UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

TESIS

INGENIERÍA Y SITUACIÓN DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LA DERIVADA EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍAS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

PRESENTADA POR:

FABIOLA LOAYZA TORREBLANCA

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE:

MAESTRO EN EDUCACIÓN CON MENCIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

PUNO, PERÚ

2019

DEDICATORIA

Primero agradezco a Dios por todo lo que me dio en la vida y que ha permitido que llegue este momento en la que pueda dedicar mi trabajo a las personas que más quiero, mi familia, a mi querido padre que desde el cielo sé que me acompaña, a mi adorada madre que con su presencia y fortaleza hizo que día a día siga sin desmayar avanzando por este camino de lucha y desarrollo profesional, a mis amadas hijas Camila y Luciana que han sabido entenderme que el tiempo que he dedicado a este trabajo ha sido el tiempo sacrificado para ellas.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a la Maestría en Educación con mención en Didáctica de la Matemática de la Universidad Nacional del Altiplano que ha contribuido a complementar mi formación profesional, agradecer a cada uno de los docentes que con dedicación y esmero han sabido trazar el camino para que este trabajo se inicie, quiero agradecer en especial a mi asesor el Dr. Wenceslao Quispe Yapo por el apoyo brindado en el proceso y conclusión de esta investigación, también debo agradecer a mis amigos y colegas de la E.P. de Ciencias Físico Matemáticas que han colaborado con sus sugerencias, respondiendo encuestas y han participado con mucho interés en el proceso de y culminación de esta investigación.

ÍNDICE GENERAL

ÁREA: Estrategias metodológicas de la educación Matemática.
TEMA: Ingeniería y situación didáctica para el aprendizaje de la derivada en estudiantes de ingenierías de la Universidad Nacional del Altiplano.
LÍNEA: Comprobación de la eficiencia y eficacia de estrategias Metodológicas en la educación Matemática.

Puno, 23 de diciembre de 2019

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE ANEXOS

Pág.

RESUMEN

La investigación describe la incidencia de la metodología de la enseñanza basada en la ingeniería y su situación didáctica en el aprendizaje de la noción de la derivada, por lo que se diseñó sus correspondientes situaciones didácticas, las cuales se identificaron dificultades y errores que presentan los estudiantes en el proceso de aprendizaje. La secuencia didáctica se diseñó teniendo como marco teórico la teoría de situaciones didácticas (TSD) de Brousseau, se propusieron actividades relacionadas al lenguaje y pensamiento variacional. La metodología de esta investigación se enmarca en el enfoque cualitativo e investigación descriptiva en cuyo objetivo se utilizó la ingeniería didáctica de Michel Artigue. Se aplicó a una muestra intencional a 20 estudiantes matriculados en el curso de cálculo diferencial 2018 de la Escuela Profesional de Ingeniería Agrícola de la Universidad Nacional del Altiplano. El diagnóstico no fue satisfactorio dado que la mayoría de los estudiantes en la escala vigesimal obtuvieron menos de 11 en las preguntas de interpretación. Después de la aplicación de las situaciones didácticas el resultado fue satisfactorio porque más de la mitad están en la escala de calificación en proceso correcto. Las dificultades y errores que los estudiantes presentan en el proceso son esencialmente la falta de conocimientos en base relacionados al lenguaje y pensamiento variacional cuya característica es la no aprehensión en niveles de educación previos. La conclusión más relevante es que la metodología de la enseñanza basada en la ingeniería y situación didáctica incide de manera significativa en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Palabras clave: Aprendizaje, derivada, ingeniería didáctica, metodología, situaciones didácticas.

ABSTRACT

The research describes the incidence of the teaching methodology based on engineering and its didactic situation in the learning of the notion of the derivative, for which the corresponding didactic situations were designed, which identified the difficulties and errors presented by the students in the learning process. The didactic sequence was designed taking Brousseau's theory of didactic situations (TSD) as a theoretical framework, and activities related to language and variational thinking were proposed. The methodology of this research is framed in the qualitative approach and descriptive research whose objective was used was the didactic engineering of Michel Artigue. It was applied to a purposive sample of 20 students enrolled in the course of differential calculus 2018 of the professional school of agricultural engineering at the National University of Altiplano. The diagnosis was not satisfactory since most of the students in the vigesimal scale obtained less than 11 in the interpretation questions. After the application of the didactic situations, the result was satisfactory because more than half of them is in the correct process rating scale. The difficulties and errors presented by the students in the process are essentially the lack of basic knowledge related to language and variational thinking, whose characteristic is the lack of apprehension in previous levels of education. The most relevant conclusion is that the teaching methodology based on engineering and didactic situation has a significant impact on the teaching and learning process.

Keywords: Derivative, didactics, didactic situations engineering, learning, methodology.

INTRODUCCIÓN

El objeto matemático derivada es un pilar fundamental dentro del estudio de cálculo diferencial y es parte del plan de estudios de las Escuelas Profesionales de Ingenierías y nos referimos específicamente Ingeniería Agrícola de la Universidad Nacional del Altiplano en la cual se ha llevado a cabo este trabajo de investigación. Sabemos que "Vivimos en un mundo caracterizado por cambios continuos. Por lo tanto, es importante desarrollar métodos matemáticos para cuantificar, describir y pronosticar estos cambios. Justamente esto es el propósito del cálculo diferencial que es la matemática de los cambios" (Wenzelburger, 1993). Hay investigaciones que sostienen que la enseñanza del cálculo debe estar dirigida principalmente a que los estudiantes trabajen con ideas variacionales, estudien y modelen fenómenos de cambio por lo cual es necesario desarrollar su pensamiento y lenguaje variacional (Cantoral, 2014).

Pero surgen problemas en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de la derivada ya que en él se han priorizado, en general los procesos de construcción y validación formales así como los aspectos algorítmicos; como se manifiesta, que la enseñanza universitaria del cálculo, aunque tenga otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica, o en la aplicación de métodos tradicionales de demostración matemática (Artigue, 1995). Los estudiantes logran aprender las reglas de derivación mecánicamente pero no logran interpretar el sentido de la noción de tal objeto también se señala que: los estudiantes difícilmente logran reconocer las ideas asociadas al concepto de derivada en la resolución de problemas elementales sobre variación y cambio a pesar de que en los problemas de este tipo se encuentra la esencia de este concepto (Dolores, 2007) o que la enseñanza de los principios del cálculo resulta bastante problemática y aunque seamos capaces de enseñar a los estudiantes a resolver de forma más o menos mecánica algunos problemas estándar o bien realizar algunas derivadas o integrales tales acciones están muy lejos de lo que supondría una verdadera comprensión de los conceptos y métodos del pensamiento de esta parte de las matemáticas (Moreno, 2005). Además, que la enseñanza habitual del análisis matemático logra que los estudiantes deriven, integren calculen límites elementales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión. De modo que aun siendo capaces de derivar una función no puedan reconocer en un problema la necesidad de una derivación (Cantoral, 2004). El aprendizaje de dicho objeto matemático en los estudiantes de Ingeniería Agrícola de la Universidad Nacional del Altiplano también se enmarca básicamente en lo algorítmico mas no pueden interpretar el sentido amplio de la noción de derivada (anexo 5), en un afán de buscar en cierta medida soluciones a estos problemas y resaltar la importancia que debe tener la dimensión didáctica en la concepción de una propuesta didáctica es que inicio esta investigación planteándome como problema general : ¿Cómo la enseñanza y el aprendizaje de la derivada se aplica desde el enfoque de la Ingeniería y Situaciones Didácticas en estudiantes de Ingeniería Agrícola de la Universidad?.

Como objetivo general propongo, aplico y analizo los efectos del desarrollo de una situación didáctica cuya base es la Teoría de Situaciones Didácticas que favorezca al aprendizaje de la derivada en los estudiantes matriculados en el curso de cálculo diferencial del primer semestre Ingeniería Agrícola de la Universidad Nacional del Altiplano. Como objetivos específicos identifico las dificultades y errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la noción de la derivada y finalmente caracterizo las dificultades y errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la derivada.

Este trabajo de investigación consta de cuatro capítulos, en el primer capítulo describo el contexto en el que se ha ejecutado esta investigación y desarrollo el marco teórico; en el capítulo dos identifico el problema, presento la justificación correspondiente del porque hemos realizado este trabajo y finalmente detallo los objetivos generales y específicos, seguidamente en el capítulo tres hago referencia a la metodología que enmarca el acceso al campo describo la selección de informantes y situaciones observadas, seguidamente se hace el análisis de datos y categorías y señalo los instrumentos utilizados en este trabajo; en el capítulo cuatro presentamos nuestros resultados y discusión, para completar el trabajo ha sido necesario adjuntar anexos.

CAPÍTULO I

REVISIÓN DE LITERATURA

1.1 Contexto y marco teórico

El Estudio sobre ingeniería y situación didáctica para el aprendizaje de la derivada en estudiantes de Ingenierías de la Universidad Nacional del Altiplano, se realizó con 20 estudiantes matriculados en el curso de Cálculo Diferencial del primer semestre 2018 II de la Escuela Profesional de Ingeniería Agrícola de la Universidad Nacional del Altiplano; la universidad está ubicada en la ciudad de Puno. La ubicación geo referencial de Puno es latitud: 15°50′31″S, longitud: 70°01′11″O y a 3 825 m.s.n.m.

1.1.1 El aprendizaje

La palabra aprendizaje, proviene de la palabra “aprendiz”, que a su vez procede del bajo latín “aprehendivus”, y este de “apprĕhendĕre”, que significa aprender, y en donde el prefijo “ap” connota proximidad y dirección, y el término «prĕhendĕre» significa «percibir».

El significado de la palabra “aprendizaje” según la real academia de la lengua española tiene las siguientes acepciones: Acción y efecto de aprender algún arte, oficio u otra cosa, también se puede entender como la adquisición por la práctica de una conducta duradera de lo anterior se puede concluir que el aprendizaje es un proceso mediante el cual un sujeto adquiere destrezas, aptitudes o habilidades prácticas, incorpora contenidos informativos o adopta nuevas perspectivas de conocimiento y/o acciones basadas en el estudio o en la experiencia, a lo largo de toda su vida. A lo largo de muchos años se ha venido investigando todo lo relacionado sobre el aprendizaje siendo los ejes fundamentales para este tema Lev Vigotsky, Jean Piaget y David Ausbel.

Sobre "La teoría sociocultural" Carrera & Mazzarella (2001) nos señalan que el Sicólogo Ruso Lev Vygotsky sostenía que los niños desarrollan su aprendizaje mediante la interacción social: van adquiriendo nuevas y mejores habilidades cognoscitivas como proceso lógico de su inmersión a un modo de vida. También señala que aquellas actividades que se realizan de forma compartida permiten a los niños interiorizar las estructuras de pensamiento y comportamentales de la sociedad que les rodea, apropiándose de ellas. Nos afirma sobre las contribuciones importantes que la sociedad hace al desarrollo individual. Esta teoría destaca la interacción entre el desarrollo de las personas y la cultura en la que viven. Mientras Piaget que fue un psicólogo, biólogo y epistemólogo suizo. Desarrolló sus tesis en torno al estudio del desarrollo psicológico en la infancia y la teoría constructivista del desarrollo de la inteligencia. De ahí surgió lo que se conoce como la "Teoría del Aprendizaje de Piaget". En la investigación de Severo (2012) indica que para entender ello es preciso señalar que el constructivismo en psicología, es una teoría explicativa de los procesos de aprendizaje a partir de conocimientos ya adquiridos. La teoría constructivista del conocimiento nos habla de una percepción de las propias vivencias que siempre está sujeta a los marcos de interpretación del "aprendiz", o sea somos incapaces de analizar objetivamente las experiencias que vivimos en cada momento, porque siempre las interpretaremos a la luz de nuestros conocimientos previos también bajo esa premisa el aprendizaje no es la simple asimilación de paquetes de información que nos llegan desde fuera, sino que se explica por una dinámica en la que existe un sucesión entre las informaciones nuevas y nuestras viejas estructuras de ideas. De esta manera, lo que sabemos está siendo construido permanentemente.

David Paul Ausbel, fue un psicólogo y pedagogo nacido en el año 1918 en Nueva York, El desarrolló una teoría sobre la asimilación de los conocimientos que a lo largo del tiempo se le denomino "Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel" en Ausbel (1983) la enseñanza era un proceso por el cual se ayuda al estudiante a que siga aumentando y perfeccionando el conocimiento que ya tiene, en vez de imponerle un temario que debe ser memorizado. La educación no podía ser una transmisión de datos unilateral, Ausbel fue el que menciono por primera vez sobre el aprendizaje significativo. Lo que dijo de ello es que: El conocimiento verdadero solo puede nacer cuando los nuevos contenidos tienen un significado a la luz de los conocimientos que ya se tienen. Es decir, que aprender significa que los nuevos aprendizajes conectan con los anteriores; no porque sean lo mismo, sino porque tienen que ver con estos de un modo que se crea un nuevo significado. Por eso el conocimiento nuevo encaja en el conocimiento viejo, pero este último, a la vez, se ve reconfigurado por el primero. Es decir, que ni el nuevo aprendizaje es asimilado del modo literal en el que consta en los planes de estudio, ni el viejo conocimiento queda inalterado. A su vez, la nueva información asimilada hace que los conocimientos previos sean más estables y completos.

1.1.2 La ingeniería didáctica

La ingeniería didáctica es una metodología que va asociada a la teoría de situaciones didácticas (TSD) de Brousseau. Esta metodología lleva el nombre de ingeniería didáctica porque el proceso que se sigue es como la que en cierta forma realiza un ingeniero para hacer sus proyectos, por lo tanto, el profesor concibe, realiza, observa y analiza secuencias de enseñanza para lograr el aprendizaje de un objeto matemático determinado para un grupo específico de estudiantes, además a medida que las pone en práctica lo planteado evoluciona de acuerdo a las interacciones que se producen en clase. El propósito de la ingeniería didáctica como se indica en Calderon y Leon (2005) es proporcionar elementos desde esta particular metodología, como un insumo para la discusión sobre los modos de investigar problemas relacionados con el desarrollo de competencias discursivas en campos particulares como el de las matemáticas.

Debemos tener en cuenta que la labor del docente debe ser, garantizar que el medio de aprendizaje, y por lo tanto la situación construida, va a funcionar para construir el saber de un objeto matemático en los estudiantes. Por todo lo anterior se puede señalar que el diseño de situaciones didácticas, que permitan enseñar determinados conceptos a un grupo de alumnos, siguiendo las indicaciones, condiciones y organización de todos los aspectos que constituyen la teoría de situaciones de Brousseau, recibe el nombre de ingeniería didáctica.

1.1.2.1 Fase de análisis preliminar

Es la fase en la que se busca profundizar tres dimensiones:

- **Epistemológica:** Aquí se ha analiza las características del saber en juego, una reseña histórica, los aspectos teóricos relacionados, la forma de abordarlo y sus posibles dificultades.
- **Cognitiva:** Aquí se analiza la forma en que los estudiantes a quienes va dirigida la enseñanza interpretan el conocimiento matemático en cuestión y sus dificultades teniendo en cuenta sus conocimientos acumulados en toda su formación educativa.
- **Didáctica:** Aquí se analiza la forma en que se desarrolla el proceso de enseñanza del objeto de estudio, así como los recursos didácticos y las estrategias de dictado en experiencias previas,

1.1.2.2 Fase de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas

En esta fase se busca identificar las variables didácticas llamadas también variables de comando, Artigue (1995) considera dos tipos de variables de comando:

Variables macro-didácticas o globales que son las que están asociadas con la organización y gestión del medio, se dice que son concernientes a la organización global de la ingeniería didáctica.

Variables micro-didácticas o locales que son las asociadas a la organización local de la ingeniería, o sea la organización de una secuencia o fase dependiente del contenido didáctico en que se enfoca la enseñanza.

El análisis a priori se convierte en un análisis de control de significado "Comprende una parte descriptiva y una predictiva, centradas en las características de la situación diseñada y que se pretende presentar en la clase a los estudiantes", esta parte es fundamental ya que describimos prediciendo que es lo que esperamos que respondan los estudiantes en cada situación propuesta.

1.1.2.3 Fase de experimentación

Esta fase inicia con el contacto entre investigador- profesor, observador y los estudiantes objeto de estudio. Esta fase es sumamente importante ya que desde el punto de vista de la investigación se registran los principales momentos de la clase (por escrito o de manera visual) ya que servirá de fuente para realizar el análisis a posteriori y finalmente la correspondiente contrastación con el análisis a priori con la respectiva interpretación. La experimentación supone:

- La explicitación de las condiciones de realización de la investigación a los estudiantes seleccionados;
- El establecimiento del contrato didáctico;
- La aplicación de los instrumentos diseñados en la fase anterior;
- El registro de las observaciones realizadas durante la experimentación.

Cuando la experimentación dura más de una sesión, se recomienda hacer un análisis a posteriori local, con la finalidad de hacer las correcciones necesarias de una sesión a otra.

1.1.2.4 Fase de análisis a posteriori y evaluación

Esta fase se basa en el conjunto de datos recogidos en la experimentación, así como en las producciones de los alumnos en el aula. Estos datos se contemplan con metodologías adicionales como cuestionarios, entrevistas, etc. Aplicados en distintos momentos de la enseñanza.

1.1.3 Teoría de situaciones didácticas

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) fue propuesta por el Frances Guy Brousseau en la década de los sesenta. Esta teoría propone un modelo para abordar la enseñanza de la matemática en la cual podemos identificar la acción, formulación, validación e institucionalización de una situación. Panizza (1986) señala que dentro de la disciplina "La didáctica de la matemática de la escuela francesa", Guy Brousseau desarrolla la "Teoría de situaciones". Se trata de una teoría de la enseñanza, que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea.

Ramirez (2009) señala: "La descripción sistemática de las situaciones didácticas es un medio más directo para discutir con los maestros acerca de lo que hacen o podrían hacer, y para considerar cómo éstos podrían tomar en cuenta los resultados de las investigaciones en otros campos. La Teoría de las Situaciones Didácticas aparece entonces como un medio privilegiado, no solamente para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos, sino también para producir problemas o ejercicios adaptados a los saberes y a los alumnos y para producir finalmente un medio de comunicación entre los investigadores y con los profesores".

La Teoría de Situaciones Didácticas está sustentada en una concepción constructivista -en el sentido piagetiano- del aprendizaje, concepción que es caracterizada por Brousseau (2000) de esta manera: "El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del estudiante, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje". También es importante señalar que una situación didáctica, es una situación construida con la intención de hacer que los estudiantes adquieran un determinado saber, lo que dice Brousseau (1986) de "situación": Es un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas "situaciones" requieren de la adquisición ´anterior` de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso "genético".

1.1.3.1 Tipos de interacciones de las situaciones con el medio

La teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau distingue cuatro tipos de interacciones con el medio y son:

- **Situaciones de acción**: Son aquellos momentos en los que el estudiante en forma individual y haciendo uso de sus conocimientos previos, hace contacto con el problema matemático realizando intentos de familiarización. Utiliza acciones que implican operaciones que ya conoce y realiza de manera mecánica.

Es una forma en que el alumno interactúa con el medio didáctico para llegar a la resolución del problema y a la adquisición de conocimientos.

Esta situación debe permitir al alumno juzgar el resultado de su acción, ajustarla, sin la intervención del profesor, gracias a la información que recibe de la misma situación, afirma que "En las situaciones de acción el alumno debe actuar sobre un medio (material, o simbólico); la situación requiere solamente la puesta en acto de conocimientos implícitos" (Panizza y Bartolomé, 2003).

- **Situaciones de formulación**: Este tipo de situaciones propicia que el alumno intercambie y comunique información verbal o escrita en lenguaje matemático. Aquí el alumno empieza a expresar sus propias ideas, pero reconoce y utiliza las nociones como instrumentos para resolver cuestiones matemáticas, pero no como objeto de estudio en ellos mismos Panizza y Bartolomé (2003) señala que en las situaciones de formulación un alumno (o grupo de alumnos) emisor debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno (o grupo de alumnos) receptor que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) en base al conocimiento contenido en el mensaje.

- **Situaciones de validación**: En estas situaciones el alumno debe probar la exactitud y la pertinencia de su mensaje matemático ante un interlocutor, quien puede pedir explicaciones. El alumno en esta situación empieza a justificar lo que hizo, identificar sus errores y corregirlos, es el propio alumno quien valida sus conocimientos. Panizza (1986) sostiene que: Las afirmaciones propuestas por cada grupo son sometidas a la consideración del otro grupo, que debe tener la capacidad de "sancionarlas", es decir ser capaz de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, oponer otras aserciones.

- **Institucionalización**: La institucionalización consiste en relacionar las producciones de los alumnos y el saber cultural. No debe ser solo una presentación del saber desvinculado del trabajo anterior en el aula, sino que debe sacar conclusiones a partir de sus producciones, recapitular sistematizar, ordenar, vincular lo trabajado en diferentes momentos, etc. Para Brousseau (2000) la consideración "oficial" del objeto de enseñanza por parte del alumno, y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la institucionalización. La institucionalización es de alguna manera complementaria a la devolución reconoce en estos dos procesos los roles principales del maestro, y afirma: "En la devolución el maestro pone al alumno en situación a-didáctica o pseudo a didáctica. En la institucionalización, define las relaciones que pueden tener los comportamientos o las producciones "libres" del alumno con el saber cultural o científico y con el proyecto didáctico: Da una lectura de estas actividades y les da un status" podemos resumir lo anterior según (Rios, 2007); en resumen tenemos:

a) Acción: intervienen el alumno y el medio;

b) Formulación: intervienen los alumnos;

c) Validación: intervienen los alumnos y se tratan de convencer sobre la validez la información.

1.1.3.2 Situación a-didáctica

Llamada también fase a-didáctica dentro de una situación didáctica; son momentos de aprendizaje en los cuales el estudiante se enfrenta solo a la resolución de un problema, sin que el profesor haga intervenciones relacionadas al conocimiento que se pretende que el estudiante aprenda, Brousseau (2012) define: "El término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte, no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego".

1.1.3.3 Devolución

Es un proceso que requiere una negociación continua entre el maestro y el estudiante, generalmente implícito, en la que el docente busca que el estudiante se apropie o haga suya una situación a-didáctica, es decir le delegue la exploración. Brousseau (1986) sostiene que: "La devolución es el acto por el cual el enseñante hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta el mismo las consecuencias de esta transferencia".

También respecto a la devolución en la investigación de Panizza (1986) se señala que, (…) la devolución parece ser un proceso que se desarrolla durante toda la situación a-didáctica y no solamente en la fase de establecimiento (…). El maestro es entonces el responsable no solamente de una disciplina aceptable en la clase, sino menos superficialmente, del compromiso persistente del alumno en una relación a-didáctica con el problema (…).

1.1.3.4 El contrato didáctico

Es un sistema de obligaciones reciprocas establecida entre el alumno y el docente, comprende el conjunto de comportamientos que el docente espera del estudiante y el conjunto de comportamientos que el estudiante espera del docente en relación con el saber.

1.1.3.5 Obstáculo

Es un conocimiento que tiene su propio dominio de validez y fuera de este dominio es ineficaz y puede ser es fuente de errores y dificultades. Para superar tales obstáculos es necesario diseñar situaciones didácticas para hacer a los estudiantes conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y para ayudarlos a conseguir sus propósitos.

1.1.4 Problemas de la tangente y la velocidad

Para ver los problemas de tangente y velocidad según Haaser & Sullivan (1990) señala que la noción de diferenciación y de derivada proviene de ciertos problemas específicos como es encontrar las tangentes a las curvas y la determinación de los valores máximos y mínimos de las funciones. La derivada es un tipo especial de límite relacionado geométricamente con la pendiente de la recta tangente y físicamente con la razón de cambio instantáneo. En la figura 1, la recta τ es la tangente a la gráfica de la función g en el punto P_0. La recta $\mathcal{L}$ que pasa por los puntos P_0 y Q se llama secante, cuando Q se aproxima a P_0 a lo largo de la curva, la recta $\mathcal{L}$ se aproxima a coincidir con τ convirtiéndose en recta tangente.

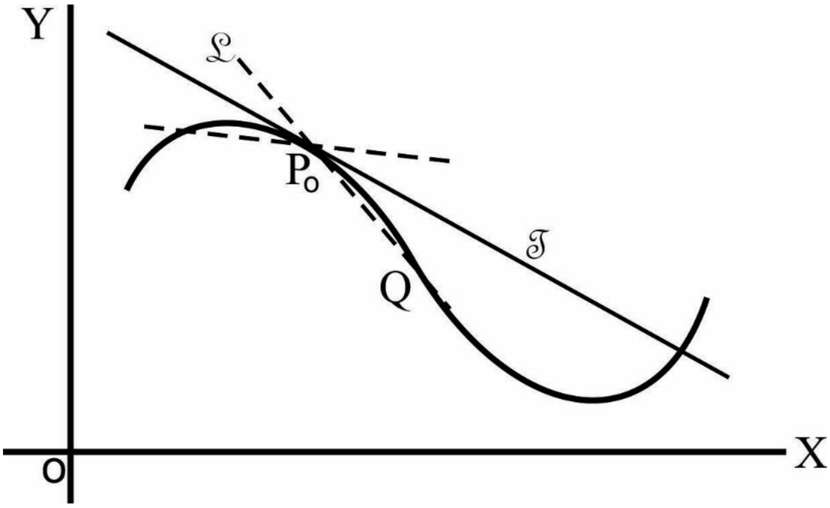


Figura 1. Recta tangente a una curva
Fuente: Haaser & Sullivan (1990)

Sea $Q = (x, g(x))$ un punto sobre la gráfica de g distinto de $P_0 = (x_0, g(x_0))$. La recta:$\mathcal{L} = \{P_0 + t(Q - P_0)/ \ \ t \in \mathbb{R}\}$ y si reemplazamos los valores se tiene:

$\mathcal{L} = \{(x_0, g(x_0)) + t(x - x_0, g(x) - g(x_0))/ \ \ t \in \mathbb{R}\}$ que pasa por los puntos $P_0 \ \ y \ Q$es una secante a la grafica g, esta secante es paralela a:

$Q - P_0$=$(x - x_0, g(x) - g(x_0))$ y tiene pendiente $f(x) = \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ con $x \neq x_0$

Si la gráfica de g no tiene interrupciones, entonces esperamos que $x - x_0$ proximo a cero sea equivalente proximo a P_0. Por lo tanto si x se aproxima lo más que se quiera a x_0 entonces habrá un límite de f en $x_0$que será denotado: m $= \lim_{x_0} f$= $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ si existe. Este límite particular relacionado con el concepto geométrico de tangente de la gráfica de una función g en un punto$P_0 = (x_0, g(x_0))$ se denomina Derivada (Haaser & Sullivan, 1990).

Ejemplo. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $P(1,1)$

También se tiene el concepto de derivada desde un punto de vista físico está relacionado con la velocidad, en esta investigación es importante también el concepto desde lo físico ya que podemos apreciar movimiento y de esta manera se desarrolla el pensamiento variacional, es conveniente empezar con un problema físico que requiere la noción de límite. Cuando una partícula se mueve a lo largo de una línea recta, el tiempo cambia y la posición de la partícula en la recta también cambia así:

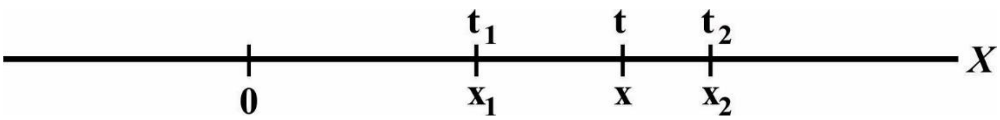


Figura 2. Posición de una partícula
Fuente: Haaser & Sullivan (1990)

Denotemos por x(t) la distancia dirigida de la partícula a punto de referencia 0 en el instante t; entonces x = {(t, x(t))} es una función —la función tiempo-desplazamiento. En el tiempo t_1 la partícula tiene la posición $x_1 = x(t_1)$ y en el tiempo t_2 la posición $x_2 = x(t_2)$ La distancia $x_2 - x_1$ se llama desplazamiento de la partícula en el intervalo de tiempo [t_1, t_2]. Si, como se muestra en la figura, $x_2 > x_1$ entonces $x_2 - x_1$ es un desplazamiento positivo. La velocidad media de la partícula durante el intervalo de tiempo [t_1, t_2] está definida como:

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Pero ahora se quiere determinar velocidad instantánea de la partícula en el instante t_0 cuando está pasando por la posición $x_0 = x(t_0)$ Si encontramos las velocidades medias sobre intervalos de tiempo más y más pequeños que comiencen o terminen en t_0, estas velocidades medias pueden aproximarse a un valor bien definido denotado por $x'(t_0)$. Este valor límite

$$x'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

de las velocidades medias medidas sobre intervalos de tiempo más y más pequeños alrededor de t_0, si existe, es ciertamente una medida de cuán rápido se mueve la partícula cerca de t_0. Es, pues, natural definir la velocidad, $v(t_0)$ en el tiempo t_0, como $x'(t_0)$. El autor señala que es favorable representar gráficamente el desplazamiento y la velocidad. Para esto ha dibujado la gráfica de la función tiempo- desplazamiento x = {(t, x(t))}. En el tiempo t, la partícula tiene un desplazamiento $x_1 = x(t_1)$ desde O y está representada por el

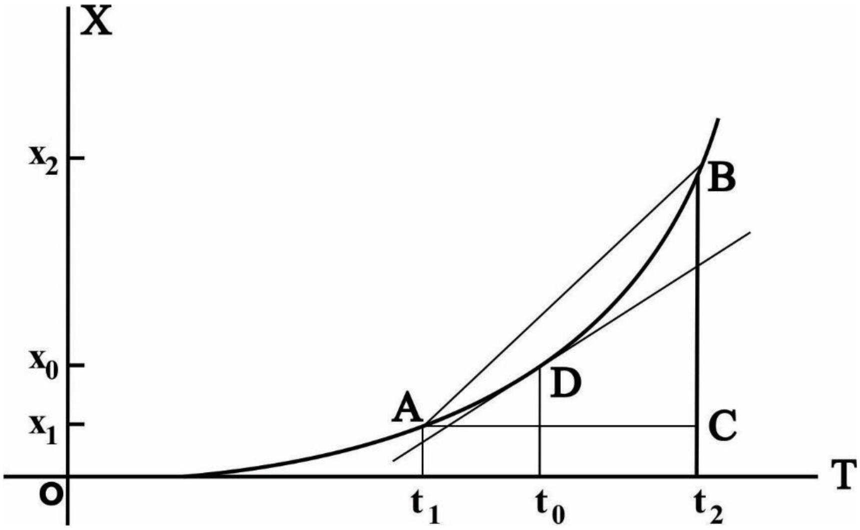


Figura 3. Gráfica de la función tiempo-desplazamiento

Fuente: Haaser & Sullivan (1990)

punto $\boldsymbol{A} = (t_1, x(t_1)$. Análogamente, en t_2 la partícula tiene un desplazamiento $x_2 = x(t_2)$ desde 0 y está representada por el punto B. La velocidad media de la partícula en el intervalo de tiempo [t_1, t_2] es

$$\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

y corresponde geométricamente a la pendiente de la secante [A, B]. La velocidad instantánea $x'(t_0)$ corresponde a la pendiente de la tangente a la gráfica de la función desplazamiento x en el punto D = $(t_0, x(t_0)$ (Haaser & Sullivan, 1990).

1.1.5 Definición de la derivada Stewart (2017)

La derivada de una función f en un número x_0, denotada por $f'(x_0)$, es: $\mathrm{f}'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ si este límite existe.

Si se escribe $x = x_0 + h$, entonces $h = x - x_0$, h tiende a 0 si y solo si x tiende a x_0 , Haciendo estas sustituciones se puede escribir:

$$\mathrm{f}'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

1.2 Antecedentes

a) Internacionales

Badillo (2003) historia y rigor de una iniciación al cálculo: una experiencia cubana. El objetivo de esta investigación ha sido identificar y describir la relación e integración entre el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento didáctico del contenido con relación al concepto de derivada de profesores de matemática en ejercicio. Describe la naturaleza y las formas de conocer el concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje. Las conclusiones a la que llega partiendo de la integración de los análisis macro y micro, se sugieren algunos lineamientos para la formación permanente del profesorado, basados en el ciclo de investigación que propone la teoría APOE y los organizadores del currículo.

Mendoza (2003) este trabajo de investigación lo desarrolló en el marco de la línea de investigación pensamiento y lenguaje variacional. Se basa en la teoría de situaciones didácticas, en la cual se adecuó y se experimentó una situación didáctica modificada “La derivada como una organización de las derivadas sucesivas”, con el fin de estudiar el comportamiento del estudiante al momento de identificar la función en distintas representaciones algebraica, numérica y gráfica de la primera y segunda derivada, en sus conclusiones señala que en la etapa de acción los estudiantes tienen mayor dificultad en el tratamiento de las representaciones gráficas y numéricas de la primera y segunda derivada. Los estudiantes trabajan mejor en lo algorítmico que en lo visual-gráfico, mostrando que sus conocimientos en álgebra son predominantes en el curso de cálculo diferencial. Más adelante el mismo autor menciona que “Los estudiantes que participaron de esta investigación manifestaron que es más fácil de asimilar el tema de derivadas por los métodos gráficos o numéricos, comparando con el algebraico”. Es decir que las situaciones-problemas deben estar orientadas más en la parte de representaciones gráficas o numéricas, para reforzar el tratamiento de ambas representaciones en la primera derivada. Asimismo, considerando lo manifestado por los estudiantes del presente trabajo, se debe incorporar los métodos gráficos en las situaciones-problemas, para facilitar la comprensión del objeto matemático la derivada.

Sanchez *et al*. (2008) en esta investigación revela que la comprensión de la noción de derivada presenta dificultades para los estudiantes de bachillerato (16-18 años) y primeros años de cálculo en la universidad. En dicho contexto, este trabajo revisa y organiza las aportaciones de las investigaciones hechas en matemática educativa para identificar el conocimiento generado y las áreas donde es necesario contribuir con información. La revisión se ha estructurado considerando: a) lo que se conoce sobre la comprensión de la derivada de una función en un punto; b) el papel que desempeñan los sistemas de representación; c) las características del desarrollo del esquema de derivada. Por último, se identifican líneas de investigación necesarias para aumentar nuestra comprensión de cómo los estudiantes dotan de significado y usan el concepto de derivada. Este trabajo también indica que los estudiantes pueden desarrollar de manera mecánica los problemas estándar, pero en lo que tienen problemas es en tener la noción del significado de la derivada.

Aguilar y Riestra (2009) en este trabajo de investigación se desarrolla y experimenta una propuesta alternativa para la enseñanza del concepto dentro de la derivada algebraica tomada del desarrollo de la derivada por Riestra (2001), lo que hace el autor es no utilizar la idea delimite en su propuesta, más bien utiliza problemas de máximos y mínimos en la que se desarrollan diferencias de función en términos de incrementos, finalmente nos indica que los problemas de máximos y mínimos adecuadamente seleccionados y ordenados permiten desarrollar gradualmente la teoría matemática involucrada en el concepto de derivada.

Ramírez (2009) el aspecto central de este trabajo es presentar algunas consideraciones abordando la complejidad de la función derivada como objeto a enseñar y como objeto enseñado, desde la epistemología estándar y echar una mirada al mismo objeto desde otras epistemologías. El autor señala que se evidencia desde la historia de las matemáticas que fueron muchas las personas que a través de distintas épocas ayudaron con sus trabajos a construir lo que hoy conocemos como cálculo diferencial e integral. El rigor de las matemáticas como lo conocemos hoy es producto del refinamiento y avance de las matemáticas a través de los trabajos de cientos de matemáticos en distintas épocas. El proceso de desarrollo de la función derivada es complejo, demorado y tortuoso. La historia da cuenta que su desarrollo no fue lineal, ni producto de la genialidad de una o dos personas. En el proceso histórico de la función derivada subyacen por lo menos tres epistemologías:

La de Lagrange (1736-1813), la de Cauchy (1789-1957) y la de Robinson (1918-1974).

La didáctica de la matemática reporta trabajos e investigaciones en su mayor parte en la epistemología de Cauchy, siendo la más rigurosa y difícil de aprender por parte de estudiantes de último año del colegio o primeros semestres de universidad.

El lenguaje de la función derivada cambia de acuerdo con la epistemología usada. Oviedo & Kanashiro (2010) las dificultades presentadas por los estudiantes al abordar los temas de cálculo en los primeros años de la universidad que son detectados en nuestra práctica diaria y que coinciden además con numerosas investigaciones en didáctica de la matemática nos indican que el abordaje de la noción de límite resulta ser uno de los problemas primordiales. La misma junto a la idea de infinito se constituye, según otros investigadores, en verdaderos obstáculos epistemológicos, los que están ligados a las dificultades directamente vinculadas con las formas de considerar el conocimiento o con los conocimientos mismos, lo que conlleva considerar que el conocimiento científico no es el resultado de un proceso continuo, por el contrario, requiere de algunos momentos de ruptura con conocimientos anteriores. Por otra parte, Azcarate *et al.* (2011) señala que tanto la enseñanza como el aprendizaje del concepto de límite presenta enormes dificultades pues involucran aspectos cognitivos que no pueden ser generados solamente a partir de la definición matemática, ya que uno puede recordar la definición del concepto de límite, pero la construcción de la concepción fundamental es algo muy distinto. La primera idea del límite es una noción dinámica de aproximación y la manera en que se utiliza este concepto para resolver problemas está relacionada con las propiedades del mismo y bastante alejada de la definición formal. Muchos estudiantes creen comprender las implicaciones del concepto de límite porque son capaces de resolver los ejercicios que se les proponen, sin embargo, no comprenden la definición formal, donde los cuantificadores tienen un sentido preciso que la diferencia de su uso ambiguo en el lenguaje natural, provocando grandes obstáculos cognitivos. Para los alumnos la palabra límite tiene, en la mayoría de los casos, el sentido de “no sobrepasable”, es decir no se sobrepasa, pero se alcanza o ni se sobrepasa ni se alcanza. Según Artigue (1995), las dificultades ligadas al concepto de límite se clasifican en tres categorías: Los obstáculos epistemológicos, las dificultades ligadas a la dualidad proceso / objeto y las dificultades ligadas al pasaje de una aprehensión intuitiva del concepto a su aprehensión "formal".

Vrancken & Engler (2014) este artículo se centra en la investigación realizadas sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada desde la perspectiva del pensamiento y lenguaje variacional. Se describen y analizan aportes de investigadores que estudiaron la problemática en el aula. Se incluye la revisión de libros y artículos de investigación. El trabajo se centra en el aporte de Crisólogo Dolores y algunos investigadores de habla hispana. En el análisis se tuvo en cuenta la identificación del problema, los objetivos que guiaron las investigaciones, las distintas metodologías utilizadas, las formas y condiciones en las que fueron llevadas a cabo, así como los resultados obtenidos. Los investigadores indican que tanto con la matemática elemental como con la avanzada y su papel en las ciencias lo transforman en un conjunto de conocimientos con valor teórico y empírico indispensable en la educación superior. El currículo de matemática y los métodos de enseñanza durante mucho tiempo fueron inspirados sólo por ideas que provienen de la estructura de las matemáticas formales y por métodos didácticos fuertemente apoyados en la memoria y en la algoritmia. Frecuentemente el estudiante se ve imposibilitado de percibir las relaciones que tienen los procedimientos con las aplicaciones más cercanas a la vida cotidiana y se priva de experimentar sus propios aprendizajes en escenarios diferentes a los que se les proveen en el aula. En este sentido, Moreno (2005) expresa: La enseñanza de los principios del cálculo resulta bastante problemática y aunque seamos capaces de enseñar a los estudiantes a resolver de forma más o menos mecánica algunos problemas estándar, o bien a realizar algunas derivadas o integrales, tales acciones están muy lejos de lo que supondría una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento de esta parte de las matemáticas (p. 82). Para el trabajo en el aula universitaria, es importante debatir cómo los alumnos acceden al discurso matemático escolar. Cantoral *et al.* (2015) señalan que la enseñanza habitual del análisis matemático logra que los estudiantes deriven, integren, calculen límites elementales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión. De modo que aun siendo capaces de derivar una función no puedan reconocer en un cierto problema la necesidad de una derivación (pp. 269-270). La construcción del concepto de derivada no es fácil, por ejemplo, para los estudiantes de ingeniería. Sin embargo, su significado y uso en la resolución de problemas en la vida profesional es indispensable. Así, por ejemplo, un ingeniero civil utiliza estas y otras herramientas de la matemática para diseñar un puente. Seguidamente los investigadores hacen el análisis del trabajo de C. Dolores el cual durante 15 años ha investigado sobre esta problemática e indican que el autor abordó como objeto principal de estudio al proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática de las variables en el bachillerato, dado que numerosos trabajos realizados desde 1996 por él mismo han mostrado que estudiantes, tanto en ese nivel como los que inician la universidad, manifiestan un escaso desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional y, por consiguiente, escasa comprensión acerca de los conceptos, procedimientos y relaciones básicas. Este es el problema central en las investigaciones realizadas por este. En la dirección de la enseñanza y aprendizaje de la derivada, Dolores y Garcia (2011) presentó en su tesis doctoral un profundo análisis de la problemática en relación a la enseñanza del cálculo diferencial y en especial del concepto de derivada. Analizó las causas que hacen que los estudiantes del nivel medio superior comprendan escasamente las ideas básicas del cálculo y en especial las relacionadas con la derivada. Como logro principal, enunció una propuesta didáctica para la enseñanza del tema en el bachillerato. En su diseño adoptó a la variación física como eje rector de los contenidos. Logró un acercamiento intuitivo a la derivada utilizando problemas de rapidez de la variación (sin un tratamiento riguroso de los contenidos del cálculo). Los resultados mostraron que los estudiantes difícilmente desarrollan un pensamiento y lenguaje variacional, incluyendo aquellos que cursan sus estudios preparatorios y que inician estudios superiores. Señaló que las causas atribuidas a esta problemática se relacionan tanto con los procesos de asimilación de los conceptos, procedimientos y relaciones básicas, así como con la planificación y ejecución del proceso de enseñanza. Esta problemática no es exclusiva de México, país donde se desarrolló el proyecto, sino que se extiende a otros países latinoamericanos -en el apartado 2.2 se presentan algunas investigaciones que refuerzan esta afirmación. Al analizar el trabajo de C. Dolores se observa que mantiene un estrecho vínculo entre la teoría (pensada desde hacer matemática educativa) y la práctica (considerada como la intervención en la educación matemática). A lo largo de toda su obra describe una interacción continua entre sus investigaciones, su trabajo y transferencia al aula. Se nota, además, que los abordajes al tema fueron cambiando y evolucionando y, de trabajar solamente cuestiones didácticas, se fueron agregando aspectos de naturaleza histórico-epistemológica para luego trabajar en proyectos que propicien al desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional de los alumnos. Se puede decir, también, que las perspectivas de análisis del concepto de derivada en cada uno de los autores analizados, es visto a través de sus significados asociados vigentes en el discurso escolar actual, como son el gráfico (a través de la recta tangente) y el algebraico. En los diferentes trabajos se percibe una preocupación por el control de los significados en uso. De esto último hay que destacar que no se observa el interés de los investigadores por involucrar significados que se usaron en otras épocas, como puede ser por ejemplo la diferencia y el diferencial, entre otros. La inquietud principal es saber cómo "conectar" dichos significados en un diseño instruccional. Dicha conexión podría establecerse a partir de la cercanía epistemológica de cada significado, por ejemplo, se pueden conectar en un diseño de situación las nociones de variable y variación para enfatizar en el aprendizaje del concepto de función. En otros casos es posible hacer uso de las nociones diferencia y diferencial para abordar la derivada. En ese sentido, no es lo mismo una buena intención para diseñar una situación o preparar una clase, que hacer uso de una metodología que permita conectar y controlar los significados. Esta investigación da pie a que mi trabajo tenga razón de ser.

Lozano (2011) en esta investigación el autor indica que el concepto de la derivada, como un cociente incremental infinitesimal, fue de gran ayuda en la resolución de muchos problemas tanto matemáticos como físicos a través de la historia, es así como algunos autores dicen que "La derivada no es una aplicación del concepto de límite sino todo lo contrario, el cálculo de derivadas es el que ha conducido hacia este concepto". En la enseñanza de las matemáticas se hace necesario trabajar haciendo uso de modelos sencillos y prácticos, es por eso que esta propuesta para el desarrollo del concepto de la derivada se inicia a través del cociente incremental, que conlleven al estudiante a conceptualizar el límite de una forma natural.

González *et al.* (2013) el presente artículo expone, en términos generales, la problemática que envuelve la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial, referenciado en las investigaciones publicadas en el área de matemática educativa. En la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada y la definición de variación encontramos una serie de obstáculos para lograr su comprensión y aplicación. Esto hace necesaria la búsqueda de nuevas estrategias didácticas que contribuyan a que los estudiantes logren conocimientos significativos. En este trabajo indican los autores que presentan una propuesta de un problema tipo que puede ser reproducido en un experimento de laboratorio y que muestra tener un potencial didáctico importante, dado que puede fomentar el desarrollo de ciertas habilidades cognitivas de tal manera que propicie en el estudiante, la percepción de que los problemas presentados en clase, no son productos prefabricados cuyo trabajo sobre ellos culmina al encontrar la solución, sino que, al contrario, es posible la búsqueda de más variantes que contribuyan a refinar las situaciones planteadas en clase (Ruiz, 2015) del objetivo fundamental de la investigación, fue propiciar que los estudiantes pusieran en juego sus ideas acerca de la derivada. Directamente relacionadas con la cuantificación de la variación por medio de las diferencias, con la cuantificación relativa de la variación por medio de la velocidad media, con la idea de límite del cociente incremental, con las pendientes de tangentes y con la velocidad instantánea.

La metodología empleada en la experimentación implica la presentación de un fenómeno físico en una secuencia abierta en la cual se plantean al estudiante cuestionamientos relacionados con la identificación de variables, forma en que éstas cambian, con qué rapidez lo hacen, estimaciones y predicción de valores futuros, etc.

Camargo (2013) la investigadora en este trabajo plantea un diseño experimental para poner a prueba intervenciones didácticas para la enseñanza de la derivada, se diseñó una intervención didáctica para un curso de cálculo 1A del primer bimestre 2013. La intervención didáctica nos indica que consiste básicamente en rediseñar el curso de modo de incluir un mayor número de presentaciones de ejercicios y ejemplos en los cuales la traducción entre los registros de representación gráfico y algebraico, para todos los temas fundamentales del curso: Álgebra de funciones, composición, continuidad y derivada nos muestra un conjunto de ejercicios que presenta enfatizando el trabajo con traducción de registros, los ejercicios tiene diferentes representaciones semióticas luego ella compara con el grupo intervenido e indica que ellos aplican conversión de registros y obtienen mejores resultados en actividades de producción de representaciones complejas. También indica que los estudiantes del grupo de intervención cometen menos errores conceptuales. En síntesis, los registros de representación semiótica como por ejemplo el algebraico y el gráfico, juegan un rol importante en la mejor conceptualización por parte de los estudiantes, y consecuentemente en la enseñanza**.** Este trabajo nos aclara en el sentido de que nuestra propuesta debe considerar el registro de representación semiótica ya que no indica y muestra que juegan un papel muy importante en la conceptualización de la derivada.

López (2013) el objeto matemático para enseñar es la introducción a la derivada desde un punto de vista conceptual, abordando exclusivamente el cálculo de la derivada en funciones muy elementales. El investigador señala que la derivada es un objeto nuevo para los alumnos y para introducirse en ella deben tener los siguientes conocimientos

Dependencia entre dos variables: Función, variable independiente y dependiente, dominio, imagen, gráfica, fórmula, crecimiento y decrecimiento, variación entre dos valores del dominio, tasa media de variación y extremos relativos y absoluto.

Función lineal y afín, pendiente de una recta, velocidad media, tangente y secante a una circunferencia, velocidad medida por un velocímetro. Lectura de interpretación de gráficos (en especial de espacio-tiempo): Intervalos de crecimiento y extremos. Cálculo de variaciones y de tasas de variación media a partir de la gráfica o de la fórmula. En especial, del cálculo del espacio recorrido y de la velocidad media. Cálculo e interpretación de la pendiente de una recta a partir de la ecuación de la misma o de su representación gráfica. Este trabajo es importante porque aporta en temas centrales para el diseño del trabajo de investigación.

Pineda (2013) el investigador hace un análisis de las primeras aproximaciones al concepto de la derivada como el método de Fermat para hallar máximos y mínimos. El método de las tangentes de Fermat. El método de Descartes para hallar la normal a una curva. El método de Newton para determinar la cuadratura de una curva. El método de las fluxiones de Newton. El método de las diferenciales de Leibniz. De los diferenciales de Leibniz a los infinitesimales de Cauchy. El comienzo del rigor en el cálculo luego hace unas reflexiones didácticas sobre el concepto de la derivada e indica aspectos disciplinares. Finalmente hace una propuesta didáctica usando el Geogebra.

Do Carmo (2003) el investigador hace un análisis sobre el aprendizaje de la derivada indicando que está relacionada sobre los diferentes pensamientos conectados al proceso del aprendizaje de un concepto. Trabajo con la propuesta de David Tall en la teoría de los tres mundos de las matemáticas, elementos que permitiesen comprender como los humanos aprenden a pensar matemáticamente. En este trabajo de investigación analiza 9 corrientes de pensamiento involucradas específicamente al concepto matemático de la derivada y las corrientes que da énfasis son las que permiten observar elementos del aprendizaje, como el mundo corporificado que presenta aspectos sensibles y perceptibles a los sentidos. También es importante señalar que para entender este concepto se debe transitar por lo gráfico, numérico y simbólico, hace uso el trabajo de Kendal (2001) en la que resalta que la comprensión de la derivada está ligada a las articulaciones de las representaciones gráfica, numérica y simbólica y los procesos cognitivos de formulación, interpretación y elaboración, así mismo 8 habilidades necesarias para la comprensión de este concepto. El autor también señala lo que dijo D'alambert que para entender la derivada se necesita principalmente haber entendimiento del límite.

Medina y Delgado (2017) los investigadores detectan la dificultad que tienen los estudiantes de ingenierías para el aprendizaje significativo de la derivada entonces indican que el objetivo de esta investigación fue desarrollar una estrategia de enseñanza aprendizaje utilizando las Tecnologías de la Información y la Comunicación como herramientas de apoyo para el aprendizaje significativo del concepto de derivada en estudiantes de ingeniería, elaboran una estrategia de enseñanza aprendizaje utilizando blog educativos lo cual les permite llegar a conclusiones importantes como es que los blog educativos son favorables para lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes de ingenierías, también al haber hecho un análisis en cómo trabajan los docentes de esta materia llegaron a la conclusión que lo que se trabaja en derivada son preguntas intercaladas y gráficos que es un limitante en su desempeño como docentes. También indican que al analizar los conocimientos previos.

Llegaron a la conclusión que son bajos ya que desconocen factorización, trazado de funciones, límites, pendientes de recta. Como vemos este trabajo fundamenta lo que nosotros estamos trabajando no será con blog educativos, pero coadyuvan a crear situaciones didácticas adecuadas para el aprendizaje de la derivada.

Fuentealba (2017) en esta investigación el autor analiza el esquema de la derivada en estudiantes universitarios, con instrucción previa en cálculo diferencial por medio de la identificación y caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema y la posible tematización al mismo. Aplicó un cuestionario a 103 estudiantes para identificar y caracterizar los subniveles denominados inter y trans.

b) Nacionales

Advíncula (2010) en este trabajo de investigación declara que "Se requiere de situaciones didácticas diseñadas de modo tal que los alumnos sean conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y puedan lograrlo". En la búsqueda de estas situaciones didácticas, la misma autora, resalta la importancia de realizar un análisis preliminar (en sus dimensiones epistemológica, didáctica y cognitiva), para un estudio de investigación sobre la comprensión de un objeto matemático, pues brinda información sobre los posibles obstáculos que los estudiantes podrían presentar al abordar un concepto matemático, como lo menciona en sus recomendaciones: El análisis preliminar, realizado en sus dimensiones epistemológica, didáctica y cognitiva, contribuyó al diseño de las situaciones didácticas y brindó información sobre los obstáculos que podrían presentar los alumnos para aprender el concepto de función exponencial.

Pozsgai (2014) el objetivo general de este trabajo de investigación fue diseñar una secuencia de tareas que ayude a una mejor comprensión del concepto de derivada por los estudiantes y permita identificar dificultades en el aprendizaje del concepto. El investigador indica que dicho objetivo se logró a partir del logro de los objetivos específicos, debo indicar que sus objetivos específicos fueron diseñar una secuencia de tareas que contribuya a una mejor comprensión del concepto de derivada y de su interpretación geométrica como pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto. Y también identificar posibles deficiencias en la comprensión de conceptos previos que son necesarios para el aprendizaje significativo del concepto de derivada. Y luego Identificar algunas dificultades en el aprendizaje del concepto de derivada. Observando la secuencia de tareas diseñadas y el análisis que hace es claro que ha logrado que sus estudiantes logren un aprendizaje significativo además ha podido identificar las deficiencias que tiene sus estudiantes respecto a los saberes previos y ha identificado las dificultades que los estudiantes tiene en el aprendizaje de la derivada. Respecto a las recomendaciones que hace el investigador es interesante ya que recomienda a los docentes dar más importancia a los saberes previos, también indica que debemos usar la relación entre varios registros y nos tomemos el tiempo necesario para diseñar las tareas tomando en cuenta varios factores por ejemplo la ubicación del curso dentro de su currículo el tipo de alumno, el grado de madurez e ir refinando dichas tareas de acuerdo a los resultados. Una recomendación interesante que nos hace luego es que primero hay que trabajar los conceptos con palabras, hasta que sean familiares y luego ir gradualmente reemplazando las palabras con símbolos en esta línea están trabajando varios investigadores. El investigador dice que las secuencias de tareas consideran proyectos de aprendizaje a largo plazo y además estas tareas deben tratar de mantener la demanda cognitiva de los alumnos para evitar caer en la comprensión meramente instrumental es decir saber hacer, pero no el porqué, e invita a diseñar la continuación.

Chávez (2015) en esta investigación se analizó la posibilidad de que sea efectiva una transferencia de conocimientos previos sobre la derivada y recta tangente, que poseían alumnos de 5to año de una escuela secundaria, a la resolución de problemas de optimización. Es decir, si mediante la aplicación de la propuesta en este trabajo, estos alumnos pueden lograr un aprendizaje significativo de la idea de optimización de funciones y dotar de sentido el concepto de derivada. Este trabajo se basa en las ideas planteadas en la Teoría de Situaciones de Guy Brousseau, usando la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación.

Calla (2018) esta investigación se realizó con los estudiantes de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, cuyo marco teórico está basado en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau , el investigador señala que la aplicación en aula de la secuencia didáctica diseñada originalmente le ha permitido identificar los obstáculos y errores que muestran con frecuencia los estudiantes también inicia que le permitió registrar las actitudes esperadas en los estudiantes de la carrera de ingeniería frente a cada tarea propuesta de la situación didáctica. Y llega a la conclusión que los estudiantes de ingenierías consiguen construir el conocimiento de la derivada al enfrentarse a esa situación didáctica planteada.

Mendoza (2014) esta investigación tuvo por objeto analizar si el trabajo en equipo incide de manera positiva para el aprendizaje de la derivada, lo ejecutaron en la Universidad Nacional del Altiplano con estudiantes de la Escuela Profesional de Biología, concluyendo que el trabajo en equipo no es tan influyente en el aprendizaje de la derivada en los estudiantes aduciendo que con esta técnica solo algunos trabajan dejando que la participación de otros no sea significativa. Probablemente en esta investigación la estrategia de trabajo en equipo no ha estado adecuada.

CAPÍTULO II

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1 Identificación del problema

Observamos que los estudiantes que ingresan a la Escuela Profesional de Ingeniería Agrícola y que llevan el curso de cálculo diferencial tienen dificultades en el aprendizaje, esto lo vemos reflejado en las bajas notas que han venido obteniendo, para corroborar lo mencionado hemos hecho un análisis de las calificaciones de 119 estudiantes matriculados en el curso de Cálculo Diferencial el 2018 anexo 8, este problema del aprendizaje de la derivada puede tener muchas vertientes una de ellas es la falta de saberes previos anexo 9 o de manera indirecta puede influir el origen ya que el 70% de estudiantes provienen de zonas rurales y viven solo en esta ciudad. Esta problemática es común en muchas universidades lo cual ha dado origen a numerosas investigaciones educativas centrando su atención en los procesos de enseñanza y aprendizaje y en la construcción de dicho conocimiento matemático.

Se ha encontrado que la enseñanza del objeto de nuestra investigación es netamente algorítmica, mecanizada formando estudiantes robot con la capacidad de revolver ejercicios sin saber por qué y para qué derivan, no se está llegando al origen de lo que puede generar un conocimiento útil y a largo plazo. Se ha caído en lo que en muchos lugares ocurre tal como señala Dolores (2000) en su investigación sobre la didáctica de la derivada, que muchos estudiantes solo pueden obtener derivadas de funciones algebraicas a partir de fórmulas, pero difícilmente comprende el para que de estos algoritmos que realizan y el significado de los conceptos; Wenzelburger (1993) y Artigue (1995) en sus investigaciones indican que se logra un dominio razonable de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas, y existen dificultades significativas en la conceptualización de los procesos subyacentes al límite en la noción de la derivada. También Hitt (2003) referencia que la enseñanza del cálculo diferencial es conocida por ser una fuente de serios problemas tanto para los profesores como para los estudiantes de cara a la comprensión de sus ideas fundamentales; investigadores como Ferrini-Mundy (1994) destacan que las exploraciones referentes al significado del objeto derivada se han centrado en la descripción de las características de los significados construidos por los estudiantes demostrando la existencia de conflictos e inconsistencia entre las construcciones realizadas y los significados formales presentados por los libros texto. De igual manera nos indica Skemp (2006) que los estudiantes solo alcanzan lo que se denomina una "comprensión instrumental" del concepto de derivada y no una "comprensión relacional" de la derivada, que, explicado en pocas palabras, significa, saber lo que se va a hacer y porqué se va a hacer. Del mismo modo Pozsgai (2014) señala que los estudiantes de la UPC tienen dificultad para comprender el concepto de derivada.

Al dar demasiado realce al contexto algebraico se deja de lado la posibilidad de construir conocimiento a partir de la movilidad entre las diferentes representaciones del concepto, generalmente se hace énfasis en que el conocimiento matemático se puede representar bajo distintas formas, pero no se centran en la necesidad de coordinar distintos sistemas de representación para superar las dificultades del aprendizaje y lograr la comprensión de los objetos matemáticos (Duval, 1998). Lo que también se debería hacer es contextualizar problemas con la vida cotidiana y trabajar problemas que se usan en los cursos que componen su formación profesional llámese física y otros de tal manera que encuentren la relación que hay, para alcanzar tal comprensión del concepto de derivada que es un factor importante para lograr un acercamiento adecuado hacia conceptos que necesitaran para diferentes materias además para ser competentes y capaces de resolver problemas de su entorno como lo plantea la Escuela Profesional en sus objetivos. A partir de todo lo dicho surge la necesidad de estudiar las nociones que construyen los estudiantes cuando interactúan con actividades orientadas a lograr el manejo y la articulación de diferentes sistemas de representación de la derivada. Existen propuestas y estudios interesantes relativos a esta problemática, por ejemplo, las de Wenzelburger (1993, 1994), Cruse & Lehman (1982), Dolan *et al*. (1990), Galindo y Fiske (1992) y Thompson (1994). El acercamiento a los conceptos arriba señalados exige una idea en común: Presentar los conceptos en la forma en que surgieron.

Podemos señalar que la enseñanza y por ende el aprendizaje de la noción de la derivada en la E.P. de Ingeniería Agrícola no está sentando las bases sólidas para un aprendizaje útil y a largo plazo del objeto matemático de nuestra investigación a comparación de lo que se puede lograr con una metodología adecuada.

2.2 Definición del problema

¿De qué manera incide en el aprendizaje la metodología de la enseñanza basada en la Ingeniería y Situaciones didácticas en estudiantes de Ingeniería Agrícola de la Universidad Nacional del Altiplano?

2.3 Intención de la investigación

La propuesta de las situaciones didácticas que planteamos en este trabajo de investigación tiene la intención de favorecer al aprendizaje de la noción de derivada en los estudiantes de Ingeniería Agrícola, de tal manera que sea de fácil entendimiento para ellos.

2.4 Justificación

En la Universidad Nacional del Altiplano específicamente en la Escuela Profesional de Ingeniería Agrícola veo con preocupación que muchos estudiantes no están logrando comprender el concepto de la derivada, lo que podemos verificar con las notas que obtienen en esta unidad. La derivada es un concepto fundamental para que puedan proseguir con éxito temas no solo en la línea de cursos de matemática que tienen en el currículo de la escuela profesional sino también es otros cursos como física y de especialidad más aún en el ámbito profesional considerando que intervienen los cambios que ocurren en fenómenos de procesos agrícolas, fenómenos físicos, sociales, biológico, ambientales, económicos que es el concepto de la derivada, también se observa en la vida cotidiana en distintos comportamientos, pueden ser algunos de ellos cambios uniformes, otros pueden cambiar abruptamente o a cada instante; la medición de todos ellos están estrechamente ligados a la derivada, por todo esto es importante que un estudiante conozca el concepto de derivada de tal forma que este se desarrolle profesionalmente con éxito y pueda ser capaz de resolver problemas de su entorno respondiendo a retos de nuestra sociedad. Todo ello describe brevemente la importancia de esta investigación la que aportara al desarrollo de investigaciones en didáctica de las matemáticas y pueda ser una ayuda para muchos docentes en la enseñanza de la derivada y permita que sus estudiantes comprendan fácilmente dicho concepto.

2.5 Objetivos

2.5.1 Objetivo general

Determinar la incidencia de la metodología de la enseñanza basada en la Ingeniería y Situación Didáctica en el Aprendizaje de la derivada en estudiantes de Ingeniería Agrícola de la Universidad Nacional del Altiplano.

2.5.2 Objetivos específicos

1. Diseñar una situación didáctica, para que contribuya de manera significativa al aprendizaje de la noción de la derivada a estudiantes del primer semestre de la Escuela Profesional de Ingeniería Agrícola.

2. Identificar las dificultades y errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la noción de la derivada.

3. Caracterizar las dificultades y errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la noción de la derivada.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

Esta investigación tiene un enfoque cualitativo, ya que nuestro trabajo se caracteriza en comprender la perspectiva de los particpantes (individuos o grupos pequeños de personas a los que se investiga) acerca de los fenomenos que los rodean, profundizar en sus experiencias, opiniones y significados, es decir, la forma en que los participantes perciben subjetivamente su realidad. El tipo de investigación es descriptiva, dado que se describirá de manera íntegra cada categoría y ubicarla en el fenómeno que se estudia. El diseño que seguimos es la metodología basada en la Ingeniería Didáctica Artigue (1995), que es una investigación basada en el diseño la que nos permitirá lograr el desarrollo de formas particulares de aprendizaje y estudiarlos en contextos diseñados para esto el marco teórico es la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau, es en ese sentido que para esta investigación con situaciones didácticas aplicadas a la derivada pretendemos que los estudiantes comprendan con claridad la noción de derivada. La metodología de la ingeniería didáctica tiene cuatro fases. La primera fase se refiere al análisis preliminar de la investigación la cual consta del análisis epistemológico, análisis cognitivo y finalmente el análisis didáctico del objeto matemático derivada**,** la segunda fase es el análisis a priori, seguidamente la fase experimental y finalmente el análisis a posteriori que es la confrontación del análisis a priori y a posteriori de la situación didáctica que se hace comparando los comportamientos esperados con los comportamientos observados en la realización efectiva de la situación en aula.

3.1 Acceso al campo

Para realizar este trabajo de investigación, hemos solicitado el permiso de la dirección de estudios de la Escuela Profesional de Ingeniería Agrícola, y por ser docente de servicio la Escuela Profesional Ingeniería Mecánica Eléctrica he podido obtener datos importantes, y también se tuvo acceso a la Escuela profesional de Ingeniería Geológica por el apoyo de un colega, en este proceso he encontrado dificultades en el tiempo, por motivos coyunturales propios de la Universidad Nacional del Altiplano, respecto a docentes de matemáticas que fueron encuestados para obtener datos importantes para nuestro proceso he encontrado disponibilidad y apoyo.

El estudio central de la aplicación de las actividades desde los conocimientos previos se ha realizado durante un mes, pero los datos necesarios que sustenten algunas afirmaciones que se hace en este trabajo se han realizado todo un año.

3.2 Selección de informantes y situaciones observadas

Los sujetos observados en esta investigación fueron los 20 estudiantes (6 mujeres y 14 varones) matriculados en el curso de cálculo diferencial del primer semestre de la E.P de Ingeniería Agrícola de la Universidad Nacional del Altiplano, se seleccionó esta Escuela Profesional por tener un acceso directo como docente de servicio, además al ver la cantidad de horas distribuidas en su plan de estudios para este curso que son de 6 horas semanales lo cual facilito el desarrollo de esta investigación.

Se ha observado que el curso que llevan para fortalecer el objeto de investigación es Matemática Básica y los temas que anteceden en el curso de cálculo diferencial que son funciones, límites y continuidad; otra situación que se ha observado es que en este primer semestre el plan de estudios no considera el curso de Física como si lo hacen otras ingenierías como: Ingeniaría Civil, Ingeniería Mecánica, Ingeniería de Minas, Ingeniería Agroindustrial, etc. Lo que en cierta forma podría incidir en el desarrollo del pensamiento variacional del estudiante de Ingeniería Agrícola. También debo señalar que los estudiantes objeto de la investigación provienen en su mayoría de la zona rural lo que hace que muchos vivan solos y permanentemente viajen a sus lugares de origen dejando en ese lapso de tiempo sus tareas académicas ya que señalan que tienen que hacer labores agrícolas y otras para ayudar en sus hogares lo que podría incidir de alguna manera en su proceso de aprendizaje.

Dentro del nuestro trabajo de investigación se ha observado: Conocimientos previos, tres sesiones de aprendizaje, los libros que en su mayoría utilizan los docentes que dictan

Calculo Diferencial según el anexo 6, lo cual también podría incidir en el aprendizaje del estudiante.

3.3 Estrategias de recogida y registro de datos

Las técnicas y recolección de datos fueron: La observación y grupo focal. Para interpretar la realidad, los instrumentos que se utilizaron para la recolección de la información para el presente trabajo de investigación fueron: Registro de información de las actividades, cuestionarios, guía de observación, cuaderno de campo, guía de grupos focales, trabajo de campo.

3.4 Análisis de datos y categorías

Las categorías de este trabajo son:

La ingeniera didáctica, compuesta por el análisis preliminar, análisis a priori y análisis a posteriori, con sus subcategorías cada una respectivamente; situaciones didácticas compuesta por la acción, formulación, validación e institucionalización.

3.4.1 Análisis preliminar

Este análisis es de suma importancia ya que coadyuva a la preparación adecuada de una situación didáctica, como lo señala Artigue (1995) esta es la primera fase de la ingeniería didáctica compuesta por tres dimensiones que son:

- Epistemológica: Aquí se realizó un estudio histórico y se presentó los fundamentos teóricos de la noción de la derivada con la finalidad de abordar adecuadamente al concepto del objeto matemático derivada.
- Cognitiva: Aquí hacemos un análisis de las características cognitivas de los estudiantes, las concepciones que tienen y como interpretan la derivada en base a sus conocimientos previos teniendo en cuenta las dificultades y errores comunes que estos tienen.
- Didáctica: Aquí se analiza cómo se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada en la Universidad Nacional del Altiplano específicamente a los estudiantes de Ingeniería Agrícola en el curso de cálculo diferencial, que estrategias, recursos de enseñanza utilizan los docentes y

analizamos los tres textos libro que los docentes utilizan y proponen a sus estudiantes.

3.4.1.1 Análisis epistemológico

Presentamos una referencia histórica de la derivada sus fundamentos, que constituye el sustento epistemológico de esta investigación.

Para Artigue (1995) la historia y la epistemología son una sola pero otros autores como Eliseo Ramírez Rincón en su investigación "Historia y Epistemología de la función derivada" indica que la historia muestra el camino a la epistemología que no necesariamente es único.

En el estudio hecho por Carl Boyer en su libro "Historia de las Matemáticas del cálculo diferencial" así como en otros se ha evidenciado que en el desarrollo histórico del cálculo primero emergió el proceso de integración, luego lo hizo el proceso de la derivación, posterior a estos el del límite y el de la función como objeto matemático y al final el del rigor del lenguaje matemático; mientras que en la didáctica de la matemática primero se enseña desde el rigor del lenguaje matemático la función como objeto, luego el límite, la derivada y por último la integral. En este sentido se presentan obstáculos (Epistemológicos, psicológicos y didácticos) según Radford (1997) y también conflictos semióticos como lo señaló Godino *et al*. (2004) y el orden con que se desarrolló el objeto de nuestra investigación según Ponce (2015) nos describe lo que dice Grabiner (1983) "Históricamente, podemos describir cuatro etapas en el desarrollo del concepto actual de derivada. Primero, la derivada se utilizó, después se descubrió, posteriormente se exploró y desarrolló y, finalmente se definió" con esto quiere decir que lo que hoy conocemos como derivada, primero se utilizó - aunque no con ese nombre - para resolver problemas puntuales, específicos. Luego se vislumbró que había un concepto general detrás de esos usos y esto podemos considerarlo como el inicio del cálculo. Después, muchas propiedades de la derivada fueron expuestas y desarrolladas en aplicaciones matemáticas y físicas, pero recién después de un tiempo se la definió en forma rigurosa.

- **Proceso histórico**

Desarrollamos en forma sintética la historia del concepto de derivada. El descubrimiento de la derivada - y del cálculo infinitesimal - se atribuye en forma prácticamente simultánea a Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz hacia fines del siglo XVII. Como ya se dijo, las ideas no surgieron en el mismo orden en que hoy se estudian. Primero, la idea de integración aparece como un proceso de adición ligado a la búsqueda de áreas, volúmenes y longitudes de arco. Más tarde, la diferenciabilidad surge en conexión con problemas de tangentes de curvas y con problemas de máximos y mínimos de funciones. Y aún más tarde se observó que la integración y la diferenciabilidad están relacionados como operaciones inversas. Aunque la mayor parte de esta historia sucede en el siglo XVII, debemos buscar su origen en la antigua Grecia, allá por el siglo V a.C. Los griegos definieron a la recta tangente como aquella que toca a una curva solamente en un punto, pero no la corta. Pero esa definición sólo es correcta para la circunferencia ya que no funciona para todas las curvas, aunque sabían trazar la tangente para algunas curvas. Por ejemplo, en el siglo III a.C., Apolonio de Pérgamo (262-190 a. C.) definió la tangente a una sección cónica y sabía trazarla en cada caso. Las técnicas para el cálculo de tangentes se limitaban al campo de la geometría. Arquímedes (287-212 a. C) sabía trazar las tangentes a su espiral, pero se estima que para hacerlo pensó el problema desde un punto de vista cinemático, hallando la dirección del movimiento de un punto que genera la espiral. Asimismo, se puede decir que otro indicio de que los griegos se acercaron a las ideas actuales del cálculo, es a través del método de exhaución de Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) que también podría llamarse método de agotamiento puesto que la idea es que toda magnitud finita puede ser agotada mediante la substracción de una cantidad determinada y así lograr llegar al resultado buscado aumentando el grado de precisión del mismo acercándose tanto como se quiera, que sería el equivalente al paso del límite actual. En el siglo XVI, los matemáticos vuelven a ocuparse del trabajo de los griegos respecto a los procesos de variación para solucionar problemas que se plantearon desde la mecánica, y así es que retoman los aportes de Eudoxo y Arquímedes acerca del método de exhaución para hallar áreas bajo curvas. En esta parte de la historia aparecen matemáticos como Galileo, Kepler, Huygens, Descartes, Cavallieri, Fermat, Wallis, Pascal y Barrow entre otros. Durante este período va creciendo el rigor matemático con el que se formalizan los conceptos que van surgiendo y descubriéndose, distinto al usado por los griegos que era geométrico. Se buscan nuevas formas de demostrar los procesos matemáticos diferentes a los del álgebra y la geometría y se estudian las relaciones del movimiento, áreas bajo curvas, recta tangente, máximos y mínimos como procesos de variación.

Cálculo de máximos, mínimos y tangentes problema analizado por Fermat (1630) citado en (Pineda, 2013) y por Grabiner (1983) era el siguiente: "Dada una línea, dividirla en dos partes de tal manera que el producto de sus partes sea un máximo" veamos la figura: Sea B la línea designada y A la primera parte de la línea así:

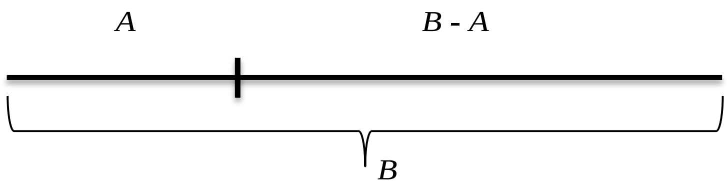


Figura 4. Línea dividida

Fuente: Pineda (2013)

Entonces la segunda parte es B-A y el producto de las dos partes es:

$$A(B - A) = AB - A^2 \text{...........} (1)$$

Fermat conocía los escritos del matemático griego Pappus de Alejandría y sabía que un problema que tenía, en general, dos soluciones deberán tener una solución en el caso de un máximo. Con este resultado Fermat fue capaz de desarrollar un método para calcular máximos y mínimos. Supongamos en el problema mencionado previamente, que existen dos soluciones. Para esta solución, sea la primera parte de la línea designada como $A + E$; la segunda parte es entonces $B - (A + E) = B - A - E$. Multiplicando las dos partes juntas obtenemos:

$$BA + BE - A^2 - AE - EA - E^2 = AB - A^2 - 2AE + BE - E^2 \text{...........} (2)$$

Considerando el problema de Pappus para el máximo, en lugar de dos soluciones, existe una solución. Así que las ecuaciones (1) y (2) son "iguales", esto es lo que llamo Fermat una seudo identidad:

$AB - A^2 = AB - A^2 - 2AE + BE - E^2$, simplificando se obtiene $2AE + E^2 = BE$ y finalmente $2A + E = B$

Ahora, Fermat estableció, sin justificación, que el termino E se debe "suprimir" de manera que el obtiene $A = \frac{B}{2}$; lo cual es en realidad el valor máximo que se estaba buscando. Fermat no considero al termino E como un infinitesimal, ni tampoco como un límite, tampoco pudo explicar porque se podía dividir por E (tratado como un número diferente de cero) y entonces eliminarlo como si fuera cero. Más aún dice que no explicó que usaba un caso especial de un concepto más general, el cual se convertiría más tarde en la derivada, la razón de cambio, o incluso la pendiente de la recta tangente. En realidad, el siguió su tratamiento de extremos diciendo que el mismo método se podría utilizar para encontrar las tangentes, pero de todos modos puede considerarse que el desarrollo de Fermat fue un gran avance puesto que conjeturó un método funcional que producía resultados precisos. Durante el período previo a lo desarrollado por Newton y Leibniz, afirma Ponce (2015) el contexto físico preparó el camino para el establecimiento de algunas propiedades de la derivada y para la introducción del concepto de cambio dentro de las matemáticas. Sin embargo, la principal motivación para el concepto general de derivada no se originó en la física. La idea principal de la derivada, así como sus aplicaciones, se originó para resolver problemas en un contexto geométrico. Luego del trabajo de Fermat, la derivada (que aún no estaba definida en forma precisa) se seguiría desarrollando gradualmente, aunque aún sin encontrar métodos generales de cálculo dado que en general los matemáticos predecesores a Newton y Leibniz se preocupaban más que nada por encontrar soluciones a problemas específicos. Dice Collete (2007), con respecto a Newton y Leibniz: Fueron los primeros que estudiaron los problemas en el siglo XVII del análisis infinitesimal elaborando un método general y nuevo, aplicable a muchos problemas. La notación algebraica y las técnicas que utilizaron les permitieron no sólo emplear una herramienta más eficaz que la de la geometría, sino también estudiar diversos problemas de geometría y física mediante el mismo método general. Newton y Leibniz aprovechando los métodos existentes para el cálculo de tangentes, extremos y áreas, forjaron dos conceptos más generales donde incluían lo ya conocido, que son los que actualmente conocemos como integral y derivada. Newton llamó fluxión a su derivada, la cual consideraba como la razón de flujo o cambio, y Leibniz la consideraba como una razón de diferencias infinitesimales y la llamó cociente diferencial. Ambos, de forma independiente, pudieron argumentar la relación entre la derivada y la integral -a la que Newton llamó fluente - descubriendo que son conceptos inversos. Además, desarrollaron una notación que hizo más simple el uso de estas dos ideas. Por ejemplo, Newton usaba $\dot{v}$ mientras que Leibniz empleaba dy/dx. Aunque de todos modos aún les faltaba rigor en sus justificaciones debido a que no había todavía un claro concepto de límite y función. Esa carencia de rigor, trajo algunos cuestionamientos de los matemáticos de la época, sin embargo dado que ambos confiaban en la coherencia, eficacia y fecundidad de sus resultados, ninguno de los dos tuvo algún reparo en continuar con sus investigaciones a pesar de esa falta de rigurosidad Mateus (2011) señala que se puede decir que la definición de derivada, tal como hoy se estudia y aprende, se debe a las contribuciones de Lagrange, Cauchy y Weierstrass. Ellos fueron los que aportaron la rigurosidad que faltaban a las definiciones y a las demostraciones. Aunque antes, también, fueron importantes los trabajos de Taylor, Euler y MacLaurin. Lagrange fue el primero en hablar de función derivada y utilizar la notación $f', f'', \ldots f^n$ que hoy en día usamos y su definición se acercaba a la definición actual a partir de límite, aunque cometió algunos errores que Cauchy corrigió, mejorando así la definición y los métodos empleados por Lagrange para probar resultados vinculados al concepto. Se considera también que Cauchy fue el primero en dar una demostración analítica del famoso Teorema Fundamental del Cálculo que vincula los conceptos de derivada e integral. Luego del trabajo de Cauchy, el cálculo diferencial e integral avanzó con una base más sólida y formal, con definiciones más precisas y con teoremas cuyas demostraciones estaban apoyadas en esas definiciones, pero fue Weierstrass quien introdujo la definición actual, usando el delta (δ) y el épsilon (ε) con el fin de que sus alumnos pudieran entender mejor el concepto de derivada. De hecho, su trabajo nunca se publicó, sino que se hizo famoso en Europa gracias a la difusión de sus alumnos, entre ellos Schwartz y Cantor, por solo mencionar algunos. A modo de conclusión, diremos que desde Fermat a Weiestrass hay doscientos años de diferencia, aproximadamente, que fue el período de tiempo donde se desarrolló el concepto de derivada hasta llegar a la definición moderna. A modo de síntesis Ponce

(2015), señala que primero, Fermat utilizó la derivada de manera implícita. Después, Newton y Leibniz la descubrieron. Más tarde Taylor, Euler y Maclaurin, entre otros, la desarrollaron. Lagrange la nombró y la caracterizó. Solo hasta el final de este largo periodo de desarrollo, Cauchy y Weierstrass la definieron de manera sistemática. Conocer la evolución histórica de este concepto tan importante que es el eje central de este trabajo, ayuda a su comprensión puesto que muestra la creatividad y el trabajo arduo de los matemáticos que se dedicaron a estudiar la derivada y cómo surgió el concepto puede orientar al docente sobre cómo encarar el concepto en el aula.

En la actualidad lo que se ha ordenado según la bibliografía trabajada Stewart (2017); Penney & Edwards (2013); Haaser & Sullivan (1990) y Purcell *et al*. (2007) es que encontrar la recta tangente a una curva y el problema de encontrar la velocidad de un objeto implican encontrar el mismo tipo de límite denominado derivada visto en 1.1.3.

3.4.1.2 Análisis cognitivo

Para analizar las características cognitivas de los estudiantes se aplicó en primer término una prueba, donde se evaluaron conocimientos y habilidades necesarias para iniciar el aprendizaje de la derivada las que se han propuesto en las actividades de la secuencia didáctica, los prerrequisitos son los siguientes: conocer que es magnitud, variables: Independientes, dependientes; que es una función, pendiente de una recta, razón de cambio promedio, velocidad media, definir límites. Esta evaluación la realizamos con el objetivo de tener claro los conocimientos previos que los estudiantes tenían de temas relacionados al objeto en estudio. La evaluación se denomina: Evaluación de conocimientos previos anexo 9, se aplicó el 10 de setiembre del año 2018, consta de ocho preguntas problema de respuestas abiertas, tuvo una duración de 100 minutos y para su calificación se consideró el sistema vigesimal. De los 26 estudiantes matriculados en el curso de cálculo diferencial en el primer semestre de la Escuela Profesional de Ingeniería Agrícola rindieron la evaluación 20 estudiantes, además debo señalar que para que este trabajo tenga más rigurosidad en el análisis no se tuvo en cuenta a 5 estudiantes que están llevando esta asignatura por segunda y por tercera vez, también excluí del análisis de este trabajo a un estudiante que está cursando el octavo semestre en la Escuela

Profesional de Ciencias Físico Matemáticas y está llevando como otra profesión Ingeniería Agrícola, con lo que se puede observar que los estudiantes participantes en esta investigación son estudiantes que reúnen la característica de que estén cursando por primera vez calculo diferencial.

Algunos errores cometidos por los estudiantes en la comprensión del concepto de derivada. Orton (1983) realizó un estudio cualitativo, a gran escala para investigar la comprensión de los conceptos de la diferenciación, realizo su investigación con 110 estudiantes de los cuales 55 fueron hombres y 55 mujeres entre los 16 y 22 años; Orton encontró que los aspectos rutinarios algorítmicos de diferenciación se entendían bien, solo 4 estudiantes fueron incapaces de derivar polinomios cuadráticos. El autor indica que la frecuencia de errores aumento cuando se pidió a los participantes calcular la derivada del cociente. Las respuestas a aspectos más conceptuales mostraron poca comprensión intuitiva de la derivada y algunas concepciones fundamentales como la de tangente, límites de un conjunto de secantes, razón de cambio de una línea recta en contraste con la razón de cambio de una curva y razón de cambio en un punto en contraste con razón de cambio sobre un intervalo, son erróneas. Azcárate (1990) analizó la comprensión del concepto de derivada de una función en un punto, con estudiantes de 15 y 16 años, quienes habían seguido un material didáctico sin tener los conocimientos previos sobre límite y continuidad. El estudio se centró en la idea de recta tangente a una gráfica en un punto. El análisis sobre las producciones de los estudiantes, que se obtuvieron a través de cuestionarios y entrevistas, permitió caracterizar las dificultades, errores y esquemas conceptuales asociados a tres conceptos: Pendiente de una recta, velocidad instantánea de un movimiento variado y tasa de variación instantánea de una función. Se identificaron dos errores en los estudiantes que ilustraban las dificultades en cuantificar el cambio en contextos de velocidad: 1) confundir la pendiente de una recta con su ordenada en el origen y 2) dar el valor de la ordenada en el origen como valor de la pendiente de la recta.

Ferrini–Mundy & Graham (1994) investigaron sobre la comprensión de la relación entre las gráficas de una función y la gráfica de su derivada, quienes analizan las dificultades de los estudiantes al intentar esbozar la gráfica de la derivada de una función a partir de la gráfica de la función (de la gráfica de f a la de f').

Artigue (1995) dice que, aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de manera más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, hay dificultades para que los jóvenes de estas edades logren una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro del análisis matemático. Por ejemplo, algunos estudiantes son capaces de resolver los ejercicios que se les proponen con la aplicación correcta de las reglas de derivación; sin embargo, tienen dificultades cuando necesitan manejar el significado de la noción de derivada, ya sea a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o en su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente. Zandieh (2000) estudió el proceso de construcción de significados de la idea de derivada en un periodo instruccional largo (9 meses, 75 clases), centrando su atención en una muestra de nueve alumnos de cálculo. Este investigador consideró diversas representaciones del concepto de derivada:

a) Gráfica, como la pendiente de la línea tangente a la curva en un punto;

b) Verbal, como la razón de cambio instantánea;

c) Física, como la velocidad;

d) Simbólica, como el límite del cociente incremental.

Para caracterizar la evolución en la construcción de los significados, se recogieron exámenes de los estudiantes y se hicieron cinco entrevistas a cada uno de los participantes en el estudio. Zandieh utilizó la metáfora del *puzzle* para explicar la manera en que los estudiantes parecían construir su comprensión de la derivada. Desde los datos de esta investigación se indica que un estudiante parte de una comprensión parcial, cada estudiante con diferentes piezas de un *puzzle;* cuanto más completa era su comprensión, menos piezas quedaban sin encajar. Sin embargo, un resultado de la investigación fue que los estudiantes no conectaban de manera automática la comprensión sobre un proceso en un contexto con el mismo proceso en otro contexto. Por tanto, un alumno no tendrá una comprensión completa del concepto de derivada si no puede reconocer y construir cada uno de los procesos involucrados en su comprensión de la derivada en cualquiera de los contextos relevantes.

Hubo investigaciones sobre las dificultades en el aprendizaje del cálculo, refiriéndose a lo que denomina “dislexias escolares” por Cantoral (2016) señala lo que los estudiantes aprenden a calcular derivadas, limites e integrales pero no pueden asignar un sentido más amplio a las nociones que permiten su comprensión.

También se realizó una investigación con estudiantes que procedían de un curso experimental de cálculo, donde se les introducía en los conceptos a través de múltiples representaciones. Dicho estudio mostró que los alumnos no tenían la misma comprensión del concepto de derivada en el modo analítico que en el modo gráfico. Así, respecto al concepto de derivada, muchos estudiantes (unos fueron entrevistados, otros no) fallaron en los usos apropiados de la definición geométrica de derivada. Los autores del trabajo concluyeron que la representación algebraica de una función dominó la forma de pensar de la mayoría de los alumnos; esto se dio como consecuencia de que las definiciones matemáticas son tradicionalmente analíticas y crean un obstáculo en las mentes de los estudiantes.

En esta investigación utilizo un cuestionario (anexo 9) a estudiantes de año superior para tener un reflejo de cómo han el objeto en estudio. Los estudiantes evaluados fueron 10, de los cuales cuando se les presento un ejercicio de nivel básico y netamente de cálculo los 10 contestaron bien usando las reglas de derivación y cuando se les hace la pregunta concepto y que significa lo que hizo el 90 % tuvo dificultad de responder, más aún relacionarlo con conceptos variacionales.

De lo que podemos inferir que la dificultad en casi todos los estudiantes investigados es que ellos manejan la parte algorítmica pero la conceptual no.

- **Evaluación de los conocimientos previos. Análisis de los resultados y observaciones**

  Los resultados de la evaluación de los conocimientos previos los analizamos con la finalidad de tener una visión clara de los conocimientos con los que están llegando nuestros estudiantes en relación con el objeto en estudio. La evaluación se llevó acabo el 10 de setiembre del 2018, consta de 8 preguntas de tipo abiertas y tuvo una duración de 100 minutos, el sistema de calificación fue vigesimal.

  A fin de tener mayor objetividad en el análisis respecto a los conocimientos previos que tienen los estudiantes en relación al objeto de estudio de esta investigación incluimos los resultados de la evaluación, en la tabla N° 1 describimos los resultados de la siguiente manera: La respuesta correcta (**correcto**), los que se quedaron planteando la situación (**en proceso**), los que no llegaron a la respuesta correcta (**incorrecto**) y los que no contestaron la pregunta **(en blanco**). Las preguntas de la actividad de conocimientos previos fueron tomadas de un trabajo de investigación de Silvia Vrackend, pero en muchos casos adaptados a nuestro contexto.

Tabla 1

Descripción de los conocimientos previos evaluados a los estudiantes

Conocimientos previos	**Número de ítem en la prueba de exploración de conocimientos previos.**
1) Conocer e interpretar magnitudes.	Ítem a Ítem b Ítem c
2) Conocer e interpretar funciones junto con las concepciones sobre la trayectoria de cuerpos en movimiento.	Ítem a
3) Conocer la velocidad – tiempo de un auto con velocidad constante.	Ítem a
4) Conocer la “diferencia” como la operación que permite medir los cambios.	Ítem a Ítem b Ítem c Ítem d Ítem e Ítem f
5) Conocer un fenómeno de variación, cuantificación de los cambios y su interpretación.	Ítem a Ítem b Ítem c Ítem d
6) Conocer los aspectos cuantitativos y cualitativos de la variación presentada gráficamente.	Ítem a Ítem b Ítem c Ítem d
7) Interpretar información sobre una función que está dada en forma analítica y convertirla en forma numérica y verbal.	Ítem a Ítem b Ítem c

A continuación, hacemos el análisis por pregunta de cada una de las actividades lo que nos permite analizar por temas, cómo los estudiantes interpretan ello.

- **Problema 1:** Se orienta a evaluar el conocimiento previo conocer e interpretar magnitudes.

  Supongamos que se está llenando un balde con agua. Esta es una situación de variación donde están involucradas diversas magnitudes, como por ejemplo el volumen del balde, es decir su capacidad total. Mencione otras magnitudes que intervienen (por lo menos tres).

  a) ¿Cuáles de esas magnitudes aumentan?

  b) ¿Cuáles disminuyen?

  c) ¿Alguna permanece constante?

- **Conocimientos previos**

  Se orienta a evaluar el conocimiento de magnitudes e interpretarlas**.** A través de este problema se evalúa la capacidad que tienen los estudiantes para identificar las magnitudes que intervienen y de estas cuales aumentan, disminuyen o permanecen constante. Se espera que los estudiantes utilicen expresiones como: determinada magnitud aumenta, determinada magnitud disminuye o determinada magnitud no aumenta ni disminuye. Además, el registro utilizado es el verbal y el sistema de representación es el lenguaje escrito.

- **Comentarios**

  En los resultados obtenidos se encontró que 9 estudiantes mencionaron por lo menos tres magnitudes dentro de ellos solo mencionaron los elementos estáticos, los otros 11 mencionaron propiedades físicas de los elementos involucrados como el agua, el medio ambiente. Para a) la mayor parte de los estudiantes tuvieron dificultad en señalar que magnitudes aumentan, para b) similarmente los estudiantes no pueden señalar que magnitudes disminuyen y para c) los estudiantes contestaron en su mayoría que las magnitudes permanecen constantes ya que se puede observar que lo que mencionaron son características de la materia. Estas respuestas muestran la dificultad que tienen en pensar en lo que cambia en la situación mostrada, además pareciera que se ven forzados a encontrar por lo menos tres magnitudes de manera obligatoria. También muchos no saben que es una magnitud.

- **Problema 2:** Cada una de las siguientes gráficas muestra la posición e(t) de un auto en función del tiempo desde cierto punto de referencia. Determine cuál de ellas describe el caso de un auto que se mueve a velocidad constante. Explique:

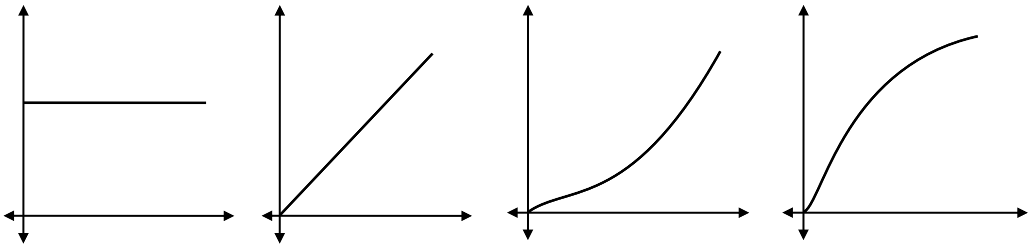


Figura 5. Problema 2

- **Conocimientos previos**

A través de este problema se pretende analizar situaciones de cambio a partir de la gráfica de las funciones, además el estudiante debe demostrar los conocimientos previos sobre las trayectorias de cuerpos en movimiento y su velocidad a partir de la lectura de graficas cartesianas. Se espera que los estudiantes discutan cada una de las funciones representadas gráficamente y puedan elegir el que corresponda al caso pedido.

- **Comentarios**

Al analizar las respuestas 6 contestaron correctamente indicando ii), 9 contestaron la alternativa i), 2 contestaron la alternativa iii) y 2 dejo en blanco y 1 escribió indicando que no entendía lo que le pedían. Al momento de justificar por qué habían elegido la alternativas se encuentra dificultades, solo 6 tienen justificaciones aceptables como el auto avanza la misma distancia en el mismo intervalo de tiempo, la posición del auto es proporcional al tiempo, o tiempo y espacio son directamente proporcionales, pero 9 estudiantes dan respuestas vagas sin precisión como cuando el tiempo avanza el espacio avanza, cuando el espacio recorre el tiempo también recorre, la posición cambia cuando el tiempo también cambia se esperaba que precisen la proporcionalidad. 2 no precisan por que escogieron la alternativa aduciendo que solo saben graficar iii).

- **Problema 3:** Se orienta a evaluar el conocimiento previo iii) de velocidad-tiempo de un auto con velocidad constante.

Determine cuál de las siguientes gráficas muestra la velocidad con que se mueve el auto del problema anterior. Explique.

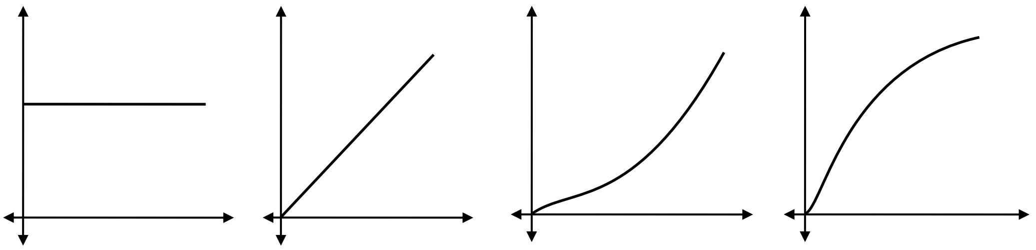


Figura 6. Problema 3

- **Conocimientos previos**

A través de este problema se pretende analizar si los estudiantes pueden identificar en el registro de representación gráfico la velocidad con que se mueve un auto siendo esta constante.

- **Comentarios**

Al analizar la respuesta de los 20 estudiantes, 13 respondieron indicando la respuesta correcta i), pero de ellos solo 9 pudieron explicar porque explicando de manera completa es decir primero hicieron uso de sus conocimientos sobre gráfico de funciones y dijeron que la alternativa representa a una función constante y como en las condiciones que dan en la pregunta la velocidad es constante por ende la alternativa i) representa la respuesta correcta y los 4 estudiantes restantes no pudieron justificar su respuesta. Luego 5 de los estudiantes escogieron la alternativa ii) que la velocidad de auto como es constante es representada por una función identidad dicen que si el tiempo avanza la velocidad avanza y 2 de los estudiantes escogen la alternativa c) sin justificación alguna.

- **Problema 4:** Los valores de la tabla dan la posición (en metros) de un automóvil desde cierto punto de referencia, en el instante en que han transcurrido t segundos, analizando datos contestes cada una de las preguntas que se requieren.

Tabla 2

Variables problema 4

t(segundos)	0	1	2	3	4	5
e(metros)	17	34	51	68	85	102

a) ¿Qué valores puede tomar la variable independiente? ¿Y qué valores la variable dependiente?

b) Teniendo en cuenta los valores de la tabla, ¿Cómo varía la variable dependiente a medida que los valores de la variable independiente aumentan?

c) Complete las siguientes tablas con el cambio entre dos valores consecutivos de la variable considerada. Escriba en cada casillero la operación que realiza.

Tabla 3

Cambio entre dos valores consecutivos de la variable considerada

t	0	1	2	3	4	5
e	17	34	51	68	85	102

d) ¿Qué significado tienen las operaciones hechas en cada tabla?

e) ¿Por medio de qué operación calculó los cambios?

f) ¿Cómo fueron los cambios para cada una de las variables?

- **Conocimientos previos**

Se orienta a evaluar el conocimiento previo: Reconocer la diferencia como la operación que permite medir los cambios.

A través de este problema se pretende que los estudiantes interpreten de una función numéricamente definida los cálculos realizados y describan cualitativamente la variación logrando identificar y distinguir cambios positivos y negativos. En el inciso a) se espera que los estudiantes respondan ambos pueden tomar valores reales, también se espera que digan que para la variable tiempo cualquier valor real positivo incluido el cero y para la variable que representa la posición cualquier valor real.

- **Comentarios**

Al hacer el análisis de las respuestas, 5 respondieron correctamente, 13 dieron la respuesta incorrecta indicando que pueden tomar cualquier valor para ambas; 2 dejaron en blanco sus respuestas, podemos observar los estudiantes muestran dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al concepto de función, no distinguen variable independiente de la dependiente y también siempre relaciona a las variables con x e y.

En el inciso b) se espera que respondan que los valores de la variable dependiente también aumentan de manera proporcional. Al hacer al análisis de las respuestas pudimos encontrar que 14 respondieron que a media que aumenta el tiempo un segundo el espacio aumenta 17 metros. 2 indican que cada segundo que cambia la variable independiente la variable dependiente aumenta 17; 4 indican que la variable dependiente varía de manera constante cuando la variable independiente varía de segundo a segundo. En el ítem c) 16 estudiantes completaron correctamente las tablas; a) 13 responden correctamente indicando la variación relacionado a la pregunta en la que indica cambio 7 responden incorrectamente, b) 16 responden correctamente indicando la diferencia, 4 contestan incorrectamente, c) 12 contestan que los cambios fueron constantes, 6 contestan incorrectamente y 2 dejan en blanco.

- **Problema 5:** Se orienta a evaluar un fenómeno de variación, cuantificación de los cambios y su interpretación en las situaciones planteadas.

- **Conocimientos previos**

A través de esta pregunta se pretende que los estudiantes puedan interpretar la función desde el registro numérico a través de una tabla de valores, los cambios de la variable dependiente no son constantes.

- **Comentarios**

  Al hacer el análisis del trabajo de los estudiantes en el inciso a) 18 completaron correctamente la tabla b), 18 respondieron correctamente indicando 2013-2014, 2 estudiantes esperaban que se les ayude o verifique si estaban analizando bien por lo que consideró como respuesta incorrecta. En el inciso c) respondieron 18 correctamente indicando el periodo 2014-2015 y únicamente dos de los estudiantes no pudieron determinar lo pedido considerándose como incorrecta su ejecución. En el inciso d) 20 estudiantes contestaron correctamente indicando el periodo 2016-2017. En el inciso e) pretendemos que los estudiantes observen que se presentan cambios positivos y negativos y relacionen con su significado en el problema dándose cuenta cuando una función crece, decrece o se mantiene constante; la mayoría de los estudiantes no entendían lo que se les pedía por lo que se tuvo que orientar al respecto, luego de esto solo 9 estudiantes contestaron correctamente indicando que el cambio es positivo cuando la ganancia aumenta, el cambio es negativo cuando la ganancia disminuye y es cero cuando la ganancia es la misma. 6 estudiantes expresan los cambios positivos, negativos y cero sin aclarar nada más lo cual considero como respuesta en proceso, 3 estudiantes responden con respecto a las ganancias sin considerar los signos de cambio lo que también considero en proceso y 2 estudiantes dejan en blanco este inciso.

- **Problema 6:** Las gráficas muestran la posición s(t) de dos partículas desde cierto punto de referencia para determinado intervalo de tiempo.

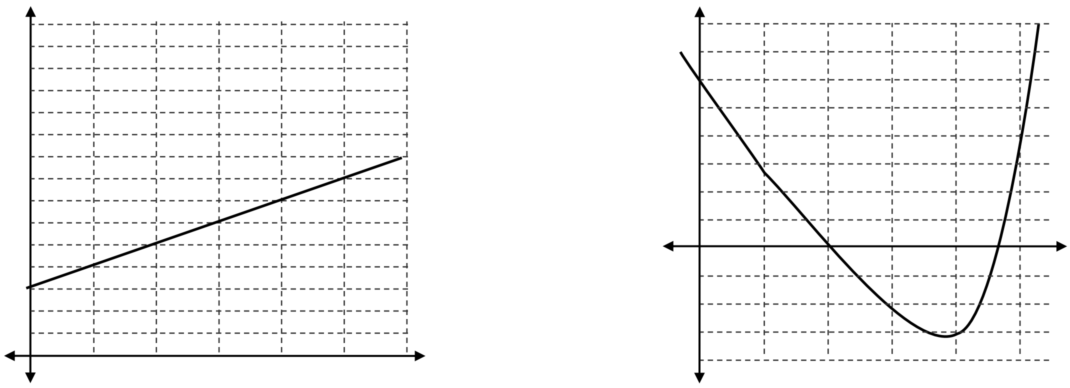


Figura 7. Problema 6

a) Para cada una de las gráficas, explique qué sucede con una de las magnitudes a medida que varía la otra.

....

....

b) Complete las tablas para cada función. Recuerde que la letra Δ indica cambio de una cantidad, por lo que Δs significa el cambio de la variable s(t) en el intervalo de t correspondiente.

Tabla 4

Cambio Δs

Intervalos	Δs
$0 \leq t \leq 1$	
$1 \leq t \leq 2$	
$2 \leq t \leq 3$	
$3 \leq t \leq 4$	
$4 \leq t \leq 5$	

Intervalos	Δs
$0 \leq t \leq 1$	
$1 \leq t \leq 2$	
$2 \leq t \leq 3$	
$3 \leq t \leq 4$	
$4 \leq t \leq 5$	

c) Describa el comportamiento de los cambios Δs para la primera gráfica.

....

d) Describa el comportamiento de los cambios Δs para la segunda gráfica.

....

Si corresponde, indique en qué intervalos los cambios de la variable dependiente fueron más rápidos.

....

....

- **Conocimientos previos**

A través de esta pregunta se pretende que los estudiantes interpreten los aspectos cualitativos y cuantitativos de la variación para ambas funciones.

Ambos gráficos presentan que la posición inicial no coincide con el origen, de manera que la variable dependiente ya no describe espacio recorrido sino desplazamiento punto de referencia, en el inciso a) se requiere una explicación sobre el comportamiento de una magnitud a medida que varía la otra para cada una de las gráficas.

- **Comentarios**

La respuesta que esperamos para la primera función es que a medida que el tiempo transcurre o aumenta la posición aumenta siempre la misma cantidad. 8 estudiantes contestaron correctamente de acuerdo a lo esperado, 7 estudiantes expresaron específicamente lo que observaron en la gráfica indicando que cuando t aumenta s(t) aumenta uno. Y también 2 estudiantes respondieron que a medida que t aumenta, s(t) lo hace también. Por lo que podemos observar que indirectamente están haciendo alusión a la proporcionalidad por lo que consideramos la respuesta en proceso. Los tres estudiantes restantes contestaron de manera incorrecta. Respecto al gráfico de la segunda función se espera que respondan que a medida que el tiempo aumenta, la posición cambia de manera variada y variada cantidad. Los estudiantes expresan que no pueden iniciar a dar la respuesta y necesitan que se les aclare ya que para ellos es un gráfico que no conocen después de esto 7 estudiantes respondieron correctamente, 11 estudiantes presentan respuestas incorrectas, 2 dejaron en blanco las respuestas. En el inciso b) 15 estudiantes completaron correctamente la tabla 1; 10 utilizaron el grafico directamente y 5 estudiantes establecieron la ecuación e hicieron el respectivo reemplazo, 3 estudiantes cometieron errores en algunos valores y les consideramos en proceso y dos estudiantes no pudieron contestar correctamente.

En la tabla 2 solamente 7 estudiantes completaron correctamente, se observó muchas dudas 9 pusieron valores incorrectos 4 estudiantes dejaron en blanco su respuesta. Para el ítem c) al describir el comportamiento de los cambios de la variable dependiente 12 estudiantes contestaron de manera correcta indicando que los cambios se mantienen constantes, 5 contestaron de manera incorrecta y 3 dejaron en blanco sus respuestas. Para d) 10 contestan correctamente indicando que los cambios son variados, 6 piden que se les aclare y aun así no pueden indicar correctamente la respuesta 4 dejan en blanco sus respuestas. En la repregunta solamente 8 responden correctamente, 12 responden de forma incorrecta y 2 dejan en blanco.

- **Problema 7:** Se orienta a analizar si pueden interpretar información sobre una función que está dada en forma analítica y convertir la información en forma numérica y verbal.

  La posición de un objeto en caída libre (despreciando la resistencia del aire) bajo la influencia de la gravedad se obtiene, para cada instante t (en segundos), mediante la ley $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$, donde s_0 es la altura inicial del objeto, en metros, v_0 es la velocidad inicial y g es la aceleración de la gravedad, que en la superficie terrestre es de $-9.8\frac{m}{seg^2}$.

  Se deja caer una piedra desde lo alto de un edificio que tiene 30 m de altura.

  a) Obtenga la ley que permite determinar su posición en cada instante t, teniendo en cuenta que su velocidad inicial es nula.

  b) Calcule s(1,5) – s(1) y exprese su significado en términos del problema.

  c) Determine $s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ y explique su significado.

- **Conocimientos previos**

  Se orienta a analizar si pueden interpretar información sobre una función que está dada en forma analítica y convertir la información en forma numérica y verbal.

  En el inciso a), se espera que los estudiantes respondan $s(t) = -4.9t^2 + 30$.

- **Comentarios**

  De los estudiantes participantes 8 respondieron correctamente, 4 contestaron sin simplificar ni operar a lo que consideramos en proceso y 6 responden incorrectamente 2 dejan en blanco. En el inciso b) 12 estudiantes hacen las operaciones correctas determinando el valor esperado, pero no explican claramente lo que significa y esto lo hacen solo 4; 5 hacen mal las operaciones teniendo en cuenta que usan calculadora se considera incorrecto y 2 no responden nada. En el inciso c) los estudiantes refieren que tienen dudas porque no saben si deben tener t_0 y como determinan Δt, se interviene contestándoles con repreguntas, y con ello se observa que algunos estudiantes avanzan 6 correctamente 12 de forma incorrecta y 2 dejan en blanco del análisis que hacen a la respuesta que dieron; 4 dan la respuesta correcta los otros 16 no ponen ninguna respuesta.

- **Observaciones**

Se aprecia por el análisis anterior que los estudiantes tienen dificultades en:

- Expresar los conceptos;
- Interpretar las preguntas que se les plantea por falta de conocimientos previos como: magnitud, variables, funciones;
- Interpretar la representación gráfica, la numérica, analítica;
- Hacer operaciones.

Los errores que cometen son:

- De conceptos;
- Trasladarse de un registro de representación a otra;
- Realizan las operaciones básicas con errores.

3.4.1.3 Análisis didáctico

Noción de la derivada aplicada a problemas del entorno de la Ingeniería Agrícola. Para trabajar el tipo de problemas dentro de la Escuela Profesional de Ingeniería Agrícola se tuvo que hacer una revisión del perfil profesional, de los cual destaco para nuestra investigación lo siguiente: El egresado tiene una sólida formación en la Ingeniería de Recursos Hídricos, Ingeniería de Infraestructura Rural, así como en ordenamiento territorial y medio ambiente que se ve reflejado en los siguientes aspectos relacionados a este trabajo de investigación: Resolver problemas utilizando estrategias lógico-matemáticas para un adecuado desenvolvimiento personal. Elaborar proyectos de infraestructura hidráulicas, agropecuaria, agroindustrial, de saneamiento, de educación, vivienda o caminos rurales, de acuerdo a la normatividad vigente. En torno a lo mencionado presento ejemplos en los que se puede utilizar la derivada.

- Problemas de Optimización: Aquí se enmarcan los problemas fundamentales de carácter agropecuario que puedan ser resueltos aplicando teoría de extremos, es decir, hallar el valor óptimo de una función que esté sujeta, o no, a ciertas restricciones.

- El cálculo del pH de los suelos conociendo la concentración de Hidronio conduce a la ecuación de una función de gran utilidad para el estudio de características de los suelos, así como el proceso inverso.

- Otras funciones muy utilizadas son las curvas de respuesta, las cuales permiten establecer la relación entre el rendimiento de los cultivos y los nutrientes en una parcela de tierra.

- El cálculo de áreas de terrenos de forma irregular a partir de mediciones en el campo y el cálculo del índice de crecimiento de una planta utiliza herramientas del cálculo diferencial e integral.

- La derivación además puede ser utilizada para calcular la velocidad y aceleración de una cuchilla respecto al tiempo, en mecanismos de transmisión axial que dependen del desplazamiento, la velocidad y la aceleración del segmento con respecto al ángulo de giro de la manivela (Jiménez, 1997).

- El cálculo del trabajo de una fuerza exterior aplicada estáticamente al desarrollarse las deformaciones en la tracción (compresión), se determina mediante una integral definida de una diferencial, con límites de integración desde cero hasta el valor definitivo del desplazamiento de los puntos de su aplicación (Stiopin, 1979).

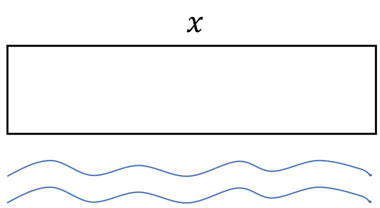
- Un ejemplo del trazado de una curva y la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de 1er orden y grado por el método de variables separables puede verse al solucionar la ecuación del balance del calentamiento del motor en la regulación de fuentes energéticas y al trazar el gráfico de la temperatura respecto al tiempo (Jiménez, 1997).

- La solución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales por los métodos de los elementos finitos resulta aplicable en: Búsqueda de modos de vibración apropiados para la cosecha selectiva del café (Martínez, 2006), diseño de celda de carga para pesa electrónica de monorraíl (Martínez, 2004), Estudio de tensiones y deformaciones dirigido al diseño de celdas de carga (Martínez, 2006).

- **Ejemplos de aplicación de la derivada a la ingeniería Agrícola**

a) A un ingeniero agrícola se le encarga supervisar que se cerque un campo rectangular que limita con un rio recto. No necesita cercar a lo largo de del rio. Si el ingeniero dispone de 2400 pies de cerca ¿Cuáles son las dimensiones del campo que tiene el área más grande?

Solución



Datos $\qquad A = xy$

$P = 2400 \qquad A = x\left(1200 - \frac{x}{2}\right)$

$P = x + 2y \qquad A = 1200x - \frac{x^2}{2}$

$P -= 2y \qquad \frac{dA}{dx} = 1200 - x = 0$

$y = 1200 - \frac{x}{2} \qquad x = 1200$

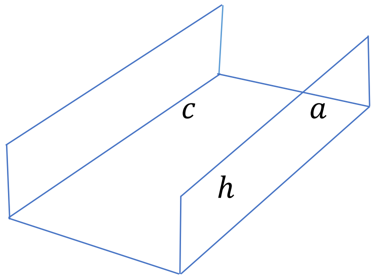
$y = 600$

Verificando si las dimensiones hacen el área máxima $A''(y) = -4 < 0$, es máximo.

$A = (1200)(600) = 720\,000\, pies^2$

b) Para disminuir en cuanto sea mínimo el rozamiento de líquido contra las paredes de un canal, el área mojada por el agua debe ser mínima. Mostrar que la mejor forma del canal rectangular de sección transversal de área dada es aquel en el que la anchura es el doble de su altura.

Solución



$S = ac + 2hc = c(a + 2h)$ …….. (1)

$A = ah \rightarrow a = \frac{A}{h}$ ………. (2)

Sustituyendo (2) en (1)

$S = c(\frac{A}{h} + 2h)$ derivando e igualando a cero

$\frac{ds}{dh} = \frac{c}{h^2}(2h^2 - A) = 0$

$h = \sqrt{\frac{A}{2}}$, en (2): $a = \sqrt{2A}$ de donde $A = \frac{a^2}{2}$

comparando $h = \sqrt{\frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$ o se puede decir que $a = 2h$.

c) En una ciudad se monitorea la altura del agua en su tanque cilíndrico con un dispositivo de registro automático. El agua se bombea de manera constante al tanque a una velocidad de 2400 pies cúbicos por hora, como se muestra en la figura 1. Durante cierto periodo de 12 horas (empezando a la medianoche), el nivel del agua se elevó y descendió de acuerdo con la gráfica en la figura 8. Si el radio del tanque es de 20 pies, ¿A qué velocidad está utilizándose el agua a las 7:00 a.m?

Solución

Datos:

Sean *t* el número de horas transcurridas después de la media noche

h = la altura del agua en el tanque en el instante *t*

V = el volumen del agua en el tanque en el instante *t*

Entonces $\frac{dV}{dt}$: es la razón de entrada menos la razón de salida, de modo que

2400 - $\frac{dV}{dt}$ es la velocidad a la que el agua está utilizándose en cualquier instante *t*. ósea la razón de salida

Como la pendiente de la recta tangente en $t = 7$ es aproximadamente -3 vea figura 8 concluimos que $dh/dt \approx -3$ en ese instante.

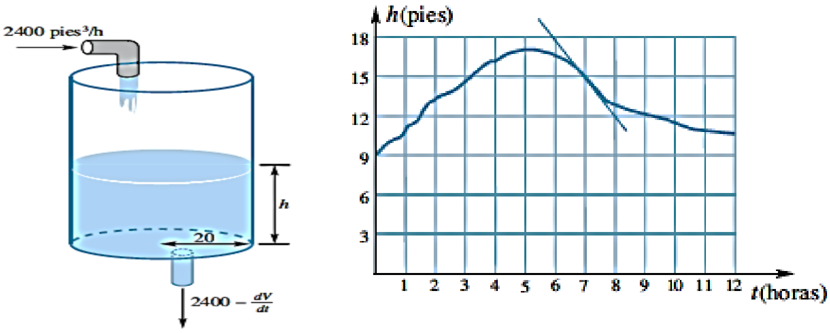


Figura 8. Monitoreo de la altura de agua

$V = \pi r^2 h \rightarrow V = \pi(20)^2 h$; $\frac{dV}{dt} = 400\pi \frac{dh}{dt}$ $=400\pi(-3) \approx$ -3 770

Por lo tanto, los residentes de la ciudad estaban utilizando el agua a una tasa de 2400 + 3770 = 6170 pies cúbicos por hora a las 7:00 a.m. (Purcell *et al*. 2007).

- **La enseñanza de la derivada en la Escuela Profesional de Ingeniería Agrícola de la Universidad Nacional del Altiplano**

Por otra parte, en esta sección de la investigación se hizo un análisis de las características de proceso de enseñanza y aprendizaje del objeto matemático derivada en la Escuela Profesional de Ingeniería Agrícola de la Universidad Nacional del Altiplano; ¿Qué recursos didácticos?, ¿Qué estrategias didácticas de enseñanza utilizan los docentes?, para lo cual hemos utilizado un cuestionario (anexo 6) que se ha aplicado a los docentes que prestan y prestaron servicio en esta Escuela Profesional. Seguidamente hicimos un análisis del sílabo del curso de cálculo diferencial que involucra a esta investigación (anexo 7) y finalmente hacemos el análisis de tres textos que han sido seleccionados por la frecuencia con que los docentes utilizan y recomiendan el uso a sus estudiantes, la cual en cierta medida puede influenciar en el enfoque que se le da al tema de investigación.

El curso de Cálculo Diferencial se dicta en el primer semestre de la Escuela Profesional de Ingeniería Agrícola en donde se encuentra nuestro objeto de investigación, los estudiantes en este ciclo también llevan el curso de matemática básica en la que se considera el tema de función que es de suma importancia para nuestra investigación, pero debo señalar que en la currícula el primer semestre no se considera el curso de física I que para nuestro trabajo sería un aporte para fortalecer algunos conocimientos, esto puede tener algún efecto en los obstáculos y errores que los estudiantes presentan en el aprendizaje de la derivada.

- **Análisis del silabo de cálculo diferencial**

Con la finalidad de mostrar los pasos con los que se llega al objeto de nuestra investigación hacemos un análisis del silabo del curso de cálculo diferencial. En el silabo se observa que este curso es de naturaleza teórico práctico y corresponde al área de formación general obligatoria, la información general es la siguiente: Código del curso 002, sin prerrequisito, número de horas semanales 6, cuatro teóricas y dos practicas; créditos 5; tiempo de duración 17 semanas, el perfil del egresado de la E.P. de Ingeniería Agrícola señala que este tiene sólida formación en la Ingeniería de recursos hídricos, ingeniería de la infraestructura rural, ordenamiento territorial, y medio ambiente. Para lograr este perfil podemos señalar que el curso cálculo diferencial, y dentro de ella el concepto de derivada; es un pilar fundamental. El objeto matemático de nuestra investigación está considerado en la segunda unidad; en la primera unidad se estudia funciones, límites y continuidad para lo cual se programa 32 horas, prosigue la segunda unidad que en su programación tiene 30 horas de dictado de clase, analizando encontramos la secuencia clásica esto es: Definición de derivada, reglas de derivación, derivadas implícitas, derivadas de orden superior y la tercera unidad presenta específicamente aplicaciones de la derivada en la que se considera máximos y mínimos de una función problemas contextualizados de máximos y mínimos; luego razón de cambio en este ítem habla de velocidad media y velocidad instantánea y finalmente se trabaja la regla de L hospital; en la bibliografía podemos observar que se proponen libros textos mayormente de autores peruanos y corroborados por otros docentes que dictaron en la escuela profesional argumentando que son más accesibles para los estudiantes por los costos relativamente bajos que están al alcance de sus economía además por la relación de ejercicios que estos presentan, también es importante señalar que el uso de TICs por los docentes es muy limitado cuya justificación señalan que es la falta de tiempo.

- **Análisis del campo de restricciones**

Como mencionamos en ítems anteriores, el presente trabajo de investigación se llevó acabo con estudiantes del primer semestre de la Escuela Profesional de Ingeniera Agrícola de la Universidad Nacional del Altiplano que se encuentran cursando la materia de cálculo diferencial. Para el diseño de las situaciones didácticas se recopilaron algunos datos sobre los alumnos que participaron en la investigación, para determinar algunas características del grupo que en cierta forma podría influir en el desempeño académico. Se ha aplicado una encuesta a los 20 estudiantes matriculados en el curso de cálculo diferencial (anexo 1) los resultados obtenidos son los siguientes:

Tabla 5

Datos sobre los alumnos

EDAD		
De 15 a 17	4	20%
De 18 a 20	14	70%
De 21 a 23	2	10%
Más de 23	0	**0%**

SEXO		
Femenino	6	30%
masculino	14	70%

LUGAR DE PROCEDENCIA		
Puno	2	10%
Ayaviri	1	5%
Juliaca	4	20%
Ilave	1	5%
otros	12	60%

MODALIDAD DE INGRESO A LA UNIVERSIDAD		
CEPREUNA	3	15%
Examen general	17	85%
Exonerados	0	0%
Traslado externo	0	0%

COLEGIO DE PROCEDENCIA		
Estatal	19	95%
Particular	1	5%
Religioso	0	0%
Militar	0	0%

HORAS SEMANALES DE ESTUDIO		
No tengo tiempo	2	10%
De 1 a 2 horas	12	60%
De 3 a 4 horas	5	25%
De 5 a 6 horas	1	5%
Más de 6 horas	0	0%

TIEMPO DE PREPARACION PARA INGRESAR A LA UNIVERSIDAD		
Sin preparación	4	20%
De 1 a 3 meses	4	20%
De 4 a 6 meses	7	35%
De 6 meses a mas	5	25%

EL TEMA DE VELOCIDAD MEDIA		
No me enseñaron	11	55%
Me enseñaron y no lo aprendí	5	25%
Me enseñaron y lo aprendí	4	20%

Se observa la edad que predomina es de 18 a 20 años con 14 estudiantes, 4 estudiantes de 15 a 17 años y 2 de 21 a 23 años, además 14 son varones representando 70% y 6 son mujeres con solo el 30%. Los estudiantes proceden en su mayoría de distritos más alejados a los propuestos en la encuesta, señalan inclusive de comunidades campesinas y representan el 60%. Luego 4 proceden de Juliaca, 1 de Ayaviri, 1 de Ilave 1, lo que es claro que de la misma ciudad de Puno solamente son 2 estudiantes con estos datos de la procedencia concluimos que los estudiantes muchos de ellos viven solos; los centros educativos de donde proceden 19 de ellos son de colegios estatales y solo 1 de una institución educativa particular representando solo el 5%; la preparación que han tenido para ingresar el 35% se prepararon de 4 a 6 meses y sin preparación ingresaron el 20%, o sea 4 y preparándose de 1 a 3 meses también ingresaron 4 y de 6 a más meses se prepararon 5 estudiantes; 17 ingresaron por examen general y solo 3 estudiantes por la modalidad del CEPREUNA, se observa que las horas de estudio es bajo, ya que 12 de ellos estudian solo de 1 a 2 hrs, aunque 5 estudiantes de 3 a 4 hrs. que sigue siendo poco desde mi perspectiva.

Y finalmente respecto al tema de si les enseñaron velocidad instantánea y tangente, 11 indican que no les enseñaron, 5 dicen sí pero no las aprendieron y solo el 20% en otras palabras 4 afirman haber aprendido lo que les enseñaron.

Este análisis me permite entender algunas características de mis estudiantes, las cuales incidirán en el diseño de las situaciones didácticas, pero no se las consideran como variables, sí podrían influir en el aprendizaje de la derivada.

La noción de la derivada en los libros textos

Analizamos tres libros de texto los cuales hemos seleccionado por la frecuencia con la que usan los docentes en la enseñanza del cálculo diferencial en la E.P. de Ingeniería Agrícola (anexo 6). El propósito es tener referencia sobre la presentación didáctica del objeto matemático que estamos investigando y tener idea cómo está llegando esta noción a los estudiantes, el orden de presentación de estos libros textos tiene que ver con la frecuencia de su uso.

- **Análisis Matemático I, Espinoza (2002)**

La derivada, objeto en este libro texto se encuentra en el capítulo 4 página 491; el autor hace una introducción sin énfasis en la importancia del tema, indica que es un instrumento matemático y sirve para el estudio del cálculo diferencial e integral, luego agrega muy escuetamente que Newton y Leibnitz fueron los padres de la derivada.

El autor comienza directamente con la definición matemática de derivada seguidamente hace la interpretación geométrica en la cual usa la palabra aproximación sin nombrar en ningún momento la idea de cambio. En el capítulo 5 que es aplicaciones de la derivada en la página 683 define: razón de cambio promedio, luego razones instantáneas y velocidades y aceleración rectilínea y muestra los problemas de aplicación.

Todos los ejemplos que presenta para la introducción de la definición de derivada son funciones representadas algebraicamente sin escoger funciones que podrían representar fenómenos reales. En este libro texto se observa que la derivada tiene un trato muy algorítmico, en su origen hace un enfoque solo geométrico y la razón de cambio lo trata únicamente como aplicación en el siguiente capítulo.

- **Análisis Matemático I, Figueroa (2018)**

En este libro texto la derivada se encuentra en el capítulo 4, página 363. El autor hace la introducción del objeto de nuestra investigación señalando que fueron 4 problemas fundamentales que tuvieron marcada influencia en el desenvolvimiento del cálculo y las enumera así:

1. El problema de la tangente;
2. El problema de la velocidad y la aceleración;
3. El problema de máximos y mínimos;
4. El problema del área bajo una curva.

También aclara que los tres primeros problemas fueron resueltos por el cálculo diferencial y el cuarto por el cálculo integral. Y nombra que las soluciones generales parecen haberla resuelto Isaac Newton y Goltfried Leibniz porque ambos coincidieron en el mismo resultado. Luego define el incremento de una función, sigue con la definición de tangente a una curva, pendiente de la tangente y sigue directamente la definición de la derivada de una función en un punto y continúa la función derivada. Los ejemplos que plantea son netamente algebraicos.

En la página 478 ítem 4.14 trata la derivada como razón de variación, aquí indica que la interpretación es igualmente importante de la derivada de una función como una razón de cambio e indica que la derivada puede representar a otras cantidades y las enumera lo siguiente:

1. El ritmo que crece una población (personas, animales, bacterias, etc.);
2. El número de dólares de una cuenta bancaria;
3. La velocidad de un objeto que se mueve;
4. El ritmo de inflación;
5. El ritmo de producción, etc.

Seguidamente define la razón promedio de cambio, razón de variación instantánea, intensidad relativa y razón porcentual, movimiento rectilíneo, define la velocidad promedio e instantánea, y define la aceleración instantánea.

El autor usa incrementos para las definiciones no señala marcadamente la relación que guarda la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto con la velocidad instantánea, ya que en el punto 4.14 recién toca la derivada como razón de variación después de haber trabajado algorítmicamente a la derivada, pueda ser que esta lejanía influya para que la noción de la derivada sea enfocada de una manera estática y entre en un conflicto el estudiante cuando más tarde le hablan de velocidad.

- **Cálculo diferencial e integral y Matemática Básica, Arce (2006)**

El autor hace una presentación de la derivada indicando que se tiene dos puntos de vista uno geométrico y otro físico. Explica que el cálculo estudia la velocidad del cambio de un proceso; también dice que en el campo de la ingeniería aparece un sin número de problemas en las cuales surge la necesidad de conocer la tasa de cambio de la variable dependiente. Cuando se da de antemano la variable independiente pone 4 ejemplos descritos. Seguidamente pone el título de derivada y hace una introducción sucinta para luego hacer la definición matemática después de esto hace la interpretación geométrica y luego física, el tipo de problemas que trabaja para nuestro objeto de investigación son netamente algebraicos.

Al analizar este libro se puede observar que su introducción se puede mejorar agregando problemas contextualizados. También se observa que al hacer el tratamiento de la derivada (señala) comete un error desde mi punto de vista al indicar que se dedicará a formular matemáticamente y "adiestrar" al estudiante en el dominio de las técnicas de derivación; también en la interpretación física se ha podido hacer con ejemplos contextualizado para ver la similitud con el geométrico.

En los tres libros textos se puede mejorar haciendo al inicio una analogía de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto con la velocidad instantánea y mostrando problemas contextualizados de tal forma que hagamos desarrollar el pensamiento variacional que guarda relación con la derivada.

3.4.2 Concepción y análisis a priori

En esta parte del trabajo con toda la base del análisis preliminar se hace la propuesta de las actividades con sus respectivas situaciones didácticas.

Determinación de las variables

A) Variables macro didácticas

Para la aplicación de las situaciones didácticas diseñadas tendremos en cuenta las siguientes consideraciones:

- La organización de los estudiantes para los trabajos grupales, se les harán en 6 grupos de 3 y un grupo de 2 los cuales serán escogidos libremente.
- Los contenidos previos requeridos, los estudiantes lo han trabajado en el nivel secundario; prosiguiendo en el curso de matemática básica en la universidad

y también en las unidades previas al tema en investigación en el curso de cálculo diferencial tal como detalla el sílabo del curso. Debo señalar que la asignatura de Física I que es de suma importancia para complementar lo que estudiaron en secundaria; los estudiantes de Ingeniería Agrícola lo llevan recién en el segundo semestre lo que es una desventaja para el aprendizaje.

- El diseño de las situaciones didácticas se ha realizado de acuerdo con las características del grupo considerando situaciones concretas que permitan desarrollar el pensamiento y lenguaje variacional en los estudiantes de Ingeniería Agrícola.

B) Variables micro didácticas

Para estudiar las condiciones que permitan construir el conocimiento matemático considerado en esta investigación y que el control, manipulación o variación de esas condiciones permita reproducir y optimizar los procesos de adquisición de este conocimiento.

Se ha tomado en cuenta algunas variables que fueron extraídas o deducidas del análisis de los conocimientos previos, siendo algunas: Variación, razón de cambio promedio, razón de cambio instantáneo.

Propuesta de la Secuencia Didáctica

Visión general

La secuencia didáctica fue propuesta de acuerdo con la TSD, donde el estudiante va a tener que resolver situaciones nuevas e interactuar con ellas, crear estrategias de trabajo sin un entrenamiento específico para cada situación y encaminarse a adquirir el conocimiento de la noción de la derivada, hemos considerado en este, tres actividades las cuales están compuestas con situaciones didácticas de aprendizaje que tiene momentos de trabajo individual y grupal.

En estas actividades usamos diferentes registros de representación (anexo 3).

Identificación de las variables en las actividades de aprendizaje

En esta sección se muestra cómo se van modificando las variables didácticas descritas anteriormente para que el estudiante se vea forzado a cambiar de estrategia para adquirir cada conocimiento nuevo. Las actividades de aprendizaje se han desarrollado de tal manera que el proceso lleve al estudiante a desarrollar el lenguaje y pensamiento variacional, iniciando con la idea de posición, movimiento de una partícula luego la idea de recta secante y tangente para que finalmente encuentre la relación entre ambos.

Tabla 6

Actividades de aprendizaje y variables micro didácticas

Actividades de aprendizaje	Variables micro didácticas
Actividad 1 Posición, movimiento de una partícula en diferentes registros de representación.	▪ Variación ▪ Razón de cambio
Actividad 2 Recta secante Recta tangente	▪ Variación ▪ Razón de cambio
Actividad 3 Relación de razón de cambio instantánea con la pendiente de la tangente a la gráfica en un punto.	▪ Variación ▪ Variación instantánea ▪ Razón de cambio promedio ▪ Razón de cambio instantáneo

Tipos de Interacciones con el medio y comportamientos esperados

Seguidamente detallamos el tipo de interacción con el medio que se pretende fomentar en cada pregunta de las actividades propuestas y los comportamientos que se esperan por parte de los alumnos en relación al objeto de estudio.

Programación de actividades

A continuación, detallamos la forma de trabajo de las situaciones didácticas. Para tener una visión clara del nivel de conocimientos previos en el tema de la derivada en nuestra investigación, se tomó una evaluación que tuvo una duración de 100 minutos, la que nos ha permitido diseñar las actividades tanto individuales como grupales; se ha distribuido el trabajo en tres sesiones, la sesión 1 es importante porque en ella se menciona el contrato didáctico, al inicio de la sesión 2 se hace una recapitulación de la sesión 1 la que fortalece los conocimientos aprendidos, de manera similar en la sesión 3 se hace la recapitulación de la sesión anterior y luego se continua con actividad correspondiente, finalmente, posterior a la sesión 3 el docente hace una recapitulación general tal como se muestra en la tabla N° 7.

Tabla 7

Situaciones didácticas

Sesión	Actividad	Forma de trabajo	Duración
Previa la Sesión 1	Conocimientos previos	Individual	100 minutos
Sesión 1	Indicaciones	Realizadas por el profesor.	10minutos
	Actividad 1	Parte 1: individual Parte 2: Grupal	40 minutos 50minutos
Sesión 2	Recapitulación 1	Realizadas por el profesor.	20 minutos
	Actividad 2	Trabajo grupal	80 minutos
Sesión 3	Recapitulación 2	Realizadas por el profesor.	10 minutos
	Actividad 3	Trabajo grupal	80 minutos
Posterior a la sesión 3	Recapitulación 3	Realizada por el profesor	30 minutos

- **Tipos de interacción con el medio y comportamientos esperados**

En están parte del trabajo mostramos el tipo de interacción con el medio que se pretende fomentar con cada pregunta de las actividades propuestas, y los comportamientos que se esperan de los estudiantes participantes en el objeto de estudio.

- **Actividades diseñadas**

Las actividades que componen la secuencia didáctica fueron diseñadas teniendo en cuenta el marco teórico, el análisis preliminar y las consideraciones previas del análisis a priori, la secuencia didáctica se encuentra dosificada en tres actividades (anexo 3), donde se espera que los alumnos puedan encontrar el camino para determinar la noción de la derivada.

ACTIVIDAD 1

PARTE I: Trabajo individual

A. Situación (1)

- ✓ **Tipo de interacción: Acción**

  Comportamientos esperados

  Se espera que después de observar el grafico presentado, interprete que para determinar el desplazamiento del automóvil en cada intervalo deben utilizar $s(t_2) - s(t_1)$; es posible que tengan dificultades en determinar el desplazamiento en los dos últimos intervalos.

- ✓ **Tipo de interacción: Acción**

  Comportamientos esperados

  Se espera que analice y describa el desplazamiento sin problemas en los tres primeros intervalos; es probable que algunos estudiantes no puedan interpretar el signo negativo que aparece en los dos últimos intervalos y no puedan expresar que significa.

B. Situación (2)

- ✓ **Tipo de interacción: Acción**

  Comportamientos esperados

  Se espera que la mayoría de los estudiantes hagan las operaciones pedidas en la tabla, es posible que algunos estudiantes tengan dificultad para determinar Δs.

- ✓ **Tipo de interacción: Acción**

  Comportamientos esperados

  Se espera que representen el gráfico que describe la posición de un móvil en cada instante t y que cuando t = 0, s(t) = 3. Se espera que al interpretar t_2- t_1 expresen que representa la variación del tiempo Δt y que es constante, además que $s(t_2) - s(t_1)$ es la variación del desplazamiento y también es constante y algunos estudiantes podrían ir más allá asegurando que $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ es la pendiente que es igual a 2.

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

  Comportamientos esperados

  Se espera que la mayoría describan que lo pedido es la velocidad media.

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

  Comportamientos esperados

  Se espera que expliquen que $\frac{\Delta \mathrm{S}}{\Delta \mathrm{t}}$ representa la pendiente.

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

  Comportamientos esperados

  Se espera que afirmen que el movimiento es constante, esto lo pueden hacer observando el grafico, la tabla o por sus conocimientos de funciones.

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

  Comportamientos esperados

  Se espera que expliquen que la velocidad es también 2 m/seg a partir de que la velocidad es constante, por lo tanto, es posible determinar la velocidad en cualquier instante, en este caso la velocidad media es igual a la velocidad instantánea.

C. Situación (3)

- ✓ **Tipo de interacción: Acción**

  Comportamientos esperados

  Se espera que la mayoría de los estudiantes completen la tabla utilizando $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$ y le pongan unidades. Es probable que al momento de operar algunos estudiantes pregunten con cuantos decimales van a trabajar para lo cual se responderá que lo hagan considerando tres decimales. Probablemente algunos estudiantes cometan errores al operar decimales.

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

Comportamientos esperados

Se espera que realice la representación gráfica a partir de la representación algebraica utilizando la tabulación de datos o también completando cuadrados y obtener una parábola. Es probable que algunos estudiantes tengan dificultad al pasar los datos numéricos al gráfico y obtener la parábola.

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

Comportamientos esperados

Se espera que afirme que es: La pendiente y crece y esto lo hará analizando el gráfico y dirá que m > 0. Probablemente algunos estudiantes no entiendan la pregunta.

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

Comportamientos esperados

Se espera que analicen la columna 4 y afirme que la velocidad de la piedra en todo su trayecto es variada. Es probablemente algunos estudiantes indiquen la velocidad por tramos.

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

Comportamientos esperados

Se espera que experimente en el gráfico $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ y tiempo final y tiempo inicial considere 3 y en $\Delta t = t2 - t1$ obtenga cero y exprese que no se puede estimar la velocidad de la piedra. Es probable que algunos estudiantes cometan el error de utilizar $e = v.t$, también observen el gráfico y traten de determinar $s(3)$ y reemplacen en la fórmula para luego despejar v.

PARTE II: Trabajo grupal

A. Situación (1)

- ✓ **Tipo de interacción: Acción**

Comportamientos esperados

Se espera que la mayoría de los grupos afirman por observación del gráfico que la distancia total recorrida por el auto es 33 km y el tiempo que duro el viaje fue 36 minutos.

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

Comportamientos esperados

Se espera que la mayoría de los grupos para determinar la velocidad media utilicen. $Vm = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{33-0}{36-0} = \frac{33}{36}$, para comodidad se espera que traerán un triangulo del origen hasta el punto D. Es probable que algunos estudiantes determinen la velocidad media por tramos.

Es probable que algunos estudiantes conviertan las unidades de tiempo a horas o segundos y simplifiquen la expresión obtenida.

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

Comportamientos esperados

Se espera que la mayoría de los estudiantes realicen la operación: $Vm = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{25-11}{28-14} = 1\frac{km}{min}$.

Es probable que algunos estudiantes cometan errores de interpretación y no ubiquen bien las coordenadas.

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

Comportamientos esperados

Se espera que la mayoría de los estudiantes con la experiencia de la pregunta anterior respondan: $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{11-0}{15-0}\frac{km}{min} = \frac{11}{15}\frac{km}{min}$.

- **Tipo de interacción: Formulación**

  Comportamientos esperados

  Se espera que la mayoría de los estudiantes respondan $V_m = \frac{25-18}{30-22}\frac{km}{min} = \frac{7}{8}\frac{km}{min}$.

- **Tipo de interacción: Validación**

  Comportamientos esperados

  Se espera que algunos grupos pregunten que es velocímetro y se den cuenta que V_m sea igual a V_i (velocidad instantánea) porque es MRU.

- **Tipo de interacción: Validación**

  Comportamientos esperados

  Se espera que responda V_i = 0 en t =7.

B. Situación (2)

- **Tipo de interacción: Formulación**

  Comportamientos esperados

  Se espera que afirmen que no pueden operar dicha expresión y explican que $\frac{0}{0}$ es una indeterminada.

  Los probables errores que se espera que cometan es que indique que está mal formulada la pregunta.

- **Tipo de interacción: Acción**

  Comportamientos esperados

  Se espera que lean con atención la información y puedan realizar las operaciones reemplazando el tiempo t en los puntos indicados e indiquen que estas coinciden y que algunos estudiantes hagan la comparación con la situación 3 item e.

✓ **Tipo de interacción: Formulación**

Comportamientos esperados

Se espera que los estudiantes descubran la imposibilidad de calcular velocidad en un instante con métodos conocidos y reflexionen sobre la amplitud de los intervalos, los registros utilizados para este item son el numérico y el verbal.

Es probable que algunos estudiantes no puedan explicar verbalmente este proceso de aproximación.

✓ **Tipo de interacción: Acción**

Comportamientos esperados

Se espera que los estudiantes lean cuidadosamente el enunciado e interpreten los datos con los que aparecen en la tabla anterior, y realicen las operaciones utilizando la velocidad media.

Es probable que muchos estudiantes no podrán relacionar los datos de ambas tablas y hagan consultas las cuales se les responderá con preguntas relacionadas. También es probable que cometan errores al realizar las operaciones.

✓ **Tipo de interacción: Validación**

Comportamientos esperados

Se espera que indiquen que la mejor aproximación es 3,7 y expliquen que a medida que la amplitud del intervalo disminuye se podrá determinar la velocidad en el instante $t = 2$.

ACTIVIDAD 2

PARTE I: Trabajo individual

A. Situación (1)

- ✓ **Tipo de interacción: Acción**

Comportamientos esperados

Se espera que todos los estudiantes tracen la recta tangente en el punto “p” e indiquen que hay tangentes que cortan en más de un punto, lo que hace que les indiquemos que la tangente se evalúa de forma local.

Es probable que algunos estudiantes indiquen que la tangente es la recta que toca en un solo punto a la curva.

- ✓ **Tipo de interacción: Acción**

Comportamientos esperados

Se espera que respondan que a medida que trazan rectas tangentes están cambian en cada punto, algunas crecen, otras decrecen y otras son constantes, también pueden expresar que cambian de dirección; todas son importantes ya que consideran aspectos variacionales de las funciones

B. Situación (2)

- ✓ **Tipo de interacción: Acción**

Comportamientos esperados

Se espera que determinen las pendientes: 0, -3/2 y 2 y determinen las rectas: y=3, y= -3/2x+5= 0 finalmente y =2x +1 = 0 respectivamente.

Es probable que muchos estudiantes no recuerden como determinar pendiente

C. Situación (3)

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

Comportamientos esperados

Se espera que apliquen $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ y obtengan 400 soles luego realicen el grafico considerando en el eje x la variable independiente y en eje y la variable dependiente.

Es probable que algunos estudiantes pregunten sobre la definición la razón de cambio promedio lo que se les contestara con una pregunta.

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

Comportamientos esperados

Se espera que la mayoría de los estudiantes responda que sí y explique que las dos tienen la misma forma de evaluación.

Es probable que algunos estudiantes tengan dificultad en expresar lo que lograron.

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

Comportamientos esperados

Se espera que todos respondan que caracteriza a la variación.

D. Situación (4)

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

Comportamientos esperados

Se espera que todos los estudiantes respondan de manera correcta por qué se les da direccionada la pregunta deben tratarla numéricamente, reemplazar así:

$$\frac{\pi(2)^2-\pi(1)^2}{2-1}=\frac{4\pi-\pi}{1}=3\pi$$

Y deben decir que hubo una variación.

En la interpretación se espera que deban decir que este valor representa, que el área de la tapa crece a razón $3\pi\ \frac{m^2}{m}$ cuando el radio de la tapa pasa a medir de 1 a 2 m.

Es probable que muchos estudiantes no puedan interpretar la expresión que han obtenido.

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

Comportamientos esperados

Se espera que la mayoría de los estudiantes puedan plantear la expresión pedida: $\frac{\pi(1+\Delta r)^2-\pi(1)^2}{\Delta r} = 2\pi + \pi r$

Se espera que interpreten que esta expresión representa la razón de cambio del área de la tapa con respecto a la medida de su radio cuando esta cambia de 1 a 1+ Δr. Es probable que algunos estudiantes no puedan realizar las operaciones pedidas y más aún que no puedan interpretar lo obtenido además es probable que consulten sobre Δt.

PARTE II: Trabajo grupal

A. Situación (1)

- ✓ **Tipo de interacción: Acción**

Comportamientos esperados

Se espera que la mayoría de los grupos completen correctamente la tabla, porque además usan calculadora. Es probable que algunos grupos tengan dudas respecto a la cantidad de decimales que usaran.

- ✓ **Tipo de interacción: Acción**

Comportamientos esperados

Se espera que la mayoría de los grupos digan que los intervalos son cada vez más pequeños. Al comparar lo dado con lo que están trabajando esperamos que digan que la velocidad promedio en ambas es variada, es probable que encuentren más similitudes.

- ✓ **Tipo de interacción: Acción**

  Comportamientos esperados

  Se espera que la mayoría de los alumnos hagan uso de la tabla hecha y puedan relacionarla con esta pregunta y respondan que la velocidad promedio es: 10,78 m/seg.

- ✓ **Tipo de interacción: Acción**

  Comportamientos esperados

  Se espera que la mayoría de los alumnos hagan una evaluación más y certeramente indiquen que se aproxima a 9,8. Se espera que algunos puedan relacionar este valor con la gravedad estudiada en física ya que se trata de un problema de caída libre.

  Es probable que algunos alumnos no den ninguna explicación.

B. Situación (2)

- ✓ **Tipo de interacción: Acción**

  Comportamientos esperados

  Se espera que ubiquen adecuadamente las coordenadas y encuentren correctamente la pendiente utilizando los datos del gráfico y reemplazando en $\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=14.7$, también 12,25; 10,78; 10,29; 10,045 y finalmente 9,849

- ✓ **Tipo de interacción: Acción**

  Comportamientos esperados

  Se espera que los grupos señalen que la expresión para hallar la velocidad promedio es similar a determinar la pendiente de la recta secante.

ACTIVIDAD 3

PARTE I: Trabajo individual

A. Situación (1)

- ✓ **Tipo de interacción: Acción**

Comportamientos esperados

Se espera que la mayoría de los estudiantes, hallen la velocidad promedio obteniendo los datos de la representación gráfica de la función que describe el espacio recorrido.

Esta pregunta tiene el propósito de que los alumnos reconozcan la pendiente de recta como la razón de cambio entre la variable dependiente y la variable independiente. Lo que se espera que obtengan con V_m= 45cm/seg.

Es probable que algunos estudiantes al leer la pregunta de este ítem pongan lo que escucharon en física e = v.t y cometan errores en su cálculo.

- ✓ **Tipo de interacción: Acción**

Comportamientos esperados

Se espera que la mayoría de los estudiantes completen la tabla ya que utilizan calculadora porque los valores observados en el gráfico son decimales y con esto hacemos que los estudiantes trabajen con mayor rapidez y exactitud (por el tiempo limitado que tenemos por sesión).

Es probable que algunos estudiantes tengan errores al querer determinar primero la función que representa el gráfico y no utilicen directamente los datos del gráfico.

- ✓ **Tipo de interacción: Acción**

Comportamientos esperados

Es probable que algunos estudiantes tengan errores al querer determinar primero la función que representa el gráfico y no utilicen directamente los datos del gráfico.

Se espera que todos los estudiantes indiquen 25 cm/seg, observando la tabla

- ✓ **Tipo de interacción: Acción**

Comportamientos esperados

Se espera que la mayoría de los estudiantes determinen la pendiente de la recta que unen los puntos A y B en la figura1, deben obtener 45 y es similar al cálculo obtenido en el ítem a).

Seguidamente fig. la pendiente es 43,75 la que está relacionada a la velocidad promedio de la tabla del inciso b) y de igual manera se espera que en la fig. 3 pendiente 41.6, fig. 4 pendiente 37.5 fig. 5 pendiente 25; llegando a la conclusión que la velocidad promedio es similar al cálculo de la pendiente.

Es probable que algunos estudiantes cometan errores poniendo valores erróneos y así calcular pendientes equivocadas.

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

Comportamientos esperados

Se espera que la mayoría de los estudiantes grafiquen la recta tangente a la gráfica en el punto A y se espera que la pendiente la estime $V_m = \frac{15-15}{1-1} = \frac{0}{0}$ y al relacionar con la velocidad en este punto lleguen a lo mismo.

Es probable que algunos estudiantes no puedan determinar la pendiente y no encuentren explicación alguna de porqué es indeterminado.

- ✓ **Tipo de interacción:**

Comportamientos esperados

Se espera que los grupos indiquen que la pendiente de la recta tangente es similar a determinar la velocidad instantánea.

B. Situación (2)

Tiene carácter integrador: Intenta recuperar las intuiciones conjeturas y hallazgos de las situaciones en actividades anteriores.

- **Tipo de interacción: Acción**

  Comportamientos esperados:

  Se espera que la mayoría de estudiantes completen la tabla. Probablemente pregunten con cuantos decimales trabajaran.

- **Tipo de interacción: Acción**

  Comportamientos esperados

  Se espera que la mayoría de estudiantes se den cuenta de manera intuitiva que nos referimos a los procesos infinitos o sea la idea de intervalos infinitamente pequeños y lo relacionen con lo estudiado en límites, debe explorar que sucede con la sucesión de velocidades medias muy cerca del punto en cuestión, acercándose tanto por derecha como por izquierda a 12.

- **Tipo de interacción: Formulación**

  Comportamientos esperados

  Se espera que los estudiantes conjeturen que la velocidad instantánea se obtiene cuando el cambio de tiempo es infinitamente pequeño t es infinitamente cercana a t = 2.

- **Tipo de interacción: Formulación**

  Comportamientos esperados

  Se espera que determine la velocidad media reemplazando los valores del intervalo en la función dada. La interpretación geométrica que se espera que hagan es que digan que es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $s(t) = t^3$, $[2, 2 + \Delta t]$

- **Tipo de interacción: Formulación**

  Comportamientos esperados

  Se espera que indiquen que el significado es la velocidad exacta de la partícula en t=2.

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

  Comportamientos esperados

  Se espera que obtengan $s(t) = 3{t_0}^2$ y expresen que significa la velocidad instantánea y geométricamente la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto cualquiera.

PARTE II: Trabajo grupal

A. Situación (1)

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

  Comentarios esperados

  Se espera que los estudiantes reemplacen la función en: $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$ luego obtengan $\boldsymbol{t_0}$. Deben indicar que la razón de crecimiento es 3.

  Es probable que los estudiantes no puedan reemplazar la función.

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

  Comentarios esperados

  Se espera que obtengan 5.

  Es probable que algunos estudiantes no puedan interpretar la pregunta.

B. Situación (2)

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

  Comentarios esperados

  Se espera que los estudiantes indiquen que la partícula alcanza una velocidad de 5 m/seg, cuando t=4.

  Es probable que los estudiantes no recuerden productos notables por lo tanto no podrán desarrollar el problema y buenamente vemos que es falta de conocimientos previos.

- ✓ **Tipo de interacción: Formulación**

Comentarios esperados

Se espera que los estudiantes indiquen que la aceleración es cero cuando t =1.5 seg.

Es probable que los estudiantes no puedan relacionar la definición de derivada y la aceleración.

3.4.3 Experimentación

La fase experimental de este trabajo de investigación consiste en la aplicación o puesta en escena de la secuencia didáctica diseñada, el recojo y registro de información respecto al desempeño de los estudiantes en cada una de las actividades propuestas. Logros y dificultades encontrados en el desarrollo de las actividades.

Esta fase de experimentación se desarrolló en 3 sesiones de 100 minutos cada una en las fechas y horas que corresponden al horario de dictado del curso.

En cada sesión se experimentó una de las actividades diseñadas como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 8

Actividades diseñadas

Actividad	Fecha	Hora
1	Jueves 25 de octubre	7 - 9 a.m.
2	Viernes 26 de octubre	11 - 13 p.m.
3	Martes 30 de octubre	7- 9 a.m.

Con la finalidad de facilitar el recojo y registro de la información respecto al desempeño de los estudiantes se utilizó una ficha de información (anexo 2), y también se contó con la colaboración del profesor del curso de matemática básica como observador cuya presencia no influyó en el desenvolvimiento y comportamiento de los estudiantes debido a que los estudiantes lo conocían de sesiones en su curso.

Se realizó un análisis a posteriori local, con la finalidad de hacer correcciones necesarias de una sesión a otra y orientar las recapitulaciones después de cada actividad.

Teniendo en cuenta los resultados de las actividades y además en base a la información recogida; detallaremos el proceso de la aplicación de la ingeniería didáctica para cada una de las actividades propuestas.

ACTIVIDAD 1

La clase se inició con los 20 estudiantes que asisten permanentemente respondiendo a la recomendación previa hecha especialmente en la clase anterior solicitándoles que no falten. Iniciamos a las 7.00 a.m. dando las indicaciones respectivas sobre la forma de trabajo (al inicio individual y luego grupal); el trabajo individual duró 65 minutos y el grupal 25 minutos, la presentación de la actividad y recomendaciones duro 10 minutos.

Análisis de los resultados de la Actividad 1

En base a los resultados de la actividad 1 (anexo 3).

El análisis de la ficha de observación (anexo 2).

También teniendo en cuenta los datos obtenidos de las soluciones obtenidas de los estudiantes tanto en las actividades individuales y grupales analizamos los logros, las dificultades encontradas en cada una.

PARTE I: Trabajo individual

A. Situación (1)

1. El gráfico representa el movimiento de un automóvil durante 10 seg.

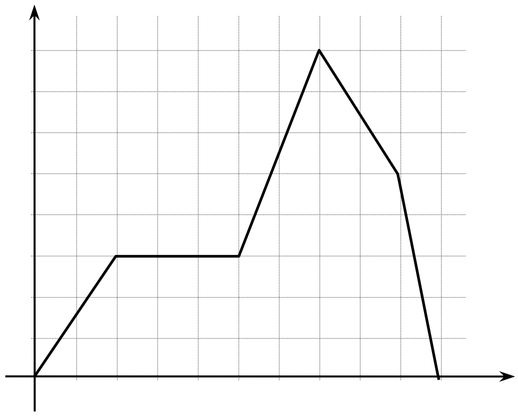


Figura 9. Movimiento de un automóvil

2. Halle el desplazamiento del automóvil en cada uno de los intervalos [0,2], [2,5], [5,7], [7,9], [9,10] y complete la tabla.

Tabla 9

Desplazamiento del automóvil

Intervalo	$s(t_f) - s(t_i)$	Variación (m)
[0,2]	3 – 0 =	3
[2,5]	3 – 3 =	0
[5,7]	8 – 3 =	5
[7,9]	5 – 8 =	3
[9,10]	0 – 5 =	5

✓ **Observación**

En esta situación al inicio se observa a los estudiantes un tanto inseguros respecto a las variables en el gráfico e inmediatamente quieren que se les indique si los ejes son como x e y, ya que señalan que casi nunca han trabajado con otras variables; ante esta situación se recalca que la variable independiente siempre va en el eje de las abscisas y que la variable dependiente en el eje de las ordenadas, y ésta va de acuerdo al tipo de problema; posterior a esto se logró que 13 estudiantes desarrollaron bien sus operaciones completando la tabla correctamente ubicando los pares ordenados sobre el gráfico y proceden a operar: 4 estudiantes tuvieron dificultades cuando analizan el intervalo de [7,9] como se puede observar los estudiantes tienen problemas en operaciones básica.2 estudiantes evitan los signos porque piensan que están operando mal, 1 estudiante deja en blanco la tabla a pesar de que se les transmite seguridad.

✓ **Devolución**

Algunos estudiantes preguntan respecto a las variables de los ejes y se les indica que se puede utilizar cualquier variable ya que depende del problema que se quiera resolver. Comentan que casi siempre trabajaron con x e y.

Analice y describa el desplazamiento en cada intervalo.

✓ **Observación**

La mayoría de los estudiantes pide al docente investigador, que le certifique si lo que está haciendo es correcto, haciendo la pregunta ¿está bien profesora? lo que demostraría inseguridad en lo que hacen, También algunos estudiantes confunden desplazamiento con velocidad. 9 estudiantes responden correctamente, 7 estudiantes confunden desplazamiento con velocidad de tal manera que su respuesta es incorrecta. 3 responden hasta la mitad, o sea que está en proceso y le falta el análisis cuando aparecen los signos negativos. 1 deja en blanco todo.

✓ **Devolución**

Ante la dificultad presentada el profesor investigador les pregunta ¿Si un auto se desplazó 3 Km? ¿Es similar a decir un auto va a una velocidad de 30 Km/h?

Reformulación: Debido a que algunos estudiantes que dicen ¿De la tabla anterior profesora? Agregamos del ítem a).

Analice y describa el desplazamiento en cada intervalo del ítem a).

B. Situación (2)

La Ley que describe la posición de un móvil en cada instante t (en segundos) a partir de un punto de referencia es $s(t) = 2t + 3\ m$

1. Complete la siguiente tabla.

Tabla 10

Variación función lineal

Intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta S = S(t_2) - S(t_1)$	$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \leq t \leq 1$	1 – 0 = 1	2(1) + 3 – [2(0) + 3]	-6
$1 \leq t \leq 2$	2 – 1 = 1	2(2) + 3 – [2(1) + 3]	8
$2 \leq t \leq 3$	3 – 2 = 1	2(3) + 3 - [2(2) + 3]	2
$3 \leq t \leq 4$	4 – 3 = 1	2(4) +3 - [2(3) + 3]	2

✓ **Observación**

Se observa que algunos estudiantes piden que se les lea nuevamente la pregunta y se aclare cada columna pedida.

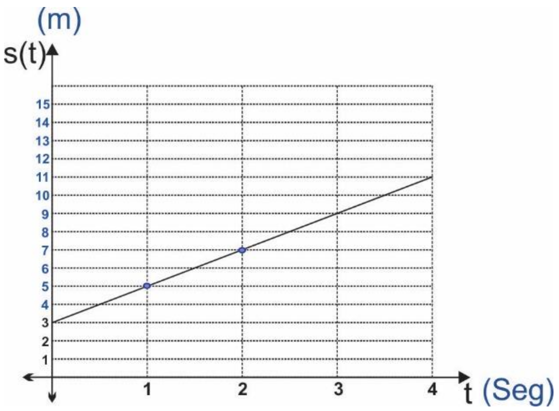
- Los 12 estudiantes completan correctamente la tabla;

- Los 7 estudiantes están en proceso ya que demuestran inseguridad al operar mal algunos intervalos y otros bien;
- Un 1 estudiante realiza todas las operaciones mal.

✓ **Devolución**

Se les respondió que leyeran nuevamente, se les tenía que hacer notar que tenían que trabajar solos. Claro que se les menciono que este tema lo estudiaron en funciones; para refrescar su memoria.

2. Realice la representación gráfica de $S(t) = 2t + 3$ e interprete en la misma las medidas $t_2 - t_1$ y $S(t_2) - S(t_1)$ calculadas para uno de los intervalos.



$$S(t) = 2t + 3$$

$$t_2 - t_1\,; en\ el\ intervalo: [1,2]$$

t	S
1	5
2	7

$$2 - 1 = 1$$

$$S(t_2) - S(t_1) = 2$$

$$[3,4]$$

$$4 - 3 = 1$$

$$11 - 9 = 2$$

✓ **Observación**

Para realizar el gráfico se observa que casi todos los estudiantes usan la tabulación, se nota que siendo su cuaderno cuadriculado muchos estudiantes no usan la escala adecuada en el plano cartesiano, resultándoles el gráfico otra curva. Se observa que tienen dificultad para interpretar a pesar de que muchos realizan la variación para un intervalo. 10 interpretan correctamente, 7 están en proceso, que hacen las operaciones, pero no escriben que significa. 1 interpreta incorrectamente, 2 dejan en blanco la pregunta.

✓ **Devolución**

Dos estudiantes preguntan que si para interpretar las medidas lo harán en cualquier intervalo. Se le responde que puede hacerlo si desea en dos intervalos, para que saque algunas conclusiones importantes.

Reformulación: En vista de que algunos estudiantes no pueden tomar la decisión en que intervalo trabajar sería necesario darle el intervalo y diga.

Realice la representación gráfica de $S(t) = 2t + 3$ e interprete en la misma las medidas $t_2 - t_1$ y $S(t_2) - S(t_1)$ calculadas para el intervalo $[2, 3]$.

3. ¿Qué concepto físico representa los valores de la última columna?

- ✓ **Observación**

Algunos estudiantes preguntan de ¿de la tabla? ¿De cuál?**;** 5 responden correctamente indicando la velocidad media y más aún dos de ellos dan la explicación, 13 responden la velocidad lo cual consideramos en proceso ya que no especifican la palabra media y dos no entienden la pregunta y responden que representa la pendiente por lo tanto lo consideramos erróneo.

Reformulación: Por la observación podríamos rehacer la pregunta completándola: ¿Qué concepto físico representa los valores de la última columna de la tabla de ítem a)?.

4. ¿Cuál es la interpretación geométrica de la cantidad $\frac{\Delta s}{\Delta t}$?

- ✓ **Observación**

Se les nota con más confianza en lo que están haciendo, y parece que captan más la interpretación geométrica ya que lo relacionan con la concepción de pendiente que trabajaron en la EBR y seria que evocan ello.

Los 18 estudiantes responden correctamente y se les nota que tienen más confianza en lo que refiere al concepto geométrico indicando la pendiente; 1demuestra inseguridad en lo que hace y necesita permanentemente que se le oriente y otro estudiante no comunica nada.

5. ¿Qué puede decir sobre el movimiento en todo el trayecto?

- El movimiento es constante.

- ✓ **Observación**

  Los 10 estudiantes afirman que el movimiento es constante, otros 4 indican que el movimiento es rectilíneo uniforme a los 14 estudiantes se les considera sus respuestas como correctas; 6 estudiantes responden indicando de manera incorrecta como: Que el carro se desplaza rápido, ¿De quién?, no entiendo que movimiento etc.

  Reformulación: Para que la pregunta hecha este más clara debemos hacer la pregunta como sigue: ¿Qué puede decir sobre el movimiento del automóvil en todo su trayecto?

6. ¿Cuál es la velocidad del automóvil a los dos segundos de iniciado el movimiento?

- La velocidad del móvil es 2m/seg. Porque es un MRV.

- ✓ **Observación**

  Un estudiante pregunto: ¿Porque a los 3 y 4 segundos también la velocidad es 2?

  Los 14 estudiantes responden correctamente indicando que es dos y algunos aclaran que están observando la tabla y corroboran que es dos son pocos los que aclaran que el movimiento es un MRU, pero 5 estudiantes sacan datos del gráfico y resuelven con la formula $e = v.t$ y reemplazan en el espacio 7 y lo dividen entre 2 resultándoles 3.5 lo que consideramos erróneo, 1 deja en blanco.

- ✓ **Devolución**

  Para responder la pregunta se le pidió que analizara en otros tiempos y se fije el tipo de función que describe el automóvil, luego de unos minutos el estudiante se da cuenta que se trata de una función lineal y está relacionada con el movimiento rectilíneo uniforme.

C. Situación (3)

Por experimentos realizados hace cuatro siglos, Galileo descubrió que la distancia recorrida por cualquier cuerpo en caída libre es proporcional al cuadrado del tiempo que haya estado cayendo. (Este modelo para la caída libre no toma en cuenta la resistencia del aire). Si la distancia recorrida después de t segundos es denotada por $s(t)$ y medida en metros, entonces la ley de Galileo está expresada por la ecuación:

$$s(t) = 4{,}9t^2$$

A continuación, estudiaremos la velocidad de una piedra al dejar caer desde la cubierta superior del edificio de 15 pisos de la UNA – Puno.

1. Con la ayuda de una calculadora complete la tabla siguiente:

Tabla 11

Variación función cuadrática

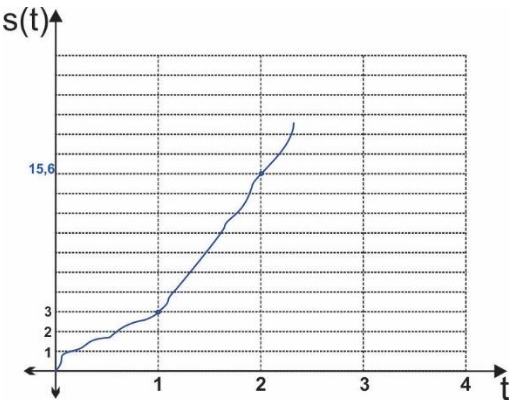
Intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta S = S(t_2) - S(t_1)$	$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \leq t \leq 1$	1	4.9 – 0 = 4.9	4.9/1 = 4.9
$1 \leq t \leq 2$	1	19.6 - 4.9 = 14.7	14.7/1 = 14.7
$2 \leq t \leq 3$	1	44.1 - 19.6 = 24.5	24.5/1 = 24.1
$3 \leq t \leq 4$	1	78.4 - 44.1 = 34.3	34.3/1 = 34.3

- ✓ **Observación**

  Los 14 estudiantes completan la tabla correctamente, 5 cometen errores en operaciones y 1 completa la mitad de la tabla señalando que no tiene práctica en el uso de calculadora.

2. Realice la representación gráfica de:

$$s(t) = 4{,}9t^2$$



Tabulando

$x = t$	$s(t)$
1	4;9
2	19;6

- ✓ **Observación**

Algunos estudiantes hacen la pregunta, ¿Cómo puedo graficar esta función?

Los 14 estudiantes hacen el gráfico correctamente, 6 cometen errores ya que como en la anterior pregunta los estudiantes no respetan escalas y no prestan atención al tipo de función que debería salirles y no grafican bien, observamos la falencia de formas para graficar funciones y falta de conocimientos de funciones especiales.

- ✓ **Devolución**

Se les indica que lo pueden hacer de varias formas, así como graficaron la situación anterior, pueden darle la forma de una función cuadrática para ubicar el vértice, o completando cuadrados, luego de esto muchos se dieron cuenta y respondieron correctamente.

3. ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$?

- ✓ **Observación**

Los 17 respondieron correctamente con la experiencia anterior se observa que están más seguros, 3 respondieron que es el cateto opuesto sobre hipotenusa lo consideramos en proceso.

4. ¿Qué puede decir con respecto a la velocidad de la piedra en todo su trayecto?

- ✓ **Observación**

Un estudiante pregunta si debe describir la velocidad de cada intervalo.

Los 14 respondieron correctamente 4 respondieron indicando nuevamente los mismos valores y 2 dejaron en blanco la respuesta.

- ✓ **Devolución**

Se les responde que ¿observan de la velocidad en general?

5. Estime la velocidad de la piedra a los 3 segundos de iniciado el movimiento

- ✓ **Observación**

Los estudiantes indican que les falta el otro punto para determinar velocidad y preguntan ¿podríamos determinar con un solo punto?

Los 13 utilizan las fórmulas de los ítems anteriores y llegan a la conclusión que no se puede hallar, 4 utilizan la formula $e = v.t$ por lo tanto cometen error, 3 dejan en blanco.

- ✓ **Devolución**

Se les indica que si consideran intervalos ¿De qué forma serian?

PARTE II: Actividad grupal

A. Situación (1)

- ✓ **Observación**

1. ¿Cuál es la distancia total recorrida por el auto? ¿Cuánto tiempo duro el viaje?

- Es 33 km y el viaje dura 36 minutos.

Se observa que los estudiantes están más confiados porque trabajan en grupos de 3 y un grupo de 2 estudiantes, un grupo pregunta sobre la notación del eje y otro grupo dice si suma todas las líneas que se observan me sale más de 33 km y se les responde con otra pregunta. 5 grupos responden correctamente, 1 grupo en proceso porque ponen 33 km, pero siguen diciendo que pueden poner otro valor y hay un grupo que si lo suma todo lo que hay en el gráfico y confunde con tiempo y le pone 36.

2. ¿Cuál fue la velocidad media del auto a lo largo de todo su recorrido?

$$Vm = \frac{33 - 0}{36 - 0} = \frac{33}{36} {}^{km}/_{min}$$

Se observa que la mayor parte de los grupos recuerda la fórmula $e = v.t$ y la utilizan obteniendo 33/36 km/h, otros 2 grupos probaron con $V_m = \frac{e_{(t2)} - e_{(t1)}}{t_2 - t_1}$, 6 grupos hacen lo correcto, hay 1 grupo que pregunta cómo se va operar y comete error 1.

3. ¿Cuál fue la velocidad media en el trayecto que realizó desde que salió de Caracoto hasta que llegó al peaje?

$$Vm = \frac{25-11}{28-14} = \frac{14}{14} = 1 {km}/_{min}$$

Se observa que se están demorando un poco más que la anterior pregunta ya que comienzan a intercambiar ideas y alguno dicen que vienen de Juliaca y pueden sacar con más facilidad la respuesta, también se demoran en ubicar las coordenadas, pero 6 grupos logran la respuesta correcta, un grupo utiliza la formula $e = v.t$ y toma en el espacio datos erróneos por consiguiente cometen errores 1.

4. ¿Cuál fue la velocidad media durante los primeros 15 minutos?

$$v = \frac{e}{t}, v = {11}/_{15}$$

Se observa que tienen dudas, algún grupo tomo el espacio que aparece constante y preguntan si influirá en sus respuestas y se les contesta con otra pregunta, 4 grupos tienen la respuesta correcta, el grupo que estaba en error corrige esto.

✓ **Devolución**

5. ¿Cuándo el tiempo avanza y el auto está detenido será que varía su posición?

Los 7 grupos están logrando obtener la respuesta correcta ya que han compartido y expresado sus dudas y corregido sus errores.

Se observa que los integrantes de algunos grupos no saben que es velocímetro, pero entre ellos se ayudan y tienen dudas de cómo lo pueden determinar e intentar gráficamente, pero cometen error, 4 grupos contestan correctamente, 8 en proceso y 1 incorrecto.

Los 5 estudiantes responden correctamente y señalando que la V=0 y 2 incorrecto.

ACTIVIDAD 2

La clase se inició con los 20 estudiantes que asisten permanentemente respondiendo a la recomendación previa hecha especialmente en la clase anterior solicitándoles que no falten. Iniciamos a las 11 a.m. haciendo retroalimentación de 10 minutos luego se da las indicaciones respectivas sobre la forma de trabajo (al inicio individual y luego grupal); el trabajo individual duró 60 minutos y el grupal 25 minutos, la presentación de la actividad y recomendaciones duro 5 minutos.

PARTE I: Trabajo individual

A. Situación (1)

1. Trazar la recta tangente a las siguientes representaciones gráficas en los puntos P y Q indicados.

- ✓ **Observación**

Vemos que esta pregunta les parece fácil al inicio; cuando avanzan comienzan a dudar ya que refieren que por sus conocimientos previos saben que la recta tangente es la que toca en un solo punto a la función, preguntan ¿qué está sucediendo? Varios estudiantes indican que cuando prolongan la recta esta corta es más de un punto al gráfico y señalan que contraviene con lo que estudiaron en el colegio, se les contesta ¿Si no prolongamos seguirá siendo tangente? ¿Entonces diremos que la tangente se analiza de manera local?

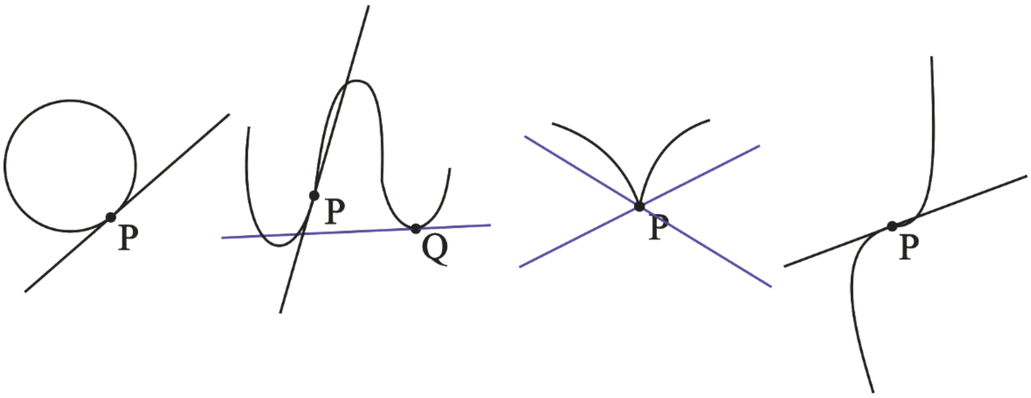
Los 17 estudiantes trazan correctamente las tangentes a las curvas en los puntos indicados, 3 cometen el error de trazar infinidad de rectas que pasan por los puntos indicados.

- ✓ **Devolución**

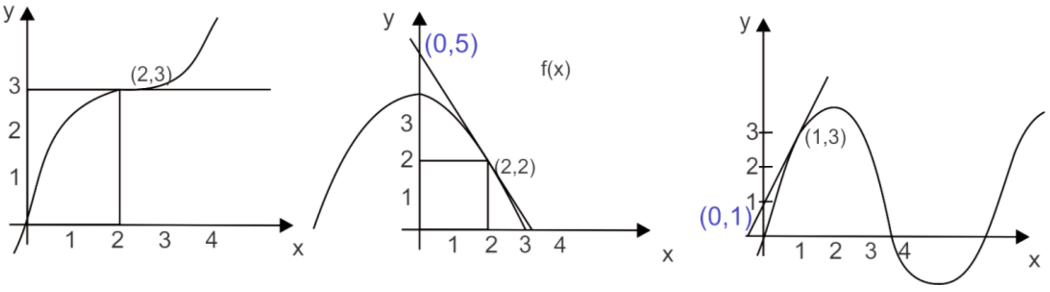
Se les responde ¿Si no prolongamos seguirá siendo tangente? ¿Entonces diremos que la tangente se analiza de manera local?

Reformulación: Para acercarles a la idea de funciones crecientes y decrecientes que lleva trazar las tangentes consecutivamente en varios puntos de la función Considero que debo agregar una repregunta para utilizar los gráficos de 1a).

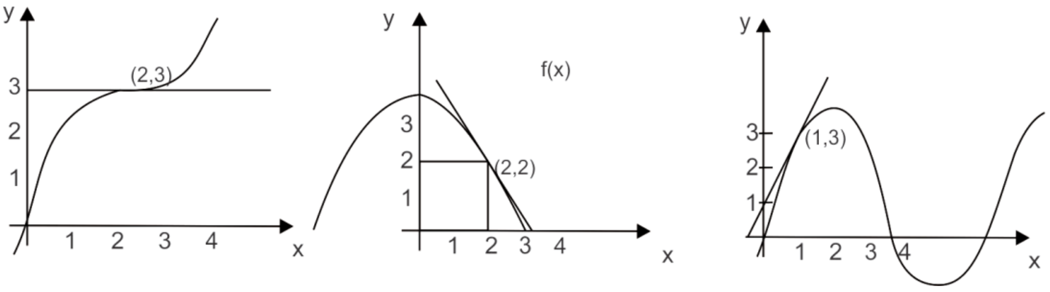
Debemos agregar **1 b) Trace varias rectas tangentes en puntos relativamente consecutivos ¿qué puede decir de esto respecto a la función?**



2. En cada caso, obtenga la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función.



Pendiente	m = 0	m = -3/2	m = 2
Ec. De la recta:	y = 3	y = 3/2x+5	y = 2x+1



Pendiente	m = 3	Faltan datos	Faltan datos
Ec. De la recta:	y = 3	y = 2x+3	y = 1x+3

✓ **Observación**

En el primer gráfico a los estudiantes se les nota confiados, cuando pasan al segundo y tercer gráfico empiezan a preguntar ¿Cómo puedo determinar? y si lo que están haciendo es lo correcto se muestran inseguros.

Los 10 estudiantes responden correctamente, 7 en proceso ya que responden hasta cierta parte correctamente, 3 hacen operaciones incorrectas.

3. Camila observa la variación de precios de un determinado artículo en dos meses diferentes, el precio en el primer mes era de 1600 soles y al cabo del tercer mes era de 2400 soles.

¿Cuál será la razón de cambio promedio del precio con respecto al tiempo entre el primer y tercer mes?

$$R_p = \frac{2400 - 1600}{3 - 1} = \frac{800}{2} = 400$$

✓ **Observación**

Los 15 responden correctamente, 6 de ellos utilizan directamente los datos y la relación de razón de cambio promedio, los 9 restantes primero realizan el gráfico y de ahí recién obtienen la razón de cambio, 4 realizan el gráfico, pero no concluyen lo que se les pide, por lo cual consideramos en proceso. 1 estudiantes dejan en blanco su respuesta

4. Diga si existe relación con la pendiente en la resolución del problema. Explique.

- Si existe porque la pendiente tiene la misma fórmula.

✓ **Observación**

Los 15 estudiantes responden que sí, y explican que las relaciones son similares lo cual es correcto, luego 4 indican que no recuerdan que es razón de cambio, 1 deja en blanco.

5. Que caracteriza el valor numérico obtenido en a).

La razón de cambio a la pendiente.

✓ **Observación**

Los estudiantes preguntan qué quiere decir caracteriza.

Los 14 estudiantes responden correctamente, 4 indican que no entienden la pregunta y dos dejan en blanco.

✓ **Devolución**

Se les indica que se refiere a que representa. Con ello muchos estudiantes encaminan su respuesta correctamente.

Reformulación: Al observar esas dudas de los estudiantes la pregunta debería decir: ¿Que representa el valor numérico obtenido en a)?

6. Si el área de la tapa de un silo está dada por $a(r) = \pi r^2$, siendo r el radio en m. Calcule:

a) $\dfrac{a(2)-a(1)}{2-1}$ interprete su resultado.

✓ **Observación**

Se observó que al inicio de esta pregunta se les nota un tanto desconcertados, pero una vez más muchos preguntan si están operando bien, 14 estudiantes operaron correctamente y determinaron 3π , respecto a la interpretación se les hizo difícil a muchos indicar lo que ven podría ser porque no aparece la palabra pendiente ni velocidad como en las situaciones anteriores con las que se estuvieron familiarizando; solamente 8 contestan como se esperaba los otros 6 dicen que el área varia en 3π; 5 en proceso porque obtuvieron 3π, pero no interpretaron su resultado, y un estudiante deja en blanco su respuesta.

7. Calcule $\frac{a(1+\Delta r)-a(1)}{\Delta r}$ e interprete su resultado.

✓ **Observación**

Varios estudiantes al hacer los reemplazos en la función demuestran dificultad para continuar las operaciones, algunos consultan para proseguir el producto notable que se usa.

Los 13 operan correctamente, pero de ellos, 4 no hacen la interpretación correcta; 5 al hacer las operaciones cometen errores y no llegan a lo que se desea y no hacen la interpretación; y 2 estudiantes indican que no entiende lo que se le pide.

✓ **Devolución**

Algunos estudiantes preguntan sobre Δr, tienen dudas refiriendo si es variación, y se les recuerda que utilizaron en situaciones anteriores y como pueden observar la variación no solo es del tiempo.

PARTE II: Trabajo grupal

A. Situación (1)

1. Por experimentos realizados hace cuatro siglos, Galileo descubrió que la distancia recorrida por cualquier cuerpo en caída libre es proporcional al cuadrado del tiempo que haya estado cayendo (Este modelo para la caída libre no toma en cuenta la resistencia del aire). Si la distancia recorrida después de *t* segundos es denotada por $s(t)$ y medida en metros, entonces la ley de Galileo está expresada por la ecuación:

$$s(t) = 4,9t^2$$

A continuación, estudiaremos la velocidad, cuando se deja caer una piedra desde la parte superior del edificio de quince pisos de la UNA-Puno.

a) Complete la siguiente tabla:

Tabla 12

Velocidad

t_1	t_2	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta v = \dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
1	2	14.7	1	14.7
1	1,5	6.125	0.5	12.25
1	1,2	2.156	0.2	10.78
1	1,1	1.029	0.1	10.295
1	1,05	0.50225	0.05	10.045
1	1,01	0.09849	0.01	9.849

- ✓ **Observación**

Los 5 grupos trabajaron correctamente y completaron la tabla los otros 2 grupos cometen errores en sus operaciones, como se puede observar el trabajo de un grupo este trabaja con todos los decimales y entre ellos se apoyan indicando que es mejor que hagan esto.

- ✓ **Devolución**

Algunos estudiantes de los grupos piden más tiempo para las operaciones que realizan utilizando calculadora, aduciendo que no están acostumbrados al uso de ello; se les da algunos minutos más.

b) ¿Cuál es la velocidad promedio de la piedra en el rango de tiempo $t = 1$ segundo a $t = 1{,}2$ segundos?

10.78

- ✓ **Observación**

Los 6 grupos responden correctamente observando sus tablas, pero los otros 2 cometieron errores de operación por los cual no tuvieron respuestas correctas.

c) ¿Hacia dónde tiende la velocidad promedio cuando los intervalos de tiempo son cada vez más pequeños?

a 9.8

- ✓ **Observación**

Los 5 grupos responden correctamente indicando a 9,8; 2 grupos ponen diferentes respuestas de acuerdo a lo que obtuvieron con operaciones incorrectas.

ACTIVIDAD 3

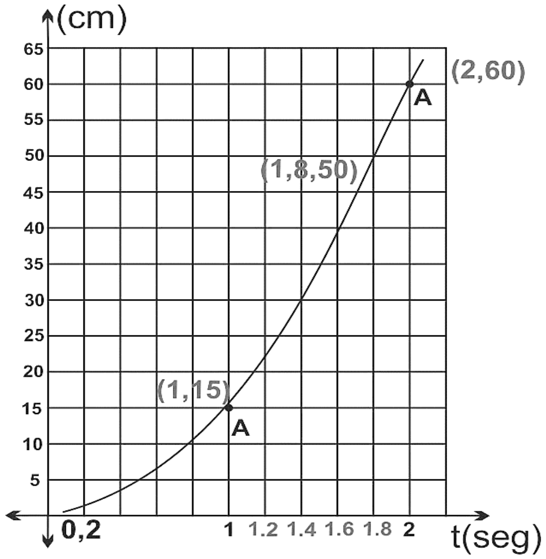
La clase se inició con los 20 estudiantes que asisten permanentemente respondiendo a la recomendación previa hecha especialmente en la clase anterior solicitándoles que no falten. Iniciamos a las 07 a.m. haciendo retroalimentación de 10 minutos luego se da las indicaciones respectivas sobre la forma de trabajo (al inicio individual y luego grupal); el trabajo individual duró 60 minutos y el grupal 25 minutos, la presentación de la actividad y recomendaciones duro 5 minutos.

PARTE I: Trabajo individual

A. Situación (1)

1. En un experimento de laboratorio se estudió la caída libre de una bola de hierro pequeña. La gráfica muestra el espacio recorrido por la bola, en centímetros, desde que se lanzó y durante t segundos.

a) Determine la velocidad promedio de la bola en el intervalo de 1 a 2 segundos.



$$Vn = \frac{60-15}{2-1} = 45\ {}^{cm}/_{sg}$$

✓ **Observación**

Se observa que los estudiantes están ya familiarizados en los que se les pide ya que 15 estudiantes responden correctamente, 5 en proceso.

2. Observe el gráfico y complete la tabla considerando los intervalos [1,1+At], teniendo en cuenta los valores de At que aparecen en la primera fila de la tabla 13.

Tabla 13

Velocidad Promedio

Δt	0,8 seg.	0,6 seg.	0,4 seg.	0,2 seg.
Intervalo $[1,1+\Delta t]$	$[1; 1,8]$	$[1; 1,6]$	$[1; 1,4]$	$[1; 1,2]$
Espacio recorrido	50 – 15 = 35	39 – 15 = 24	30 – 15 = 15	21 – 15 = 6
Velocidad promedio	35/0.8 = 42,5	24/0.6 = 40,0	15/0.4 = 35	6/0.2 = 30

✓ **Observación**

Al inicio de esta pregunta se observa que los estudiantes tienen cierta duda al observar Δt, luego 16 completan la tabla correctamente. 4 están en proceso.

✓ **Devolución**

Algunos estudiantes para empezar preguntan lo que deben hacer, me parece que es inseguridad porque nos dicen la operación correcta pero siempre necesitan que se les corrobore si está bien.

Algunos estudiantes piden más tiempo para las operaciones, lo que se les concede.

3. ¿Cuál es aproximadamente la velocidad de la bola en el instante t = 1 segundos?

Cuando t = 1 tendremos $\frac{1-1}{0}$ = no podríamos determinar

Los 13 estudiantes contestan que el tiempo inicial es 1 y el final también es 1 y además el espacio inicial es 15 y el final también es 15 lo que le da una expresión que no pueden operar, lo consideramos correcto, 6 contesta 15 indicando que eso ven en el gráfico y otros utilizan la expresión $e = v.t$ lo que es incorrecto y 1 deja en blanco.

4. En cada uno de los siguientes gráficos, calcule la pendiente de la recta que une los puntos A y B. Relacione e interprete los valores de las pendientes con los cálculos realizados en el inciso b). Dibuje la recta pendiente en cada gráfica.

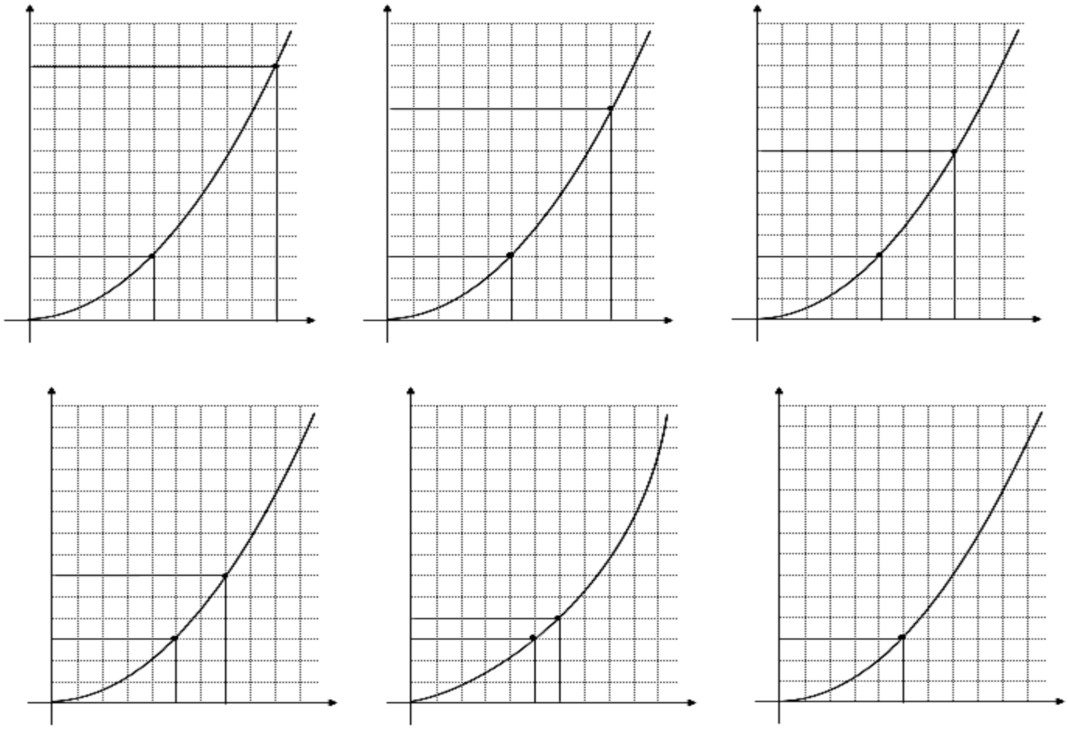


Figura 10. Recta pendiente en cada gráfica

✓ **Observación**

Los estudiantes trabajan con seguridad se nota que muchos prefieren trabajar gráficamente.

Los 17 estudiantes determinan las pendientes correctamente, 3 cometen errores de cálculo, 19 hacen los gráficos correctos, 1 no concluye está en proceso, respecto a la interpretación al relacionar los valores de la pendiente con los cálculos realizados en el inciso b) 13 contestan que son iguales y además explican porque la relación de la pendiente es similar al de la velocidad se les considera correcto a 6 se le considera en proceso contestan son iguales y 2 dejan en blanco.

5. En el último gráfico dibuje la recta tangente a la gráfica en el punto A. Estime su pendiente.

✓ **Observación**

Todos dibujan la recta tangente, pero al momento de determinar los catetos del triángulo que genera esta tienen muchas interrogantes como, ¿El punto final no tengo profesora? ¿Están coincidiendo los puntos? ¿Hacer intervalos pequeños y aproximar?, 12 estudiantes al estimar su pendiente con la expresión que conocen ponen: punto final 15 menos punto inicial 15 y en el denominador 1 menos 1 que da igual a cero lo cual indican que no pueden determinar lo cual es correcto, 5 señalan que no hay los catetos para la pendiente por lo tanto no pueden hallar lo pedido y 2 dejan en blanco.

- ✓ **Devolución**

Lo que se les responde en general con una pregunta: ¿Podrían continuar haciendo los intervalos cada vez más pequeños de la secuencia de gráficos del ítem f)? y observen que resulta.

6. ¿Qué relación existe entre la pendiente de esta recta y la velocidad pedida en c)?

Los 13 indican que es la pendiente de la recta tangente y la velocidad en un instante son iguales.

La posición de una partícula, medida en centímetros desde cierto punto de referencia, respecto del tiempo medido en segundos está dada por la ley s(t) = t^3.

7. Complete la tabla, considerando para cada valor la cantidad de lugares decimales que sean necesarios para diferenciarlos entre sí.

Tabla 14

Variación considerando decimales

$t_0 \leq t \leq t_1$	$1,9 \leq t \leq 2$	$1.99 \leq t \leq 2$	$1,999 \leq t \leq 2$			$2 \leq t \leq 2,001$	$2 \leq t \leq 2,01$
Δt	0,1	0,01	0.001			0,001	0,01
ΔS	1,141	0,1194	0,01199			0,012006	0,120601
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$	11,41	11,94	11,994			12,006001	12,0601

8. Según el acercamiento realizado en la tabla, ¿Qué puede decir sobre la velocidad de la partícula en t = 2? ¿Si Δt es infinitamente pequeño, se continuará cumpliendo esta conjetura?

✓ **Observación**

Los 16 estudiantes indican que se aproxima a12, los 4 restantes cometen errores en sus operaciones, en la repregunta 16 indican que si se seguirá cumpliendo la conjetura.

9. Obtenga la velocidad media $\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$ de la partícula en el intervalo [2, 2 +Δt]. Interprete geométricamente la expresión obtenida.

$$(2+\Delta t)^3 - 2^3 = 2^3 + 3(2)^3 + 3(2)^2\Delta t + 3(2)\Delta t + \Delta t - 8$$

$$\frac{12\Delta t + 6\Delta t^2 + \Delta t^3}{\Delta t} = 12 + 6\Delta t + \Delta t^2$$

✓ **Observación**

Los 14 estudiantes reemplazaron y operaron correctamente los 9 restantes cometen errores algebraicos, la interpretación geométrica la hace 12 estudiantes, 5 además indican que les falta datos, como poner valores a delta t, 3 dejan en blanco.

10. Teniendo en cuenta lo analizado en el inciso b), ¿cuál es el significado de $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$? Calcule el límite. ¿Qué observa?

$$v = \frac{(2+\Delta t)^3}{2+\Delta t - x} = \frac{2^3 + 3.2^2.\Delta t + 3.2.\Delta t^2 + \Delta t^3}{\Delta t} = \frac{8 + 12\Delta t + 6\Delta t^2 + \Delta t^3 - 8}{\Delta t}$$

$$\frac{12\Delta t + 6\Delta t^2 + \Delta t^3}{\Delta t} = 12 + 6\Delta t + \Delta t^2$$

$$v = \frac{(2+\Delta t)^3 - 2^3}{2+\Delta t - 2}$$

No me acuerdo productos

✓ **Observación**

Los 14 contestan aproximación, 6 no concuerdan, 14 operan correctamente obteniendo 12 ,4 cometen errores y 2 dejan en blanco; 14 indican que al aplicar el límite están determinan do la velocidad instantánea ya que el tiempo tiende aproximarse a cero.

11. Calcule $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta \mathrm{t}) - \mathrm{s}(\mathrm{t}_0)}{\Delta t}$ e interprete física y geométricamente el resultado.

✓ **Observación**

Los 14 hace la misma operación del inciso d) colocando en vez de 2, t_o lo cual les resulta $3t_0^2$ y es correcto 6 hacen operaciones incorrectas, al hacer la interpretación 14 señalan que es la esta expresión es la velocidad en el instante t_o, geométricamente es la pendiente de la recta tangente en t_o. 4 indican que es velocidad en general y geométricamente es pendiente se les considera en proceso y 2 dejan en blanco.

PARTE II: Actividad grupal

A. Situación: (1)

Un cultivo de bacterias crece de modo tal que tiene una masa de $M(t) = \frac{1}{4}t^2 + 5$ después de *t* horas.

1. ¿Cuál es la razón del crecimiento cuando $t = 3$?, interprete su respuesta.

✓ **Observación**

Se observa la dificultad que tienen al operar, se demoran más de lo previsto al hacer el reemplazo; en cada grupo hay alguien que sabe y los demás esperan que concluya, intercambian conocimientos, y están en el proceso de validación.

Los 5 grupos hacen las operaciones correctas obteniendo 2 y para hacer la interpretación piden ayuda del docente investigador lo que se les responde con otra pregunta. 2 grupos cometen errores de operación y se le considera en proceso ya que señalan como lo harán.

2. ¿Cuál es la razón de crecimiento cuando t = 6?

✓ **Observación**

Se observa que los grupos que trabajaron correctamente tienen más facilidad en esta pregunta y los otros dos grupos al hacer la validación corrigen y aceptan que se equivocaron.

Los 6 grupos responden correctamente indicando que sale 3 y refieren que la razón de crecimiento es 3, hay un grupo que demora mucho más y el tiempo de trabajo termino.

B. Situación: (2)

La expresión $s(t) = t^3 - \frac{9}{2}\,t^2 - 7t$ con $t \geq 0$, da la función posición de una partícula.

1. ¿Cuándo alcanza la particular una velocidad de 5 m/**s**.?

$$(t+h)^3 - \frac{9}{2}(t+h)^2 - 7(t+h) = \left[[t+h^3] - \frac{9}{2}t^2 - 7t\right]$$

$$t^3 + 3t^2h + 3th^2 + h^3 - \frac{9}{2}[t^2 + 2th + h^2] - 7(t) - 7h$$

- ✓ **Observación**

Se observa que nuevamente los miembros de los grupos no se acuerdan productos notables, indican que el procedimiento es extenso y operativo, repiten nuevamente si lo que están haciendo es correcto, demoran más de lo previsto a consecuencia de las dificultades que presentan en la parte operativa. Luego terminan. Se puede observar que 4 grupos terminan correctamente los otros tres presentan con error no de fondo sino de operaciones.

- ✓ **Devolución**

Preguntan ¿Estamos reemplazando correctamente? a lo que se les responde ¿Cómo podrían comprobarlo?

¿Cuándo es cero la aceleración?

- ✓ **Observación**

Tienen dudas en la pregunta y hacen la consulta de que ¿debemos derivar nuevamente? Se les hace la devolución y proceden a operar, y 4 grupos responden correctamente los otros 3 están en proceso ya que demoran más de lo previsto.

- ✓ **Devolución**

Se les hace recuerdo de lo que estudiaron en física.

Reformulación: En vista de la complejidad del ejercicio para que les pueda alcanzar el tiempo podemos replantear la pregunta con datos de funciones más simples así:

$$s(t) = 3t^2 + t + 2$$

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Análisis a posteriori

Esta fase se refiere a la comparación de los datos recogidos de la experimentación realizada a los estudiantes con los comportamientos esperados; dentro de nuestra metodología es la confrontación del análisis a priori con el análisis a posteriori de las situaciones didácticas planteadas en la investigación.

Comparación entre los comportamientos esperados y los encontrados en la experimentación.

ACTIVIDAD 1

PARTE I: Trabajo individual

A. Situación (1)

1. **Comentario:** Tal como se esperaba; la mayor parte de los estudiantes utilizan la expresión correcta pero dentro ello podemos observar que varios utilizaron simplemente la observación del gráfico y acertaron en la respuesta lo cual no se había previsto se esperaba que también que haya dudas en los dos últimos intervalos y con las respuestas de los estudiantes se corroboró debemos tener en cuenta que los estudiantes en general tienen establecido que en el eje abscisas va siempre x y ordenadas y, mostrando dudas cuando se les puso t y s(t) respectivamente.

2. **Comentario:** Se esperaba que los estudiantes describan el desplazamiento sin problemas, pero muchos estudiantes confunden desplazamiento con velocidad; respecto al signo de los dos últimos intervalos efectivamente que muchos de ellos no pueden expresar qué significa. Se nota la dificultad en la parte interpretativa.

B. Situación (2)

1. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de los estudiantes hacen lo pedido, pero en algunos se nota deficiencias operativas y demuestran inseguridad.

2. **Comentario:** Tal como se esperaba, la mayoría de los estudiantes pudo graficar la función$s(t) = 2x - 3$, se esperaba que interpreten Δt y Δs pero demoraron en dar sus respuestas y algunos empiezan a relacionar con la pendiente.

3. **Comentario:** Se esperaba que más estudiantes se dieran cuenta que representaba la velocidad media, la mayoría indica velocidad y dos no entienden lo que se les pide.

4. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de los estudiantes señalan la pendiente se nota que tienen más afianzamiento en el concepto geométrico.

5. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de los estudiantes responden después de observar la tabla y algunos estudiantes observan el gráfico.

6. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de los estudiantes indican que la velocidad es también 2, pero algunos responden no previsto ya que utilizan e=v.t y del gráfico sacan datos. Ninguno señala que en este tipo de problema la velocidad media es igual a velocidad instantánea. Se nota que conocen poco la teoría de problemas físicos de EBR.

C. Situación (3)

1. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de expedientes completa la tabla pero no se había previsto la dificultad que tenían de trabajar decimales; el tiempo que les toma es mayor al previsto; tampoco lo esperaban que sigan con la inseguridad de sus resultados al querer que el investigador verifique sus resultados. También se observa que algunos estudiantes cometen errores al operar decimales.

2. **Comentario:** Ciertamente que la mayor parte de estudiantes grafican la función pedida pero no en la medida que se esperaba, se tuvo que hacer devoluciones para que prospere esta pregunta. Nosotros esperábamos que la relacionen con más facilidad.

3. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de estudiantes respondieron que $\frac{\Delta_s}{\Delta_t}$ es la pendiente.

4. **Comentario:** Como esperábamos la mayoría de estudiantes responden que la velocidad en todo su trayecto es variada, pero no habíamos previsto la familiaridad que van adquiriendo a medida que avanzan porque las preguntas anteriores a esta encaminan a ello.

5. **Comentario:** Esperábamos que se den cuenta que t_2 y t_1 era 3 y representa un punto, pero se demoraron más de lo previsto, con la devolución la mayoría se dio cuenta que no podían determinar.

PARTE II: Actividad grupal

A. Situación (1)

1. **Comentario:** Como esperábamos los grupos participaron y la mayoría de ellos analizaron correctamente y obtuvieron lo que se pedía o sea que el auto recorrió una distancia de 33km y el tiempo que duro era de 35 minutos.

2. **Comentario:** Los grupos trabajaron tal como esperábamos utilizando la velocidad media y obtuvieron 33/36 el tiempo que utilizaron para resolver fue el prudencial. Muchos grupos trazaron un triángulo rectángulo desde el origen hasta el punto D, y efectivamente algunos estudiantes determinaron la velocidad media por tramos o intervalos de tiempo.

3. **Cometario:** Se observa que el ítem anterior influye para la resolución de este y como se esperaba la mayor parte de grupos operan de manera correcta obteniendo de respuesta 1 km/min.

4. **Comentario:** Hay más seguridad en el trabajo y como se esperaba con este ítem de manera similar reiteran las operaciones y afirman de manera correcta la mayor

parte de grupos respondiendo 11/15 km/min. los tiempos también están dentro delo previsto.

5. **Comentario:** Es reiterativo a los anteriores ítems entonces también la mayor parte contesto correctamente como se esperaba obteniendo 7/8 km/min con esta pregunta los grupos que no trabajaron al momento de validar pudieron corregir sus errores.

6. **Comentario:** Tal como se esperaba algunos estudiantes no conocían el velocímetro como nombre propio del dispositivo que mide la velocidad instantánea, pero si tenían conocimiento de su existencia, pero con la validación los estudiantes que no sabían ya entienden. Y la mayor parte de los estudiantes contestan que en este tramo coincide la velocidad media con la velocidad en un instante.

7. **Comentario:** Tal como esperábamos casi todos los grupos respondieron bien la pregunta respondiendo que la velocidad en el instante t=7 la velocidad es cero.

ACTIVIDAD 2

PARTE I: Trabajo individual

A. Situación (1)

1. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de los estudiantes trazan la recta tangente prolongada, lo cual les permitió ver que esta cortaba en más de un punto y con la devolución se aclaró sus dudas de algunas concepciones incompletas o erróneas que traen de su formación en EBR, no se había previsto que algunos estudiantes aún no tenían claro la noción de recta tangente.

B. Situación (2)

1. **Comentario:** Tal como se esperaba, la mayoría de los estudiantes sacan datos del gráfico y determinan las pendientes, algunos estudiantes tienen dificultad en el tránsito del registro gráfico al algebraico.

2. **Comentario:** Se esperaba que la mayoría se dé cuenta de lo pedido e interprete cada pendiente; se respondió con preguntas respecto a lo que se pedía, finalmente considero reformular la pregunta para lograr lo que se espera. Se nota dificultad en verbalizar sus respuestas.

3. **Comentario:** Tal como se esperaba los estudiantes que respondieron el ítem a) tienen mayor manejo algebraico y hacen las operaciones, pero en un cierto grupo de estudiantes se les apoya con la devolución.

C. Situación (3)

1. **Comentario:** Se esperaba que la mayoría apliquen variación del precio con respecto a la variación del tiempo, lo que no ocurrió ya que otros realizaron primero el gráfico y observando los datos contestaron lo que se les pedía, lo que indica que varios estudiantes tienen mejor comprensión con el registro gráfico.

2. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de los estudiantes hacen el gráfico, notándose que tienen dificultad en las escalas que usan por los datos del problema, lo cual a varios estudiantes sus gráficas les resultaron erróneas.

3. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de estudiantes llegan a la conclusión correcta reforzando sus respuestas con la devolución.

4. **Comentario:** La mayoría contestó lo que esperábamos, además coincidiendo con lo que era probable que algunos estudiantes no entenderían la pregunta.

D. Situación (4)

1. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de los estudiantes completaron la tabla correspondiente, no se esperaba que pidieran más tiempo para las operaciones que realizaron con calculadora. Lo que se consideró probable también se ha observado que muchos estudiantes tienen deficiencias al realizar las operaciones algebraicas.

2. **Comentario:** Tal como se esperaba para graficar muchos estudiantes utilizan diferentes estrategias, pero la mayoría usó la tabulación. También se esperaba que algunos estudiantes tendrían dificultades ya que mostraron desconocimiento de este tipo de funciones.

3. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de los estudiantes respondió lo previsto; se esperaba que agreguen que la pendiente crece, pero no estaba explícita dicha pregunta, por lo que debemos reformular esta pregunta.

4. **Comentario:** Se esperaba que más estudiantes se dieran cuenta de lo pedido, porque hubo devolución respecto a sus preguntas y algunos de los que completaron tardíamente su tabla insisten en poner cada valor en tramos; también algunos demuestran falta de concentración.

5. **Comentario:** Tal como se esperaba realizaron las operaciones utilizando la misma fórmula del ítem anterior y pensamos que era probable que aplicaran $e = v.t$, lo que se corroboró con lo que realizaron algunos estudiantes.

E. Situación (5)

1. **Comentario:** Se esperaba que todos hicieran la operación correcta, pero no consideramos la probabilidad que no operarían porque hubo algunos estudiantes que no operaron demostrando inseguridad en lo que hacían.

Se confirmó que en la interpretación de sus respuestas tuvieron dificultades ya que varios estudiantes no escribieron nada.

2. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de los estudiantes hizo las operaciones apoyados algunos en la devolución respecto a sus preguntas, más que nada operativas respecto a Δr se dieron cuenta que era variación de radio.

   Se esperaba que mayor cantidad de estudiantes interpreten la respuesta obtenida, pero varios responden muy escuetamente indicando razón de cambio.

PARTE II: Trabajo grupal

A. Situación (1)

1. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de los grupos completan la tabla y efectivamente como se esperaba los estudiantes se ponen inquietos y entre ellos intercambian sus interrogantes respecto a la cantidad de decimales ya que las operaciones les resultaron con varios decimales, en la devolución se les contesta con una pregunta.
2. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de los grupos señalan lo deseado, pero además agregan otras similitudes y diferencias que no se contempló en lo esperado.
3. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de los grupos leen su tabla en el intervalo indicado lo correcto.
4. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de los grupos lee su tabla e indican 9.849 y como habíamos señalado algunos refieren que es la contante gravitacional que estudiaron en el colegio.

B. Situación (2)

1. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de los estudiantes hacen las operaciones; lo que no se esperaba es que tomaran más tiempo de lo previsto además muchos trabajaron con más de 3 decimales.

2. **Comentario:** Tal como se esperaba observaron su tabla y señalan muchos estudiantes la respuesta correcta, y la mayoría asevera como se esperaba que la coyuntura se continuara cumpliendo.

3. **Comentario:** Esperábamos que más estudiantes operen correctamente, pero se encuentra que muchos estudiantes esperan que se les haga recuerdo de operaciones básicas, tal como esperamos la mayoría de estudiantes intuitivamente por la expresión señalan que geométricamente expresa la pendiente de la recta secante en el intervalo $[2, 2+\Delta t]$.

4. **Comentario:** Tal como esperamos la mayoría de los estudiantes respondieron relacionando con el Lim; se reforzó con la devolución y les notamos seguros

5. **Comentario:** Tal como esperamos la mayoría indican que es la velocidad en el instante $t=2$.

6. **Comentario:** Tal como esperamos la mayoría de los estudiantes indican directamente que representa la velocidad instantánea en el punto t_0 y geométricamente la pendiente de la recta tangente en el punto t_0.

ACTIVIDAD 3

PARTE I: Trabajo individual

A. Situación (1)

1. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de los estudiantes hacen las operaciones correctas transitan del registro gráfico al numérico, se les nota más seguros de lo que hacen.
2. **Comentario:** Tal como esperamos los estudiantes operan con mayor seguridad y hallan lo pedido, hay dos estudiantes que cometen error al operar.
3. **Comentario:** Como se esperaba la mayoría señalo que no se puede determinar porque no hay intervalo sino un punto.
4. **Comentario:** Tal como se espera la mayoría según los resultados obtuvo las respuestas pedidas, podemos decir que gráficamente estén desarrollándose.
5. **Comentario:** No se tomó en cuenta que podían demorar en analizar, pero finalmente en la devolución se concretó lo esperado.
6. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de los estudiantes llegaron a relacionar que la pendiente de la recta tangente y velocidad en un instante son iguales.

B. Situación (2)

1. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de los estudiantes completaron la tabla, no se esperaba que demoraran, pero lo hacen ya que se trabajó en decimales.
2. **Comentario:** Tal como se esperaba los estudiantes se dan cuenta que aportan los procesos infinitamente pequeños y traen a colación la idea de limite.
3. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de los estudiantes tenían dudas al principio, se hizo las devoluciones y se pudo observar que ayudo a que aumentara la cantidad de estudiantes con la respuesta correcta.

4. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayor parte de estudiantes señalan que la expresión representa la velocidad instantánea en t=2, al calcular el límite demoraron más de lo previsto y obtuvieron 12, pero se observa que algunos quedaron en proceso de resolución.

5. **Comentario:** Tal como esperábamos como ya se operó algo similar en d) la mayoría llega a lo correcto obteniendo $12+6\Delta+\Delta t^2$; la interpretación física y geométrica la mayoría de los estudiantes se contrasto tal como se había previsto.

PARTE II: Trabajo grupal

A. Situación (1)

1. **Comentario:** Esperábamos que en la experiencia de la situación anterior reemplacen la función M(t) en $\lim_{\Delta t} \frac{M(t_0+\Delta t)-M(t_0)}{\Delta t}$ se nota deficiencia operativa en varios estudiantes; la interpretación tal como se esperaba indica constante que representa la razón de crecimiento en el instante cuando t = 3 seg., lo relacionan con la velocidad con que crece el cultivo de bacterias en el instante cuando t = 3 seg., la pendiente de la recta tangente a la función M(t) en t = 3.

2. **Comentario:** Tal como esperamos la mayoría de los grupos responde lo previsto.

B. Situación (2)

1. **Comentario:** Tal como se esperaba los integrantes de la mayoría de los grupos al hacer las operaciones para hallar las pendientes en los tiempos indicados se dieron cuenta que el resultado era similar.

2. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de los grupos responde que son similares, notamos que siempre tienen dificultad en verbalizar lo hallado.

3. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de los grupos constatan que los intervalos deben ser cada vez más pequeños.

C. Situación (3)

1. **Comentario:** Tal como se esperaba el estudiante ya tiene noción de $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$ y hace las operaciones correspondientes pero se observa que demora ya que la función presentada requiere de más tiempo, es aquí donde se les comenta la necesidad de tener reglas que nos permitan resolver más rápidamente este tipo de funciones, en nuestro análisis a priori se contempló el tiempo pero no en la medida que ellos requerían, hay problemas operativos.

2. **Comentario:** Como el problema es similar al anterior se observa que trabajan bien la mayor parte de estudiantes, en lo que se refiere la interpretación se observa que demoran en escribir, aduciendo de que casi nunca les pedían interpretar respuestas.

D. Situación (4)

1. **Comentario:** Tal como se esperaba los estudiantes tienen problemas operativos, no se acuerdan productos notables para el procedimiento, con la devolución se aumentan el número de grupos que trabajan indicando que la partícula tenga una velocidad de 5 m/s cuando t=4s y se observa que 2 grupos cometen errores operativos.

2. **Comentario:** Tal como se esperaba la mayoría de los grupos indican que la aceleración es cero cuando t=3/2. Algunos grupos piden aclaración en lo referente a la aceleración tal como se esperaba, y con la devolución se observa que la mayoría de los grupos responde acertadamente.

4.2 Resultados de las actividades

Tabla 15

Actividad 1

Situación	Ítem	Correcto A	En proceso B	Incorrecto C	Blanco D
		INDIVIDUAL			
1	a	13	4	3	0
	b	9	3	7	1
2	a	12	7	1	0
	b	13	2	5	0
	c	5	13	2	0
	b	18	0	0	0
	e	14	0	6	0
	f	14	0	5	1
3	a	12	5	3	0
	b	13	7	0	0
	c	17	3	0	0
	d	14	4	2	0
	e	13	2	4	1
		GRUPAL			
4	a	5	1	1	0
	b	4	3	0	0
	c	6	0	1	0
	d	7	0	0	0
	e	7	0	0	0
	f	4	2	1	0
	g	4	3	0	0

Tabla 16

Actividad 2

Situación	Ítem	Correcto A	En proceso B	Incorrecto C	Blanco D
		INDIVIDUAL			
1	a	17	0	3	0
2	a	10	7	3	0
3	a	15	4	0	1
	b	15	0	4	1
	c	14	0	4	2
4	a	14	5	0	1
	b	13	0	5	2
		GRUPAL			
5	a	5	0	2	0
	b	6	0	1	0
	c	5	0	2	0
6	a	5	2	0	0

Tabla 17

Actividad 3

Situación	Ítem	Correcto	En proceso	Incorrecto	Blanco
		A	B	C	D
	INDIVIDUAL				
1	**a**	15	5	0	0
	b	16	4	0	0
	c	13	0	6	1
	d	17	0	3	0
	e	15	3	0	2
	f	13	7	0	0
2	**a**	12	0	7	0
	b	16	0	4	0
	c	10	0	9	1
	b	12	0	6	2
	e	10	2	6	2
	GRUPAL				
3	**a**	5	2	0	0
	b	4	2	1	0
4	**a**	3	3	1	0
	b	3	2	2	0

4.3 Discusión

En la etapa de acción en nuestro trabajo al igual que Mendoza (2003) se ha observado la dificultad que tienen en el transito del tratamiento grafico al numérico, también coincidimos que los estudiantes tienen problemas en entender la noción de derivada como los resultados que nos muestra Sánchez-Matamoros *et al*. (2008); en nuestro trabajo para el aprendizaje de la noción de la derivada usamos situaciones relacionadas a desarrollar el pensamiento variacional y hemos llegado los resultados que mediante nuestro proceso el estudiante puede llegar a entender la noción de derivada, pero Aguilar y Riestra (2009) aplicando problemas de máximos y mínimos seleccionados y ordenados permiten desarrollar también gradualmente el concepto de derivada; debemos señalar que son dos formas de trabajo para diferentes contextos ya que cuando trabajamos con estudiantes de ingenierías desde nuestro punto de vista es mejor hacerles trabajar con problemas que ayuden a hacerles desarrollar el lenguaje y pensamiento variacional. También al igual que Ramírez (2009) nuestros resultados muestran que la epistemología de Cauchy es la más rigurosa y difícil, al inicio de esta investigación hemos podido encontrar nuestros estudiantes que inician la universidad muestran poco desarrollo del lenguaje y pensamiento variacional y por ende escaza comprensión acerca de los conceptos, procedimientos y relaciones básicas a resultados relativamente parecidos llegaron (Dolores y Garcia, 2011) y (Vrancken & Engler, 2014a), la importancia del papel que juegan los registros de representación semiótica en los resultados de este trabajo de investigación nos lleva a encontrar que varias investigaciones como el de (Camargo, 2013) mostraron que el tránsito por ellas es de una importancia e inciden en el aprendizaje de un objeto matemático Pozsgai (2014) en sus resultados señala que los estudiantes con los que ejecuto su investigación muestran deficiencias en los conocimientos previos, el contexto el que el trabajo es muy diferente al nuestro empezando de donde provienen etc. En el fondo tienen las mismas falencias lomas importante es que al igual que nosotros él ha logrado demostrar que la secuencia didáctica diseñada le ha permitido lograr demostrar que contribuyen a la mejor comprensión del objeto matemático derivada.

CONCLUSIONES

Al finalizar la investigación consideramos que hemos cumplido los objetivos que nos hemos propuesto:

Primera: Que la metodología de la enseñanza basada en la Ingeniería y situaciones didácticas inciden de manera significativa en el aprendizaje de la noción de la derivada en los estudiantes de Ingeniería agrícola del primer semestre 2018 ya que en la actividad 1, se ha logrado realizar un acercamiento de los estudiantes a la noción de velocidad media, y se ha podido identificar situaciones de razón de cambio constante y variable además despúes de las devoluciones se ha notado que los estudiantes han podido relacionar la razón de cambio entre la variable dependiente y la variable independiente con la pendiente de la recta tangente.

En la actividad 2, se ha logrado afianzar las concepciones de rectas tangentes, rectas secantes y sus respectivas pendientes relacionándolas con problemas que no necesariamente dependan del tiempo, además al tener las situaciones en diferentes registros de representación se concluye que la mayoría de los estudiantes interpretan mejor los gráficos y la parte analítica y operativa es en la que más dificultad tienen; en esta actividad también los estudiantes han esperado la devolución para su avance.

En la actividad 3, concluimos que la mayoría de los estudiantes participantes han relacionado la velocidad instantánea con la razón de cambio instantánea, y con la pendiente de la recta tangente a una curva.

Segunda: Se cumplió el objetivo de diseñar secuencias que contribuyeron a que los estudiantes aprendan de manera significativa la noción de la derivada desarrollando su pensamiento variacional.

Tercera: Las dificultades que se ha encontrado en los estudiantes ha sido la marcada falta de conocimientos previos podemos nombrar algunos como razón, razón de cambio promedio, pendiente, magnitudes, variables dependientes e independientes, velocidad media, velocidad instantánea temas que han debido trabajar en EBR.

También se pudo apreciar que a muchos estudiantes les falta manejo de operaciones algebraicas básicas; otro punto crucial es la falta de interpretar sus respuestas probablemente esto es una consecuencia de la falta de conocimientos. También Cuando trabajan en grupo muchos estudiantes se muestran renuentes a hablar y por ende a participar, la cual conlleva a que el docente debe estar preparado para aplicar estrategias que remonten dicho problema.

Los errores que presentan los estudiantes al hacer de construcción del objeto fueron: transitar del registro analítico al gráfico. También La mayor parte de los estudiantes no representan los gráficos con las escalas correspondientes la cual hace que no representen lo pedido. De conceptos esenciales como pendiente de la recta tangente.

Cuarta: Las características de las dificultades encontradas fueron: Que la mayoría de los estudiantes señalan que no estudiaron esos temas en sus centros educativos y además puede tener alguna incidencia para esta característica el hecho que el 90% de los estudiantes provengan de instituciones educativas del medio rural, otros no recuerdan además, señalan que no tienen facilidad para escribir lo que piensan también son estudiantes que indican que en sus centros educativos casi nunca han trabajado en grupo, puede influir que son estudiantes nuevos en la universidad.

Las características de los errores son: Que no tienen práctica por lo tanto no se dan cuenta fácilmente como reemplazar datos. Muchos estudiantes creen que no es necesario graficar con escalas, la mayoría de señalaron que en sus centros educativos les dijeron que la recta tangente a una curva cualquiera toca en un solo punto.

RECOMENDACIONES

El desarrollo de esta investigación nos ha permitido identificar algunas situaciones pendientes y sugerencias para mejorar investigaciones posteriores.

Primera: A los docentes del área de matemática de todos los niveles se les sugiere no centrarse en lo algorítmico (razón, función, variables, etc.), trabajar con mayor incidencia en problemas contextualizados para el desarrollo del pensamiento variacional desde temas previos al concepto de derivada.

Segunda: A los entidades encargadas de la educación en el país y tienen la responsabilidad de elaborar libros de matemáticas desde curso iniciales crear actividades que permitan el tránsito y coordinación de los registros verbal, algebraico, gráfico de las funciones y demás temas, poniendo énfasis primero en el verbal y luego en el algebraico ya que en estos registros los estudiantes presentan mayores dificultades; de esta forma se contribuirá a que los alumnos comprendan mejor los objetos matemáticos.

Tercera: A los docentes de todos los niveles y de cualquier curso, se les recomienda incidir en la lectura y por ende en la escritura para que los estudiantes puedan expresar de manera escrita lo que entienden y lo que piensan. Esto es hacer 5 a 8 minutos de lectura en las horas de clase concluyendo lo que se ha entendido.

Cuarta: El docente de Matemáticas debe preparase para aplicar estrategias que remonten el problema que los estudiantes presentan al no poder integrarse en trabajos grupales, además se les sugiere aplicar metodologías como la ingeniería didáctica para lograr aprendizajes significativos con los estudiantes.

Quinto: A los docentes de la Universidad que dictan los cursos de cálculo diferencial se les recomienda utilizar libros texto de mayor confiabilidad, ya que como se ha demostrado la bibliografía usada no es la más adecuada porque simplemente nos está llevando a lo algorítmico de los temas quitando al estudiante conocer la esencia de cada objeto matemático para que más tarde pueda generar investigación en las diferentes ramas del saber.

Sexto: A las autoridades de la Escuela Profesional de Ingeniería Agrícola se les recomienda hacer una revisión del plan de estudios para poder incluir en el primer semestre el curso de física, la que va a permitir que el estudiante a la par con el curso de cálculo diferencial va a poder desarrollar con más consistencia el lenguaje y pensamiento variacional.

BIBLIOGRAFÍA

Advíncula, C. (2010). Una situación didáctica para la enseñanza de la función exponencial, dirigida a estudiantes de las carreras de humanidades. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/4717/ADVINCULA_CLEMENTE_ELIZABETH_SITUACION_EXPONENCIAL.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Arce, A. (2006). Cálculo diferencial e integral y matemática básica. 2da Edición. Editorial Limusa, Lima, Perú. 938pp.

Ariza, A. (2014). Análisis del uso del concepto de derivada por estudiantes universitarios en el estudio de conceptos Económicos. España: Universidad de Alicante.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del calculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. páginas 97-140 En: P. Gomez (Editor). Ingeniería didáctica en educacion matematica. Grupo Editorial Iberoamerica. Mexico.148pp

Artigue, M., Douady, R., & Moreno, L. (1995). Ingenieria didáctica en educación matematica. 1ra Edicion. Grupo Editorial Iberoamericana. Mexico. 148pp.

Azcarate, C.,Garcia, L., Moreno, M., y Badillo, E. (2011). Historia y aplicaciones de la derivada en ciencias económicas: Consideraciones didácticas. *Economia XXXVI*. 1-35.

Badillo, E. (2004). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia. 1ra Edición Barcelona, España.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*. 5-38.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Páginas 33-115 En: M. Villalba (Editor). Investigación didáctica de la matemática. Burdeos, Francia.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires, Argentina Libros del Zorzal.

Calla, A. (2018). Una situacion didáctica para la enseñanza de la derivada, en el segundo ciclo de la carrera de ingeniería en una universidad privada. Recuperado de http:// repositorio.une.edu.pe/handle/UNE/1770.

Camargo, A. (2013). El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza aprendizaje del cálculo. *Actas del VII CIBEM*, 1-9.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta latinoamericana de matemática educativa.* 1-9

Cantoral, R. (2000). Sobre el estatus de la noción de la derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista latinoamericana de Investigacíon en Matemática Educativa*, 265-292.

Cantoral, R., Farfan, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *SAEM THALES.* 353-369.

Chavez, C. (2015). Apredizaje significativo de la derivada apartir de una ingeniería didáctica diseñada en torno a la optimización de funciones. *UTN.* 1-114.

Delgado, J., Medina, N. (2017). Uso del blog como herramienta para el aprendizaje significativo de la derivada en estudiantes de ingeniería. *centro de investigación utmach*, 789-801.

Do Carmo, J. (2016). Aprendizagen da derivada: Una Perspectiva de Análisis Pelos Fluxos de pensamento. *Universidad Católica De Sao Paulo*, 1-15.

Dolores, C. (2007). Elementos para una aproximación variacional a la derivada. Mexico: Diaz de Santos.

Dolores, R. (1996). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato. Cuba: ISP.Enrique J. Varona.

Escolano, R. (2013). Introducción a la Derivada. Zaragoza: Universidad Zaragoza.

Espinoza, E. (2012). Análisis Matemático I. 3ra Edición. Editorial edukperu. Lima, Perú. 660pp.

Figueroa, R. (2018). Análisis Matemático I.2da.Edición. Editorial R.G.M. E.I.R.L. Lima, Perú. 768pp.

Figueroa, R. (2013). Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables una propuesta para el cuarto año de secundaria. Recuperado de

http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/4736/FIGUEROA_VERA_ROCIO_RESOLUCION_DIDACTICAS.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Fuentealba, C. (2017). Análisis del esquema de la derivada en estudiantes Universitarios. *Universidad Autónoma de Barcelona*. 1-12.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2004). Didáctica de la Matemática para Maestros. Granada : GAMI S.L.

Gonzalez, J., Chávez, O., & Loera, E. (2013). Comprensión del concepto de la derivada como razón de cambio. *CULCYT Matemática Educativa*, 1-11.

Haaser, N., & LaSalle, J. (1974). Análisis Matemático. 2da Edicion . Editorial Trillas. Mexico 980pp.

Lazaro, M. (2014). Cálculo diferencial. 2da Edición. Editorial MOSHERA.Lima, Perú

Leithold, L. (1999). El cálculo . 3ra Edicion. Editorial GRUPO SERLA.S.A.de C.V. Mexico

Lozano, Y. (2011). Desarrollo del concepto de derivada sin la noción de Límite. Bogota: Fundación Universitaria Konrand lorenz.

Martínez, J., Lopez, R., Gras, A.,Torregrosa, G. (2002). La diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de diferencial y su clasificación en la enseñanza de la fisica. *Enseñanza de las Ciencias*, 271-283.

Mendoza, R. (2003). Representación de la derivada de una función. *Centro de investigación de Matemáticas.*1-181

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educacion Matematica*, 81-96.

Oviedo, L.,Kanashiro, A. M. (2010). Caracterización de distintos registros de representación del concepto límite funcional en la bibliografía básica de cálculo.

III REPEM, 577-584.

Pineda, C. (2013). Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada en el último grado de educación secundaria .*Unacfciencias.*307-327

Popayan, Y., & Castillo, V. (2017). Situación didáctica y enseñanza del pensamiento Variacional. *EDUCARE*, 571-579.

Poszgai, E. (2014). Diseño de tareas que contribuyan a un aprendizaje significativo del concepto de derivada en estudiantes de Ciencias Administrativas. Recuperado el 20 de noviembre de 2017. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio /bistream/handle/123456789/5782/pozsgai_hernani

Ramos, E. E. (2012). Análisis Matemático para estudiantes de Ciencias e Ingenieria. Lima: Edukperu.

Rico, R. (1995). Errores y dificultades en el aprendizajede las matemáticas. Recuperado el 20 de Novienbre de 2019. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/486/1/rico195-100.pdf

Riestra, A. y. (2009). Una introducción algebráica y dinámica al concepto de derivada. *Matemática educativa*, 1-12.

Rincon, E. (2009). Historia de la Epistemología de la función Derivada. *Episteme*, 157-162.

Sanchez, G., Garcia, M., & Linares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la Matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 267-296.

Sandoval, J. (2014). Introducción al concepto derivada: Un diseño experimental con estudiantes universitarios de humanidades. Recuperado de http:/www.clame.org.mx/documentos/alme27.pdf

Stewart, J. (2018). Cálculo de una variable. Mexico: Cengage Learning Editores S.A. de C.V.

Vrancken, S. (2011). La construccion de la derivada desde la variación y el cambio articulando distintos sistemas de representación. Recuperado de http://biblioteca virtual.unl.edu.ar: 8080/tesis/xmlui/bisteam/handle /11185/588/Tesis.pdf

Vrancken, S. (2011). La construcción de la derivada desde la variación y el cambio articulando distintos sistemas de representación. 25-42.

Wenzelburger, E. (1993). Didáctica Cálculo diferencial. 1ra Edición. Editorial Grupo Iberoamericana. Mexico 720pp.

ANEXOS

Anexo 1

Datos generales del estudiante – curso: Calculo diferencial E.P. Ingeniería Agrícola

Fuente: Adecuado de la tesis de Judith Catherine Chávez Salinas

Datos generales del estudiante – curso: Calculo diferencial E.P. Ingeniería Agrícola

Nombres y apellidos: ……………………………………………… Fecha: …/…/2018

Instrucciones: Estimado estudiante lea atentamente las preguntas atentamente y

Marca con un aspa (X) la situación en la que se encuentra Ud. Además, en las preguntas donde hay la alternativa otro debe especificar con claridad lo que se le pide. La obtención de estos datos tiene el objetivo de darnos a conocer características personales de Ud. Tanto personal como académico que nos va servir como fundamento para el análisis a priori. Agradezco de antemano su participación que servirá de mucho para nuestro trabajo de investigación.

1. Mi edad es:

De 15 a 17	
De 18 a 20	
De 21 a 23	
Más de 23	

2. Sexo:

Masculino	
Femenino	

3. Lugar de procedencia:

Ayaviri	
Juliaca	
Ilave	
Otros (especifique)	

4. Terminé la secundaria en un colegio:

Estatal	
Particular	
Religioso	
Militar	

5. Tiempo de preparación para ingresar a la universidad:

Sin preparación	
De 1 a 3 meses	
De 4 a 6 meses	
De 6 meses a mas	

6. Modalidad de ingreso a la universidad

Cepreuna	
Admisión	
Exonerados	
Traslado externo	

7. Horas semanales que estudio el curso fuera de clase

No tengo tiempo	
De 1 a 2 horas	
De 3 a 4 horas	
De 5 a 6 horas	
Más de 6 horas	

8. El tema de Velocidad instantánea

No me enseñaron	
Me enseñaron y no lo aprendí	
Me enseñaron y lo aprendí	

9. Como sustento mis estudios

trabajo	
Dependo de mis padres	
otros	

10. Vivo:

Con mis padres	
solo	
otros	

Anexo 2

Ficha de observación

Ficha de Observación

El objetivo es ordenar la forma como se analizará el trabajo de los estudiantes en cada actividad y dentro de ello cada situación para la experimentación.

Actividad: ....

	Preguntas formuladas por el Estudiante	**Ítem que se resuelve en menor tiempo**	**Ítem que se resuelve en mayor tiempo**	**Clima, actitud, disposición, otros.**	**Apreciación global**
Situación individual					
Situación grupal: Parte I					
Situación Grupal: Parte II					

(Fuente: Tesis de Judith Catherine Chávez Salinas)

Anexo 3

Actividades

ACTIVIDAD 1- INDIVIDUAL

1. El gráfico representa el movimiento de un automóvil durante 10 segundos.

a) ¿Cómo hallar el desplazamiento del automóvil en cada uno de los intervalos [0,2], [2,5], [5,7], [7,9], [9,10]?

Intervalo	**$e(t_2) - e(t_1)$**	**Variación (m)**
[0,2]		
[2,5]		
[5,7]		
[7,9]		
[9,10]		

2. La ley que describe la posición de un móvil en cada instante t (en segundos) a partir de un punto de referencia es s(t) = 2t + 3 metros.

a) Complete la siguiente tabla.

Intervalo $t_1 \le t \le t_2$	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \le t \le 1$			
$1 \le t \le 2$			
$2 \le t \le 3$			
$3 \le t \le 4$			

b) Realice la representación gráfica e interprete en la misma las medidas $t_2 - t_1$ y $(t_2) - s(t_1)$ calculadas para uno de los intervalos.

c) ¿Qué puede decir sobre el movimiento en todo el trayecto?

d) ¿Cuál es la velocidad del móvil a los 2 segundos de iniciado el movimiento?

3. Por experimentos científicos realizados en tubos al vacío se descubrió que la distancia recorrida por cualquier cuerpo en caída libre es proporcional al cuadrado del tiempo que haya estado cayendo. (Este modelo para la caída libre no toma en cuenta la resistencia del aire). Si la distancia recorrida después de *t* segundos es denotada por *s*(*t*) y medida en metros, entonces está expresada por la ecuación:

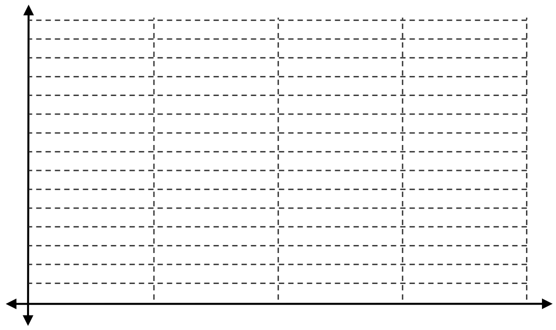
$$s(t) = 4{,}9t^2$$

A continuación, estudiaremos la velocidad de una piedra que se deja caer desde la parte superior del edificio de quince pisos de la UNA-PUNO.

a) Complete la siguiente tabla:

Intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \leq t \leq 1$			
$1 \leq t \leq 2$			
$2 \leq t \leq 3$			
$3 \leq t \leq 4$			

b) Realice la representación gráfica de



$$s(t) = 4{,}9t^2$$

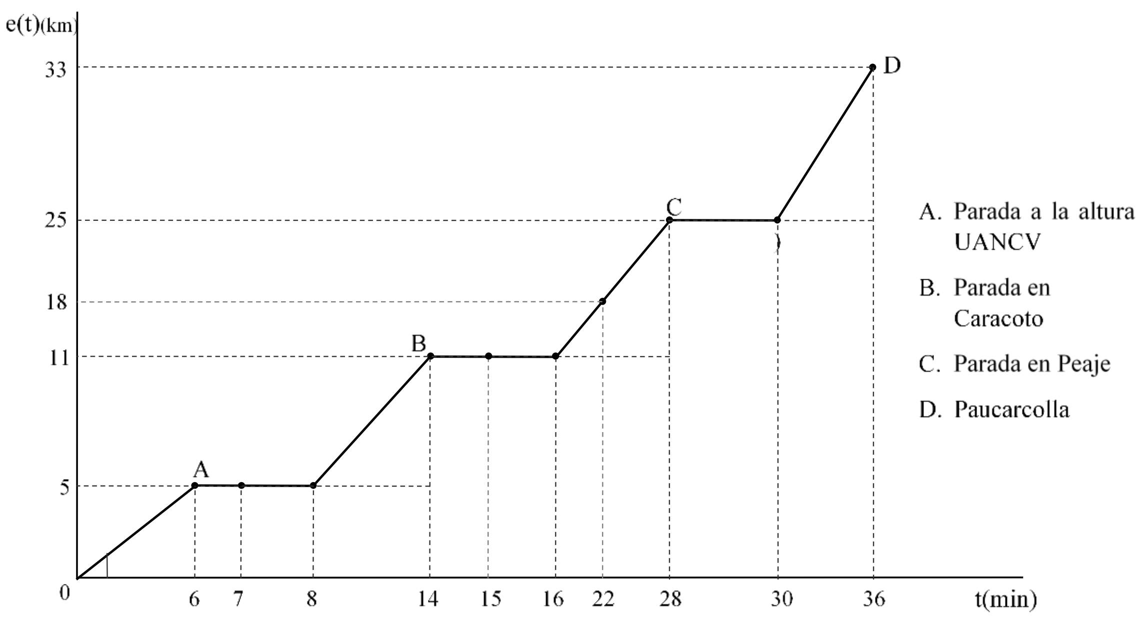
c) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$?

d) ¿Qué puede decir con respecto a la velocidad de la piedra en todo su trayecto?

e) Estime la velocidad de la piedra a los 3 segundos de iniciado el movimiento.

ACTIVIDAD 1. TRABAJO GRUPAL

1. En el gráfico se observa la representación del espacio recorrido por un auto en función del tiempo en su trayecto desde Juliaca a Paucarcolla.



a) ¿Cuál es la distancia total recorrida por el auto? ¿Cuánto tiempo duró el viaje?
b) ¿Cuál fue la velocidad media del auto a lo largo de todo su recorrido?
c) ¿Cuál fue la velocidad media en el trayecto que realizó desde que salió de Caracoto hasta que llegó al peaje?

d) ¿Cuál fue la velocidad media durante los primeros 15 minutos? ¿Y si no se tienen en cuenta los intervalos de tiempo en los que el auto estuvo parado?

e) ¿Cuál fue la velocidad media entre los instantes 25 y 30 minutos?

f) ¿Cuánto marca el velocímetro del auto cuando transcurrió un minuto de haber salido? Explique

2. Para estudiar el movimiento de una partícula, un investigador la ha iluminado mediante un flash que lanza destellos instantáneos a intervalos de 0,1 segundos. Tomando medidas sobre una fotografía, ha registrado los espacios recorridos por la partícula en los instantes que se muestran en la tabla.

Instante t (en segundos)	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	3	4
Espacio e recorrido hasta el instante t	12	12,37	12,68	12,93	13,13	13,28	13,5	16

a) Intente determinar la velocidad exacta de la partícula en t = 2 segundos mediante la fórmula $\frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{e(t_2) - e(t_1)}{t_2 - t_1}$ haciendo coincidir el instante inicial y el final del intervalo, es decir considerando $t_1 = 2$ y $t_2 = 2$. ¿Qué puede observar si realiza este procedimiento?

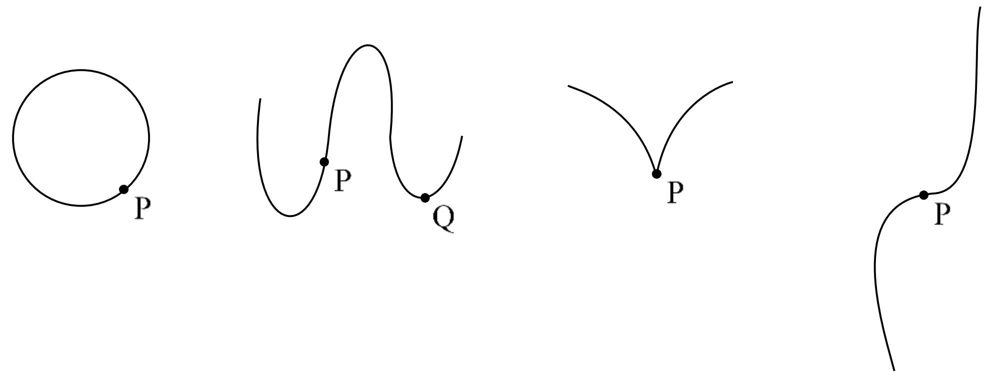
b) Complete la tabla con los espacios recorridos y las velocidades medias de la partícula en el intervalo [2, t] teniendo en cuenta que los valores de t son los que aparecen en la primera fila de la tabla anterior

Intervalo [2, t]	[2; 2,1]	[2; 2,2]	[2; 2,2]	…	…	…	…
Espacio recorrido en el intervalo [2, t]							
Velocidad media en el intervalo [2, t]							

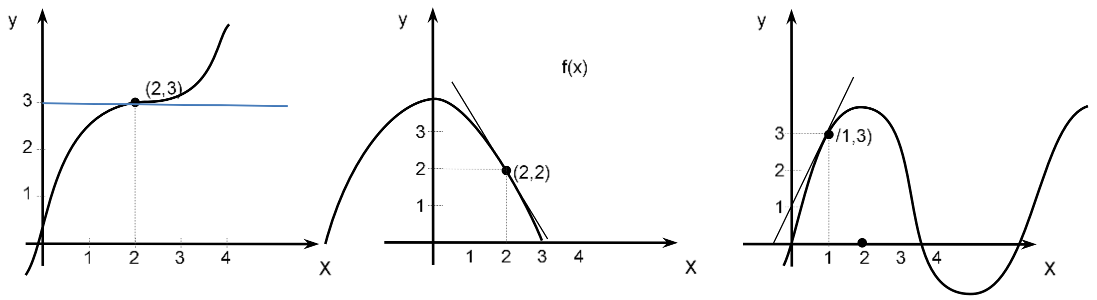
c) Según los cálculos realizados, ¿cuál de los valores para la velocidad media es una mejor aproximación de la velocidad en el instante t = 2 segundos? Explique.

ACTIVIDAD 2. TRABAJO INDIVIDUAL

1. Trazar la recta tangente a las siguientes representaciones gráficas en los puntos P y Q indicados.



2. En cada caso, obtenga la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función.



Pendiente:			
Ecuación de la recta:			

3. Camila observa la variación de precios de un determinado artículo en dos meses diferentes, el precio en el primer mes era de 1600 soles y al cabo del tercer mes era de 2400 soles.

a) ¿Cuál será la razón de cambio promedio del precio con respecto al tiempo entre el primer y tercer mes?

b) Diga si existe relación con la pendiente en la resolución del problema. Explique.

c) Que caracteriza el valor numérico obtenido en a).

ACTIVIDAD 2. TRABAJO GRUPAL

1. Por experimentos realizados hace cuatro siglos, Galileo descubrió que la distancia recorrida por cualquier cuerpo en caída libre es proporcional al cuadrado del tiempo que haya estado cayendo. (Este modelo para la caída libre no toma en cuenta la resistencia del aire). Si la distancia recorrida después de t segundos es denotada por $s(t)$ y medida en metros, entonces la ley de Galileo está expresada por la ecuación:

$$s(t) = 4,9t^2$$

A continuación, estudiaremos la velocidad, se deja caer una piedra desde la parte superior del edificio de quince pisos de la UNA-PUNO

a) Complete la siguiente tabla:

t_1	t_2	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta v = \dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
1	2			
1	1,5			
1	1,2			
1	1,1			
1	1,05			
1	1,01			

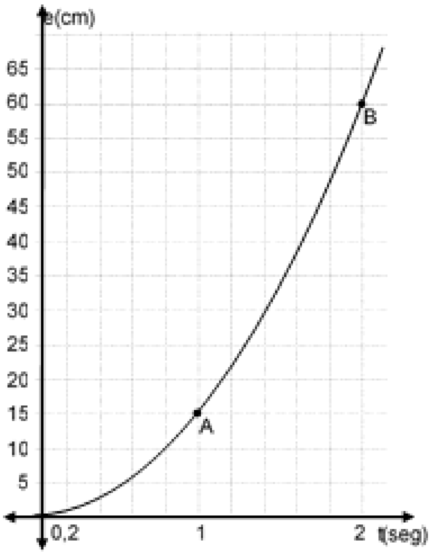
b) ¿Cuál es la velocidad promedio de la piedra en el rango de tiempo t = 1 segundo a t = 1,2 segundos?

c) ¿Hacia dónde tiende la velocidad promedio cuando los intervalos de tiempo son cada vez más pequeños?

ACTIVIDAD 3. TRABAJO INDIVIDUAL

B. En un experimento de laboratorio se estudió la caída libre de una bola de hierro pequeña. La gráfica muestra el espacio recorrido por la bola, en centímetros, desde que se lanzó y durante t segundos.

a) Determine la velocidad promedio de la bola en el intervalo de 1 a 2 segundos.

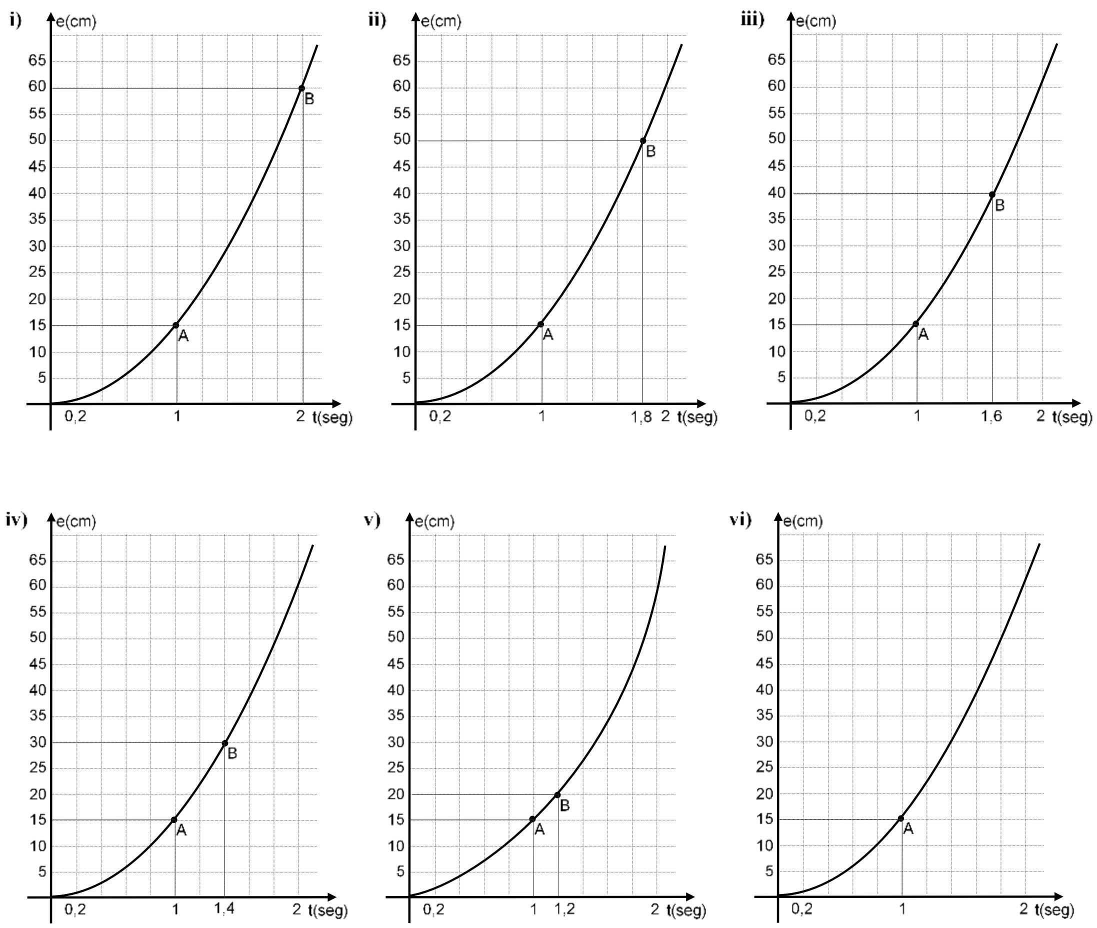


b) Observe el gráfico y complete la tabla considerando los intervalos [1,1+ At], teniendo en cuenta los valores de At que aparecen en la primera fila de la tabla.

Δt	0,8 seg.	0,6 seg.	0,4 seg.	0,2 seg.
Intervalo [1,1 + Δt]				
Espacio recorrido				
Velocidad promedio				

c) ¿Cuál es aproximadamente la velocidad de la piedra en el instante t = 1 segundos?

d) En cada uno de los siguientes gráficos, calcule la pendiente de la recta que une los puntos A y B. Relacione los valores de las pendientes con los cálculos realizados en los incisos anteriores. Dibuje la recta.



e) En el último gráfico dibuje la recta tangente a la gráfica en el punto A. Estime su pendiente.

f) ¿Qué relación existe entre la pendiente de esta recta y la velocidad pedida en c)?

C. La posición de una partícula, medida en centímetros desde cierto punto de referencia, respecto del tiempo medido en segundos está dada por la ley $s(t) = t^3$.

a) Complete la tabla, considerando para cada valor la cantidad de lugares decimales que sean necesarios para diferenciarlos entre sí.

$t_0 \leq t \leq t_1$	$1{,}9 \leq t \leq 2$	$1.99 \leq t \leq 2$	$1{,}999 \leq t \leq 2$	…→		←…	$2 \leq t \leq 2{,}001$	$2 \leq t \leq 2{,}01$
Δt				…→		←…		
ΔS				…→		←…		
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$				…→		←…		

b) Según el acercamiento realizado en la tabla, ¿qué puede decir sobre la velocidad de la partícula en t = 2? ¿Si Δt es infinitamente pequeño, se continuará cumpliendo esta conjetura?

c) Obtenga la velocidad media $\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$ de la partícula en el intervalo [2, 2 +Δt]. Interprete geométricamente la expresión obtenida.

d) Teniendo en cuenta lo analizado en el inciso b), ¿cuál es el significado de $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$? Calcule el límite. ¿Qué observa?

e) Calcule $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ e interprete física y geométricamente el resultado.

ACTIVIDAD 3 -GRUPAL

1. Un cultivo de bacterias crece de modo tal que tiene una masa de $M(t)=\frac{1}{4}t^2+5$ después de *t* horas.

a) ¿Cuál es la razón del crecimiento cuando t = 3 horas?

b) ¿Cuál es la razón de crecimiento cuando *t* = 5 horas?

1. La expresión $s(t)=t^3-\frac{9}{2}t^2-7t$ con $t\geq 0$, da la función posición de una partícula

a) Cuando alcanza la particular una velocidad de 5m/seg.

b) ¿Cuándo es cero la aceleración?

Anexo 4

Fichas de análisis de textos

Fichas de Análisis de Textos

El objetivo es analizar cómo es abordado el tema de derivadas en los libros textos que se utilizan en la Escuela Profesional de Ingeniería Agrícola lo que nos permite sacar conclusiones importantes para el análisis didáctico. De nuestra investigación.

Texto	Introducción al tema de Derivadas	Enfoque que prioriza para el tratamiento de la noción derivada	Tipo de ejemplos propone para el tratamiento de la noción de la derivada

Anexo 5

Evaluación de noción de la derivada

Evaluación de noción de la derivada-estudiantes del segundo semestre de Ingeniería Agrícola

Nombre y apellido: ………………………………………………… Fecha / / 2019

Instrucciones: Estimado estudiante lea con atención cada pregunta y en los ítems donde se le pide interpretar y/o explicar hágalo en detalle.

Los datos que se obtendrán serán utilizados para analizar el grado de interpretación que tiene sobre el objeto matemático derivada. Desde ya agradezco su participación que va permitir sacar conclusiones importantes para el desarrollo de la investigación sobre el aprendizaje de la noción de la derivada.

1.- Calcule la derivada de las funciones:

a) $f(x) = \frac{x^3-5}{x^3+5}$ para $x = 1$

b) $y = e^{\cos(3x+8)}$, explique qué significa su resultado

2.- Calcule la derivada de la función $f(x) = x^2 + x + 2$ e interprete su resultado.

3. Que representa para Usted la expresión $\lim_{h\to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h}$, donde $s(t)$ representa el desplazamiento de un auto y t es tiempo.

4.- indique algunas notaciones que Ud. Conoce de la expresión de la pregunta 3.

5. Debido a unas pésimas condiciones ambientales, una colonia de un millón de bacterias no comienza su reproducción hasta pasados dos meses. La función que representa la población de la colonia al variar el tiempo (expresado en meses) viene dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 10^6 & , \quad 0 \le t \le 2 \\ 10^6. \quad e^{t-2}, & \quad t > 2 \end{cases}$$

a) Calcule la tasa de variación media de la población en los intervalos [0, 2] y [0, 4].

b) Calcule la tasa de variación instantánea en t = 4

6.La ecuación de un movimiento rectilíneo es: $e(t) = t^3 - 27t$. ¿En qué momento la velocidad es nula? Hallar la aceleración en ese instante.

7. ¿Cuál es la velocidad que tiene un vehículo si se mueve según la ecuación $e(t) = 2 - 3t^2$ en el quinto segundo de su recorrido? El espacio se mide en metros y el tiempo en segundos

8. Describa algun ejemplo de aplicación de la derivada que Ud. conozca

Anexo 6

Cuestionario a docentes de la E.P de Ingeniería Agrícola

CUESTIONARIO A DOCENTES DE LA E.P CIENCIAS FISICO MATEMATICAS QUE DICTAN O DICTARON CALCULO DIFERENCIAL EN LA E.P DE INGENIERÍA AGRÍCOLA

Instrucciones: Señor docente lea atentamente el cuestionario y conteste con sinceridad y sea concreto; y en las preguntas 6, 7 y 8 marque con un aspa (x) la alternativa que Ud. Crea conveniente.

Estos datos tienen la finalidad de ser una base para fundamentar algunos aspectos del análisis preliminar de mi trabajo de investigación; desde ya agradezco su participación que servirá de mucho para el desarrollo del aprendizaje de los estudiantes.

1.-Profesion ____

2.-Número de años de labor como docente Universitario ______________________

3.- ¿Cuál es la unidad didáctica en el que se encuentra el concepto de la derivada? _____

4.- ¿Cuál es la secuencia que Ud. Sigue para llegar al concepto de Derivada? Describa Ud.

5.-Ennumere la bibliografía que Ud. Utiliza para la enseñanza de la derivada e indique por qué.

6.-Dentro de la escala de 0 a 4, marque la importancia que Ud. Le asigna al tema de la Derivada

0	1	2	3	4

(Nada importante) (Muy importante)

7.- ¿Que enfoque prioriza Ud. En el tratamiento de la Derivada?

Enfoque algebraico ( ) Variacional ( )

Numérico ( ) Computacional ( )

Infinitesimalista ( ) Otros ( )

Geométrico ( )

8.- ¿Sus estudiantes resuelven correctamente los ejercicios y problemas relacionados con la Derivada?

Ejercicios usando las reglas de derivación ( ) Problemas de aplicación ( )

9.- ¿Cuál cree Ud. que es el principal error de nuestros estudiantes al resolver los problemas vinculados a la Derivada?

10.- Apoyándose en su experiencia como docente universitario, proponga una alternativa o sugerencia para corregir los errores que cometen los estudiantes al resolver problemas vinculados a la derivada:

Anexo 7

Silabo de la E.P de Ingeniería Agrícola

El objetivo es analizar el Silabo del curso de cálculo diferencial de la E.P. de Ingeniería Agrícola que nos permitirá describir con fundamento una parte del análisis didáctico de nuestra investigación.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
SILABO: DE ANALISIS MATEMATICO I

FACULTAD : INGENIERIA AGRICOLA
ESCUELA PROFESIONAL : INGENIERIA AGRICOLA

I. IDENTIFICACIÓN ACADÉMICA

1.1. ASIGNATURA

a) Nombre : Calculo diferencial I
b) Código : MAT-100
c) Pre-requisito : Ninguno
d) Número de horas : Teóricas: 03; Prácticas: 03; Total: 06hrs.
e) Crédito : 04
f) Año académico : 2018-II
g) Duración de la Asignatura: 22 Agosto del 2018 al 23 de Diciembre del 2018
h) Área curricular : Formación general obligatoria
i) Grupo : A

1.2. DOCENTE

a) Nombre y apellidos :
b) Condición :
c) Categoría : Asociada
d) Especialidad : Matemáticas

1.3. AMBIENTE DONDE SE REALIZA EL APRENDIZAJE

Aula: 101

II. SUMILLA Y CONTENIDOS TRANSVERSALES

SUMILLA

- Límites y continuidad de funciones reales.
- Derivada de funciones reales.
- Aplicaciones a la derivada.

CONTENIDOS TRANSVERSALES:

Los contenidos transversales considerados para el desarrollo de la asignatura son los siguientes:

- Formación ética y de compromiso social.
- Cultura andina e integración andina.
- Desarrollo humano y medio ambiente.

III. COMPETENCIA

- **Competencia I:** Define e Interpreta una función, clasifica la función define e interpreta el límite de una función real, analizando los conceptos, propiedades y teoremas de límites de funciones reales, analiza e interpreta la continuidad de una función en un punto demostrando iniciativa, creatividad y responsabilidad.
- **Competencia II:** Define e interpreta la derivada de una función real, analizando sus propiedades y las principales reglas de derivación de funciones reales demostrando iniciativa, creatividad y responsabilidad.
- **Competencia III:** Resuelve, Interpreta y aplica los conceptos, propiedades y teoremas de las derivadas a problemas de máximos y mínimos, razón de cambio problemas contextualizados la regla del Hospital demostrando iniciativa, creatividad y responsabilidad.

IV. TRATAMIENTO POR UNIDADES DIDÁCTICAS

4.1. Primera Unidad Didáctica: FUNCIONES, LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES.

Tiempo de desarrollo: del 22 de Agosto del 2018 al 30 de Setiembre del 2018.

Total de horas: 36 horas.

CAPACIDADES	INDICADORES DE LOGRO	CONTENIDOS	%DE AVANCE	ACTITUDES	INDICADORES DE LOGRO	TECNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACION
♦ Analiza e interpreta las funciones. ♦ Analiza y clasifica la funciones ♦ Interpreta la definición de límite de una función real. ♦ Analiza las propiedades de límite de una función real en la solución de problemas propuestos. ♦ Aplica las propiedades y teoremas en la solución de límites de funciones reales. ♦ Analiza la continuidad de una función real.	♦ Resuelve problemas de funciones. ♦ Aplica la clasificación de funciones para resolver problemas. ♦ Aplica las definiciones y propiedades de límite de una función real en la solución de ejercicios planteados. ♦ Utiliza diversas técnicas para calcular el límite de funciones reales. ♦ Determina la continuidad de una función real.	♦ Relaciones y funciones (4hrs.) ♦ Clasificación de funciones dominio y rango de funciones (4hrs). ♦ Funciones especiales(2hrs) ♦ .Límite de una función real Propiedades de límites de funciones reales.(8hrs.) ♦ Límitesde funciones trascendentes. Limite infinitos y límites al infinito (8hrs). ♦ Continuidad Clases de continuidad de funciones reales(8hrs) ♦ Evaluación (2hrs)	♦	Valoran la importancia del cálculo diferencial. Actitud analítica y crítica, reflexiva y consecuente. Demuestra responsabilidad y puntualidad en la presentación de trabajos encargados grupales e individuales ♦	Asiste con puntualidad a sus clases Participa activamente en equipo. Realiza análisis crítico de los temas ♦ desarrollados en clase.	**Capacidades** Exámenes escritos de composición o desarrollo (de 0 a 20 puntos) **Actitudes** Guía de observación o ficha de observación (de 0 a 20 puntos)
EVALUACIÓN	Primer examen parcial					30/09/16

4.2. SEGUNDA UNIDAD DIDÁCTICA: DERIVADA DE UNA FUNCION REAL
Tiempo de desarrollo: del 3 de Octubre del 2018 al 8 de Noviembre del 2018
Total de horas: 30 horas.

CAPACIDADES	INDICADORES DE LOGRO	CONTENIDOS	% DE AVANCE	ACTITUDES	INDICADORES DE LOGRO	TECNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACION
♦ Define e interpreta la derivada de una función real. ♦ Analiza las principales reglas de derivación. ♦ I nterpreta y Determina las derivadas de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. ♦ Define laderivada implícita de una función. ♦ Determina las derivadas de orden superior.	♦ Determina la derivada de las funciones reales. ♦ Utiliza las reglas de derivación para hallar la derivada de funciones trigonométricas ♦ .determina la derivada de las funciones trascendentes ♦ Resuelve derivadas de orden superior	♦ Derivada de una función real, interpretación geométrica.(4hrs) ♦ Reglas de derivación. Derivada de la potencia (4hrs) ♦ Derivada de las funciones trigonométricas(4 hrs) ♦ Derivada de la funciones trascendentes(4hrs ♦ Derivación implícita.(4hrs) ♦ Derivación logarítmica. (4hrs) ♦ Regla de la cadena.(2hrs) ♦ Derivada de orden superior.(2hrs) ♦ Evaluación(2hrs)	♦	Valoran la importancia del cálculo diferencial. Actitud analítica y crítica, reflexiva y consecuente. Demuestra responsabilidad y puntualidad en la presentación de trabajos encargados grupales e individuales ♦ .	Asiste con puntualidad a sus clases Participa activamente en equipo. Realiza análisis crítico de los temas desarrollados en clase	**Capacidades** Exámenes escritos de composición o desarrollo (de 0 a 20 puntos) **Actitudes** Guía de observación o ficha de observación (de 0 a 20 puntos)
EVALUACION		Segundo examen parcial				8/11/16

5.2. TERCERA UNIDAD DIDÁCTICA: APLICACIONES A LA DERIVADA.
Tiempo de desarrollo : del 04 de julio del 2015 al 8 de agosto del 2015
Total de horas : 36 horas

CAPACIDADES	INDICADORES DE LOGRO	CONTENIDOS	%DE AVANCE	ACTITUDES	INDICADORES DE LOGRO	TECNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACION
• Comprende y analiza la definición de función creciente y decreciente • Determina los puntos críticos de una función • Analiza los máximos y mínimos de una función Resuelve problemas aplicativos a su carrera	♦ Define función creciente y decreciente. ♦ Define y determina los puntos críticos de una función. ♦ Analiza el criterio de la primera y segunda derivada de una función. ♦ Determina el máximo y mínimo de una función ♦ Determina los máximos y mínimos en problemas aplicativos	♦ Función creciente y función decreciente .(4hrs) ♦ Punto crítico de una función. Criterio de la primera derivada Criterio de la segunda derivada (6hrs) Valor máximo y valor mínimo de las funciones.(8hrs) ♦ Razón de cambio(6hrs) ♦ Aplicaciones de la derivada a problemas contextualizados (6hrs) ♦ Regla de L'Hospital (4hrs) ♦ Evaluación(2hrs)		Valoran la importancia del cálculo diferencial. Actitud analítica y crítica, reflexiva y consecuente. Demuestra responsabilidad y puntualidad en la presentación de trabajos encargados grupales e individuales .	Asiste con puntualidad a sus clases Participa activamente en equipo. Realiza análisis crítico de los temas desarrollados en clase	**Capacidades** Exámenes escritos de composición o desarrollo (de 0 a 20 puntos) **Actitudes** Guía de observación o ficha de observación (de 0 a 20 puntos)
EVALUACION	Tercer examen parcial					13/12/16

V ESTRATEGIAS, MÉTODOS Y TÉCNICAS DIDÁCTICAS

a) ESTRATÉGIAS DE ENSEÑANZA

Organizadores del conocimiento.

Clase magistral

Prácticas dirigidas (análisis, planteamiento y alternativas de solución de problemas).

b) ESTRATÉGIAS DE APRENDIZAJE

Repaso (Repetición simple y acumulativa, copias)

Elaboración de reporte de prácticas

Resolución de problemas aplicativos.

c) ESTRATÉGIAS DE INVESTIGACIÓN FORMATIVA

Las revistas científicas y los contenidos temáticos de los libros son interpretados, analizados y sintetizados utilizando pensamiento crítico y otras capacidades como descripción y comparación.

Discente céntrica: investigación activa y seminario.

Aprendizaje por descubrimiento y construcción.

VI MEDIOS Y MATERIALES DIDÁCTICOS

a) Auditivo: De acceso personal: Voz humana.

b) Visuales: Estáticos: Guías de estudio, pizarra.

c) Tutoriales académicos.

d) Hojas de trabajo individual y de grupo

VII EVALUACIÓN DE APRENDIZAJE

7.1 Criterios de evaluación

Se califica el dominio de conocimientos, el producto de aprendizaje y la actitud de aprendizaje en cada unidad. La calificación es vigesimal.

7.2 Calificación

Para los promedios parciales se utilizará la fórmula:

$$Promedio\ Parcial = \frac{EC(ponderado) + ED(ponderado) + EP(ponderado)}{Sumatoria\quad de\quad los\quad ponderados}$$

Donde:

EC: Evidencia de conocimiento

ED: Evidencia de desempeño.

EP: Evidencia de producto.

El promedio final (PF) del logro de aprendizaje de la competencia prevista de la asignatura se obtiene aplicando la siguiente fórmula:

$$PF = \frac{IPP + IIPP}{2}$$

PF: Promedio Final

IPP: Primer Promedio Parcial

IIPP: Segundo Promedio Parcial

CRITERIO DE APROBACION

El estudiante se considera aprobado en la asignatura si obtiene un promedio final mayor o igual a 11.

VIII BIBLIOGRAFIA GENERAL

1. Armando Venero (1996) "Análisis Matemático I" Edit. Germar Lima-Perú
2. R. Figueroa (1996) "Análisis Matemático I" Edit. América Lima – Perú
3. M. Lázaro Carrión (2008) "Análisis Matemático I ". Editorial Moshera
4. Feliz Carrillo Carrascal (1998) "Matemática Básica II".
5. Eduardo Espinoza Ramos (2004) "Análisis Matemático I".
6. Salas ,Hille y Heigen (2014) "Calculo en una variable ". Editorial Reverthe
7. Leithon Luis(2008) "Calculo en geometría Analítica"

IX WEBGRAFIA

- Aparicio,C. Análisis matemático, obtenido el 22 de agosto del 2018. de
https://www.ugr.es/~dpto_am/miembros/acosta/.../apuntes-an-mat-i-enero-2010.pdf
https://eva.fing.edu.uy/mod/resource/view.php?id=45877

- Profesores ingeniería. Análisis Matemático, obtenido el 22 de agosto del 2016 de

ANÁLISIS MATEMÁTICO I. Edición: febrero de 2014. Universidad de la República, UdelaR. INSTITUTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA "PROF. ING.

Anexo 8

Análisis del rendimiento académico de los estudiantes de Ingeniería Agrícola del año 2018 I-II

Nota	2018 I-A	2018 I-B	2018 II-A	2018 II-B
	Estudiantes matriculados			
	32	31	30	26
11	17	5	6	4
12	2	5	2	3
13	1	8	3	1
14	0	1	1	0
15	1	1	3	1
16	0	0	3	2
17	0	0	0	1
18	0	0	1	0
Desaprobados	9	10	11	14

Anexo 9

Actas de evaluaciones FIA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO - PUNO
VICE RECTORADO ACADÉMICO
OFICINA DE REGISTRO Y ARCHIVO ACADÉMICO

009520 Pag : 1/1

ACTA DE EVALUACIONES: REGULAR
FACULTAD: INGENIERIA AGRICOLA
ESCUELA PROFESIONAL: INGENIERIA AGRICOLA
COMPONENTE CURRICULAR: [06-002] CALCULO DIFERENCIAL
DOCENTE:
CREDITOS: 5.0
AÑO ACADEMICO: CICLO: Usuario:

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
RECIBIDO
Oficina de Registro y Archivo Académico

HORAS TEORICAS: 4
HORAS PRACTICAS: 2
HORAS EFECTIVAS: 6
FECHA :
HORA :
F.I.

N°	APELLIDOS Y NOMBRES		PROMEDIOS PARCIALES			PROMEDIO FINAL	
			PRIMER PROMEDIO PARCIAL	SEGUNDO PROMEDIO PARCIAL	TERCER PROMEDIO PARCIAL	Número	Letras
001		REGULAR	19	17	08	15	QUINCE
002		REGULAR	14	11	07	11	ONCE
003		REGULAR	11	11	11	11	ONCE
004		QUINTA MAT	08	00	00	03	TRES
005		REGULAR	11	14	08	11	ONCE
006		REGULAR	20	20	15	18	DIECIOCHO
007		REGULAR	17	11	10	13	TRECE
008		REGULAR	00	00	00	00	CERO
009		REGULAR	16	16	13	15	QUINCE
010		REGULAR	20	17	07	15	QUINCE
011		REGULAR	09	05	10	08	OCHO
012		REGULAR	07	00	00	02	DOS
013		REGULAR	11	13	11	12	DOCE
014		REGULAR	17	16	14	16	DIECISEIS
015		REGULAR	13	04	02	06	SEIS
016		REGULAR	17	11	08	12	DOCE
017		REGULAR	10	12	06	09	NUEVE
018		REGULAR	13	13	13	13	TRECE
019		REGULAR	07	01	00	03	TRES
020		REGULAR	02	00	00	01	UNO
021		REGULAR	00	00	00	00	CERO
022		REGULAR	12	12	08	11	ONCE
023		REGULAR	18	18	11	16	DIECISEIS
024		REGULAR	18	13	01	11	ONCE
025		REGULAR	17	11	12	13	TRECE

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO - PUNO

VICE RECTORADO ACADÉMICO

OFICINA DE REGISTRO Y ARCHIVO ACADÉMICO

ACTA DE EVALUACIONES: REGULAR
FACULTAD: INGENIERIA AGRICOLA
ESCUELA PROFESIONAL: INGENIERIA AGRICOLA
COMPONENTE CURRICULAR: [06-002] CALCULO DIFERENCIAL
DOCENTE:
CREDITOS: 5.0
AÑO ACADEMICO: CICLO: Usuario:

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
RECIBIDO
Oficina de Registro y Archivo Académico

008315 Pag : 1/1

HORAS TEORICAS: 4
HORAS PRACTICAS: 2
HORAS EFECTIVAS: 6
FECHA :
HORA :
F.I.

Nº	APELLIDOS Y NOMBRES		PROMEDIOS PARCIALES			PROMEDIO FINAL	
			PRIMER PROMEDIO PARCIAL	SEGUNDO PROMEDIO PARCIAL	TERCER PROMEDIO PARCIAL	Número	Letras
001		REGULAR	11	17	12	13	TRECE
002		REGULAR	08	05	04	06	SEIS
003		REGULAR	11	11	11	11	ONCE
004		TERCERA MAT	00	00	00	00	CERO
005		REGULAR	00	00	00	00	CERO
006		CUARTA MAT	00	00	00	00	CERO
007		REGULAR	16	14	15	15	QUINCE
008		REGULAR	11	08	08	09	NUEVE
009		TERCERA MAT	09	00	00	03	TRES
010		REGULAR	08	04	05	06	SEIS
011		REGULAR	00	00	00	00	CERO
012		REGULAR	15	17	15	16	DIECISEIS
013		REGULAR	12	12	11	12	DOCE
014		REGULAR	12	12	12	12	DOCE
015		REGULAR	09	14	14	12	DOCE
016		REGULAR	17	15	16	16	DIECISEIS
017		REGULAR	08	08	08	08	OCHO
018		REGULAR	11	05	04	07	SIETE
019		REGULAR	09	15	08	11	ONCE
020		REGULAR	10	05	05	07	SIETE
021		REGULAR	00	00	00	00	CERO
022		CUARTA MAT	11	10	11	11	ONCE
023		REGULAR	11	07	07	08	OCHO
024		REGULAR	15	19	16	17	DIECISIETE
025		REGULAR	12	11	10	11	ONCE
026		REGULAR	08	00	00	03	TRES

FORMULA PROMEDIO FINAL

PF = (1PP + 2PP + 3PP) / 3

PF = Promedio Final
1PP = Primer Promedio Parcial
2PP = Segundo Promedio Parcial
3PP = Tercer Promedio Parcial

Puno, C.U. 28 de Diciembre del 2018

JESUS HUMPIRI CHOQUE
COORDINADOR ACADEMICO
FIA - UNA
Coordinación Académica
Firma y Sello

Fecha de Recepción
31 DICIEMBRE 2018

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO - ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA

Director de la Escuela Profesional
Firma y Sello
ALFARO ALEJO
DIRECTOR DE LA ESCUELA PROFESIONAL
INGENIERÍA AGRÍCOLA - UNA PUNO

M.Sc. Fredy cháhuares F.
ORAA-UNA-PUNO
F.R. 21 - 03 - 2019

Loayza Torreblanca
LICENCIADA FÍSICO MATEMÁTICAS
Firma y Sello

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO - PUNO
VICE RECTORADO ACADÉMICO
OFICINA DE REGISTRO Y ARCHIVO ACADÉMICO

ACTA DE EVALUACIONES: REGULAR
FACULTAD: INGENIERIA AGRICOLA
ESCUELA PROFESIONAL: INGENIERIA AGRICOLA
COMPONENTE CURRICULAR: [06-002] CALCULO DIFERENCIAL
DOCENTE:
CREDITOS: 5.0
AÑO ACADEMICO: CICLO:
Usuario:

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
RECIBIDO
Unidad de Registro Académico

001017 Pag : 1/2
HORAS TEORICAS: 4
HORAS PRACTICAS: 2
HORAS EFECTIVAS: 6
FECHA :
HORA :
F.I.

Nº	APELLIDOS Y NOMBRES		PROMEDIOS PARCIALES: PRIMER PROMEDIO PARCIAL	SEGUNDO PROMEDIO PARCIAL	TERCER PROMEDIO PARCIAL	PROMEDIO FINAL: Número	Letras
001		REGULAR	08	02		05	CINCO
002		REGULAR	06	02		04	CUATRO
003		REGULAR	17	09		13	TRECE
004		REGULAR	07	15		11	ONCE
005		REGULAR	11	11		11	ONCE
006		REGULAR	12	11		12	DOCE
007		REGULAR	09	13		11	ONCE
008		REGULAR	05	03		04	CUATRO
009		REGULAR	08	01		05	CINCO
010		CUARTA MAT	00	00		00	CERO
011		REGULAR	09	13		11	ONCE
012		REGULAR	11	11		11	ONCE
013		REGULAR	16	14		15	QUINCE
014		REGULAR	10	12		11	ONCE
015		REGULAR	07	15		11	ONCE
016		REGULAR	07	02		05	CINCO
017		REGULAR	09	13		11	ONCE
018		REGULAR	00	00		00	CERO
019		REGULAR	12	12		12	DOCE
020		REGULAR	05	00		03	TRES
021		REGULAR	07	01		04	CUATRO
022		REGULAR	10	12		11	ONCE
023		REGULAR	07	03		05	CINCO
024		REGULAR	08	14		11	ONCE
025		REGULAR	07	15		11	ONCE
026		REGULAR	10	12		11	ONCE
027		REGULAR	07	15		11	ONCE
028		REGULAR	00	00		00	CERO
029		REGULAR	13	09		11	ONCE
030		REGULAR	11	11		11	ONCE

FORMULA PROMEDIO FINAL
PF = (1PP + 2PP) / 2
PF = Promedio Final
1PP = Primer Promedio Parcial
2PP = Segundo Promedio Parcial

Puno, C.U. 30 de julio del 20 18

M.Sc. Fredy cháhuares F.
ORAA-UNA-PUNO
F.R. 27-08-2018

JESUS HUMPIRI CHOQUE
COORDINADOR ACADEMICO
FIA - UNA
Coordinación Académica
Firma y Sello

Mg. Roberto ALFARO ALEJO
DIRECTOR DE LA ESCUELA PROFESIONAL
INGENIERIA AGRICOLA - UNA PUNO
Firma y Sello

Docente Universitario
Firma y Sello
Lic. Hugo Condori Ramos
DOCENTE DE LA E.P. FISICO - MATEMATICAS

Fecha de Recepción
30 JULIO 2018

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO - PUNO
VICE RECTORADO ACADÉMICO
OFICINA DE REGISTRO Y ARCHIVO ACADÉMICO

ACTA DE EVALUACIONES: REGULAR
FACULTAD: INGENIERIA AGRICOLA
ESCUELA PROFESIONAL: INGENIERIA AGRICOLA
COMPONENTE CURRICULAR: [06-002] CALCULO DIFERENCIAL
DOCENTE:
CREDITOS: 5.0
AÑO ACADEMICO: CICLO:
Usuario:

001017 Pag : 2/2
HORAS TEORICAS: 4
HORAS PRACTICAS: 2
HORAS EFECTIVAS: 6
FECHA :
HORA :

RECIBIDO
Unidad de Registro Académico

Nº	APELLIDOS Y NOMBRES	Primer Promedio Parcial	Segundo Promedio Parcial	Tercer Promedio Parcial	Promedio Final Número	Promedio Final Letras
031	REGULAR	10	12		11	ONCE
032	REGULAR	11	11		11	ONCE

FORMULA PROMEDIO FINAL
PF = (1PP + 2PP) / 2
PF = Promedio Final
1PP = Primer Promedio Parcial
2PP = Segundo Promedio Parcial

Puno, C.U. 30 de Julio del 20 18

M.Sc. Fredy Cháhuares F.
ORAA-UNA-PUNO
F.R. 27-08-2018

Mg. Roberto ALFARO ALEJO
DIRECTOR DE LA ESCUELA PROFESIONAL
INGENIERIA AGRICOLA - UNA PUNO

Docente Universitario
Firma y Sello
Lic. Hugo Condori Ramos
DOCENTE DE LA E. P. FISICO - MATEMATICAS

JESUS HUMPIRI CHOQUE
COORDINADOR ACADEMICO
FIA - UNA
Coordinación Académica
Firma y Sello

Fecha de Recepción
30 JULIO 2018

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO - PUNO
VICE RECTORADO ACADÉMICO
OFICINA DE REGISTRO Y ARCHIVO ACADÉMICO

ACTA DE EVALUACIONES: REGULAR
FACULTAD: INGENIERIA AGRICOLA
ESCUELA PROFESIONAL: INGENIERIA AGRICOLA
COMPONENTE CURRICULAR: [06-002] CALCULO DIFERENCIAL
DOCENTE:
CREDITOS: 5.0
AÑO ACADEMICO: CICLO:
Usuario:

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO RECIBIDO Unidad de Registro Académico

002290 Pag : 1/2
HORAS TEORICAS: 4
HORAS PRACTICAS: 2
HORAS EFECTIVAS: 6
FECHA :
HORA :
F.I.

N°	APELLIDOS Y NOMBRES		PROMEDIOS PARCIALES: PRIMER PROMEDIO PARCIAL	SEGUNDO PROMEDIO PARCIAL	TERCER PROMEDIO PARCIAL	PROMEDIO FINAL: Número	Letras
001		TERCERA MAT	00	00	00	00	CERO
002		CUARTA MAT	12	16	12	13	TRECE
003		REGULAR	00	00	00	00	CERO
004		REGULAR	10	11	12	11	ONCE
005		CUARTA MAT	00	00	00	00	CERO
006		TERCERA MAT	00	00	00	00	CERO
007		REGULAR	06	15	14	12	DOCE
008		TERCERA MAT	13	15	16	15	QUINCE
009		REGULAR	09	14	14	12	DOCE
010		REGULAR	00	00	00	00	CERO
011		REGULAR	16	15	16	16	DIECISEIS
012		CUARTA MAT	00	00	00	00	CERO
013		REGULAR	11	15	14	13	TRECE
014		REGULAR	00	00	00	00	CERO
015		REGULAR	09	14	12	12	DOCE
016		REGULAR	10	12	11	11	ONCE
017		REGULAR	12	14	14	13	TRECE
018		REGULAR	14	14	10	13	TRECE
019		REGULAR	09	13	14	12	DOCE
020		REGULAR	14	15	12	14	CATORCE
021		REGULAR	00	00	00	00	CERO
022		REGULAR	10	16	00	09	NUEVE
023		TERCERA MAT	10	12	12	11	ONCE
024		REGULAR	12	14	14	13	TRECE
025		REGULAR	00	00	00	00	CERO
026		REGULAR	11	11	11	11	ONCE
027		REGULAR	11	13	14	13	TRECE
028		REGULAR	11	13	12	12	DOCE
029		REGULAR	13	12	14	13	TRECE
030		REGULAR	10	11	12	11	ONCE

FORMULA PROMEDIO FINAL
PF = (1PP + 2PP + 3PP) / 3
PF = Promedio Final
1PP = Primer Promedio Parcial
2PP = Segundo Promedio Parcial
3PP = Tercer Promedio Parcial

Puno, C.U. 03 de Agosto del 2018

M.Sc. Fredy Cháhuares F.
ORAA-UNA-PUNO
F.R. 27-08-2018

JESUS HUMPIRI CHOQUE
COORDINADOR ACADEMICO
FIA - UNA
Coordinación Académica
Firma y Sello

Fecha de Recepción
03 AGOSTO 2018

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERIA AGRICOLA UNA PUNO
ALFARO ALEJO
Director de la Escuela Profesional
Firma y Sello

Docente Universitario
Bertha Olanda Velasquez
Lic. Matemáticas
Col. 683

157

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO - PUNO
VICE RECTORADO ACADÉMICO
OFICINA DE REGISTRO Y ARCHIVO ACADÉMICO

ACTA DE EVALUACIONES: REGULAR
FACULTAD: INGENIERIA AGRICOLA
ESCUELA PROFESIONAL: INGENIERIA AGRICOLA
COMPONENTE CURRICULAR: [06-002] CALCULO DIFERENCIAL
DOCENTE:
CREDITOS: 5.0
AÑO ACADEMICO: CICLO: Usuario:

RECIBIDO
Unidad de Registro Académico

002290 Pag : 2/2
HORAS TEORICAS: 4
HORAS PRACTICAS: 2
HORAS EFECTIVAS: 6
FECHA :
HORA :

N°	APELLIDOS Y NOMBRES	PROMEDIOS PARCIALES			PROMEDIO FINAL	
		PRIMER PROMEDIO PARCIAL	SEGUNDO PROMEDIO PARCIAL	TERCER PROMEDIO PARCIAL	Numero	Letras
031	REGULAR	12	12	14	13	TRECE

FORMULA PROMEDIO FINAL
PF = (1PP + 2PP + 3PP) / 3
PF = Promedio Final
1PP = Primer Promedio Parcial
2PP = Segundo Promedio Parcial
3PP = Tercer Promedio Parcial

Puno, C.U. 03 de Agosto del 2018

M.Sc. Fredy chalhuares F.
ORAA-UNA-PUNO
F.R. 27-08-2018

JESUS HUMPIRI CHOQUE
COORDINADOR ACADEMICO
FIA - UNA
Coordinación Académica
Firma y Sello

Fecha de Recepción
03 AGOSTO 2018

ALFARO ALEJO
Director de Escuela Profesional
Firma y Sello

Docente Universitario
Bertha Olanda Velasquez
Lic. Matemáticas
Col. 583