análisis documental, que sirvió para obtener información del registro auxiliar del docente que es un instrumento, en el cual se registran los niveles de desempeño de los estudiantes.



### 3.8. TRATAMIENTO ESTADÍSTICO DE LOS DATOS

#### 3.8.1. Hipótesis estadística

**Hipótesis nula (Ho):** No existe relación entre el nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y el logro de aprendizaje en el área de matemática en los estudiantes del segundo grado de la I.E.S. 91 “José Ignacio Miranda” de la ciudad de Juliaca – 2020.

**Hipótesis alterna (Ha):** Existe relación entre el nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y el logro de aprendizaje en el área de matemática en los estudiantes del segundo grado de la I.E.S. 91 “José Ignacio Miranda” de la ciudad de Juliaca – 2020.

#### a) Condición para la toma de decisión

Se acepta la hipótesis nula (Ho), si se obtiene una significancia mayor a 0,05.

Se acepta la hipótesis alterna (Ha), si se obtiene una significancia menor a 0,05.

#### b) Estadística de prueba

Para la prueba de hipótesis se hará uso de la fórmula de coeficiente de correlación de Rho de Spearman, de acuerdo a la prueba de normalidad, el cual nos permitió determinar que los datos a contrastar son no paramétricos.

#### c) Regla de decisión

Para la verificación de la correlación entre las variables se establece las siguientes relaciones.

- (+, -) Correlación nula o inexistente  $0.00 \leq r \leq 0.00$
- (+, -) Correlación positiva o negativa muy baja  $0.01 \leq r \leq 0.20$
- (+, -) Correlación positiva o negativa baja  $0.21 \leq r \leq 0.40$



- (+, -) Correlación positiva o negativa moderada  $0.41 \leq r \leq 0.60$
- (+, -) Correlación positiva o negativa alta  $0.61 \leq r \leq 0.80$
- (+, -) Correlación positiva o negativa muy alta  $0.81 \leq r \leq 0.99$
- (+, -) Correlación positiva o negativa perfecta  $1.00 \leq r \leq 1.00$



## CAPÍTULO IV

### RESULTADOS Y DISCUSIÓN

#### 4.1 RESULTADOS

En este capítulo se presenta el análisis descriptivo de los resultados obtenidos de la variable nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales, mediante la aplicación del cuestionario y los resultados del análisis descriptivo de la variable logro de aprendizaje en el área de matemática obtenido de la ficha de análisis documental, datos que han sido organizados en tablas y figuras para su correspondiente interpretación y discusión. También se presenta el análisis inferencial de la investigación, el cual nos permitió determinar que los datos a contrastar fueron no paramétricos, por lo cual se utilizó la correlación de Spearman para conocer el grado de correlación entre las variables de estudio.

##### **4.1.1 Análisis descriptivo del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales.**

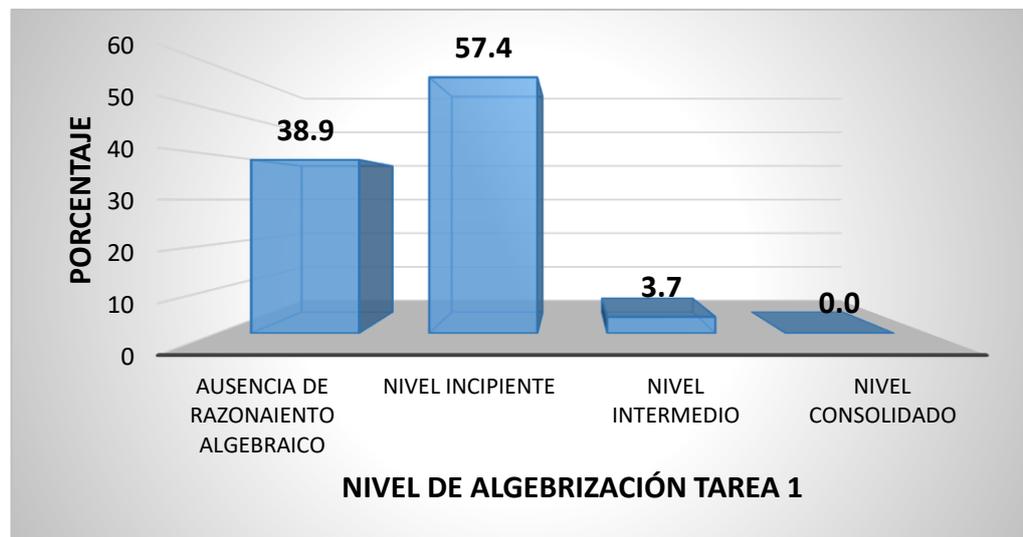
Para identificar el nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales se realiza el análisis procedimental de las cuatro tareas que fueron planteadas a los estudiantes del segundo grado de la IES 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca-2020, el resultado de este análisis permitió concretar el primer objetivo específico, a través de tablas y gráficos estadísticos, desglosados por cada tarea propuesta en el cuestionario para determinar los niveles de algebrización (Anexo 01) , los mismos que se presentan a continuación:

**Tabla 3.**

*Análisis del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales (Tarea 1)*

	FRECUENCIA	PORCENTAJE	PORCENTAJE VÁLIDO	PORCENTAJE ACUMULADO
Ausencia de Razonamiento algebraico	42	38,9	38,9	38,9
<b>Válido</b> Nivel incipiente	62	57,4	57,4	96,3
Nivel intermedio	4	3,7	3,7	100,0
Nivel consolidado	0	0,0	0,0	100,0
<b>Total</b>	108	100,0	100,0	

**Fuente:** Cuestionario de caracterización de los niveles de algebrización, propuesta por Godino (2012).



**Figura 1.** Resultados del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales (tarea 1)

## INTERPRETACIÓN

En la tabla 3 y figura 1, se observa la distribución de frecuencias y porcentajes del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales (tarea 1), donde se aprecia que un 57.4% de los estudiantes de segundo grado se encuentran en el “nivel incipiente” de algebrización, el 38.9% de los estudiantes muestran “ausencia de razonamiento algebraico” y en



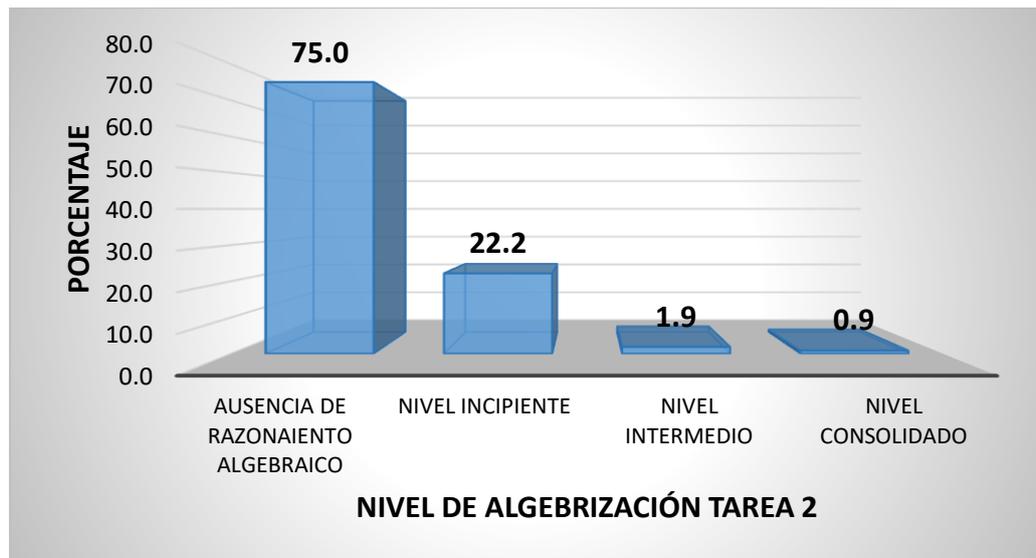
un mínimo porcentaje de 3.7% estudiantes están en un “nivel intermedio” de algebrización y ningún estudiante muestra un “nivel consolidado” de la algebrización. El objetivo de esta tarea consiste en realizar casos particulares con procedimientos aritméticos, para que a partir de estos resultados se realice conjeturas y generalice considerando valores cercanos. Asimismo, que justifiquen y validen los valores que satisfacen la expresión que está denotada con variables y así argumentando su respuesta (García, 2018); sin embargo, en el desarrollo de la Tarea 1 la mayoría de estudiantes realizó operaciones de forma correcta con números naturales y enteros y considero varios casos particulares, justificando sus respuestas; pero no utilizan variables ni realizan generalizaciones; por lo que la gran mayoría se encuentra entre el nivel 1 “Nivel incipiente” y el nivel 0 “ausencia de razonamiento algebraico”.

**Tabla 4.**

*Análisis del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales (Tarea 2)*

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaj e válido	Porcentaje acumulado
<b>Válido</b>	Ausencia de Razonamiento algebraico	81	75,0	75,0
	Nivel incipiente	24	22,2	97,2
	Nivel intermedio	2	1,9	99,1
	Nivel consolidado	1	,9	100,0
	Total	108	100,0	100,0

**Fuente:** Cuestionario de caracterización de los niveles de algebrización, propuesta por Godino (2012).



*Figura 2. Resultados del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales (tarea 2)*

## INTERPRETACIÓN

En la tabla 4 y figura 2, se observa la distribución de frecuencias y porcentajes del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales (tarea 2), donde se aprecia que el 75.0% de los estudiantes de segundo grado muestran “ausencia de razonamiento algebraico”, el 22.2% de los estudiantes muestran un “nivel incipiente” de algebrización y en un mínimo porcentaje de 1.9% y 0.9% de los estudiantes están en un “nivel intermedio” y “nivel consolidado” de la algebrización, respectivamente. El objetivo de esta tarea consiste en que el estudiante reconozca el contexto de medida induciendo con casos particulares al momento de completar la tabla. También se requiere que argumente sus procedimientos, así como el cálculo de área de un rectángulo y el desarrollo adecuado en las operaciones con números racionales, para que finalmente pueda encontrar una solución para cualquier caso, representándolo necesariamente con variables. (García, 2018); sin embargo, muchos estudiantes no lograron realizar esta tarea y otros solo realizaron algunos casos particulares

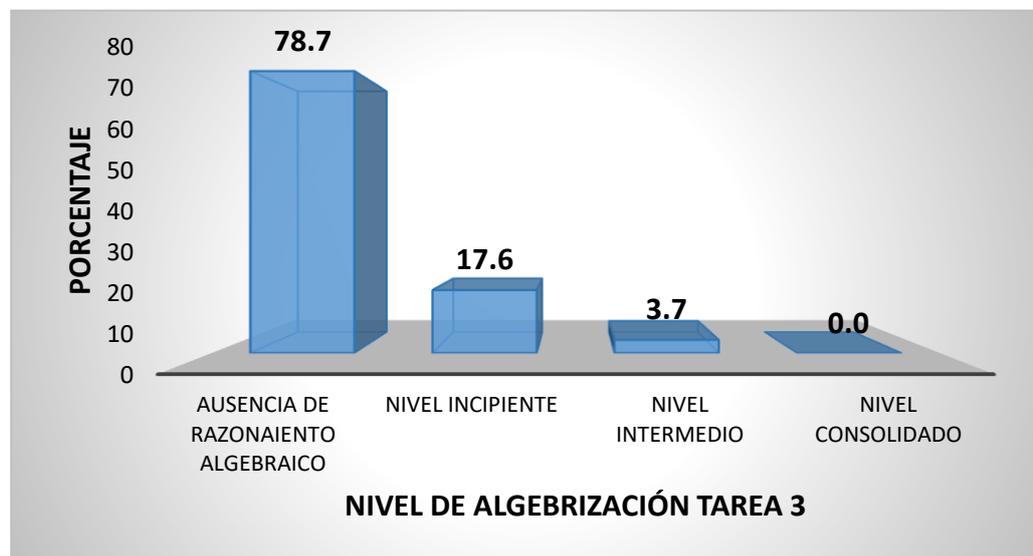
utilizando operaciones con números naturales, por lo que la mayoría de estudiantes de segundo grado presenta rasgos de nivel 0 “ausencia de razonamiento algebraico”.

**Tabla 5.**

*Análisis del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales (Tarea 3)*

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje e válido	Porcentaje acumulado
<b>Válido</b>	Ausencia de Razonamiento algebraico	85	78,7	78,7
	Nivel incipiente	19	17,6	96,3
	Nivel intermedio	4	3,7	100,0
<b>Total</b>	<b>108</b>	<b>100,0</b>	<b>100,0</b>	

**Fuente:** Cuestionario de caracterización de los niveles de algebrización, propuesta por Godino (2012).



**Figura 3.** Resultados del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales (tarea 3)



## INTERPRETACIÓN

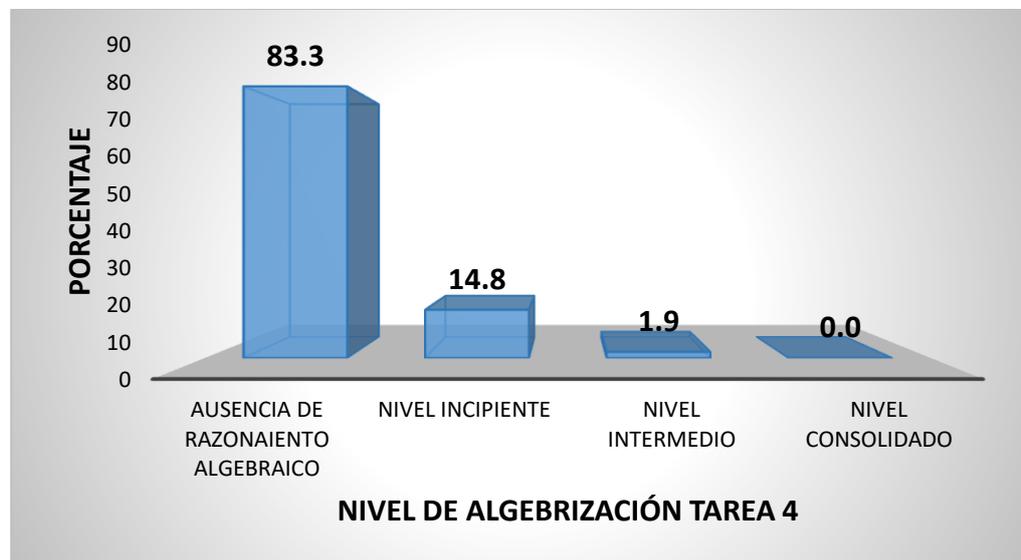
En la tabla 5 y figura 3, se observa la distribución de frecuencias y porcentajes del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales (tarea 3), donde se aprecia que el 78.7% de los estudiantes de segundo grado muestran “ausencia de razonamiento algebraico”, el 17.6% de los estudiantes muestran un “nivel incipiente” de algebrización y en un mínimo porcentaje de 3.7% estudiantes están en un “nivel intermedio” de algebrización y ningún estudiante muestra un “nivel consolidado” de la algebrización. El objetivo de esta tarea es que el estudiante resuelva casos particulares para que reconozca a la suma de números impares consecutivos con procedimientos aritméticos, a partir de estos resultados realice conjeturas y generalice para valores lejanos, es decir, que el estudiante sea flexible en su solución para buscar una estrategia que le ayude a generalizar encontrando una regularidad que se obtiene para cualquier par de sumandos consecutivos (impares) en sus respuestas y denote con variables para un término general (como el doble del término que se encuentra entre ambos sumandos). (García, 2018, p.56). Sin embargo, la mayoría de estudiantes, solo realizó operaciones correctamente con números naturales sin reconocer la relación con los números impares consecutivos, por lo que la mayoría de estudiantes presenta rasgos de nivel 0 “ausencia de razonamiento algebraico”.

**Tabla 6.**

*Análisis del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales (Tarea 4)*

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje e válido	Porcentaje acumulado
<b>Válido</b>	Ausencia de Razonamiento algebraico	90	83,3	83,3
	Nivel incipiente	16	14,8	98,1
	Nivel intermedio	2	1,9	100,0
	<b>Total</b>	<b>108</b>	<b>100,0</b>	<b>100,0</b>

**Fuente:** Cuestionario de caracterización de los niveles de algebrización, propuesta por Godino (2012).



**Figura 4.** Resultados del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales (tarea 4)

## INTERPRETACIÓN

En la tabla 6 y figura 4, se observa la distribución de frecuencias y porcentajes del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales (tarea 4), donde se aprecia que el 83.3% de los estudiantes de segundo grado muestran “ausencia de razonamiento algebraico”, el 14.8% de los estudiantes muestran un “nivel incipiente” de algebrización y en un mínimo porcentaje de 1.9% de estudiantes están en un “nivel intermedio” de



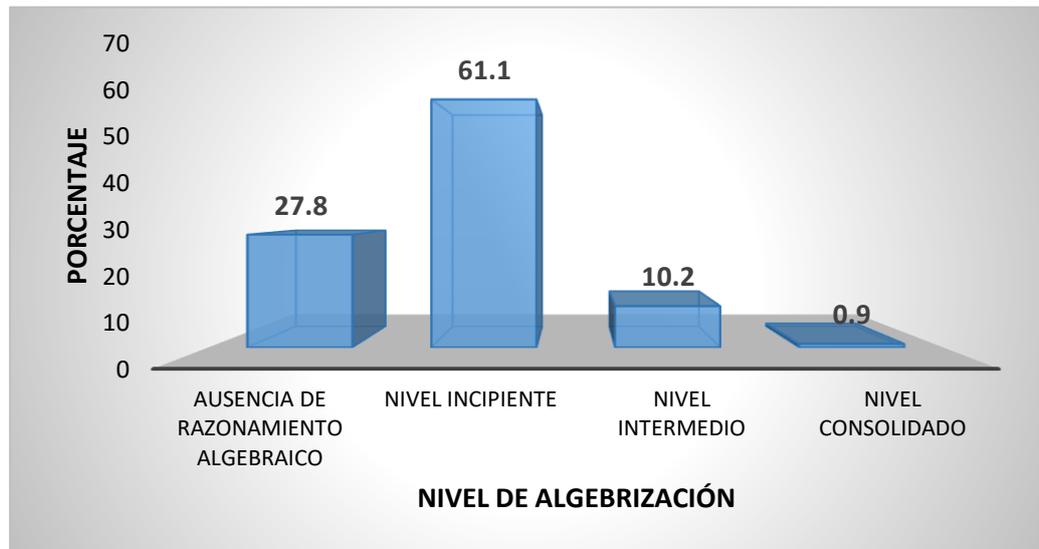
algebrización y ningún estudiante muestra un “nivel consolidado” de la algebrización. Esta tarea tiene como finalidad que el estudiante realice conjeturas, valide su resultado a través de generalizaciones y justifique en sus argumentos su respuesta (García, 2017, p.56); sin embargo, los estudiantes representaron en diagramas sus resoluciones, realizando casos particulares pero sin encontrar una regularidad; así mismo, muchos estudiantes realizaron mal el conteo de partidos, lo que no les permitió encontrar la regularidad correcta, por ello la mayoría de estudiantes presenta rasgos de nivel 0 “ausencia de razonamiento algebraico”.

**Tabla 7.**

*Análisis del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales.*

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Ausencia de R.A.	30	27,8	27,8	27,8
Nivel incipiente	66	61,1	61,1	88,9
<b>Válido</b> Nivel intermedio	11	10,2	10,2	99,1
Nivel consolidado	1	,9	,9	100,0
<b>Total</b>	<b>108</b>	<b>100,0</b>	<b>100,0</b>	

**Fuente:** Cuestionario de caracterización de los niveles de algebrización, propuesta por Godino (2012).



**Figura 5.** Resultados del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales.

## INTERPRETACIÓN

En la tabla 7 y figura 5, se observa la distribución de frecuencias y porcentajes del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales en estudiantes del segundo grado, donde se aprecia que el 61.1% de los estudiantes tienen un “nivel incipiente” de algebrización, 27.8% de los estudiantes muestran “ausencia de razonamiento algebraico” y en un mínimo porcentaje de 10.2% y 0.9% de los estudiantes están en un “nivel intermedio” y “nivel consolidado” de la algebrización, respectivamente. Estos resultados concuerdan con los resultados obtenidos por García (2017) quien al valorar las respuestas de su muestra de investigación analizó que de las tareas propuestas el rasgo de algebrización predominante fue el nivel 1 o nivel incipiente debido a que algunos integrantes de la muestra analizada no pudo interpretar el lenguaje literal al lenguaje simbólico, es decir no pudieron plantear las tareas por falta de comprensión de texto; de la misma forma les resultó difícil encontrar una regularidad que englobe un caso general para la utilización de variables.

#### 4.1.2 Análisis descriptivo del nivel de logro del área de matemática

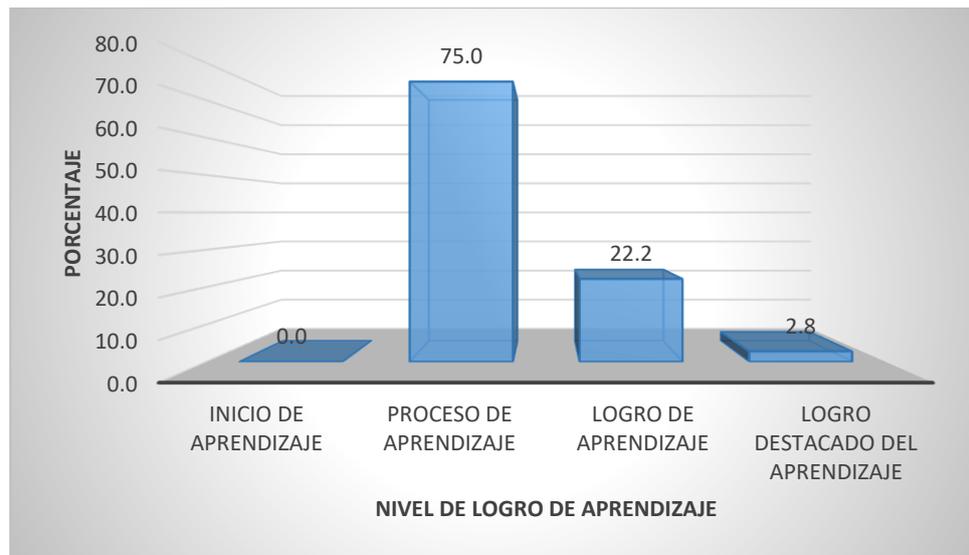
Para el análisis del nivel de logro del área de matemática, se utilizó el registro auxiliar del docente, quien consideró la evaluación de los aprendizajes a partir de las evidencias presentadas en el portafolio del estudiante utilizando mecanismos disponibles para una educación a distancia. Además, para los estudiantes que no han logrado el aprendizaje y que han requerido un tiempo adicional, se consideró la carpeta de recuperación, el cual ha sido trabajado en el periodo vacacional. El resultado de este análisis permitió concretar el segundo objetivo específico, a través de tablas y gráficos estadísticos presentados a continuación:

**Tabla 8.**

*Análisis del nivel de logro del área de matemática*

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Inicio de aprendizaje	0	0,0	0	0,0
Proceso de aprendizaje	81	75.0	75.0	75.0
<b>Válido</b> Logro previsto del aprendizaje	24	22.2	22.2	97,2
Logro destacado del aprendizaje	3	2,8	2,8	100,0
<b>Total</b>	<b>108</b>	<b>100,0</b>	<b>100,0</b>	

**Fuente:** Ficha de análisis documental (registro auxiliar del docente)



*Figura 6. Resultados del nivel de logro del área de matemáticas*

## INTERPRETACIÓN

En la tabla 8 y figura 6, se observa la distribución de frecuencias y porcentajes del nivel de logro del área de matemática en estudiantes del segundo grado, de la IES 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca-2020. Donde se aprecia que el 75.0% de los estudiantes se encuentra en “proceso de aprendizaje”; es decir, que los estudiantes están próximos o cerca al nivel esperado respecto a la competencia, por lo cual requieren de acompañamiento durante un tiempo razonable para lograr el aprendizaje, el 22.2% de los estudiantes están en “logro esperado de aprendizaje”, lo que significa que los estudiantes han demostrado manejo satisfactorio en todas las tareas propuestas por los docentes de matemática en el tiempo programado y el 2.8% de los estudiantes se encuentra en “logro destacado del aprendizaje”, lo cual evidencia que los estudiantes han alcanzado un nivel superior a lo esperado respecto a la competencia y ningún estudiante se encuentra en “inicio de aprendizaje”.



#### **4.1.3 Análisis inferencial del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y logro de aprendizaje del área de matemática.**

Para determinar si existe relación entre el nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y el logro de aprendizaje en el área de matemática en estudiantes del segundo grado de la Institución Educativa Secundaria. 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca – 2020 y así concretar con el objetivo general, se realizó la prueba de normalidad para comprobar si los datos siguen una distribución normal, lo cual permitió seleccionar la prueba estadística adecuada para determinar el grado de relación, lo que facilitará la comprensión y aplicación de los resultados del presente trabajo de investigación.

#### **4.1.4 Prueba de normalidad de los datos correspondientes a las variables de estudio.**

Para hallar la correlación existente entre las variables nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y logro de aprendizaje del área de matemática, primero es necesario hallar la prueba de normalidad para determinar si es procedente aplicar pruebas paramétricas o si son preferibles las no paramétricas para los datos disponibles; para ello se aplicó la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov.

##### **Paso 1. Planteamiento de hipótesis**

- $H_0$ : Los datos no siguen una distribución normal
- $H_1$ : Los datos siguen una distribución normal

##### **Paso 2. Nivel de significancia**



- Confianza 95%
- Significancia  $\alpha = 0.05\%$

### Paso 3. Prueba estadística a emplear

La prueba estadística a emplear es la siguiente:

#### Tabla 9.

*Prueba de Normalidad de Kolmogorov-Smirnov*

<b>Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra</b>		
	<b>NIVEL DE ALGEBRIZACIÓN</b>	<b>NIVEL DE LOGRO DE APRENDIZAJE</b>
N	108	108
Parámetros normales <sup>a,b</sup>		
Media	,84	2,81
Desviación estándar	,629	,463
Máximas diferencias extremas		
Absoluta	,321	,441
Positivo	,290	,309
Negativo	-,321	-,441
Estadístico de prueba	,321	,441
Sig. asintótica (bilateral)	,000 <sup>c</sup>	,000 <sup>c</sup>

**Fuente:** Elaboración propia

### Paso 4. Regla de decisión

Si  $p\text{-valor} > 0,05$  se rechaza la  $H_0$  y se acepta la  $H_1$

Si  $p\text{-valor} < 0,05$  se acepta la  $H_0$  y se rechaza la  $H_1$

### Paso 5. Decisión y conclusión

Como el  $p\text{-valor}$  obtenido es menor a 0,05 se acepta la hipótesis nula ( $H_0$ ) y se rechaza la hipótesis alterna ( $H_1$ ); es decir, que los datos correspondientes a las variables de estudio no cumplen el supuesto de normalidad bajo la prueba de Kolmogorov-Smirnov, al 95% de confianza. Por lo tanto, se deduce que los datos son no paramétricos; es decir, los datos no se ajustan a la distribución normal.

#### 4.1.5 Análisis de correlación entre las variables del estudio.

Luego del análisis de la distribución de los datos se procedió a analizar la correlación existente entre el nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y logro de aprendizaje del área de matemáticas, utilizando el estadístico de correlación de Spearman (Rho), cuyos valores están comprendidos entre -1 y 1, este coeficiente según Martínez et. al. (2009) es una medida de asociación lineal que utiliza los rangos, números de orden, de cada grupo de sujetos y compara dichos rangos. Esto nos permitió, evaluar la hipótesis acerca de la relación existente entre el nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y logro de aprendizaje del área de matemáticas. Los resultados se presentan a continuación:

**Tabla 10.**

*Correlación de Spearman del nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y logro de aprendizaje del área de matemáticas.*

			NIVEL DE ALGEBRIZACIÓN N	LOGRO DE APRENDIZAJE DEL ÁREA DE MATEMÁTICA
<b>Rho de Spearman</b>	<b>NIVEL DE ALGEBRIZACIÓN</b>	Coefficiente de correlación	1,000	,384**
		Sig. (bilateral)	.	,000
		N	108	108
	<b>LOGRO DE APRENDIZAJE DEL ÁREA DE MATEMÁTICA</b>	Coefficiente de correlación	,384**	1,000
		Sig. (bilateral)	,000	.
		N	108	108

\*\* . La correlación es significativa en el nivel 0,01 (2 colas).

**Fuente:** Elaboración propia



### **Paso 1. Planteamiento de hipótesis**

- $H_0$ : No existe correlación entre las variables de estudio
- $H_1$ : Existe correlación entre las variables de estudio

### **Paso 2. Nivel de significancia**

- Confianza 95%
- Significancia  $\alpha = 0.05\%$

### **Paso 3. Regla de decisión**

- Si el p-valor  $< 0,05$  se rechaza la  $H_0$  y se acepta la  $H_1$
- Si el p-valor  $> 0,05$  se acepta la  $H_0$  y se rechaza la  $H_1$
- Valor  $p = ,000$
- Valor  $Rho = 0,384$

### **Paso 4. Conclusión**

Se observa que, el p-valor es menor a 0,05; por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula ( $H_0$ ) y se acepta la hipótesis alterna ( $H_1$ ) lo que significa que existe relación entre el nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y el logro de aprendizaje del área de matemáticas, con un  $Rho = 0,384$  siendo esta una correlación positiva moderada, a un nivel de significancia de  $\alpha = 0.05\%$ .

## **4.2 DISCUSIÓN**

**Respecto al objetivo general.** Determinar si existe relación entre el nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y el logro de aprendizaje en el área de matemática en estudiantes del segundo grado de la I.E.S. 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca – 2020.



Para hallar la relación existente entre el nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y el logro de aprendizaje en el área de matemática, primero se realizó la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov, para contrastar la hipótesis de normalidad de los datos disponibles, notándose que éstos son no paramétricos; por lo tanto, se utilizó el estadígrafo no paramétrico de Spearman (Rho).

Al realizar el análisis estadístico de la relación entre las dos variables de estudio, se observa que, el  $p\text{-valor} = 0,000 < 0,05$ ; por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula ( $H_0$ ) y se acepta la hipótesis alterna ( $H_1$ ) que dice que existe relación entre el nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y el logro de aprendizaje en el área de matemática en estudiantes del segundo grado de la I.E.S. 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca – 2020, con un  $Rho = 0,384$  siendo esta una correlación positiva moderada, a un nivel de significancia de  $\alpha = 0.05\%$ .

Para verificar la independencia de las variables se realizó la prueba de hipótesis Chi-cuadrada, concluyéndose que se rechaza la hipótesis nula ( $H_0$ ) y se acepta la hipótesis alterna ( $H_1$ ), que nos indica que las variables nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y el logro de aprendizaje en el área de matemática no son independientes, con un nivel de significancia de  $\alpha = 5\% = 0.05$ .

Estos resultados, se ven respaldados por Rivas, (2021) quien realizó un estudio sobre los “Niveles de algebrización en las actividades propuestas para la adquisición del lenguaje algebraico en los libros de texto de 1° de secundaria



EBR, Perú”, en una de sus conclusiones menciona que el sistema educativo del país se encuentra ante una precariedad con respecto al desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes de educación secundaria, debido a que las tareas propuestas en el libro de texto de primero de secundaria, distribuidas en las escuelas públicas del Perú, están vinculadas a un nivel incipiente y algunas actividades a un nivel intermedio de algebrización, siendo esta la causa del bajo nivel en el que se ubica el Perú frente a los resultados de la prueba PISA. Además, que se promueve una sola competencia del área de matemáticas, debido a que la mayoría de las actividades están vinculadas a la competencia resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

En consecuencia, se deduce que estas variables no están aisladas. Porque es evidente que el nivel de razonamiento algebraico, es una habilidad superior y más compleja que el razonamiento aritmético y que permite que el estudiante identifique patrones y regularidades, cree progresivamente la tensión hacia la generalización, simbolización y el cálculo analítico, tenga relación con el logro de aprendizaje de la matemática. Es por ello que Godino et al, (2014) en su estudio donde analizan una experiencia formativa de maestros de Educación Primaria orientada al desarrollo de conocimientos para discriminar objetos algebraicos y distintos niveles de algebrización de la actividad matemática escolar, mencionan que los profesores deben ser capaces de tratar los conceptos desarrollados en la educación básica, ligándolos con los conceptos más avanzados con la finalidad de desarrollar el razonamiento algebraico, para ello deben atribuirles un carácter algebraico gradual a las tareas matemáticas, así



como el desarrollo progresivo de las formas del lenguaje y de los procesos de generalización.

**Respecto al primer objetivo específico:** Identificar el nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales en los estudiantes del segundo grado de la IES 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca-2020.

Del análisis procedimental de las cuatro tareas que fueron planteadas a los estudiantes del segundo grado de la IES 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca-2020, como actividad de clase para analizar los rasgos de los niveles de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales, se observa que la mayoría de los estudiantes muestran un “nivel incipiente de algebrización” seguido de “ausencia de razonamiento algebraico”. Debido a que la mayoría de los estudiantes realizan operaciones de forma correcta con números naturales y enteros, consideran casos particulares (en algunos casos con ayudas de diagramas), pero no utilizan variables, ni logran realizar generalizaciones, algunos denotan con una letra el valor que se desconoce, pero no aplican procedimientos con esta variable, realizando intentos básicamente aritméticos. Así mismo, la mayoría solo realiza operaciones correctamente con números naturales y enteros y no realizan un desarrollo adecuado en las operaciones con números racionales.

Los resultados de la investigación son respaldados por, García (2018) en las consideraciones finales de su trabajo de investigación titulado: “Niveles de algebrización que alcanzan los estudiantes de primer grado de secundaria en la



resolución de tareas estructurales de números racionales de un colegio particular del Perú”, quien al valorar las respuestas de su muestra de investigación, analizó que de las tareas propuestas el rasgo de algebrización predominante fue el nivel 1 o nivel incipiente, debido a que algunos integrantes de la muestra analizada no pudieron interpretar del lenguaje literal al lenguaje simbólico; es decir, no pudieron plantear las tareas por falta de comprensión de texto; de la misma forma, les resultó difícil encontrar una regularidad que englobe un caso general para la utilización de variables.

Los resultados de la presente investigación también concuerdan con los resultados obtenidos por Carrillo et. al., (2019) sobre los “Niveles de algebrización que alcanzan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de una tarea estructural de números racionales”, en el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS). Concluyen que, del análisis realizado, los estudiantes desarrollan un nivel de algebrización 1, predominando las generalizaciones para valores cercanos a través de la aplicación de procedimientos aritméticos en sus operaciones.

Del mismo modo, Coz y Castillo (2019) en su trabajo de investigación “Desarrollo del pensamiento algebraico en alumnos del primer y segundo grado de educación secundaria de la Institución educativa particular Ingeniería de Huancayo”, concluyeron que el noventa por ciento que cursó el grado uno del nivel secundario está ubicado en el nivel cero de algebrización, según la propuesta de Juan Godino y Aké. Aclarando que esto no significa que los estudiantes no dieron con la respuesta adecuada, sino que muchos de ellos no supieron justificar sus procedimientos de forma algebraica, resolviendo por otros



métodos como el aritmético y a través de gráficos. Así mismo, de los estudiantes que cursaban el segundo año de educación secundaria, el ochentaicinco por ciento está en el nivel cero de algebrización, lo que les permite afirmar que estos estudiantes no resolvieron las actividades planteadas algebraicamente sino utilizando procedimientos aritméticos y gráficos, ya que en una cantidad considerable de estudiantes dieron con la respuesta correcta.

Según las referencias mencionadas, hay varios trabajos de investigación sobre el nivel de algebrización en estudiantes del nivel secundario que se realizaron a nivel nacional, que concuerdan con los resultados de la presente investigación, al manifestar que los estudiantes están en un nivel incipiente de algebrización.

Estos resultados se deben a las diversas dificultades que tienen los estudiantes, como lo menciona Castro (2012) entre las nociones que producen dificultad se señalan la clausura para las expresiones algebraicas que los estudiantes sienten necesidad de hacer; el lenguaje algebraico al que no le encuentran sentido y que les lleva a asignar valores numéricos a las letras o a la sobregeneralización de ciertas propiedades; la preservación de la jerarquía de la operaciones para la que no encuentran justificación; el uso de paréntesis; la percepción del signo igual como expresión de una equivalencia, entre otras. Al respecto Wagner y Kieran, (1989) han reportado las dificultades de los niños en el tránsito desde la aritmética hasta el álgebra en la escuela secundaria, dificultades que se centran en la manipulación de letras y en la dotación de significado, pues supone un cambio notable en las convenciones usadas en la aritmética. Por tal motivo, varias investigaciones en educación matemática han



señalado la importancia de buscar formas más efectivas de realizar el tránsito del razonamiento aritmético al razonamiento algebraico, una de ellas es la introducción de aspectos de razonamiento algebraico en la educación primaria. (Kaput, 2000; Davis, 1985).

Sin embargo, Martínez (2014) quien investigó la caracterización del razonamiento algebraico elemental de estudiantes de primaria según niveles de algebrización, menciona que, si bien permiten ubicar ciertos niveles teóricos de actividad matemática, parecen no adecuarse en todos los casos para describir la diversidad de tareas de naturaleza algebraica propuestas en los libros de texto estudiados. Se observan algunas dualidades al clasificar cierto tipo de tareas en un nivel determinado de algebrización, lo que dificulta la identificación del mismo, a pesar de que las tareas naturaleza algebraica parecen claras; por lo que no es fácil ubicarlas en un nivel de algebrización, por ello es importante indicar que los niveles de algebrización pueden ser usados para identificar una “ruta algebraica” en el conjunto de tareas propuestas en los libros de texto.

Otro aspecto a considerar es el nivel de razonamiento algebraico de los docentes, porque no basta con elaborar propuestas curriculares que incluya el algebra desde los primeros niveles educativos, también es necesario que los docentes actúen como principal agente en el desarrollo del razonamiento algebraico en el aula de educación primaria y su progresión en secundaria. Sin embargo, en el trabajo de investigación realizada por Belizario, (2017) sobre “Evaluación del conocimiento algebraico en docentes del área de matemática de educación secundaria de la ciudad de Puno” se ha llegado a la conclusión, que los docentes muestran solo un nivel regular de conocimiento algebraico, con una



nota promedio de 15.31, con diferencias significativas entre los niveles de algebrización. Por tal motivo, los docentes de matemática no promueven el razonamiento algebraico en los estudiantes, lo cual debiera ser una competencia del profesor de matemática, es más no crean problemas con diferentes niveles de razonamiento algebraico, para promover su desarrollo, porque creen que es una tarea exclusiva de expertos, cuando crear problemas es parte fundamental de la tarea docente. (Malaspina, 2017, p. 2).

**Respecto al segundo objetivo específico:** Identificar el nivel de aprendizaje logrado en el área de matemática en estudiantes del segundo grado de la Institución Educativa Secundaria 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca-2020.

Debemos mencionar que los resultados del nivel de logro de aprendizaje, se da en un contexto de pandemia por el COVID-19, por el cual el servicio educativo se ha dado a través de la estrategia “Aprendo en casa” vía radio, televisión y web. La evaluación de los aprendizajes se ha dado a partir de las evidencias de aprendizaje presentadas en el portafolio del estudiante, utilizando mecanismos disponibles para una educación a distancia. Además, para los estudiantes que no han logrado el aprendizaje y que han requerido un tiempo adicional, el docente ha considerado la carpeta de recuperación, el cual ha sido trabajado en el periodo vacacional, tal como se ha previsto en la Resolución Viceministerial N°00093-2020-MINEDU.

Del análisis descriptivo de la variable nivel de aprendizaje logrado en el área de matemática en estudiantes del segundo grado de la IES 91 José Ignacio



Miranda de la ciudad de Juliaca-2020. Se observa que el 75.0% de los estudiantes se encuentra en “proceso de aprendizaje”; es decir, que los estudiantes están próximos o cerca al nivel esperado respecto a la competencia, por lo cual requieren de acompañamiento durante un tiempo razonable para lograr el aprendizaje, el 22.2% de los estudiantes están en “logro esperado del aprendizaje”, lo que significa que los estudiantes han demostrado manejo satisfactorio en todas las tareas propuestas por los docentes de matemática en el tiempo programado y el 2.8% de los estudiantes se encuentra en “logro destacado del aprendizaje”, lo cual evidencia que los estudiantes han alcanzado un nivel superior a lo esperado respecto a la competencia y ningún estudiante se encuentra en “inicio de aprendizaje”.

Como se puede evidenciar, la mayoría de los estudiantes se encuentran en el nivel “proceso de aprendizaje” en el área de matemática; es decir, que los estudiantes requieren de acompañamiento durante un tiempo razonable para lograr el aprendizaje. Estos resultados son respaldados por Bendezú, (2020) en su trabajo de investigación titulado: “Planificación curricular y logros de aprendizaje de las matemáticas en una institución educativa secundaria de Huancavelica”, en una de sus conclusiones menciona que el nivel de logro en matemáticas de los estudiantes del primero al quinto grado de educación secundaria es regular, ya que alcanzan una media de 12,09 en la escala vigesimal, lo que involucra que el 59,83% de los estudiantes se ubican en ese promedio, que de acuerdo al MINEDU (2014), estarían en el nivel de proceso de logro de aprendizaje del área de matemática.



Del mismo modo MINEDU (2021) ha publicado los resultados de la evaluación censal de estudiantes (ECE) correspondientes al año 2019, en las que participaron más de 800 mil estudiantes de 21 mil escuelas públicas y privadas de todo el Perú. Evidenciándose mejoras leves en el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de segundo grado de secundaria (3,6 pp), con respecto a los resultados del año anterior, siendo las regiones de Puno y Tacna las que muestran mayor incremento en el nivel “Satisfactorio” y una mayor disminución en los niveles “Previo al inicio” y “En inicio” en matemática. Sin embargo, seguimos bajos en el nivel de logro de esta área.

De acuerdo a la investigación, estos resultados se deben a que la mayoría de los estudiantes se encuentran en un “nivel incipiente de algebrización”, debido a que no utilizan variables o símbolos literales ya sea como incógnita, como números generalizados o para señalar relaciones funcionales, Montes y Trigueros, (2005), por el contrario estos usos suponen confusión en los estudiantes, algunos denotan con una letra el valor que se desconoce, pero no aplican procedimientos con esta variable, realizando intentos básicamente aritméticos, tampoco logran realizar procesos de generalización matemática, Así mismo, la mayoría solo realiza operaciones correctamente con números naturales y enteros y no realizan un desarrollo adecuado en las operaciones con números racionales.



## V. CONCLUSIONES

**PRIMERA:** Del análisis estadístico de la relación entre las variables de estudio, concluimos que existe evidencia estadística para afirmar que hay una correlación significativa entre el nivel de algebrización y el logro de aprendizaje en el área de matemática en estudiantes del segundo grado de la I.E.S. 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca – 2020, con un valor  $\rho = 0.384$  que corresponde a un nivel de correlación positiva moderada, lo que significa que a mayor nivel de algebrización, mayor será el logro de aprendizaje en el área de matemática a un nivel de significancia de  $\alpha = 5\% = 0.05$ .

**SEGUNDA:** En el análisis procedimental de las cuatro tareas estructurales de números racionales que fueron planteadas a los estudiantes del segundo grado de la IES 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca-2020, los estudiantes mostraron un “nivel incipiente de algebrización”, presentando dificultades asociadas generalmente al uso de símbolos literales o “letras” y al significado que se le asignan a éstas en contextos matemáticos, también muestran dificultades para comprender y manejar conceptos propios del álgebra (incógnita, número general y variable) y dificultades al realizar procesos de generalización matemática.

**TERCERA:** Del análisis descriptivo de la variable nivel de aprendizaje logrado en el área de matemática en estudiantes del segundo grado de la IES 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca-2020, se obtuvo que los estudiantes están “proceso de aprendizaje”; es decir, que están próximos o cerca al nivel esperado respecto a la competencia, por lo cual requieren de



acompañamiento durante un tiempo razonable para lograr el aprendizaje. Estos resultados se deben al “nivel incipiente de algebrización” de los estudiantes que no utilizan variables o símbolos literales ya sea como incógnita, como números generalizados o para señalar relaciones funcionales, realizan intentos básicamente aritméticos para resolver los ejercicios, tampoco logran realizar procesos de generalización matemática; así mismo, no realizan un desarrollo adecuado en las operaciones con números racionales.



## VI. RECOMENDACIONES

**PRIMERA:** A los docentes del área de matemática, prestar el interés necesario a la complejidad de objetos y procesos que se ponen en juego en las prácticas matemáticas escolares, un análisis focalizado en el reconocimiento de objetos y procesos propios del pensamiento algebraico, puede facilitar la identificación de rasgos de las prácticas matemáticas sobre los cuales se puede intervenir para aumentar progresivamente el nivel de algebrización de la actividad matemática de los estudiantes y por ende en el logro de aprendizaje del área de matemática. A su vez, para que los docentes sean considerados como un agente de cambio y puedan crear e innovar estrategias de enseñanza que permita desarrollar en los estudiantes el razonamiento algebraico, porque crear no es una tarea exclusiva de expertos, sino es parte fundamental de la tarea docente.

**SEGUNDA:** A los futuros investigadores, es importante que se puedan definir procesos que ayuden a identificar a los docentes aspectos de la red de conceptos y significados algebraicos que podrían ser puestos en juego durante la actividad matemática de los estudiantes, con la finalidad de que los docentes logren desarrollar habilidades para algebrizar ejercicios que se encuentran en los libros de texto o puedan proponer tareas que permitan el logro progresivo de los distintos niveles de algebrización y por ende el logro progresivo del aprendizaje del área de matemática.

**TERCERA:** Al Ministerio de Educación, replantear y vincular las actividades propuestas en los textos escolares que son distribuidos en las escuelas



públicas del Perú, al nivel intermedio o nivel consolidado de la algebrización, para que el país no se encuentre ante una precariedad con respecto al desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes de educación secundaria, siendo esta una de las causas del bajo nivel en el que se ubica el Perú frente a los resultados de la prueba PISA y ECE.



## VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aké, L. (2013). Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación. España: Tesis doctoral. Universidad de Granada, Granada.  
[https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis\\_doctorales/Lilia\\_Ake\\_tesis.pdf](https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Lilia_Ake_tesis.pdf)
- Beatriz B. (2017). Evaluación del conocimiento algebraico en docentes del área de matemática de educación secundaria de la ciudad de Puno. Tesis de pregrado. Universidad Nacional del Altiplano, Puno.  
[http://repositorio.unap.edu.pe/bitstream/handle/UNAP/8333/Belizario\\_Quispe\\_Beatriz.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://repositorio.unap.edu.pe/bitstream/handle/UNAP/8333/Belizario_Quispe_Beatriz.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (1996). Approaches to Algebra. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bendezú, A. (2020). Planificación curricular y logros de aprendizaje de las matemáticas en una institución educativa secundaria de Huancavelica”. Tesis de postgrado. Universidad Nacional de Huancavelica.  
<https://repositorio.unh.edu.pe/bitstream/handle/UNH/3498/TESIS-FED-2020-BENDEZ%c3%9a%20TORRES.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Benoit, P., Chemla, K. y Ritter, J. (Ed.) (1992). Historie de fractions, fractions d’historie. Berlin: Birkhausen Verlag.
- Butto, C. y Rojano, M. (2008). Pensamiento algebraico temprano. Congreso Nacional de Investigación Educativa.  
[http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v10/pdf/area\\_tematica\\_05/ponencias/1391-F.pdf](http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v10/pdf/area_tematica_05/ponencias/1391-F.pdf)



- CAI, J. y KNUTH (2011) E. Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives. Berlin: Springer-Verlag,.
- Cantoral, R. y otros (2005). Desarrollo del pensamiento matemático. México: Universidad Virtual.  
[https://www.researchgate.net/publication/261363590\\_Development\\_of\\_mathematical\\_thinking](https://www.researchgate.net/publication/261363590_Development_of_mathematical_thinking)
- Carpenter, T., Frankle M. y Levi L. (2003). Thinking mathematically. Integrating arithmetic and algebra in elementary school. Portsmouth, NH: Heinemann.
- CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. L. Early algebra and algebraic reasoning. In: LESTER, F. (Ed.) Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM, 2007, v. 2, p. 669 - 705.
- Carrillo, F., Gaita, C. y Garcia, J. (2019). Niveles de algebrización que alcanzan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de una tarea estructural de números racionales. En Pérez-Vera, Iván Esteban; García, Daysi (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 85-93). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Castro, W. (2014). Razonamiento algebraico elemental: propuestas para el aula.  
[file:///C:/Users/Johana%20garc/Downloads/7696-36120-3-PB%20\(2\).pdf](file:///C:/Users/Johana%20garc/Downloads/7696-36120-3-PB%20(2).pdf)
- Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.  
<http://funes.uniandes.edu.co/11199/2/Castro2012Dificultades.pdf>



Coz L. y Castillo L. (2019). Desarrollo del pensamiento algebraico en alumnos del primer y segundo grados de educación secundaria - caso: Institución Educativa Particular Ingeniería de Huancayo. Tesis de pregrado. Universidad Nacional del Centro del Perú.  
[https://repositorio.uncp.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12894/5684/T010\\_4154\\_5807\\_T.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://repositorio.uncp.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12894/5684/T010_4154_5807_T.pdf?sequence=1&isAllowed=y)

Feferman (1989). The number systems. Foundations of Algebra and Analysis. New York: Chelsea Publishing Company.

Fillooy, E., Puig, L., y Rojano, T (2008). Educational algebra. A theoretical and empirical approach. New York: Springer.

García, J. (2018). Niveles de algebrización que alcanzan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de tareas estructurales de números racionales. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú.  
<https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/12308>

Gimenez, J. (1991). Innovación metodológica de la didáctica especial del número racional positivo. Diagnósis cognitiva y desarrollo metodológico. Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona.  
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=131720>

GODINO, J. D.; BURGOS, M. (2017). Perspectiva ontosemiótica del razonamiento algebraico escolar. En: MUÑOZ-ESCOLANO, J. M. et al. (Ed.). Investigación en Educación Matemática XXI. Zaragoza: SEIEM. p. 49-66.  
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6262042>



- Godino, J. y Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Granada. Reprodigital. [https://ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7\\_Algebra.pdf](https://ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf)
- Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2009) Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Universidad de Granada; Universidad de Barcelona. [http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis\\_eos\\_10marzo08.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf)
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies Mathematics*, 77 (2), 247-265.
- Godino, J. D., Aké, L., Gonzalo, M. y Wilhelmi, M. R. (2013). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias* (en prensa). <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/287515>
- Godino, J., Castro, W., Aké, L., y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Boletín de Educación Matemática*, 26(42 B), 483-511. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291223574005>.
- Godino, Juan D.; Aké, Lilia P.; Gonzato, Margherita; Wilhelmi, Miguel R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros». *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*. <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/287515>



- Godino, J., Aké, L., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A., Blanco, T. F., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. L. y Wilhelmi, M. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. Enseñanza de las Ciencias. <https://ria.ua.pt/bitstream/10773/13467/1/1468-7956-1-PB.pdf>
- Hernández, R., Fernández, C., Baptista, M. (2010). Metodología de la investigación. 5ta. Edición. México: Mc Graw Hill.
- Hernández, R., Fernández, C., Baptista, M. (2014). Metodología de la investigación científica (6° ed.). México: Editorial Interamericana Editores S.A.
- Kaput, J., y Blanton, M. L. (2002). Design principles for tasks that support algebraic thinking in elementary school classrooms. In A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.) Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 2, (pp. 105-112) Norwich: University of East Anglia.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (390-419). New York: Macmillan
- Kieran, C. (1989) A perspective on algebraic thinking. Proceedings of the 13th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Vol. 2, (pp. 163-171). París.
- Kieran, K. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. In: LESTER , F.



- (Ed.) Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM, p. 707 - 762. vol. 2
- Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. <https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>.
- Martinez, J. (2014). La caracterización del razonamiento algebraico elemental de estudiantes de primaria según niveles de algebraización. Universidad de Medellín Ciencia y Libertad. <https://repository.udem.edu.co/handle/11407/299>
- Martínez, R., Tuya, L., Martínez, M., Pérez, A., y Cánovas, A. (2009). EL COEFICIENTE DE CORRELACION DE LOS RANGOS DE SPEARMAN CARACTERIZACION. Revista Habanera de Ciencias Médicas, 8(2). [http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1729-519X2009000200017&lng=es&tlng=es](http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1729-519X2009000200017&lng=es&tlng=es).
- Mason, J., Stephens, M. & Watson, A. (2009). Appreciating Mathematical Structure for All. Mathematics Education Research Journal. 21(2), 10-32
- Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos curriculares-Área Matemáticas. <http://www.mineduacion.gov.co/cvn/1665/article89869.html>
- Ministerio de Educación Nacional (2016). Currículo Nacional de la Educación Básica. <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016.pdf>



Ministerio de Educación Nacional (2016). Programa curricular de educación secundaria en Perú. Educación básica regular.

<http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf>

Mirelly, F. y Rivas Y. (2021). Niveles de algebrización en las actividades propuestas para la adquisición del lenguaje algebraico en los libros de texto de 1° secundaria (EBR, Perú) Tesis para optar el Título de Licenciado en Educación. Nivel Secundaria, especialidad Matemática y Física.

<https://pirhua.udep.edu.pe/handle/11042/5004?locale-attribute=es>

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principios y estándares 2000. Reston VA: NCTM. Traducción, M. Fernández (Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales).

[https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards\\_and\\_Positions/Principles to Actions/PtAExecutiveSummary\\_Spanish.pdf](https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Principles_to_Actions/PtAExecutiveSummary_Spanish.pdf)

Padilla J., González A. y Pérez C. (1998). Elaboración del cuestionario. En: Rojas AJ, Fernández JS, Pérez C, editores. Investigar mediante encuestas. Fundamentos teóricos y aspectos prácticos. Madrid: Editorial Síntesis 1998; p. 115-40.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in student's emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 237-268.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En: J. Cai y E. Knuth (eds.). *Early algebraization. Advances in mathematics education*. Berlin: Springer-Verlag, pp. 303-322.



- Rivas, M. (2021), Niveles de algebrización en las actividades propuestas para la adquisición del lenguaje algebraico en los libros de texto de 1° secundaria (EBR, Perú). Tesis de pregrado. Universidad de Piura. [https://pirhua.udep.edu.pe/bitstream/handle/11042/5004/EDUC\\_2103.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://pirhua.udep.edu.pe/bitstream/handle/11042/5004/EDUC_2103.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Rojas, P.y Vergel, R. (2013). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Revista Científica*, 2, 688–694. <https://doi.org/10.14483/23448350.7753>
- Sánchez, E. (2008) Un aprendizaje eficaz de la numeración. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 13.
- Smyth, J. (1991). Una pedagogía crítica de la práctica en el aula. *Revista de Educación*, N° 294, pp. 275-300.
- Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Revista Números*, 77, 5-34.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in realist mathematic education. A paradigm of developmental research*. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers.
- Trujillo, J. (2017). Configuración Epistémica e Identificación de niveles de algebrización en tareas estructurales de los textos oficiales del V Ciclo de Educación Primaria. Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, Escuela de Posgrado. <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/9282>
- Vergel Causado, R. (2010). La Perspectiva de Cambio Curricular Early-Algebra como Posibilidad para desarrollar el Pensamiento Algebraico en Escolares de Educación



Primaria: Una Mirada al Proceso Matemático de Generalización. In 11a Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (Vol. 1980, pp. 69–81).

Vergel, R. (2015). Generalización De Patrones Y Formas De Pensamiento Algebraico Temprano. *Pensamiento Numérico Y Algebraico*, 9(3), 193–215.

Vidal M., y Fernández B. (2015). Aprender, desaprender, reaprender. *Educación Médica Superior*, 29(2) [http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0864-21412015000200019&lng=es&tlng=es](http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0864-21412015000200019&lng=es&tlng=es).

Wagner, S., y Kieran, C. (1989). *Research issues in the learning and teaching of algebra*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, NJ: Erlbaum/Kieran

Zarzar, B., & Ceballos, R. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, 22(3), 55–86.



# ANEXOS



## ANEXO 01

### CUESTIONARIO PARA DETERMINAR LOS NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN

#### INDICACIONES

- Tiempo de duración: 50 minutos
- No se debe usar materiales de consulta como cuadernos, libros, celulares.
- Las tareas deben ser resueltas de forma personal

#### TAREA 1

Si al numerador de la fracción  $\frac{19}{5}$  se suma un número natural y se resta el mismo número al denominador, por ejemplo, si el número natural es 1 ¿Qué sucede? O si el número natural es 2 ¿Qué sucede?, y si pruebas con otros números naturales ¿Qué resulta? A partir de esto. ¿Será cierto que  $\frac{19+n}{5-n}$  siempre es número natural?

#### TAREA 2

En la siguiente tabla se muestran tres columnas. La primera columna corresponde a la longitud de la base del rectángulo; en la segunda columna su altura y además se observa que el área es siempre igual a  $11 u^2$ . Ahora, a partir de los datos que están en la tabla, completa las tres primeras alturas del rectángulo en la segunda columna.

BASE	ALTURA	ÁREA
$\frac{7}{1}u$		$11u^2$
$\frac{7}{2}u$		$11u^2$
$\frac{7}{3}u$		$11u^2$
•	•	•
•	•	•
•	•	•
$\frac{7}{25}u$		$11u^2$

Luego a partir de los primeros resultados, calcula la altura del rectángulo cuando la base sea igual a  $\frac{7}{45}$  unidades.



### **TAREA 3**

Realice las siguientes operaciones:

$$7+9$$

$$15+17$$

$$105+107$$

$$1575+1577$$

A partir de los cálculos realizados y al observar la relación que existe de cada par de números, ¿encuentra alguna regularidad? Justifique su respuesta.

### **TAREA 4**

Por inicio de clases, un determinado colegio realizará un torneo de tenis (uno contra uno) y se han inscrito tres estudiantes. ¿Cuál será el número total de partidos que se realizaran en el torneo si cada estudiante juega una vez con cada uno de los inscritos?

Ahora, luego de responder la primera pregunta, en general, si se inscriben una determinada cantidad de estudiantes. ¿Cuántos partidos se tendrá que jugar en total?

ANEXO 02

MATRIZ DE CONSISTENCIA

“NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS ESTRUCTURALES DE NÚMEROS RACIONALES Y EL LOGRO DE APRENDIZAJE DEL ÁREA DE MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES DE LA I.E.S. 91 JOSÉ IGNACIO MIRANDA DE LA CIUDAD DE JULIACA - 2020”

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	DISEÑO	INSTRUMENTOS
<p><b>PROBLEMA GENERAL</b></p> <p>¿Qué relación existe entre los niveles de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y el logro de aprendizaje en el área de matemática en estudiantes del segundo grado de la I.E.S. 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca - 2020?</p>	<p><b>OBJETIVO GENERAL</b></p> <p>Determinar si existe relación entre el nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y el logro de aprendizaje en el área de matemática en estudiantes del segundo grado de la I.E.S. 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca - 2020.</p>	<p><b>HIPÓTESIS GENERAL</b></p> <p>Existe una relación positiva entre el nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales y el logro de aprendizaje en el área de matemática en los estudiantes del segundo grado de la I.E.S. 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca - 2020.</p>	<p><b>VARIABLE INDEPENDIENTE</b></p> <p>Niveles de algebrización</p>	<p><b>ENFOQUE DE INVESTIGACIÓN</b></p> <p>Cuantitativo</p> <p><b>NIVEL DE INVESTIGACIÓN</b></p> <p>Descriptivo - Correlacional</p> <p><b>DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN</b></p>	<p><b>TÉCNICAS DE INVESTIGACIÓN</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Encuesta</li> <li>Análisis documental</li> </ul>
<p><b>PROBLEMAS ESPECÍFICOS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>¿Cuál es el nivel de algebrización que prevalece en la resolución de tareas estructurales de números racionales en los estudiantes del segundo grado de la I.E.S. 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca - 2020?</li> </ul>	<p><b>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Identificar el nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales en los estudiantes del segundo grado de la I.E.S. 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca-2020.</li> </ul>	<p><b>HIPÓTESIS ESPECÍFICAS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>El nivel de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales es incipiente en los estudiantes del segundo grado de la IES 91 José Ignacio Miranda de la ciudad de Juliaca, 2020.</li> </ul>	<p><b>VARIABLE DEPENDIENTE</b></p> <p>Logro de aprendizaje</p>	<p><b>NOTACIÓN FUNCIONAL</b></p> <pre> graph TD     M --&gt; I1     M --&gt; I2     I1 --&gt; R     I2 --&gt; R     </pre> <p><b>Donde:</b></p> <p>M = Muestra</p> <p>I1 = Información de una variable</p> <p>I2 = Información de otra variable</p> <p>R = Grado de relación existente.</p>	<p><b>INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>El cuestionario</li> <li>Registro auxiliar</li> </ul>

**ANEXO 03**

**OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES**

VARIABLES	DEFINICIÓN CONCEPTUAL	DIMENSIONES	INDICADORES	ESCALA O CATEGORÍA
<b>NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN</b>	Los niveles o grados de algebrización describen características de las prácticas realizadas al resolver tareas matemáticas, enmarcados entre un nivel cero de algebrización y un tercer nivel en el que la actividad matemática se puede considerar como propiamente algebraica. (Godino, et.al., 2014)	Ausencia de razonamiento algebraico	Presencia de objetos algebraicos  Tratamiento de objetos algebraicos  Tipos de lenguajes usados	0 NULO
		Nivel incipiente de algebrización		1 BAJO
		Nivel intermedio de algebrización		2 MEDIO
		Nivel consolidado de algebrización		3 ALTO
<b>LOGRO DE APRENDIZAJE</b>	Es el resultado de los aprendizajes alcanzados por los estudiantes al final de un periodo o año académico como consecuencia del	<b>RESUELVE PROBLEMAS DE CANTIDAD</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Expresa el significado de la relación entre los órdenes del sistema de numeración decimal, de las relaciones de equivalencia entre números racionales. De acuerdo al contexto de la situación, usando lenguaje matemático y diversas representaciones.</li> <li>- Selección, emplea y combina estrategias y procedimientos matemáticos y propiedades de las operaciones para operar y simplificar expresiones numéricas con números enteros y racionales, según sea más conveniente a cada situación.</li> <li>- Plantea afirmaciones sobre relaciones entre las propiedades de la potenciación y la radicación e infiere relaciones propiedades; el orden entre dos números racionales.</li> <li>- Comprueba si la expresión algebraica usada permitió hallar el dato desconocido y si este valor cumple las condiciones del problema.</li> <li>- Expresa el significado de: la regla de formación de progresiones aritméticas y de la suma de sus términos, la solución de una ecuación lineal, el conjunto solución de una condición de desigualdad; las interpreta y explica en el contexto de la situación, usando lenguaje</li> </ul>	<b>C</b> <b>INICIO DE APRENDIZAJE</b>

	<p>proceso enseñanza – aprendizaje. Los logros del aprendizaje se verifican a través de indicadores de logro que son señales, pistas observables del desempeño humano, que dan cuenta externamente de lo que está sucediendo internamente (en el educando) y que exige una comprensión e interpretación pedagógica por parte del docente. (Ministerio de Educación, 2011)</p>	<p><b>RESUELVE PROBLEMAS DE REGULARIDAD, EQUIVALENCIA Y CAMBIO</b></p>	<p>algebraico y conectando representaciones gráficas, tabulares y simbólicas.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Selecciona y combina recursos, estrategias heurísticas y el procedimiento matemático más conveniente a la situación para, determinar términos desconocidos, la regla de formación y la suma de "n" términos de una progresión aritmética, simplificar expresiones algebraicas usando factorización y propiedades de las operaciones, solucionar ecuaciones e inecuaciones lineales, y evaluar el conjunto de valores de una función lineal.</li> <li>- Plantea afirmaciones sobre la relación entre términos de una progresión aritmética y su regla de formación, las propiedades operativas que sustentan la transformación de expresiones algebraicas, la simplificación o solución de ecuaciones y desigualdades, las diferencias entre la función lineal y afín; y entre la proporcionalidad directa e inversa. Justifica la validez de sus afirmaciones mediante ejemplos y sus conocimientos matemáticos. Reconoce errores en sus justificaciones o las de otros y las corrige.</li> <li>- Modela las características y atributos medibles de los objetos, con polígonos regulares, círculo, prismas y pirámides, sus elementos y propiedades; con la semejanza y congruencias de formas geométricas, Así como la ubicación, movimientos y trayectoria de objetos, mediante coordenadas cartesianas, mapas y planos a escala, y transformaciones como la traslación, rotación, ampliación o reflexión.</li> <li>- Selecciona y emplea estrategias, recursos, y procedimientos para determinar la longitud, perímetro, área o volumen de prismas, pirámides, polígonos y círculos, empleando unidades convencionales (cuales); así como describir el movimiento, la localización o perspectivas (vistas) de objetos en planos a escala.</li> <li>- Plantea afirmaciones sobre relaciones entre las propiedades de las formas geométricas; en base a observación de casos o simulaciones. Las sustenta con ejemplos y sus conocimientos geométricos. Reconoce errores en sus justificaciones y las de otros, y las corrige.</li> </ul>	<p><b>B</b> <b>PROCESO DE APRENDIZAJE</b></p> <p><b>A</b> <b>LOGRO PREVISTO DEL APRENDIZAJE</b></p> <p><b>AD</b> <b>LOGRO DESTACADO DEL APRENDIZAJE</b></p>
		<p><b>RESUELVE PROBLEMAS DE MOVIMIENTO, FORMA Y LOCALIZACIÓN</b></p>		



## ANEXO 04

### DATOS RECOLECTADOS PARA EL ANÁLISIS ESTADÍSTICO

	Tare a 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4	Competenci a 1	Competenci a 2	Competencia 3
Estudiante 1	0	0	0	0	2	2	2
Estudiante 2	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 3	0	3	0	0	2	3	3
Estudiante 4	0	0	0	0	2	3	3
Estudiante 5	0	0	0	0	1	2	2
Estudiante 6	0	0	0	0	2	3	3
Estudiante 7	1	0	1	1	3	3	3
Estudiante 8	1	0	0	0	2	3	2
Estudiante 9	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 10	1	1	0	0	3	3	3
Estudiante 11	0	1	0	0	3	3	3
Estudiante 12	2	1	1	1	3	4	3
Estudiante 13	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 14	0	0	0	0	2	3	3
Estudiante 15	0	0	0	0	2	3	2
Estudiante 16	0	0	0	0	2	3	3
Estudiante 17	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 18	1	1	1	1	3	3	3
Estudiante 19	0	1	0	0	3	3	3
Estudiante 20	0	1	0	0	3	3	3
Estudiante 21	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 22	1	0	0	1	3	3	3
Estudiante 23	1	0	2	0	3	3	3
Estudiante 24	0	0	0	0	3	3	3
Estudiante 25	1	1	0	0	3	3	3



Estudiante 26	0	0	0	0	2	2	1
Estudiante 27	1	0	1	0	3	3	3
Estudiante 28	1	0	1	0	3	3	3
Estudiante 29	1	0	2	0	3	3	3
Estudiante 30	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 31	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 32	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 33	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 34	1	0	0	0	3	3	2
Estudiante 35	1	0	1	1	3	4	3
Estudiante 36	1	1	0	0	3	3	3
Estudiante 37	1	0	0	0	2	3	3
Estudiante 38	0	0	0	0	2	3	3
Estudiante 39	0	2	0	0	3	3	3
Estudiante 40	1	0	1	1	3	3	3
Estudiante 41	0	0	0	0	2	2	2
Estudiante 42	1	1	1	0	3	3	3
Estudiante 43	1	0	0	0	2	3	3
Estudiante 44	0	0	0	0	3	2	2
Estudiante 45	1	0	0	0	2	2	3
Estudiante 46	1	0	0	0	2	3	3
Estudiante 47	1	0	0	0	3	2	2
Estudiante 48	1	0	0	0	3	2	3
Estudiante 49	0	0	0	0	3	3	3
Estudiante 50	2	1	1	2	4	4	3
Estudiante 51	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 52	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 53	0	0	0	0	2	2	2



Estudiante 54	1	1	0	1	3	3	3
Estudiante 55	0	0	0	0	3	3	3
Estudiante 56	0	0	0	0	1	2	2
Estudiante 57	2	0	1	1	3	3	3
Estudiante 58	1	0	0	0	2	3	2
Estudiante 59	1	1	0	0	3	3	3
Estudiante 60	1	1	0	0	3	3	3
Estudiante 61	1	1	1	1	3	4	3
Estudiante 62	1	1	1	1	3	3	3
Estudiante 63	1	0	1	0	2	3	3
Estudiante 64	1	0	0	0	2	2	2
Estudiante 65	0	0	0	0	3	2	1
Estudiante 66	1	0	0	0	1	2	3
Estudiante 67	1	1	1	0	3	3	3
Estudiante 68	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 69	2	1	1	1	4	3	4
Estudiante 70	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 71	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 72	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 73	0	0	0	2	3	3	3
Estudiante 74	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 75	0	0	0	0	2	2	1
Estudiante 76	0	0	0	0	2	3	3
Estudiante 77	0	0	0	0	2	3	3
Estudiante 78	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 79	1	1	0	0	3	3	3
Estudiante 80	1	1	1	1	3	3	3
Estudiante 81	0	0	0	0	3	3	3



Estudiante 82	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 83	0	0	0	0	2	2	1
Estudiante 84	0	0	2	0	3	3	3
Estudiante 85	0	0	0	0	2	2	3
Estudiante 86	0	1	0	1	3	3	3
Estudiante 87	1	0	1	0	3	3	3
Estudiante 88	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 89	1	0	1	0	3	3	3
Estudiante 90	0	0	0	0	3	3	3
Estudiante 91	1	1	0	1	3	3	3
Estudiante 92	0	0	0	0	2	2	1
Estudiante 93	0	0	0	0	1	2	2
Estudiante 94	1	1	0	1	3	3	3
Estudiante 95	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 96	0	0	0	0	2	3	3
Estudiante 97	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 98	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 99	1	0	0	0	3	3	3
Estudiante 100	1	1	1	1	3	3	3
Estudiante 101	0	0	0	0	3	3	3
Estudiante 102	0	0	0	0	2	1	2
Estudiante 103	0	0	2	0	2	3	2
Estudiante 104	0	0	0	0	2	2	2
Estudiante 105	1	1	0	0	3	3	3
Estudiante 106	0	0	0	0	3	3	3
Estudiante 107	0	2	0	0	3	3	3
Estudiante 108	0	0	0	0	2	3	2