UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

TESIS

APLICACIÓN DEL MODELO DE VAN HIELE Y SU INCIDENCIA EN EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES REALES CON ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS CONTABLES DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO – 2017

PRESENTADA POR:

BETSY PILCOMAMANI ARIAS

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE:

MAESTRO EN EDUCACIÓN
MENCIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

PUNO, PERÚ

2019

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

TESIS

APLICACIÓN DEL MODELO DE VAN HIELE Y SU INCIDENCIA EN EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES REALES CON ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS CONTABLES DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO – 2017

PRESENTADA POR:

BETSY PILCOMAMANI ARIAS

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE:

MAESTRO EN EDUCACIÓN

MENCIÓN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

APROBADA POR EL SIGUIENTE JURADO:

PRESIDENTE ……………………………………….

Dr. WENCESLAO QUISPE YAPO

PRIMER MIEMBRO ……………………………………….

Dr. YONI ABELARDO QUISPE MAMANI

SEGUNDO MIEMBRO ……………………………………….

Dra. DAMIANA FLORES MAMANI

ASESOR DE TESIS ……………………………………….

Dr. JULIO CÉSAR LAURA HUANCA

Puno, 09 de julio de 2019

ÁREA: Logros de aprendizaje de la matemática

TEMA: Aplicación del modelo de van hiele y su incidencia en el aprendizaje de funciones reales con estudiantes de la facultad de ciencias contables de la universidad nacional del altiplano - 2017.

LÍNEA: Niveles de logro de aprendizaje y desarrollo de competencias y capacidades profesionales.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo al Ser Supremo Dios, por darme la oportunidad de seguir viviendo.

Con respeto y admiración a mi madre María Arias y mi padre Clemente Pilcomamani por su apoyo incondicional; a mi pareja Valerio Neyra y mi querida hija Lia Milagros por su apoyo y comprensión, a mis hermanos Rodyn, Ítalo, Amador y Alex Farid.

AGRADECIMIENTOS

- A la Universidad Nacional del Altiplano, alma mater de la región Puno, por acogerme en sus claustros y formarnos para la vida.

- A todos los docentes de la Maestría en Educación que directa o indirectamente, han contribuido en mi formación profesional a nivel de posgrado.

- A los miembros del jurado por su apoyo en la realización del trabajo de investigación

- A mi familia, amigos y colegas que con su palabra de aliento lograron motivarme para culminar y cristalizar éste ansiado grado académico

ÍNDICE GENERAL

Pág.

ÍNDICE DE TABLAS

Pág.

ÍNDICE DE FIGURAS

Pág.

ÍNDICE DE ANEXOS

Pág.

RESUMEN

El modelo de Van Hiele aporta una descripción del proceso de aprendizaje postulando la existencia de unos niveles de pensamiento o razonamiento, característicos del modelo. Precisamente, esos niveles suponen unas formas peculiares de razonar y, por tanto, no se identifican con niveles de destreza en cálculos algebraicos ni con los niveles educativos. El problema es: ¿Cómo incide la aplicación del modelo de Van Hiele en el aprendizaje de funciones reales con estudiantes de la Facultad de Ciencias Contables de la Universidad Nacional del Altiplano?. La aplicación del modelo de Van Hiele a un tema supone, por tanto, aportar descriptores de los niveles, esto es, características que permiten reconocer cada uno de los niveles a partir de la actividad de los estudiantes. Además las fases de aprendizaje del modelo es un medio para que el docente apoye al aprendizaje. El objetivo general de la investigación es evaluar cómo la aplicación del modelo de Van Hiele incide en el aprendizaje de funciones reales. El tipo de investigación que corresponde al estudio es el cuasi-experimental. Se determinó que la extensión del Modelo de Van Hiele a funciones reales favorece en el aprendizaje de los estudiantes de nivel superior universitario, y cuyos resultados indica que el promedio de nivel de aprendizaje del grupo experimental es mayor que al grupo de control. En conclusión el desarrollo de esta investigación, además de ampliar la lista de aplicaciones del modelo en conceptos diferentes a la geometría, potenciaría favorablemente su adopción en el primer ciclo de educación universitaria.

Palabras claves: Aprendizaje, descriptores, fases de aprendizaje, funciones reales y niveles.

ABSTRACT

Van Hiele's model provides a description of the learning course postulating the existence of levels of thought or reasoning, characteristic of the model precisely, these levels involve a peculire forms of reasoning and therefore are not identified with skill levels in algebraic calculations or with educational levels. The problem is: How does the application of the Van Hiele model affect the learning of real functions with students of the faculty of accounting sciences of the National University of the Altiplano?. The application of the Van Hiele model to a topic therefore implies providing descriptors of the levels, that is, characteristics that allow to recognize each of the levels from the activity of the students. In addition, the learning phases of the model is a means for teachers to support learning. The overall objective of the research is to evaluate how the application of the Van Hiele model influences the learning of real functions. The type of research that corresponds to the study is quasi-experimental. It was determined that the extension of the Van Hiele Model to real functions favors in the learning of students at university level, and whose results indicate that the average level of learning of the experimental group is greater than control group. In conclusion, the development of this research, in addition to expanding the list of applications of the model in concepts other than geometry, would favorably enhance its adoption in the first cycle of university education.

Keywords: Descriptors, learning, learning phases, levels and real functions.

INTRODUCCIÓN

Se expone el problema con fundamentos de la importancia del aprendizaje de estudiantes en matemática básica de los estudiantes en temas como funciones reales muy estudiadas previas al cálculo.

Se plantea el problema, objetivos e hipótesis del estudio de investigación. El problema consiste en: Cómo incide la aplicación del modelo de Van Hiele en el aprendizaje de funciones reales con estudiantes de la Facultad de Ciencias Contables de la Universidad Nacional del Altiplano. Puesto que se tiene estudiantes de las diferentes áreas con problemas de aprendizaje; sobre todo en matemáticas. Con más incidencia en estudiantes de biomédicas y sociales. Los problemas específicos: Cómo identificar el nivel de razonamiento de los estudiantes en el concepto de funciones reales, cómo aplicar las fases del modelo de Van Hiele para el aprendizaje de funciones reales, cómo evaluar el rendimiento en funciones reales antes y después de aplicar el modelo de Van Hiele y cómo identificar las dificultades que presenta la metodología didáctica del docente.

El modelo de Van Hiele es un método propone alcanzar un nivel de pensamiento o razonamiento en los estudiantes empleando actividades como: reconocimiento, análisis, clasificación, deducción formal y rigor. En cada de estos niveles, el docente debe realizar las fases como: Información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración. Cada uno ayuda a desarrollar el razonamiento lógico en el estudiante.

La tarea aquí es verificar como la aplicación del modelo de Van Hiele se relaciona con el aprendizaje con una secuencia didáctica que contribuya con el pensamiento en funciones reales de los estudiantes. Se pretende en el estudio beneficiar al sistema educativo universitario, al verificar qué resultados se obtienen en la aplicación del método. Se hizo el procedimiento experimental con tres grupos de estudiantes: un grupo experimental y dos grupos de control, la cual fue seleccionada a través de una muestra. Se encontró que los estudiantes del grupo experimental alcanzaron razonamientos significativos estando en un promedio en el nivel 2 y 3 incluso algunos alcanzaron el nivel 4. Mientras que los grupos de control se ubicaron en promedio del nivel 2 y algunos en el nivel 3. De aquí la incidencia positiva en la aplicación del modelo de enseñanza de Van Hiele en funciones reales.

Se concluyó que las fases del aprendizaje del modelo de Van Hiele permitió el logro de aprendizaje en funciones reales en conceptos y procedimentales. Así también el desarrollo de habilidades y destrezas del estudiante, para poder desarrollarlas en el entorno en que se desenvuelve. Que el material utilizado, las entrevistas, prácticas, cuestionarios, técnicas y ayudas que se utilizaron como apoyo en la labor docente, son abordados por el método de Van Hiele. Se recomienda a los docentes que aborden en los diferentes temas esta metodología de aprendizaje. Así como recomiendan las investigaciones realizadas a nivel mundial en la enseñanza de las matemáticas, el modelo de Van Hiele tiene gran aceptación en la enseñanza de las matemáticas.

El Capítulo I, denominado revisión de literatura, se encuentra todo el marco teórico.

El Capítulo II, se refiere al Planteamiento del Problema donde se presenta una fundamentación teórica y específica, asimismo planteamientos previos, objetivos de investigación, justificación e hipótesis.

El Capítulo III, denominado Materiales y Métodos, se da a conocer el tipo de investigación, la población y muestra, las técnicas e instrumentos utilizados, el plan de tratamiento estadístico de los datos.

El Capítulo IV, se presentan los resultados de la investigación, mediante tablas y figuras con su respectiva interpretación, por último, se plantea las conclusiones, recomendaciones y anexos de la investigación.

CAPÍTULO I

REVISIÓN DE LITERATURA

1.1. Marco Teórico

1.1.1. Origen y difusión del Modelo de Van Hiele

El modelo en el que se centran las investigaciones recogidas en esta memoria tiene su origen en los trabajos de dos profesores holandeses de Matemáticas de enseñanza secundaria, Pierre M. van Hiele y Dina van Hiele-Geldof, quienes, en sus tesis doctorales, presentaron respectivamente, un modelo de enseñanza y aprendizaje de la Geometría y un ejemplo concreto de aplicación de ese modelo en unos cursos de Geometría. (Van Hiele, 1990)

El Modelo de Van Hiele ha tenido una difusión relativamente reciente en el mundo occidental si observamos la fecha de las primeras publicaciones de los Van Hiele. En la Unión Soviética se supo muy pronto del Modelo de Van Hiele y se tomó como base para el diseño de un nuevo currículum de matemáticas implementado en la primera mitad de los años 60. También se utilizó el Modelo de Van Hiele en Holanda en el proyecto Wiskobas de desarrollo curricular, que se empezó a desarrollar en 1971. Pero hasta mediados de la década de los 70 no se le empezó a prestar atención en los EE.UU., a raíz de la publicación de una conferencia de Wirszup, y a continuación se difundió también por los demás países occidentales. (Jaime Pastor, 1993).

1.1.2. Descripción del Modelo de Van Hiele

El Modelo de Van Hiele abarca dos aspectos:

a) *Descriptivo*, mediante el cual se identifican diferentes formas de razonamiento geométrico de los individuos y se puede valorar el progreso de éstos.

b) *Instructivo*, que marca unas pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en su nivel de razonamiento geométrico.

En la base del aprendizaje de la geometría hay dos elementos importantes: el lenguaje utilizado y la significatividad de los contenidos. El primero implica que los niveles y su adquisición van unidos al lenguaje adecuado y, el segundo, que sólo se asimila aquello que se presente en el nivel de razonamiento que le corresponde a la persona; si no es así, se debe esperar a que lo alcance para enseñar un nuevo contenido matemático. (Maguiña Rojas, 2013)

El núcleo central del Modelo de Van Hiele está constituido por la idea de que, a lo largo del proceso de aprendizaje de la Geometría, el razonamiento de los estudiantes pasa por una serie de niveles de razonamiento, que son secuenciales, ordenados y tales que no se puede saltar ninguno. Cada nivel supone la comprensión y utilización de los conceptos geométricos de una manera distinta, lo cual se refleja en una manera diferente de interpretarlos, definirlos, clasificarlos, y hacer demostraciones.

La componente instructiva del modelo se basa en las fases de aprendizaje. Estas constituyen unas directrices para fomentar el desarrollo de la capacidad de razonamiento matemático de los estudiantes y su paso de un nivel de razonamiento al siguiente, mediante unos tipos de actividades y de problemas particulares para cada fase. (Jaime Pastor, 1993)

1.1.3. Los niveles de razonamiento

La descripción de los niveles de Van Hiele hecha en Wirszup 1976 plantea la existencia de cinco niveles de razonamiento. Esta es la caracterización más extendida y aceptada actualmente, en la que se centran todas las investigaciones referentes al modelo y a partir de la cual se ha trabajado para conseguir descripciones más finas de los niveles. No obstante, el proceso de evolución histórico del modelo ha sido más variable.

Los niveles son cinco y se suelen nombrar con los números del 1 al 5, sin embargo, es más utilizada la notación del 0 al 4. Dado que el nivel 5 se piensa que es inalcanzable para los estudiantes y muchas veces se prescinde de él, además, trabajos realizados señalan que los estudiantes no universitarios, como mucho, alcanzan los tres primeros niveles. Es importante señalar que, un o una estudiante puede estar, según el contenido trabajado, en un nivel u otro distinto. A continuación vamos a describir cuáles son las características de cada nivel. Desde las perspectiva del aprendizaje de los estudiantes. Estos niveles se denominan de la siguiente manera:

En general, el modelo de van Hiele proporciona una descripción del proceso de aprendizaje, el cual postula la existencia de niveles de pensamiento que no se identifican con niveles de habilidad computacional y que podríamos clasificar como: nivel 0 (pre descriptivo), nivel I (de reconocimiento visual), nivel II (de análisis), nivel III (de clasificación y relación) y nivel IV (de deducción formal), aunque sobre este último, se tiene la propia afirmación de los Van Hiele como difícilmente detectable y sólo de interés teórico. Así, la aplicación de este modelo a una materia concreta necesita del establecimiento de una serie de descriptores para cada uno de los niveles estudiados, que permita su detección, por lo que parece razonable asignar un conjunto de condiciones a los niveles diseñados para que puedan ser considerados dentro del modelo de Van Hiele: 1) los niveles deben de ser jerárquicos, recursivos y secuenciales; 2) deben ser formulados detectando un progreso del entendimiento como resultado de un proceso gradual; 3) los tests (de cualquier tipo) que se diseñen para su detección deben recoger la relación existente entre nivel y lenguaje empleado en cada uno de ellos, y 4) el diseño debe tener como objetivo primordial la detección de niveles de pensamiento, sin confundirlos con niveles de habilidad computacional o conocimientos previos. (Jaramillo, 2000) citado por (Ceballos Urrego & López Monsalve, 2003)

Nivel 0: Predescriptivo.- Fase de aprendizaje asociada: indagar, averiguar (Inquiry). Los estudiantes distinguen los números reales y sus propiedades; conocen el plano cartesiano, su definición y propiedades; son capaces de ubicar y "leer" puntos, reconocer cualquier figura geométrica plana que sobre él se dibuje; conocen las definiciones de relación y función sobre conjuntos finitos y en el conjunto de los números reales (R), pero no las diferencian gráficamente sobre el plano ni poseen una comprensión integral de los conceptos. (Fouz & de Donosti, 2013)

NIVEL 0 ó 1

Nivel 1: Visualización.- La descripción que aquí se expone está tomada de la que utilizaron Shaughnessy y Burger en 1985. Una figura geométrica es vista como un todo desprovisto de componentes o atributos. Las descripciones reflejan experiencias puramente visuales, hasta el punto de que un alumno de este nivel, a la pregunta de por qué una figura es un rectángulo, responde diciendo que porque se parece, por ejemplo, a una puerta o a una ventana. Un alumno en este nivel puede aprender vocabulario geométrico, puede identificar formas geométricas determinadas de entre un conjunto de ellas y, dada una figura, puede reproducirla. (Maguiña Rojas, 2013)

Nivel 0: De visualización o reconocimiento, cita a Pérez (2009) indica: en ella los educandos percibe las cosas como un todo, no clasifican características, sino que simplemente lo visualizan y lo asocian con elementos que ya conocen, en ella desarrollan un vocabulario geométrico. (Ixcaquic Aguilar, 2015)

Nivel 0: Visualización o reconocimiento. Indica que son tres las características fundamentales de este nivel:

a) Los objetos se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus atributos y componentes.
b) Se describen por su apariencia física mediante descripciones meramente visuales y asemejándoles a elementos familiares del entorno (parece una rueda, es como una ventana, etc) No hay lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto.
c) No reconocen de forma explícita componentes y propiedades de los objetos motivo de trabajo. (Fouz & de Donosti, 2013)

Nivel I: De reconocimiento visual. Fase de aprendizaje asociada a la orientación directa (Directed orientation) e indagación. Los estudiantes reconocen gráficas de funciones y relaciones de variable real, sobre el plano cartesiano; también pueden diferenciar otras curvas que representen algunas relaciones aplicadas, como las trayectorias parabólicas de objetos lanzados sobre la superficie terrestre o representaciones elípticas de los movimientos planetarios, sin abstraer sus propiedades para relacionarlas con otros fenómenos de distinta naturaleza dentro del mismo plano, o incluso por fuera de éste. De modo general, reconocen la diferencia gráfica entre relaciones y funciones sobre el plano, pero no perciben la integración de éstas con los ejes coordenados, ni con ecuaciones que las representen, ni con las situaciones prácticas que puedan describir. (Ceballos Urrego & López Monsalve, 2003).

Nivel 1. Reconocimiento

- Percepción global de las figuras: Se suelen incluir atributos irrelevantes en las descripciones, especialmente referidos a la posición en el plano.
- Percepción individual de las figuras: Cada figura es considerada como un objeto, independiente de otras figuras de la misma clase. No se generalizan las características de una figura a otras de su misma clase.
- Descripción de las figuras basada principalmente en su aspecto físico y posición en el espacio. Los reconocimientos, distinciones o clasificaciones se basan en semejanzas físicas globales.
- Frecuentemente hay descripciones por semejanza con otros objetos, no necesariamente matemáticos: "Se parece a …", "tiene forma de …".
- Uso de propiedades imprecisas para identificar, comparar, ordenar, caracterizar figuras, con frecuentes referencias a prototipos visuales.
- Aprendizaje de un vocabulario básico para hablar de las figuras, escribirlas, etc.

No se suelen reconocer explícitamente las partes de que se componen las figuras ni sus propiedades matemáticas. Cuando sí se hace dicho reconocimiento, estos elementos o propiedades no tienen un papel central y, frecuentemente, reflejan contradicciones. (Jaime Pastor, 1993)

NIVEL 1 ó 2

Nivel 2: Análisis. El alumno analiza de un modo informal las propiedades de las figuras percibidas mediante procesos de observación y experimentación. Empieza a establecerse las propiedades esenciales de los conceptos, aunque todavía es incapaz de ver relaciones entre propiedades y entre figuras. Tampoco es capaz de elaborar o entender definiciones. En este nivel, un alumno diría, por ejemplo, que "un rectángulo es una figura geométrica con cuatro lados, cuatro ángulos, lados opuestos paralelos, ángulos iguales,…”; es decir, aportaría toda una retahíla de propiedades. (Fouz & de Donosti, 2013)

Nivel 1: Análisis

a) Se perciben las componentes y propiedades (condiciones necesarias) de los objetos y figuras. Esto lo obtienen tanto desde la observación como de la experimentación.
b) De una manera informal pueden describir las figuras por sus propiedades pero no de relacionar unas propiedades con otras o unas figuras con otras. Como muchas definiciones en Geometría se elaboran a partir de propiedades no pueden elaborar definiciones.
c) Experimentando con figuras u objetos pueden establecer nuevas propiedades

Sin embargo no realizan clasificaciones de objetos y figuras a partir de sus propiedades. (Ceballos Urrego & López Monsalve, 2003)

Nivel II: De análisis. Fases de aprendizaje asociadas: explicitación (Expliciting) y orientación directa. Los estudiantes analizan por pares, las relaciones entre:

- Las figuras y los ejes del plano cartesiano.
- Las tablas de valores y los gráficos que los representan sobre el plano.
- Las ecuaciones como representación de un enunciado.
- Las gráficas que pueden ser representación de situaciones concretas.
- Las ecuaciones en dos variables y los gráficos de relaciones y funciones, en este sentido, relacionan ecuaciones en dos variables con figuras del plano en las dos direcciones: partiendo de la ecuación se aproximan al gráfico y, al revés, a partir del gráfico, se aproximan a la ecuación.
- Se evidencia en este nivel una integración dos a dos de las diferentes representaciones que pueden adoptar las relaciones y funciones, sin ser capaces todavía de establecer una comunicación integral entre todas ellas. (Maguiña Rojas, 2013)

Nivel 2. Análisis

- Reconocimiento de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y están dotadas de propiedades matemáticas. Se describen las partes que integran una figura y se enuncian sus propiedades. Se es capaz de analizar las propiedades matemáticas de las figuras.
- Deducción de propiedades mediante experimentación. Capacidad de generalización de dichas propiedades a todas las figuras de la misma familia.
- La definición de un concepto consiste en el recitado de una lista de propiedades, lo más exhaustiva posible, pero en la que puede haber omisiones de características necesarias. Así mismo, se rechazan las definiciones dadas por el profesor o el libro de texto en favor de la del estudiante cuando aquéllas entran en conflicto con la propia.
- No se relacionan diferentes propiedades de una figura entre sí o con las de otras figuras. No se establecen clasificaciones a partir de las relaciones entre las propiedades. No se realizan clasificaciones inclusivas.
- La demostración de una propiedad se realiza mediante su comprobación en uno o pocos casos.(Jaime Pastor, 1993)

Nivel 1 De análisis. Indica aquí el discípulo por medio de lo que observa y experimenta aprende y comprende los tipos, clases y formas de las figuras, pero aún no discierne definiciones específicas. (Pérez, 2009) citado por (Ixcaquic Aguilar, 2015)

NIVEL 2 ó 3

Nivel 2: Ordenación o clasificación. Antes de señalar las características del nivel conviene señalar que, en el anterior nivel, los estudiantes empiezan a generalizar, con lo que inician el razonamiento matemático, señalando qué figuras cumplen una determinada propiedad matemática pero siempre considerará las propiedades como independientes no estableciendo, por tanto, relaciones entre propiedades equivalentes. Alcanzar este nivel significa que...

a) Se describen las figuras de manera formal, es decir, se señalan las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir. Esto es importante pues conlleva entender el significado de las definiciones, su papel dentro de la Geometría y los requisitos que siempre requieren.

b) Realizan clasificaciones lógicas de manera formal ya que el nivel de su razonamiento matemático ya está iniciado. Esto significa que reconocen cómo unas propiedades derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones.

c) Siguen las demostraciones pero, en la mayoría de los casos, no las entienden en cuanto a su estructura. Esto se debe a que su nivel de razonamiento lógico son capaces de seguir pasos individuales de un razonamiento pero no de asimilarlo en su globalidad. Esta carencia les impide captar la naturaleza axiomática de la Geometría. (Fouz & de Donosti, 2013)

Nivel III: De clasificación y relación. fase de aprendizaje asociada a la orientación libre (Free orientation) y explicitación.

Clasifican familias de relaciones y funciones a partir de los gráficos, de las estructuras de las ecuaciones y de los enunciados sobre problemas específicos. Presentan habilidad para integrar las diferentes formas de representación de una relación o una función. Reconocen la forma dinámica de los conceptos relación y función, y son capaces de desarrollar secuencias de proposiciones para deducir que una propiedad se deriva de otra; sin embargo, no se comprende la necesidad de la formalización ni las estructuras axiomáticas. (Jaramillo, 2000) citado por (Ceballos Urrego & López Monsalve, 2003)

Nivel 3. Clasificación

- Sí se pueden relacionar propiedades de una figura entre sí o con las de otras figuras: Se comprende la existencia de relaciones y se descubren, de manera experimental, nuevas relaciones.
- Comprensión de lo que es una definición matemática y sus requisitos. Se definen correctamente conceptos y tipos de figuras. También se hacen referencias explícitas a las definiciones cuando se realizan razonamientos o demostraciones.
- Sí se pueden realizar clasificaciones inclusivas.

- La demostración de una propiedad ya no se basa en la comprobación de casos, pues hay una necesidad de justificar de manera general la veracidad de dicha propiedad, para lo cual se usan razonamientos deductivos informales.
- Comprensión y realización de implicaciones simples en un razonamiento formal. Comprensión de una demostración realizada por el profesor. Capacidad para repetir tal demostración y adaptarla a otra situación análoga.
- Incapacidad para llevar a cabo una demostración formal completa, en la que haya que encadenar varias implicaciones, pues no se logra una visión global de las demostraciones y no se comprende su estructura. (Jaime Pastor, 1993)

NIVEL 3 ó 4

Nivel 3: Deducción informal. El alumno ordena lógicamente las propiedades de los conceptos, empieza a construir definiciones abstractas y puede distinguir entre necesidad y suficiencia de un conjunto de propiedades en la determinación de un concepto. En este nivel, puede seguir y dar argumentos informales, pero no comprende el significado de la deducción o el papel de los axiomas. Puede seguir demostraciones formales, pero no puede construir una demostración partiendo de premisas diferentes. (Maguiña Rojas, 2013)

Nivel 2 deducción informal, en ella el educando comprende las definiciones, reconoce clases de figuras, detalla las figuras de manera juiciosa, pero solo puede seguir pasos, pero aún no consiguen entender correctamente los axiomas. (Pérez, 2009) citado por (Ixcaquic Aguilar, 2015)

Nivel 4: Deducción formal. El alumno razona formalmente dentro del contexto de un sistema matemático con términos indefinidos, axiomas, un sistema lógico subyacente, definiciones y teoremas. En este nivel, un alumno es capaz de construir, ya no memo- rizar, demostraciones. Se puede estudiar la posibilidad de que una demostración se desarrolle siguiendo más de una secuencia de proposiciones. Se entiende la interacción entre condición necesaria y suficiente. (Maguiña Rojas, 2013)

Nivel 3: Deducción formal

a) En este nivel ya se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, viendo su necesidad para justificar las proposiciones planteadas.
b) Se comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos, por lo que ya se entiende la naturaleza axiomática de las Matemáticas.
c) Se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas lo que permite entender que se puedan realizar distintas forma de demostraciones para obtener un mismo resultado.

Es claro que, adquirido este nivel, al tener un alto nivel de razonamiento lógico, se tiene una visión globalizadora de las Matemáticas. (Fouz & de Donosti, 2013)

Nivel IV: De deducción formal

Fase de aprendizaje asociada: integración (Integraron). El alumno es capaz de establecer, diferenciar y deducir relaciones y funciones de variable real, independientemente del marco de referencia y con aplicación a situaciones prácticas. Así se resume lo que al respecto se definen como los descriptores del nivel IV para el caso concreto de relaciones y funciones, cuando se manifiesta que… un estudiante en este nivel superior es capaz de llegar a plantear distintas demostraciones de algunas propiedades o de percibir que dos definiciones de un mismo concepto pueden ser equivalentes. Al mismo tiempo, relacionan distintos conceptos y propiedades dentro de un área de conocimiento o de un tema más general que los englobe, captando que son manifestaciones diferentes de un mismo hecho matemático. (Ceballos Urrego & López Monsalve, 2003)

Nivel 4. Deducción formal

- Se pueden reformular enunciados de problemas o teoremas, trasladándolos a un lenguaje más preciso.
- Realización de las demostraciones (de varios pasos) mediante razonamientos deductivos formales.

- Capacidad para comprender y desarrollar demostraciones formales. Capacidad para adquirir una visión global de las demostraciones y para comprender la misión de cada implicación simple en el conjunto.
- Capacidad para comprender la estructura axiomática de las matemáticas: Sentido de axiomas, definiciones, teoremas, términos no definidos.
- Aceptación de la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas o mediante diferentes formas de demostración. (Jaime Pastor, 1993)

Nivel 3. Deducción formal

Indica que en ella el estudiante ya comprende las deducciones para constituir una conjetura geométrica, Van Hiele clasifica este nivel como la esencia de la Matemática. (Pérez, 2009) citado por (Ixcaquic Aguilar, 2015)

NIVEL 4 ó 5

Nivel 5: Rigor. El alumno puede comparar sistemas basados en axiomáticas diferentes y puede estudiar distintas geometrías en ausencia de modelos concretos. Este nivel es prácticamente inalcanzable por un estudiante de secundaria; por ello, la mayoría de los trabajos de investigación se centran en los tres primeros. El propio Pierre Marie Van Hiele reconoce su interés casi exclusivo por los tres primeros niveles. (Maguiña Rojas, 2013)

Nivel 4: rigor

a) Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes geometrías.
b) Se puede trabajar la Geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático. (Fouz & de Donosti, 2013)

Nivel 5. Rigor

- Posibilidad de trabajar en sistemas axiomáticos distintos del usual (de la geometría euclídea).
- Capacidad para realizar deducciones abstractas basándose en un sistema de axiomas determinado.

- Capacidad para establecer la consistencia de un sistema de axiomas. Capacidad para comparar sistemas axiomáticos diferentes y decidir sobre su equivalencia.
- Comprensión de la importancia de la precisión al tratar los fundamentos y las relaciones entre estructuras matemáticas. (Jaime Pastor, 1993)

Nivel 4. Rigor

Indica que en este nivel el principiante ya puede trabajar muy bien una diversidad de métodos axiomáticos y puede captar la geometría en forma abstracta. (Pérez, 2009) citado por (Ixcaquic Aguilar, 2015)

El modelo Van Hiele asegura el progreso a través de los niveles pues estos van a depender más de la instrucción recibida que de la edad de madurez del estudiante. Esta afirmación esta examinada por sus propios investigadores y la de psicólogos, pero en consecuencia, el método y estructura del aprendizaje, así como el contenido y los materiales usados son elementos fundamentales. De su correlación se deriva la adquisición de los niveles por parte del educando. (Ortega, 2005) citado por (Ixcaquic Aguilar, 2015)

1.1.4. Las fases del Modelo de Van Hiele

Los Van Hiele propusieron cinco fases de aprendizaje que guían al docente en el diseño y organización de las experiencias de aprendizaje adecuadas para el progreso del estudiante en su paso de un nivel a otro. Dentro del modelo, las fases no son exclusivas de un nivel sino, en cada nivel, el estudiante comienza con actividades de la primera fase y continua así, de tal forma que al terminar la fase 5 debe haber alcanzado el nivel de razonamiento siguiente. (Jaime, 1993) citado por (Vargas Vargas & Gamboa Araya, 2013)

Las fases de aprendizaje correspondientes al Modelo de Van Hiele son las siguientes:

Fase 1: Información.

Fase 2: Orientación dirigida.

Fase 3: Explicitación.

Fase 4: Orientación libre.

Fase 5: Integración.

Las fases del modelo de Van Hiele, las cuales son acciones que debe realizar cada educando con ayuda del docente para desarrollar un nivel superior de razonamiento, las cuales son cinco y se describen a continuación: información, orientación dirigida, explicación, orientación libre e integración. (Planas et al., 2012) citado por (Ixcaquic Aguilar, 2015)

Las fases de aprendizaje buscan que, en el transcurso de su aplicación, el alumno reelabore el lenguaje empleado con relación al concepto estudiado para que pueda progresar del nivel de razonamiento en que se encuentra al inmediatamente superior. Las fases de aprendizaje del modelo se definen de la siguiente manera: información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración. (Bedoya Beltrán, Esteban Duarte, & Vasco Agudelo, 2007)

Las fases de aprendizaje: Se postulan en el modelo cinco fases y, a continuación, se describen: están orientadas a ayudar a progresar a un estudiante desde un nivel de razonamiento inmediatamente superior, básicamente las fases constituyen un esquema para organizar la enseñanza, y se clasifican en: información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración. (Rodríguez Pérez, 2015)

Van Hiele sostiene que su teoría tiene una propiedad que establece, que la transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural; se da bajo la influencia de un programa de enseñanza-aprendizaje. En este sentido, mientras que los niveles de razonamiento nos orientan acerca de cómo secuenciar y organizar el currículo geométrico de una forma global, el objetivo de las Fases de Aprendizaje es favorecer el desplazamiento del alumno/a de un nivel al inmediatamente superior mediante la organización de las actividades de enseñanza-aprendizaje. Estos dos elementos, la teoría y el método, ha permitido que el modelo tuviera una influencia real en la elaboración de currículos de geometría en distintos países como es el caso de la Unión Soviética, EEUU, Países Bajos, etc.

La organización de las actividades de enseñanza aprendizaje del método de fases de aprendizaje, comprende una secuencia precisa de cinco fases o estados de aprendizaje, resumidos como sigue: información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración. (Usiskin, 1991) citado por (Zambrano, 2005)

Los cuales se definen de manera distinta pero con el mismo significado como:

a. Fase 1: Información

Fase 1º: Preguntas/ información. Se trata de determinar, o acercarse lo más posible, a la situación real de los alumnos/as. Se cumpliría la famosa afirmación de Ausubel: “Si tuviera que reducir toda la Psicología Educativa a un solo principio diría lo siguiente: el factor más importante que el influye en el aprendizaje es lo que el alumno/a sabe. Averígüese esto y enséñese en consecuencia”.

Esta fase es oral y mediante las preguntas adecuadas se trata de determinar el punto de partida de los alumnos/as y el camino a seguir de las actividades siguientes. Se puede realizar mediante un test o preguntas individualizadas utilizando actividades del nivel de partida. Cabe señalar que muchas veces el nivel no lo marca tanto la pregunta coma la respuesta, es decir, diseñamos una pregunta pensando en un nivel concreto y, la respuesta recibida, nos puede señalar un nivel distinto del pensado inicialmente. (Fouz & de Donosti, 2013)

Fase 1: Encuesta/ Información. El profesor determina, mediante el diálogo con los estudiantes, dos aspectos importantes: 1) El conocimiento previo sobre el concepto que se va a tratar; y 2) La dirección que tomará el estudio con posterioridad y toda observación que sea pertinente. En esta fase se introduce el vocabulario específico del nivel que se trate. (Maguiña Rojas, 2013)

Fase 1: Información. Se explora mediante tests, entrevistas, gráficas o exposiciones realizadas por los alumnos. Con ello se busca que expliciten la información que tienen en su estructura cognitiva acerca del concepto objeto de estudio. (Bedoya Beltrán et al., 2007)

Información, en ella se menciona o se da a conocer lo que se va a enseñar y lo que se va aprender. En otras palabras en este período el maestro indaga los conocimientos previos sobre los conceptos que se irá a tratar, se explica qué trayectoria tomará el estudio. (Ixcaquic Aguilar, 2015)

b. Fase 2: Orientación dirigida

Fase 2º: Orientación dirigida. Aquí es donde la importancia de la capacidad didáctica del profesor/a más se va a necesitar. De su experiencia señalan que el rendimiento de los alumnos/as (resultados óptimos frente a tiempo empleado) no es bueno si no existen una serie de actividades concretas, bien secuenciadas, para que los alumnos/as descubran, comprendan, asimilen, apliquen, etc; las ideas, conceptos, propiedades, relaciones, etc; que serán motivo de su aprendizaje en ese nivel. (Fouz & de Donosti, 2013)

Fase 2: Orientación dirigida. Sobre el concepto a estudiar, los estudiantes exploran dicho concepto a través de los materiales que de forma secuencializada les presenta el profesor, de tal manera que las actividades progresivas revelen las estructuras características de cada nivel. Las cuestiones a plantear por el profesor deben ser concisas y sin ambigüedad. (Maguiña Rojas, 2013)

Fase 2. Orientación dirigida. El profesor propone actividades en las que el concepto se relacione con situaciones de la vida diaria y anima a los alumnos para que encuentren sus propias relaciones, las compartan y discutan con sus compañeros. (Bedoya Beltrán et al., 2007)

Orientación dirigida. En ella el estudiante aprende y comprende cuales son los significados y propiedades principales de un tema específico. Explora dichos conceptos a través de los materiales que se le va a plantear consecutivamente. (Ixcaquic Aguilar, 2015)

c. Fase 3: Explicación

Fase 3º: Explicación (explicitación) Es una fase de interacción (intercambio de ideas y experiencias) entre alumnos/as y en la que el papel del profesor/a se reduce en cuanto a contenidos nuevos y, sin embargo, su actuación va dirigida a corregir el lenguaje de los alumnos/as conforme a lo requerido en ese nivel. La interacción entre alumnos/as es importante ya que les obliga u ordenar sus ideas, analizarlas y expresarlas de modo comprensible para los demás. (Fouz & de Donosti, 2013)

Fase 3: Explicitación. Partiendo de sus experiencias previas, los estudiantes expresan e intercambian sus opiniones acerca de las estructuras observadas. En esta fase, se explicita el sistema de relaciones exploradas. El papel del profesor es mínimo, si bien debe cuidar que el lenguaje del alumno sea el apropiado a su nivel. (Maguiña Rojas, 2013)

Fase 3. Explicitación. Los alumnos aplican el concepto para resolver problemas que correspondan a situaciones reales en diferentes contextos. (Bedoya Beltrán et al., 2007)

Explicación, esta fase no es más que verificar la forma de como el aprendiz se desenvuelve verbalmente, al explicar sus experiencias previas. La participación del educador debe ser mínima en esta fase, solo debe cuidar el lenguaje del aprendiz. (Ixcaquic Aguilar, 2015)

d. Fase 4: Orientación libre

Fase 4º: Orientación libre. Aparecen actividades más complejas fundamentalmente referidas a aplicar lo anteriormente adquirido, tanto respecto a contenidos como al lenguaje necesario. Estas actividades deberán ser lo suficientemente abiertas, lo ideal son problemas abiertos, para que puedan ser abordables de diferentes maneras o puedan ser de varias respuestas válidas conforme a la interpretación del enunciado. Esta idea les obliga a una mayor necesidad de justificar sus respuestas utilizando un razonamiento y lenguaje cada vez más potente. (Fouz & de Donosti, 2013)

Fase 4: Orientación libre. El alumno se enfrenta a tareas más complejas, trabajos con muchas etapas y que pueden concluirse por distintos procedimientos. El objetivo de esta fase es la consolidación de los conocimientos adquiridos y su aplicación a situaciones inéditas, aunque de estructura comparable a las estudiadas previamente. (Maguiña Rojas, 2013)

Fase 4: Orientación libre. Se completa la red de relaciones que se comenzó a formar en las fases anteriores y se adquiere el lenguaje propio del siguiente nivel de razonamiento. Partiendo del concepto estudiado y de sus propios intereses los alumnos deben formular y solucionar sus propios problemas. (Bedoya Beltrán et al., 2007)

Orientación libre. En ella el educando aplica los conocimientos y el lenguaje que ha adquirido, y se enfrenta a tareas más complejas que pueden concluirse con distintos procedimientos. El objetivo específico de esta fase es consolidar los conocimientos adquiridos. (Ixcaquic Aguilar, 2015)

e. Fase 5: Integración

Fase 5º: Integración. La primera idea importante es que, en esta fase, no se trabajan contenidos nuevos sino que sólo se sintetizan los ya trabajados. Se trata de crear una red interna de conocimientos aprendidos o mejorados que sustituya a la que ya poseía. Como idea final podemos señalar como en esta estructura de actividades se pueden integrar perfectamente actividades de recuperación para los alumnos/as que presenten algún retraso en la adquisición de los conocimientos geométricos y, por otra parte, rehaciendo adecuadamente los grupos profundizar algo más con aquellos alumnos/as de mejor rendimiento Aunque no se ha explicitado las actividades de evaluación, también se integrarían fácilmente en esta estructura de actividades. (Fouz & de Donosti, 2013)

Fase 5: Integración. El estudiante revisa, sumariza y unifica los objetos y sus relaciones que configuran el nuevo sistema de conocimientos. En esta fase, no se presenta nada nuevo; simplemente se plantea como síntesis de lo ya hecho y, en todo caso, la revisión de los orígenes de esa síntesis. (Maguiña Rojas, 2013)

Fase 5. Integración. El concepto estudiado se reorganiza y adquiere un nuevo significado. Se hace explícita la nueva red conceptual y el conjunto de habilidades de razonamiento adquiridas. (Bedoya Beltrán et al., 2007)

Integración. En ella se acumulan todas las fases, está lo sintetiza, para lograr así aplicar lo aprendido, en esta última fase no se presenta nada nuevo sino una síntesis de lo ya hecho. Una vez superada esta quinta fase los estudiantes han alcanzado un nuevo nivel de aprendizaje, y están listos para repetir las fases para el nivel superior que sigue. (Ixcaquic Aguilar, 2015)

1.1.5. Propiedades del Modelo de Van Hiele

Son propiedades muy indispensables que le servirán al maestro como una guía a la hora de realizar su labor docente, entre ellas están: Un modelo secuencial, en ella los estudiantes deben trasmitir adecuadamente los niveles. Progresar o no de un nivel a otro, en ella menciona que en ningún método de instrucción el educando logrará superar si salta un paso, si lo hace, esto provocará que sea un fracaso el nivel de comprensión.

El estudio de un concepto matemático, en ella menciona que no se agota en un solo nivel un concepto, un ejemplo sería que en el nivel 1 el discípulo aprende a ver las características y sus relaciones, pero en el nivel dos es donde aprende a tener una definición clara y razonable. También menciona que en otra de sus propiedades cada nivel posee sus propios símbolos lingüísticos y sus propios sistemas de relaciones que conectan esos símbolos, esta afirmación tiene que ver con el lenguaje que usa el estudiante en cada nivel, lo que puede ser correcto en un nivel puede no ser correcto en otro nivel. Y se concluye que debe haber sintonía total entre el nivel del educando y las instrucciones que recibe, como el material y el vocabulario que use debe ser acorde al nivel en que va. (Planas et al., 2012) citado por (Ixcaquic Aguilar, 2015)

1.1.6. Características de las fases de aprendizaje del Modelo

Se deduce las características de las fases de aprendizaje, mencionando las más importantes: dar a conocer lo que se va a enseñar e indagar los conocimientos previos sobre los conceptos que se irán a tratar. El educando comprende y aprende significados y propiedades de un tema específico. Verifica como se desenvuelve verbalmente, en ella la participación debe ser mínima. Como aplica los conocimientos y lenguaje que ha adquirido, y por último se acumula todas las fases llegando a una síntesis de lo ya hecho, en la cual el educando demuestra las habilidades adquiridas de las fases anteriores, pero dándole un nuevo nivel para alcanzar un razonamiento adecuado. (Cruz, 2009) citado por (Ixcaquic Aguilar, 2015)

1.1.7. Características de los Niveles

En un primer lugar hablamos de “secuenciación”, algo que, visto o explicado hasta ahora, no necesita más explicación, de “jerarquización” esto es, los niveles tienen un orden que no se puede alterar, lo cual es obvio visto también lo anterior y los niveles “son recursivos”. Esta última idea es importante y conviene explicarla y concretarla un poco más. Esta característica nos indica que “lo que es implícito en un nivel se convierte en explícito en el siguiente nivel”.

Un esquema, prescindiendo del último nivel, mediante una tabla de esta idea puede ser esclarecedor:

Tabla 1

Recursividad de los niveles de aprendizaje

NIVELES	ELEMENTOS EXPLÍCITOS	ELEMENTOS IMPLÍCITOS
NIVEL 0	Figuras y objetos	Partes y propiedades de las figuras y objetos
NIVEL 1	Partes y propiedades de las figuras y objetos	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos
NIVEL 2	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos	Deducción formal de teoremas
NIVEL 3	Deducción formal de teoremas	Relación entre los teoremas (sistemas axiomáticos)

Fuente: Modelo de Van Hiele

La segunda característica a señalar es “el lenguaje” específico para cada nivel. La progresión en y entre los niveles va muy unida a la mejora del lenguaje matemático necesario en el aprendizaje. No sé trata sólo de adquirir conocimientos matemáticos sino también mejoras y ampliar las capacidades referidas al lenguaje necesario en cada nivel. Como más tarde señalaremos en este modelo es muy importante el test-entrevista, es decir, que se da mucha importancia a que expliquen lo que saben y cómo lo saben no sólo que lo escriban en respuesta a un problema o un test de ítems más o menos abiertos. La tercera idea es si el aprendizaje y, por tanto, el paso de nivel se hace de una manera “continua o discreta”. La idea, eterno dilema, es si el salto es repentino o se hace de forma gradual. Nos parece lógico pensar que se hace de forma continua mediante pequeños saltos que conexos que nos darán el paso final de nivel. Esto está más de acuerdo con las teorías cognitivas modernas del aprendizaje que señalan cómo creamos esquemas significativos de pensamiento, mejores pero cercanos a los que teníamos, que se interconectan entre sí y que, a su vez, podemos reemplazar por otros nuevas más sencillos y prácticos que los anteriores. Para construir o mejorar estos esquemas tiene mucha importancia la interacción alumno/a- profesor/a. Lo señalado en el párrafo anterior (test-entrevista) sería ya el punto de partida para conocer estos esquemas de pensamiento.

Cambios de nivel - fases del paso entre niveles

Lo visto hasta ahora, parece darnos pista de cómo podemos secuenciar los contenidos curriculares de Geometría cuando tenemos que construir o diseñar un currículo de Geometría para una determinada etapa educativa (EP, ESO, Bachillerato, etc). Cuando trabajamos con currículos abiertos esto es primordial siempre que queramos diseñar un currículo propio conforme a nuestros criterios educativos. Lo que vamos a ver ahora nos puede dar pistas de cómo organizar las actividades dentro de una unidad didáctica, es decir, qué tipo de actividades vamos a hacer conforme al desarrollo de la unidad. En este punto conviene resaltar a qué nos referimos con "tipo de actividades" para no mezclar churras con merinas. A menudo se suele mezclar el "cómo y qué se hace" y "a qué va dirigida" una actividad con su contenido específico. Cuando hablamos de "a qué va dirigida" nos referimos a si se trata de una actividad de presentación de un tema, de refuerzo, de repaso o de profundización, de resumen, de grupo, individual, dinámica de grupos, etc. Sin embargo, cuando hablamos de "cómo y qué se hace" nos referimos al contenido propio de la actividad como resolver problemas abiertos, uso de instrumentos de medida, geometría inductiva, cálculos métricos o estimación, dibujos, construcciones con sólidos, etc. Vamos entonces a dar pistas más para contestar a "cómo organizar las actividades" que al tipo concreta de ellas. En su trabajos los Van Hiele enfatizan en la idea que "el paso de un nivel a otro depende más de la enseñanza recibida que de la edad o madurez", es decir, dan una gran importancia a la organización del proceso de enseñanza-aprendizaje así como a las actividades diseñadas y los materiales utilizados. (Fouz & de Donosti, 2013)

1.1.8. Funciones Reales

Una relación R consiste en dos conjuntos A, B y un enunciado formal $P(x, y)$ tal que $P(a, b)$ es verdadero o falso para todo par ordenado $(x, y) \in A \times B$. Se dice entonces que R es una relación entre A y B.

Producto cartesiano.- dados dos conjuntos A y B se llama producto cartesiano de $A \times B$. Al conjunto formado por todos los pares ordenados (a, b) tales que $a \in A$ y $a \in B$. Se denota por $A \times B$.

Sobre el concepto de función

En el Siglo XVII, Gottfried Wilhelm Leibniz, uno de los inventores del Cálculo, introdujo el término función en el vocabulario matemático. El concepto de función es uno de los más importantes en todas las matemáticas y es esencial para el estudio del Cálculo. En términos breves, una función es un tipo especial de relación de entrada y salida, o insumo y producto, que expresa cómo una cantidad (la salida) depende de otra cantidad (la entrada).

Definición.- Una función es una regla que asigna a cada número de entrada exactamente un número de salida. El conjunto de todos los números de entrada a los cuales se aplica la regla se le denomina dominio de la función. Al conjunto de todos los números de salida se le llama ámbito (o contradominio).

Definición.- Sean A y B dos conjuntos. Una función de A en B es una *regla* que *a cada elemento de* A *asocia un único elemento de* B.

- Una función $f: A \to B$ es una función inyectiva ó 1-1 si: $\forall\, x_1, x_2 \in Dom(f)$ se cumple: $f\,(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow \; x_1 = x_2$
- Una función $f: A \to B$ es una función Subyectiva o Sobreyectiva si: $Im\,(f) = B$
- Una función $f: A \to B$ es una aplicación si: $Dom(f) = A$.
- Una función es Biyectiva si es Inyectiva y Sobreyectiva. (Figueroa García, 2012)

Operaciones con funciones

Definición.- Dos funciones $f: A \to B$ y $g: A \to \mathbb{R}$ son iguales cuando

$Dom(f) = Dom(g)$ y $f\,(x) = g(x) \;\forall\; x \in Dom(f)$.

Definición.- Sean $f \;y\; g$ dos funciones reales con $Dom(f) = \; A$ y se define:

a) Función Suma de f y g

$$(f+g)(x) \;=\; f(x) + g(x) \;\; y \;\; Dom(f+g) = A \cap B$$

b) Función Diferencia de f y g

$$(f-g)(x) \;=\; f(x) - g(x) \;\; y \;\; Dom(f-g) = A \cap B$$

c) Función Producto de f y g

$$(f.g)(x) \;=\; f(x).g(x) \;\; y \;\; Dom(f.g) = A \cap B$$

d) Función cociente de $f \;y\; g$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad y \quad Dom\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in A \cap B \ / \ g(x) \neq 0\}$$

e) Producto de una constante por una función

$$(kf)(x) = kf(x) \quad y \quad Dom(f) = A$$

f) Función Valor Absoluto de f

$$|f|(x) = |f(x)| \quad y \quad Dom(f) = A$$

(Tan T., 2012)

Composición de funciones

Definición.- Dada las funciones $f: A \longrightarrow B$. Una función compuesta de f y g, denotada por $g \circ f$ es la función

$$(g \circ f) = g(f(x))$$

Para todos los $x \in Dom(g \circ f)$

Donde: $Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f) \ tal \ que \ f(x) \in Dom(g)\}$

Propiedades de la composición de funciones

Si $f, g \ y \ h \in F = \{f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ entonces.

- Cerradura: $g \circ f \in F$
- Asociativa: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
- Existencia del elemento identidad: existe una función única en F, llamada función identidad, denotada por Iy definida por $I(x) = x$ tal que $\forall f \in F: f \circ I = I \circ f = f$
- Distributiva: $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$

$$(f.g) \circ h = f \circ h \ . \ g \circ h$$

(Trejo & Bosch, 1968)

Función Inversa

Definición: Sea $f: A \to B$ es una función inyectiva con $Dom(f) = A$ definimos la Función Inversa $f^{-1}: B \to A$ como:

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

Además: $f^{-1} \circ f = Id_A$ $\qquad$ $f \circ f^{-1} = Id_B$

Con: $Dom(f) = Im(f^{-1})$ $\qquad$ $Im(f) = Dom(f^{-1})$

Nota: Si tenemos una función real con varias reglas de correspondencia es decir:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} f_1, & Dom\ (f_1) \\ f_2, & Dom\ (f_2) \\ f_3, & Dom\ (f_3) \end{Bmatrix}$$

Diremos f es inyectiva si cada uno de las f_i: $\forall\ i = 1,2,3$ es inyectiva y cumple que:

$$Im(f_1) \cap Im(f_2) \cap Im(f_3) = \emptyset$$

(Haeussler Jr & Paul, 1992)

1.2. Antecedentes

"Relaciones y funciones: conceptos clave para el aprendizaje del cálculo, y una propuesta para la aplicación del modelo de Van Hiele" concluye: primero el desarrollo de esta propuesta, además de engrosar la lista de aplicaciones del modelo de van Hiele en conceptos diferentes a la geometría, potenciaría favorablemente su adopción en el último nivel de la educación media y primer año universitario, como metodología de enseñanza para facilitar el aprendizaje del cálculo. Segundo La realización de investigaciones en el campo de la educación matemática que permitan establecer claramente los niveles de van Hiele con sus respectivos descriptores, para la comprensión de conceptos puntuales y trascendentes, como el caso de relación y función en el cálculo, abren el camino para proponer e implementar nuevas técnicas y/o modelos pedagógicos útiles tanto para el aprendizaje, como para la didáctica de las matemáticas (Ceballos Urrego & López Monsalve, 2003).

En la tesis doctoral: "Aplicación del modelo de Van Hiele al concepto de Aproximación local" Concluye: bajo ciertas condiciones es posible extender el modelo de Van Hiele a conceptos dinámicos, es decir, a ciertos conceptos matemáticos cuya complejidad los sitúa curricularmente en los niveles educativos más altos, en los que el razonamiento tiene un papel preponderante o exclusivo, frente a las destrezas en cálculos. Esas destrezas algebraicas se corresponden con una segunda fase en el desarrollo de esos conceptos y, por sí solas, no garantizan su comprensión. Al contrario, el énfasis en esas cuestiones, propio de una metodología formalista (o puramente formal) provoca una duplicidad conflictiva entre el concepto-imagen y el concepto-definición que, en todo caso, impide el progreso a los niveles superiores de razonamiento y, en definitiva, la comprensión misma del concepto (Llorens Fuster, 1996).

“En el trabajo desarrollado cumplió todos y cada uno de los pasos que permiten afirmar que se ha aplicado el modelo de Van hiele a un concepto. El cambio de “mecanismo”, de forma de aproximarse al concepto no iba a significar, como cabía esperar, una dificultad grave para cubrir este objetivo. Así pues, se han dado los descriptores para los niveles de razonamiento 0, I, II y III obtenidos del diseño de una entrevista socrática y se han comprobado estadísticamente a partir de los datos recogidos de la aplicación del test escrito que, en su esencia, guarda las principales características del guion de la entrevista” (Esteban Duarte & Llorens Fuster, 2003).

En una publicación titulada: “El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría” concluye que: Las dificultades que se presentan en la enseñanza de la geometría tienen un componente aportado por la experiencia personal del docente que traslada algo de la forma como él aprendió a sus clases. El Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele es un modelo de enseñanza y aprendizaje que brinda la posibilidad de identificar las formas de razonamiento geométrico y pautas a seguir para fomentar la consecución de niveles más altos de razonamiento. Al usar este modelo, el docente debe hacer una evaluación inicial que identificará el nivel en el que se encuentra cada uno de los estudiantes. Esto le permita describir el avance del razonamiento geométrico de cada uno de ellos luego de aplicar las actividades programadas. Dado que la evaluación en el modelo de Van Hiele no es del tipo tradicional, ya que da importancia a lo que los alumnos contestan y el porqué de sus respuestas, para obtener resultados confiables tras su aplicación, es importante usar los instrumentos de evaluación con sumo cuidado. El modelo de Van Hiele da importancia al desarrollo del lenguaje, pues este es crucial en el paso de un nivel a otro. Por esto, los docentes deben establecer actividades en las que el estudiante tenga la oportunidad de comunicar sus ideas matemáticas, en un ambiente que le permita aprender de sus errores y mejorar en el uso del lenguaje matemático (Vargas Vargas & Gamboa Araya, 2013).

En una publicación titulada: “El concepto de derivada y el modelo de Van Hiele en estudiantes de licenciatura en matemáticas e informática de la Universidad Francisco de Paula Santander” concluye que: en la aplicación de la prueba los estudiantes de cálculo diferencial, integral y multivariado presentan constantes y diversas dificultades a la hora de realizar un razonamiento matemático trabajado en su concepción geométrica; las dificultades más notorias son: de percepción; de análisis e interpretación gráfica. También la investigación realizada mostró que es posible aplicar los niveles de razonamiento geométrico del modelo educativo de los esposos Van Hiele a un concepto propio de la matemática, para evaluar el nivel en el que se encuentran los estudiantes siendo el punto de partida para aplicar las fases de aprendizaje del mismo modelo para reestructurar y mejorar un concepto previamente trabajado (Rodríguez Pérez, 2015).

En una memoria titulada: “Extensión del modelo de Van Hiele al concepto de área” llega a las conclusiones siguientes: El área de una figura plana es un concepto que se supone conocido por todos pero que, según hemos comprobado en esta memoria, no es comprendido ni razonado por muchos. Esta situación, más allá de la propia dificultad sobre el concepto de área, provoca una dificultad sustancial en el razonamiento y en la compresión del concepto de integral, uno de los temas fundamentales del Análisis Matemático y un importante contenido del currículum de diferentes ciencias e ingenierías. Las dificultades de este campo de las Matemáticas (integral, aproximación local, sucesiones, series, límites…) tienen un denominador común: el *infinito* o, con más precisión, los procesos de razonamiento que descansan sobre el infinito potencial. El propósito fue mostrar propuestas concretas que permitan mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de área para, posteriormente, poder trabajar el concepto de integral desde un enfoque que permita mejorar su comprensión y razonamiento. Desde luego, creemos que la extensión al concepto de área de una figura plana tiene interés en sí mismo pues hablamos de un concepto fundamental, propio del análisis matemático, que está directamente relacionado con el de integral. Además, el carácter geométrico del concepto y su presentación inicial en niveles educativos elementales favorece la aplicación del modelo de van Hiele (Prat Villar, 2015).

CAPÍTULO II

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1. Identificación del problema

El propósito de esta investigación es describir las variables de extensión del Modelo de Van Hiele al estudio de funciones reales para el aprendizaje de estudiantes de nivel universitario. Se elige el modelo de los esposos Pierre M. van Hiele y Dina van Hiele-Geldof quienes, en sus tesis doctorales, presentaron respectivamente, un modelo de enseñanza y aprendizaje de la Geometría y un ejemplo concreto de aplicación de ese modelo en unos cursos de Geometría.

El estudio se llevaría a cabo en una muestra heterogénea de los grupo experimental y control de los estudiantes del primer semestre de la escuela profesional de Ciencias Contables de la Universidad Nacional del Altiplano de la región Puno, del país Perú. Como instrumento, se utilizaría una prueba de evaluación que mida el nivel de razonamiento de los estudiantes según al modelo de Van Hiele. Según (Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio, 2014).

El aprendizaje puede conceptualizarse como la adquisición del conocimiento óptimo. Estos conocimientos reflejan la descripción de las dificultades conceptuales que surgen frecuentemente en la enseñanza universitaria en relación con los fundamentos del primer curso de las matemáticas; se hace más difícil de llegar al aprendizaje de los estudiantes por lo que no se alcanza el nivel de razonamiento esperado en los estudiantes del primer curso de matemáticas; lo que nos conducirá a emplear las fases de aprendizaje.(Van Hiele, 1990)

En el trabajo de investigación resolveremos una cuestión fundamental. La aplicación del modelo de Van Hiele al concepto de funciones reales. Por tanto, aportaremos una descripción de cada uno de los niveles que cumple las condiciones teóricas para ser considerada propia del modelo de Van Hiele. Para ello, diseñamos instrumentos prácticos que permiten la detección de los niveles de razonamiento de Van Hiele entre los estudiantes de matemática básica para que puedan alcanzar niveles superiores de pensamiento.

Sistematización

Nos planteamos el siguiente problema general:

¿Cómo incide la aplicación del modelo de Van Hiele a funciones reales en el aprendizaje de los estudiantes de Matemática Básica de la Escuela Profesional de Ciencias Contables - Universidad Nacional del Altiplano?

Establecemos los siguientes problemas específicos:

- ¿Cómo es el conocimiento de los estudiantes en el tema de funciones reales antes de usar el modelo?
- ¿en qué medida varia el nivel de razonamiento del grupo experimental antes y después de aplicar el Modelo de Van Hiele?
- ¿Cuál es el nivel de razonamiento del grupo de control antes y después de las sesiones de aprendizaje?
- ¿Cómo difieren los niveles de razonamiento del grupo experimental y del grupo de control?

2.2. Justificación

El modelo de Van Hiele aporta una descripción del proceso de aprendizaje postulando la existencia de unos niveles de pensamiento, característicos del modelo. Precisamente, esos niveles suponen unas formas peculiares de razonar y, por tanto, no se identifican con niveles de destreza en cálculos algebraicos ni con los niveles educativos. Actualmente, nos referimos a esos niveles como nivel I (básico o pre descriptivo), nivel II (de reconocimiento o descriptivo), nivel III (teórico informal o de análisis) y nivel IV (deductivo o teórico). (Berciano Alcaraz, *et al.* 2013). El propio (Van Hiele 1990) señala que niveles superiores a éstos pueden tener sólo un interés teórico y presentar dificultades severas para su discernimiento. Hay que señalar que el nivel III es el que contiene los elementos esenciales del razonamiento matemático, pues en él se lleva a cabo la demostración. La aplicación del modelo de Van Hiele a un tema supone, por tanto, aportar descriptores de los niveles, esto es, características que permitan reconocer cada uno de los niveles a partir de la actividad de los estudiantes. Es evidente el interés que tiene la aplicación del modelo para la validación de determinadas propuestas metodológicas. Simplificando la cuestión, podríamos decir que una metodología es tanto más eficaz cuanto facilita más rápidamente o más generalmente (a más estudiantes) el progreso hacia el nivel III.

2.3. Objetivos

2.3.1. Objetivo general

Evaluar la aplicación del modelo de Van Hiele a funciones reales y su incidencia en el aprendizaje de los estudiantes de Matemática Básica de la Escuela Profesional de Ciencias Contables - Universidad Nacional del Altiplano.

2.3.2. Objetivos específicos

Identificar el conocimiento de los estudiantes en el tema de funciones reales antes de usar modelo.

Determinar la variación del nivel de razonamiento del grupo experimental antes y después de aplicar el Modelo de Van Hiele.

Determinar el nivel de razonamiento del grupo de control antes y después de las sesiones de aprendizaje.

Identificar la diferencia de los niveles de razonamiento del grupo experimental y del grupo de control.

2.4. Hipótesis

2.4.1. Hipótesis general

H_a: La aplicación del modelo de Van Hiele a funciones reales incide positivamente en el aprendizaje de los estudiantes de Matemática Básica de la Escuela Profesional de Ciencias Contables.

H_0: La aplicación del modelo de Van Hiele a funciones reales no tiene efecto en el aprendizaje de los estudiantes de Matemática Básica de la Escuela Profesional de Ciencias Contables.

2.4.2. Hipótesis específicas

H_1: El conocimiento de los estudiantes es deficiente en el tema de funciones reales al inicio de aplicar el modelo.

H_2: La variación del nivel de razonamiento en el grupo experimental es significativa antes y después de aplicar el modelo de Van Hiele.

H_3: En el grupo de control el nivel de razonamiento ha variado mínimamente antes y después de las sesiones de aprendizaje.

H_4: Los niveles de razonamiento del grupo experimental es mayor al grupo de control.

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. Lugar de estudio

Facultad de Ciencias Contables de la Universidad Nacional del Altiplano.

Localización:

País	: Perú
Departamento/Región	: Puno
Provincia	: Puno
Distrito	: Puno
Lugar	: Ciudad Universitaria
Región geográfica	: Sierra
Altitud	: Oscila Entre. 3825 a 3855 m.s.n.m
Ubicación geográfica	: Sur Oriental del país

3.2. Población

Estudiantes de Matemática Básica (secciones A, B y C) del año académico 2017-II de la Facultad de Ciencias Contables y Administrativas de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno – Perú.

3.3. Muestra

Estudiantes de la asignatura de Matemática Básica, sección B del I semestre, 2017-II de la escuela profesional de Ciencias Contables de la Facultad de Ciencias Contables y Administrativas de la Universidad Nacional del Altiplano.

Técnicas de muestreo:

Para la selección de la muestra óptima consideramos el siguiente procedimiento estadístico.

$$n_0 = \frac{NZ^2PQ}{(N-1)E^2 + Z^2PQ}$$

Donde:

$\alpha = 0.05$ Nivel de significancia.

$Z_{(\frac{\alpha}{2})} = Z_{(\frac{0.05}{2})} = Z_{(0.025)} = 1.96$ Valor de la distribución normal para un nivel de significancia.

$P = 0.5 = 50\%$ Proporción favorable a la investigación.

$Q = 1 - P = 1 - 0.5 = 0.5 = 50\%$ Proporción desfavorable a la investigación.

$e = 25\% = 0.25$ Error para la proporción.

$E = e * P = 0.25(0.50) = 0.125$ Error muestral.

$N = 113$ Estudiantes del primer semestre.

Reemplazando los datos en la formula tenemos:

$$n_0 = \frac{(113)(1.96)^2(0.5)(0.5)}{(113-1)(0.125)^2 + (1.96)^2(0.5)(0.5)} = 40.0402893$$

$$n_0 = 40$$

Entonces el tamaño de muestra es de 40 estudiantes que se ha tomado como grupo experimental y otro como grupo de control con el siguiente detalle:

Tabla 2

Grupo de estudio poblacional

I Semestre	Nº de Estudiantes	Grupo
Sección B	40	Grupo experimental
Sección A	33	Grupo de control
Sección C	40	Grupo de control

Fuente: Nómina de Matriculas 2017-II

De los grupos de control se consideró solamente uno al azar, es decir el grupo de la sección C, queda como grupo de control.

3.4. Método de investigación

3.4.1. Tipo de investigación

El tipo de investigación que corresponde al estudio es cuasi-experimental, dado que se manipula una de las variables la cual está representada por la aplicación del modelo de Van Hiele a funciones reales a estudiantes de la E. P. de Ciencias Contables de la Universidad Nacional de Altiplano de Puno - año académico 2017. (Valderrama Mendoza, 2006)

3.4.2. Diseño de investigación

En el estudio de investigación se seleccionó el diseño descriptivo con una prueba escrita, con grupos no aleatorios, se aplica a ambos grupos una prueba, en el grupo experimental se desarrolló actividades de aprendizaje siguiendo las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele a un tema específico de la matemática básica, luego se hizo una comparación entre ambos grupos, midiendo el nivel de aprendizaje de los estudiantes.

Los Métodos utilizados en el desarrollo del trabajo de investigación son: El método inductivo, el método analítico y método descriptivo.

Método inductivo.- Se empezó con el conocimiento del modelo de Van Hiele para estudiantes fuera del ámbito de la educación básica regular es decir en estudiantes de educación superior universitaria que estudian temas como funciones reales y no necesariamente geometría para lo que fue diseñado el modelo en particular.

Método Analítico.- Se hizo un análisis en el aspecto de la funcionalidad del modelo para identificar las características del modelo, lo cual nos permitió explicar, describir, examinar e interpretar los resultados, para alcanzar los objetivos y confirmar las hipótesis.

Método descriptivo.- fundamentalmente nuestro estudio es a base de la información recopilada de las sesiones de clase por observación directa y entrevista grupal e individual. Se toma los datos tal y como fueron observados en aula.

3.5. Técnicas de procesamiento y análisis de datos

El procesamiento de datos se realizó en computadora con ayuda de la hoja electrónica Excel 2013.

Análisis e Interpretación de Datos

El proceso a seguir en el tratamiento de datos es el siguiente:

Interpolación de gráficos: Se realizará la interpolación de los datos en gráficos circulares para mayor comprensión y sencillez en el entendimiento de la naturaleza de los resultados.

Uso de la estadística descriptiva como:

Media Aritmética: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ Donde: $\sum$ = Sumatoria de los datos

x_i = datos

n = número de datos

Desviación estándar: Para medir la variabilidad promedio de las observaciones alrededor de la media aritmética. Mediante la siguiente formula:

$$\sigma = \sqrt{S^2}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X-\bar{X})^2}{n-1}$$ Varianza muestral.

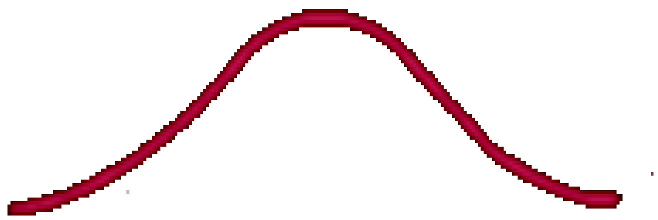
3.5.1. Prueba Estadística

Normalización de datos

Asimetría y curtosis estadísticas que se usan para conocer cuánto se parece una distribución a la distribución teórica llamada *curva normal* o campana de Gauss y dónde se concentran las puntuaciones.

La asimetría es una estadística necesaria para conocer cuánto se parece nuestra distribución a una distribución teórica llamada *curva normal* (la cual se representa también en la figura 1) y constituye un indicador del lado de la curva donde se agrupan las frecuencias. Si es cero (asimetría = 0), la curva o distribución es simétrica. Cuando es positiva, quiere decir que hay más valores agrupados hacia la izquierda de la curva (por debajo de la media). Cuando es negativa, significa que los valores tienden a agruparse hacia la derecha de la curva (por encima de la media). (Hernández Sampieri et al., 2014)

La curtosis es un indicador de lo plana o "picuda" que es una curva. Cuando es cero (curtosis = 0), significa que puede tratarse de una *curva normal*. Si es positiva, quiere decir que la curva, la distribución o el polígono es más "picudo" o elevado. Si la curtosis es negativa, indica que es más plana la curva (Hernández Sampieri et al., 2014)



Curva normal, curtosis = 0, asimetría = 0, y desviación estándar y varianza promedios.

Figura 1. Curva Normal

Fuente: Curvas estadísticas

¿Qué es una distribución muestral?

Una **distribución muestral** es un conjunto de valores sobre una estadística calculada de todas las muestras posibles de determinado tamaño de una población (Bond, 2007a) citado por (Hernández Sampieri et al., 2014). Las distribuciones muestrales de medias son probablemente las más conocidas.

Debido a ello, se creó un modelo de probabilidad llamado curva normal o distribución normal. Como todo modelo es una distribución conceptual que difícilmente se presenta en la realidad tal cual, pero sí se presentan aproximaciones a éste. La curva normal tiene la siguiente configuración:

Media=0

Desviación estándar (s) = 1

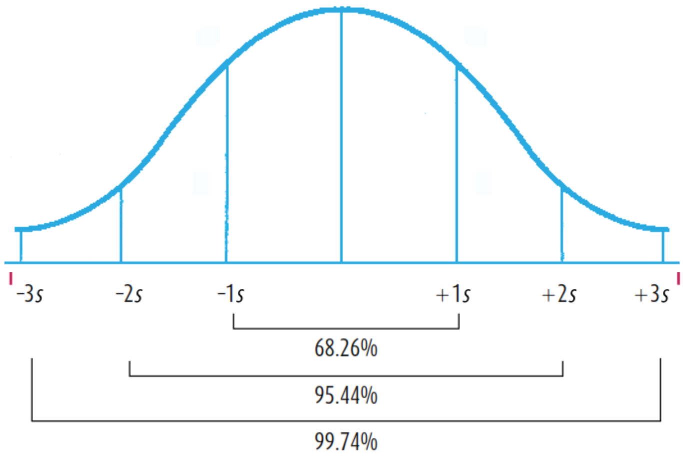


Figura 2. Curva normalizado

Fuente: Curvas estadísticas

68.26% del área de la curva normal es cubierta entre -1*s* y +1*s*, 95.44% del área de esta curva es cubierta entre -2*s* y +2*s* y 99.74% se cubre con -3*s* y +3*s*.

Las principales características de la distribución normal son:

1. Es *unimodal*, una sola moda.
2. La *asimetría es cero*. La mitad de la curva es exactamente igual a la otra mitad. La distancia entre la media y -3*s* es la misma que la distancia entre la media y +3*s*.
3. *Es una función* particular entre desviaciones con respecto a la media de una distribución y la probabilidad de que éstas ocurran.
4. La base está dada en unidades de desviación estándar (puntuaciones *z*), destacando las puntuaciones -1*s*, -2*s*, –3*s*, +1*s*, +2*s* y +3*s* (que equivalen respectivamente a -1.00*z*, -2.00*z*, -3.00*z*, +1.00*z*, +2.00*z*, +3.00*z*). Las distancias entre puntuaciones *z* representan áreas bajo la curva. De hecho, la distribución de puntuaciones *z* es la curva normal.
5. Es *mesocúrtica* (curtosis de cero).
6. La *media*, la *mediana* y la *moda* coinciden en el mismo punto (el centro).

Nivel de significancia.- es el nivel de la probabilidad de equivocarse y que fija de manera *a priori* el investigador. La probabilidad de que un evento ocurra oscila entre cero (0) y uno (1), donde cero implica la imposibilidad de ocurrencia y uno la certeza de que el fenómeno ocurra. Al lanzar al aire una moneda no cargada, la probabilidad de que salga "cruz" es de 0.50 y la probabilidad de que la moneda caiga en "cara" también es de 0.50. Con un dado, la probabilidad de obtener cualquiera de sus caras al lanzarlo es de 1/6 = 0.1667. La suma de posibilidades siempre es de uno.

Aplicando el concepto de probabilidad a la distribución muestral, tomaremos el área de ésta como 1.00; en consecuencia, cualquier área comprendida entre dos puntos de la distribución corresponderá a la probabilidad de la distribución. Para probar hipótesis inferenciales respecto a la media, el investigador debe evaluar si es alta o baja la probabilidad de que la media de la muestra esté cerca de la media de la distribución muestral. Si es baja, el investigador dudará de generalizar a la población. Si es alta, el investigador podrá hacer generalizaciones.

¿Con qué porcentaje de confianza el investigador generaliza, para suponer que tal cercanía es real y no por un error de muestreo? Existen dos niveles convenidos en las ciencias:

a) *El nivel de significancia de 0.05*, el cual implica que el investigador tiene 95% de seguridad para generalizar sin equivocarse y sólo 5% en contra. En términos de probabilidad, 0.95 y 0.05, respectivamente; ambos suman la unidad. Este nivel es el más común en ciencias sociales.
b) *El nivel de significancia de 0.01*, el cual implica que el investigador tiene 99% en su favor y 1% en contra (0.99 y 0.01 = 1.00) para generalizar sin temor. Muy utilizado cuando las generalizaciones implican riesgos vitales para las personas (pruebas de vacunas, medicamentos, arneses de aviones, resistencia de materiales de construcción al fuego o el peso, etcétera).

Análisis paramétricos

Para realizar análisis paramétricos debe partirse de los siguientes supuestos:

1. La distribución poblacional de la variable dependiente es normal: el universo tiene una distribución normal.
2. El nivel de medición de las variables es por intervalos o razón.
3. Cuando dos o más poblaciones son estudiadas, tienen una varianza homogénea: las poblaciones en cuestión poseen una dispersión similar en sus distribuciones.

Ciertamente estos criterios son tal vez demasiado rigurosos y algunos investigadores sólo se basan sus análisis en el tipo de hipótesis y los niveles de medición de las variables. Esto queda a juicio del lector. En la investigación académica y cuando quien la realiza es una persona experimentada, sí debe solicitársele tal rigor.

¿Qué es la prueba *t*?

Es una prueba estadística para evaluar si dos grupos difieren entre sí de manera significativa respecto a sus medias en una variable.

Se simboliza: *t*

Hipótesis: de diferencia entre dos grupos. La hipótesis de investigación propone que los grupos difieren entre sí de manera significativa y la hipótesis nula plantea que los grupos no difieren significativamente.

Los grupos pueden ser dos plantas comparadas en su productividad, dos escuelas contrastadas en los resultados a un examen, dos clases de materiales de construcción cotejados en su rendimiento, dos medicamentos comparados en su efecto, etcétera.

Variables: la comparación se realiza sobre una variable (regularmente y de manera teórica: dependiente). Si hay diferentes variables, se efectuarán varias pruebas *t* (una por cada variable), y la razón que motiva la creación de los grupos puede ser una variable independiente. Por ejemplo, un experimento con dos grupos, donde a uno se le aplica el estímulo experimental y al otro no, es de control.

Nivel de medición de la variable de comparación: intervalos o razón.

La prueba *t* se basa en una distribución muestral o poblacional de diferencia de medias conocida como la distribución *t* de Student que se identifica por los grados de libertad, los cuales constituyen el número de maneras en que los datos pueden variar libremente. Son determinantes, ya que nos indican qué valor debemos esperar de *t*, dependiendo del tamaño de los grupos que se comparan.

Cuanto mayor número de grados de libertad se tengan, la distribución t de Student se acercará más a ser una distribución normal y usualmente, si los grados de libertad exceden los 120, la distribución normal se utiliza como una aproximación adecuada de la distribución *t* de Student.

Los grados de libertad se calculan con la fórmula siguiente, en la que n_1 y n_2 son el tamaño de los grupos que se comparan:

$$gl = (n_1 + n_2) - 2$$

Los grados de libertad indican cuántos casos fueron usados para calcular un valor estadístico en particular.

Consideraciones: La prueba *t* se utiliza para comparar los resultados de una preprueba con los resultados de una posprueba en un contexto experimental. Se comparan las medias y las varianzas del grupo en dos momentos diferentes: $\bar{X}_1 \times \bar{X}_2$. O bien, para comparar las prepruebas o pospruebas de dos grupos que participan en un experimento:

G_1 $\bar{X}_1$

G_2 $\bar{X}_2$ t son las porpruebas

Cuando el valor *t* se calcula mediante un paquete estadístico computacional, la significancia se proporciona como parte de los resultados y debe ser menor a 0.05 o 0.01, lo cual depende del nivel de confianza seleccionado (regularmente se ofrece el resultado en dos versiones, según sea el caso, si se asumen o no varianzas iguales).

3.5.2. Correlación de pearson

Este indicador es utilizado para medir la relación existente entre dos variables cuantitativas en estudio. Se utiliza la distribución T (T-Student) cuando n<32, y Z (Distribución Normal) cuando n>=32. Los pasos a seguir para este tipo de pruebas de hipótesis son los siguientes:

PRUEBA DE HIPÓTESIS

Las hipótesis: nula (H_0) y la hipótesis alterna (H_a), son planteadas del siguiente modo:

H_0: $\rho = 0$ No existe grado de relación o dependencia entre la variable X (independiente) con la variable Y (dependiente). (*hipótesis nula*)

H_a: $\rho \neq 0$ Si existe grado de relación o dependencia entre la variable X (independiente) con la variable Y (dependiente). (*hipótesis alterna*)

NIVEL DE SIGNIFICANCIA

Se usará un nivel significancia entre el $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.10$ y $\alpha = 0.01$, 5%, 10% y 1 % cuando no se precisa este nivel, se asume un nivel de significancia $\alpha = 0.05$ ó 5 % (Es el más recomendado y es equivalente a un 95% de nivel de confianza), y una T_t (T tabulada o de tabla) con $n-2$ grados de libertad. (n es el número de datos sumado de las dos variables es decir $n = n_A + n_B$) y su respectivo α nivel de significancia.

REGLA DE DECISIÓN

- Si $T_c > T_t$ entonces se rechazará H_0 (hipótesis nula) y se acepta la H_1 (hipótesis alterna).
- Si $Z_c > Z_t$ entonces se rechazará H_0 (hipótesis nula) y se acepta la H_1 (hipótesis alterna).

PRUEBA ESTADÍSTICA

Si se usa la distribución T-Student, la T_t se obtiene de la tabla estadística correspondiente: $T_{[n-2,\ \alpha]}$, con $n-2$ grados de libertad y su respectivo nivel de significancia $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.10$ y $\alpha = 0.01$, son los más usados. En el Caso usar la Distribución Normal, la Z_t se halla: $Z_{\alpha=0.05} = 1.96$, $Z_{\alpha=0.10} = 1.645$, $Z_{\alpha=0.01} = 2.576$.

Primero se halla el coeficiente de correlación de Pearson "r" para luego remplazar en T_c o Z_c, con las operaciones previas realizadas con los datos de la variables independiente X y variable dependiente Y.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}{n}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2}{n}}}$$

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2}}$$

$$Tc = Zc = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \qquad Tc = Zc = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$$

Donde:

n : *Tamaño de muestra*

r : Coeficiente de correlación

Y : Variable dependiente

X : Variable independiente

T_c : T calculada

Z_c : Z calculada

DECISIÓN

Se compara el valor T_c (T calculado) es mayor que (>) T (T tabulada o de tabla), Z_c (Z calculado) es mayor que (>) Z (Z tabulada o de tabla) se rechaza la H_0 y se acepta H_a, esto significa que existe algún grado de correlación o dependencia entre las variables en estudio, para un nivel de significancia $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.10$ y $\alpha = 0.01$, o para un 95%, 90% y 99% de nivel de confianza respectivamente.

Hallamos los valores muestrales de la media y desviación estándar de las notas obtenidas por los grupos de estudiantes y aplicamos la distribución normal Z_c, para datos mayores a 32, usando la siguiente fórmula:

$$Z_c = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_A} + \frac{\sigma^2}{n_B}}}$$

Donde:

$\delta = \sigma_A - \sigma_B$ Diferencia de las desviaciones estándares poblacionales del grupo A y B.

$\sigma^2 = \frac{(n_A-1)S_A^2+(n_B-1)S_B^2}{n_A+n_B-2}$ Varianza poblacional

S_A y S_B son sus desviaciones estándares

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}{n}}{n-1}}$$

n_A y n_B son el tamaño de los grupos (grados de libertad). (Huata Panca, 2018)

- Ho: $\mu_E \leq \mu_C$ El promedio de nivel de aprendizaje de funciones reales con la aplicación del modelo de Van Hiele, en el grupo experimental es igual o menor al promedio del grupo de control en los estudiantes de la E. P. Ciencias Contables. (Hipótesis nula)
- Ha: $\mu_E > \mu_C$ El promedio de nivel de aprendizaje de funciones reales con la aplicación del modelo de Van Hiele, en el grupo experimental es mayor al promedio del grupo de control en los estudiantes de la E. P. Ciencias Contables. (Hipótesis alterna)

Nivel de significancia: Se ha planteado $\alpha = 0.05$ (5% de nivel de significancia) equivalente a 95% de nivel de confianza para la investigación. (Arriaza Balmón, 2006)

Instrumento:

Para alcanzar los objetivos de la investigación se aplicaron una prueba objetiva, de salida. La que consta de 12 ítems se elaboró y aplicó con el objetivo de determinar los conocimientos adquiridos que posee el educando en el tema de funciones reales, luego de haber desarrollado las actividades propuestas mediante las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.

3.6. Obtención de datos

Los datos se determinaron mediante evaluación escrita, observación, entrevistas y otros.

a. Técnicas de procesamiento y análisis de datos.

El procesamiento de datos fue en:

- Excel 2013

- Microsoft Word 2013
- Mendeley
- Visio 2013
- Softwares estadísticos libres.

b. Elección del Tema

Se basa en la importancia del modelo de Van Hiele como herramienta para el aprendizaje de estudiantes en educación superior. Matemática básica es estudiado por todo los estudiantes de las escuelas profesionales como un curso de formación básica y obligatorio cuyo contenido fundamental es relaciones y funciones reales, debido a que en la actualidad es necesario estudiar modelos matemáticos, por medio de las cuales se puede avanzar al cálculo diferencial e integral de funciones.

Sistematización

Tabla 3

Sistematización de variables de investigación

OBJETIVOS	VARIABLES	SUB VARIABLES	INDICADORES
Evaluar la aplicación del modelo de Van Hiele a funciones reales y su incidencia en el aprendizaje de los estudiantes de Matemática Básica de la Escuela Profesional de Ciencias Contables - Universidad Nacional del Altiplano.	V.I.: el Modelo de Van Hiele. V.D.: aprendizaje de los estudiantes	- Nivel de razonamiento - Fases de aprendizaje	Nivel 0 Nivel I Nivel II Nivel III Nivel IV Fases
Identificar el conocimiento de los estudiantes en el tema de funciones reales antes de usar modelo.	V.I.: modelo en funciones Reales V.D.: conocimiento al inicio	Niveles Fases en funciones - Pre descriptivo - Reconocimiento visual	- Define - Reconoce - Grafica
Determinar la variación del nivel de razonamiento del grupo experimental antes y después de aplicar el Modelo de Van Hiele.	V.I.: modelo de Van Hiele V.D.: variación del nivel de razonamiento	Fases - Información - Orientación - Explicitación - Orientación libre - Integración	- Pre descriptivo - Reconocimiento visual - Análisis - Clasificación y relación - Deducción formal
Determinar el nivel de razonamiento del grupo de control antes y después de las sesiones de aprendizaje.	V.I.: sesiones de aprendizaje V.D.: nivel de razonamiento.	- Información - Explicitación - Orientación libre	- Define - Reconoce - Grafica - Interpreta
Identificar la diferencia de los niveles de razonamiento del grupo experimental y del grupo de control.	V.I.: grupo experimental V.D.: diferencia en el nivel de razonamiento.	- Grupo experimental - Grupo de control - Niveles	- Define - Reconoce - Grafica - Interpreta - Deduce

Fuente: matriz de consistencia

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Aplicación del Modelo de Van Hiele a funciones reales para el aprendizaje de los estudiantes de matemática básica.

4.1.1. Aplicación del modelo de Van Hiele a funciones reales.

La aplicación del modelo de Van Hiele a un tema de la matemática básica implica establecer una serie de descriptores para cada uno de los niveles, es decir, la descripción del comportamiento académico que nos permita clasificar a cada estudiante en el nivel que se encuentra. Además de comprobar que se ajustan a las exigencias del modelo fuera del ámbito de la geometría.

La misma que ha sido establecido por:

(Ceballos Urrego & López Monsalve, 2003) que manifiesta: si comparamos las características de las funciones con la metodología del modelo de van Hiele, vemos que es completamente pertinente emprender la tarea de establecer tanto los niveles como los descriptores de nivel (De la Torre, 61-67; Jaramillo, 2000, 18-22) para obtener la comprensión del concepto función a la luz del modelo de van Hiele; una conjetura al respecto, acompañada de las fases de aprendizaje que pueden llevar a los alumnos a la superación de cada nivel en relación con el concepto en cuestión, es la siguiente:

Nivel 0: Predescriptivo

Fase de aprendizaje asociada: indagar, averiguar (Inquiry). Los estudiantes distinguen los números reales y sus propiedades; conocen el plano cartesiano, su definición y propiedades; son capaces de ubicar y "leer" puntos, reconocer cualquier figura geométrica plana que sobre él se dibuje; conocen las definición de función sobre conjuntos finitos y en el conjunto de los números reales (R), pero no las diferencian gráficamente sobre el plano ni poseen una comprensión integral de los conceptos.

Nivel I: De reconocimiento visual

Fase de aprendizaje asociada a la orientación directa (Directed orientation) e indagación. Los estudiantes reconocen gráficas de funciones de variable real, sobre el plano cartesiano; también pueden diferenciar otras curvas que representen algunas relaciones aplicadas, como las trayectorias parabólicas de objetos lanzados sobre la superficie terrestre o representaciones elípticas de los movimientos planetarios, sin abstraer sus propiedades para relacionarlas con otros fenómenos de distinta naturaleza dentro del mismo plano, o incluso por fuera de éste. De modo general, reconocen la diferencia gráfica entre relaciones y funciones sobre el plano, pero no perciben la integración de éstas con los ejes coordenados, ni con ecuaciones que las representen, ni con las situaciones prácticas que puedan describir.

Nivel II: De análisis

Fase de aprendizaje asociada: explicitación (Expliciting) y orientación directa. Los estudiantes analizan por pares, las relaciones entre:

a) Las figuras y los ejes del plano cartesiano.

b) Las tablas de valores y los gráficos que los representan sobre el plano.

c) Las ecuaciones como representación de un enunciado.

d) Las gráficas que pueden ser representación de situaciones concretas.

e) Las ecuaciones en dos variables y los gráficos de funciones, en este sentido, relacionan ecuaciones en dos variables con figuras del plano en las dos direcciones: partiendo de la ecuación se aproximan al gráfico y, al revés, a partir del gráfico, se aproximan a la ecuación.

f) Se evidencia en este nivel una integración dos a dos de las diferentes representaciones que pueden adoptar las funciones, sin ser capaces todavía de establecer una comunicación integral entre todas ellas.

Nivel III: De clasificación y relación

Fase de aprendizaje asociada a la orientación libre (Free orientation) y explicitación. Clasifican funciones a partir de los gráficos, de las estructuras de las ecuaciones y de los enunciados sobre problemas específicos. Presentan habilidad para integrar las diferentes formas de representación de una función. Reconocen la forma dinámica de los conceptos de función, y son capaces de desarrollar secuencias de proposiciones para deducir que una propiedad se deriva de otra; sin embargo, no se comprende la necesidad de la formalización ni las estructuras axiomáticas. (Jaramillo, 2000).

Nivel IV: De deducción formal

Fase de aprendizaje asociada: integración (Integraron). El alumno es capaz de establecer, diferenciar y deducir funciones de variable real, independientemente del marco de referencia y con aplicación a situaciones prácticas. Así se resume lo que al respecto se definen como los descriptores del nivel IV para el caso concreto de funciones, cuando se manifiesta que… un estudiante en este nivel superior es capaz de llegar a plantear distintas demostraciones de algunas propiedades o de percibir que dos definiciones de un mismo concepto pueden ser equivalentes. Al mismo tiempo, relacionan distintos conceptos y propiedades dentro de un área de conocimiento o de un tema más general que los englobe, captando que son manifestaciones diferentes de un mismo hecho matemático.

4.1.2. Aprendizaje de los estudiantes de matemática básica de la E. P. de Ciencias Contables de la UNA Puno.

El nivel de aprendizaje en funciones reales de los estudiantes después de la aplicación del modelo al grupo experimental en comparación al grupo de control, se obtiene lo siguiente:

Tabla 4

Nivel de aprendizaje de los estudiantes después de la aplicación del modelo.

Nº de estudiante	Grupo Experimental	Grupo de control
1	4	2
2	3	2
3	2	1
4	2	2
5	3	2
6	3	1
7	3	3
8	3	2
9	4	2
10	4	2
11	2	2
12	3	2
13	NP	1
14	3	2
15	2	3
16	3	2
17	3	3
18	3	1
19	2	2
20	3	2
21	3	NP
22	3	2
23	2	2
24	2	2
25	NP	1
26	2	3
27	3	2
28	3	2
29	2	NP
30	4	2
31	2	2
32	2	2
33	3	3
34	2	2
35	3	2
36	3	1
37	2	2
38	2	2
39	3	2
40	2	1
Promedio aritmético	$\bar{X}_E = 2{,}71$	$\bar{X}_C = 1{,}95$

Fuente: Instrumentos de evaluación

De acuerdo a la tabla 4 determinamos los siguientes valores estadísticos como: Tamaño del grupo experimental y control después de la aplicación del modelo:

$$n_E = n_C = 38$$

Desviación estándar del grupo experimental y control:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n}}{n-1}}$$

$S_E = 0{,}65379949$

$S_C = 0{,}56699151$

Diferencia de las desviaciones estándares muestrales del grupo experimental y control:

$\delta = S_A - S_B = 0{,}65379949 - 0{,}56699151 = 0{,}08680798$

Varianza de la muestra:

$$\sigma^2 = \frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2}{n_A + n_B - 2} = 0{,}37446657$$

Para luego determinar la distribución normal Z_c cuyo resultado es:

$$Z_c = \frac{(\bar{X}_E - \bar{X}_C) - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_E} + \frac{\sigma^2}{n_C}}}$$

$Z_c = 4{,}81772177$

CONTRASTACIÓN DE HIPÓTESIS

Prueba estadística con distribución normal (Z_c)

Regla de decisión utilizado

Si $Z_c > Z_t$, Se rechaza la H_0 y se acepta la H_a

Donde:

Z_c: Zeta calculada

Z_t: Zeta tabulada o tabla

H_0 : Hipótesis nula

H_a: Hipótesis alterna

PRUEBA ESTADÍSTICA

Se obtuvo lo siguiente:

$$Z_c = 4{,}81772177$$

Para este caso buscamos el valor de (Z_t) Z tabulada o Z de tabla de la distribución normal para (α = 0.05 ó 5% Nivel de significancia). (=INV.NORM.ESTAND(1-0.05/2)) en EXCEL)

Luego: $Z_t = Z_{[0,05]} = 1{,}96$ (con α =0.05 ó 95% de nivel de confianza).

Decisión:

$$Z_c = 4{,}81772177 > Z_t = 1{,}96$$

Entones se rechaza la H_0 y se Acepta la H_a esto implica que el promedio de nivel de aprendizaje de funciones reales con la aplicación del modelo de Van Hiele, en el grupo experimental es mayor al promedio del grupo de control en los estudiantes de la E. P. Ciencias Contables, para un nivel de significancia de 0.05 o para un nivel de confianza del 95%.

De la misma forma se determina el promedio aritmético como:

$$\bar{X}_E = 2{,}71 \qquad \bar{X}_C = 1{,}95$$

Donde:

$\bar{X}_E$: Promedio aritmético del grupo experimental

$\bar{X}_C$: Promedio aritmético del grupo de control

Se observa que: $\bar{X}_E > \bar{X}_C$ lo que indica que los estudiantes del grupo experimental alcanzaron un aprendizaje óptimo llegando la mayoría al nivel 3: de clasificación y relación. Según a los niveles de aprendizaje mencionado anteriormente: los estudiantes llegaron a clasificar familias de funciones a partir de los gráficos, de las estructuras de las ecuaciones y de los enunciados sobre problemas específicos. Presentan habilidad para integrar las diferentes formas de representación de una función. Reconocen la forma dinámica de los conceptos de función, y son capaces de desarrollar secuencias de proposiciones para deducir que una propiedad se deriva de otra; sin embargo, no se comprende la necesidad de la formalización ni las estructuras axiomáticas.

Mientras tanto en el grupo de control se observa que: los estudiantes alcanzaron un promedio de $\bar{X}_C = 1{,}95$ esta cifra indica que los estudiantes alcanzaron escasamente el nivel 2: de análisis; por lo que los estudiantes solamente llegaron a hacer un análisis por pares, las relaciones entre: Las figuras y los ejes del plano cartesiano, las tablas de valores y los gráficos que los representan sobre el plano, las ecuaciones como representación de un enunciado, las gráficas que pueden ser representación de situaciones concretas, las ecuaciones en dos variables y los gráficos de funciones, en este sentido, relacionan ecuaciones en dos variables con figuras del plano en las dos direcciones: partiendo de la ecuación se aproximan al gráfico y, al revés, a partir del gráfico, se aproximan a la ecuación.

En consecuencia con los resultados obtenidos de la aplicación del modelo de Van Hiele los estudiantes alcanzaron aprendizaje satisfactorio llegando algunos hasta el último nivel de rigor. Sin embargo con la enseñanza habitual se tiene que pocos estudiantes alcanzan el nivel 3 y ninguno el nivel 4.

De forma más específica se muestra porcentualmente los resultados del nivel de estudiantes del grupo experimental y del grupo de control:

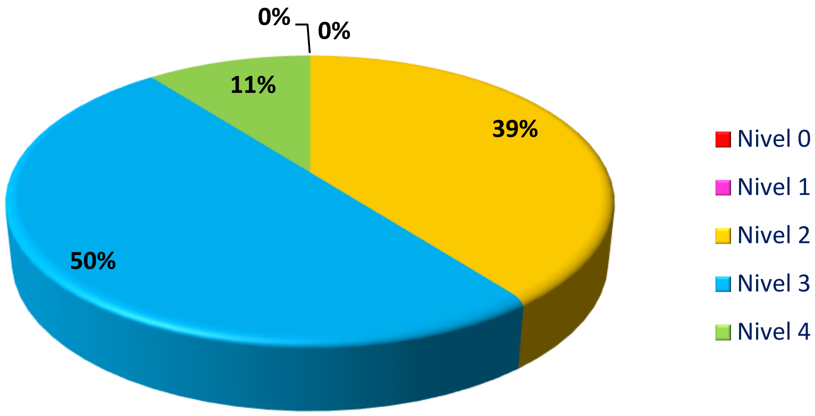


Figura 3. Nivel de aprendizaje de los estudiantes del grupo experimental
Fuente: Prueba de Salida

Se observa que en el grupo experimental no existen estudiantes con nivel de razonamiento en el nivel 0 y 1. El 39% alcanzaron el nivel 2 de análisis, esto es; los estudiantes analizan por pares, las relaciones entre: las figuras y los ejes del plano cartesiano, las tablas de valores y los gráficos que los representan sobre el plano, las ecuaciones como representación de un enunciado, las gráficas que pueden ser representación de situaciones concretas, las ecuaciones en dos variables y los gráficos de funciones, en este sentido, relacionan ecuaciones en dos variables con figuras del plano en las dos direcciones: partiendo de la ecuación se aproximan al gráfico y, al revés, a partir del gráfico, se aproximan a la ecuación.

El 50% de estudiantes alcanzaron el nivel 3 de clasificación y relación: clasifican funciones a partir de los gráficos y estructuras de las ecuaciones. Reconocen la forma dinámica de los conceptos de función, y son capaces de desarrollar secuencias de proposiciones para deducir que una propiedad se deriva de otra.

El 11% alcanzó el nivel 4 de deducción formal: el estudiante es capaz de establecer, diferenciar y deducir funciones de variable real, independientemente del marco de referencia y con aplicación a situaciones prácticas. Puede establecer las funciones lineales, cuadráticas y otras relaciones. un estudiante en este nivel superior es capaz de llegar a plantear distintas demostraciones de algunas propiedades o de percibir que dos definiciones de un mismo concepto pueden ser equivalentes.

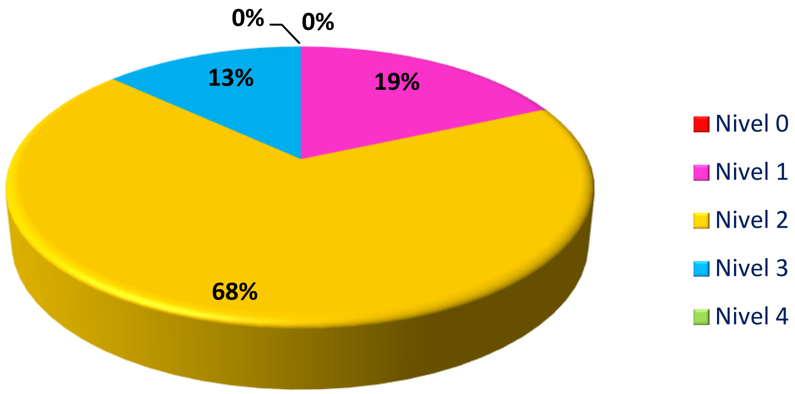


Figura 4. Nivel de aprendizaje de los estudiantes del grupo de control

Fuente: Prueba de Salida

Mientras que en el grupo de control el 19% alcanzaron el nivel 1 de reconocimiento visual. Los estudiantes reconocen gráficas de funciones de variable real, sobre el plano cartesiano; de modo general, reconocen la diferencia gráfica entre relaciones y funciones sobre el plano, pero no perciben la integración de éstas con los ejes coordenados, ni con ecuaciones que las representen, ni con las situaciones prácticas que puedan describir.

El 68% alcanzaron el nivel 2 análisis, esto indica que los estudiantes analizan por pares, las relaciones entre: las gráficas en el plano cartesiano. Las funciones como representación de una expresión o una propiedad formal. Establecida la gráfica encontrar su ecuación y, al revés, a partir de la ecuación trazar la gráfica.

Un 13% de estudiantes alcanzaron el nivel 3 de clasificación, esto es clasifican funciones a partir de los gráficos y estructuras de las ecuaciones. Reconocen la forma dinámica de los conceptos de función, y son capaces de desarrollar secuencias de proposiciones para deducir que una propiedad se deriva de otra.

Se observa que en este grupo ningún estudiante alcanzó el nivel 4 de deducción formal.

A continuación se muestra la solución de pruebas de dos estudiantes representativos de los grupos.

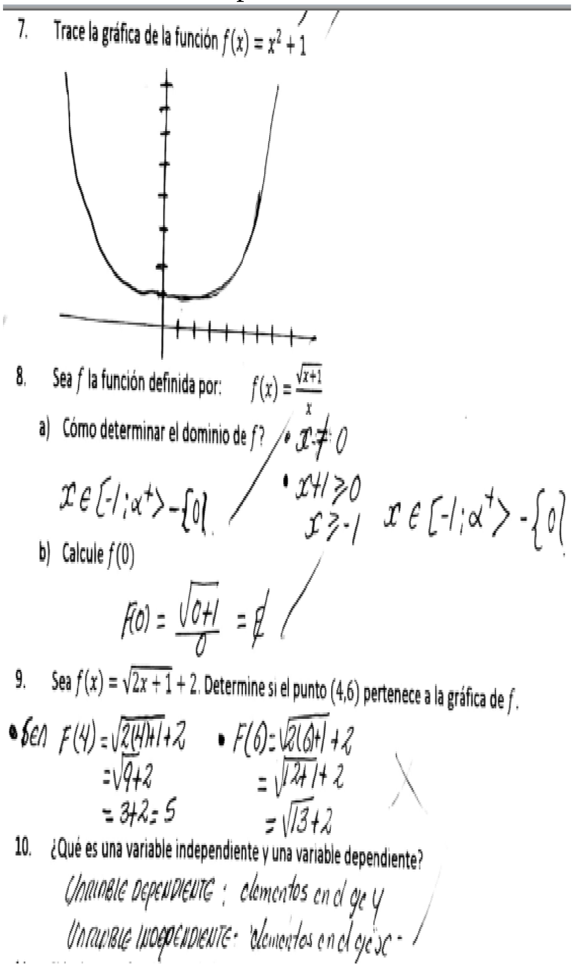
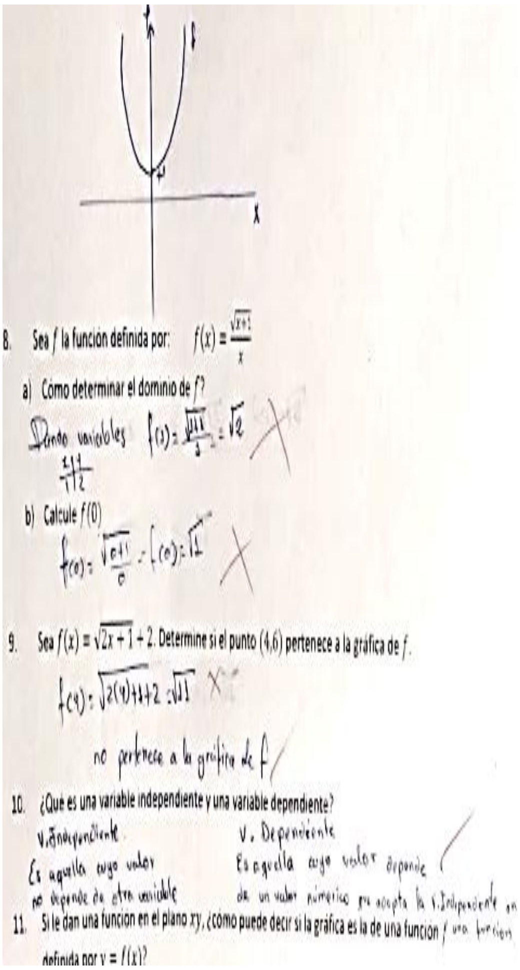
Prueba de un estudiante del grupo experimental	Prueba de un estudiante del grupo de control
	

Figura 5. Comparación de pruebas de los estudiantes

Fuente: Instrumento de evaluación

Como muestra el estudiante del grupo experimental gráfica, evalúa, determina el dominio, verifica y define claramente a una función; mientras que en el grupo de control el estudiante define y gráfica, pero no evalúa correctamente ni reconoce el dominio. Lo mismo se puede observar al usar cuestionarios, prácticas calificadas, uso de software tal y como se resume en las guías de observación adjuntadas en anexos. Entonces por lo citado en los antecedentes particularmente por Ceballos Urrego & López Monsalve (2003) en su publicación: "Relaciones y funciones: conceptos clave para el aprendizaje del cálculo, y una propuesta para la aplicación del modelo de Van Hiele".

En contrastación con la hipótesis general se confirma que H_1: La aplicación del modelo de Van Hiele a funciones reales incide positivamente en el aprendizaje de los estudiantes de Matemática Básica de la Escuela Profesional de Ciencias Contables.

4.2. Conocimiento de los estudiantes sobre funciones reales antes de usar el modelo.

Se observó que los estudiantes tenían conocimientos básicos en el tema, conceptos muy genéricos, sobre definiciones, ejes coordenados, propiedades, operaciones con funciones, tipos, gráficos, muy deficiente en deducción de funciones de variable real tal como se muestra al aplicar la prueba de entrada cuyos resultados son:

Tabla 5

Nivel de aprendizaje de los estudiantes antes de la aplicación del modelo

Nº de estudiante	Grupo experimental	Grupo de control
1	2	1
2	1	1
3	0	1
4	1	1
5	1	1
6	1	1
7	1	1
8	1	1
9	1	1
10	1	1
11	0	1
12	0	1
13	NP	1
14	1	1
15	1	1
16	1	1
17	1	2
18	1	0
19	0	1
20	1	1
21	1	NP
22	1	1
23	1	1
24	0	1
25	NP	0
26	0	1
27	1	0
28	1	0
29	1	NP
30	1	1
31	1	0
32	1	0
33	1	1
34	1	1
35	1	1
36	1	0
37	1	1
38	1	1
39	1	1
40	0	0

Fuente: Instrumentos de evaluación

De acuerdo a la tabla 5 determinamos los siguientes valores estadísticos como: Tamaño del grupo experimental y control después de la aplicación del modelo:

$n_E = n_C = 38$

Desviación estándar del grupo experimental y control:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}{n}}{n-1}}$$

$S_E = 0{,}43659096$

$S_C = 0{,}45650039$

Diferencia de las desviaciones estándares muestrales del grupo experimental y control:

$\delta = S_A - S_B = 0{,}43659096 - 0{,}45650039 = -0{,}01990943$

Varianza de la muestra:

$$\sigma^2 = \frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2}{n_A + n_B - 2} = 0{,}19950213$$

Para luego determinar la distribución normal Z_c cuyo resultado es:

$$Z_c = \frac{(\bar{X}_E - \bar{X}_C) - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_E} + \frac{\sigma^2}{n_C}}}$$

$Z_c = 0{,}45110953$

CONTRASTACIÓN DE HIPÓTESIS

Prueba estadística con distribución normal (Z_c)

Regla de decisión utilizado

Si $Z_c < Z_t$, Se acepta H_0 y se rechaza la H_1

Donde:

Z_c: Zeta calculada

Z_t: Zeta tabulada o tabla

H_0 : Hipótesis nula

H_a: Hipótesis alterna

PRUEBA ESTADÍSTICA

Se obtuvo lo siguiente:

$$Z_c = 0{,}45110953$$

Para este caso buscamos el valor de (Z_t) Z tabulada o Z de tabla de la distribución normal para (α = 0.05 ó 5% Nivel de significancia). (=INV.NORM.ESTAND(1-0.05/2)) en EXCEL)

Luego: $Z_t = Z_{[0{,}05]} = 1{,}96$ (con α =0.05 ó 95% de nivel de confianza).

Decisión:

$$Z_c = 0{,}45110953 < Z_t = 1{,}96$$

Entones se acepta H_0 y se rechaza la H_a esto implica que el promedio de nivel de aprendizaje de funciones reales con la aplicación del modelo de Van Hiele, en el grupo experimental es menor al promedio del grupo de control en los estudiantes de la E. P. Ciencias Contables, para un nivel de significancia de 0.05 o para un nivel de confianza del 95%. Por lo que se deduce que el nivel de los estudiantes estuvieron en el mismo nivel de aprendizaje.

Se observa que el promedio aritmético del nivel de razonamiento de los estudiantes mediante el uso de la prueba de entrada como instrumento de evaluación, es:

$$\bar{X}_E = 0{,}84 \qquad \bar{X}_C = 0{,}82$$

Donde:

$\bar{X}_E$: Promedio aritmético del grupo experimental

$\bar{X}_C$: Promedio aritmético del grupo de control

El nivel de conocimiento de los estudiantes son semejantes en ambos grupos, con un aproximado de 0,8 esto indica que están entre el nivel 0 y el nivel 1, es decir que los estudiantes conocen el plano cartesiano, su definición y propiedades; son capaces de ubicar y leer puntos, reconocer cualquier figura geométrica plana que sobre él se dibuje; conocen las definición de función sobre conjuntos finitos y en el conjunto de los números reales; esto de acuerdo a los descriptores de los niveles en anexos. Tal como se muestra a continuación:

Tabla 6

Nivel de razonamiento de los estudiantes antes de usar el modelo

	Nivel 0	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 4**	**Total**
Grupo Experimental	7	30	1	0	0	**38**
Grupo de control	8	29	1	0	0	**38**
Total	**15**	**59**	**2**	**0**	**0**	**76**

Fuente: Prueba de entrada

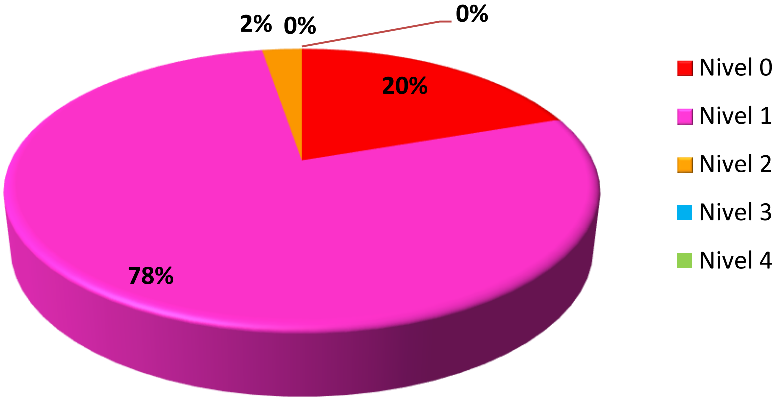
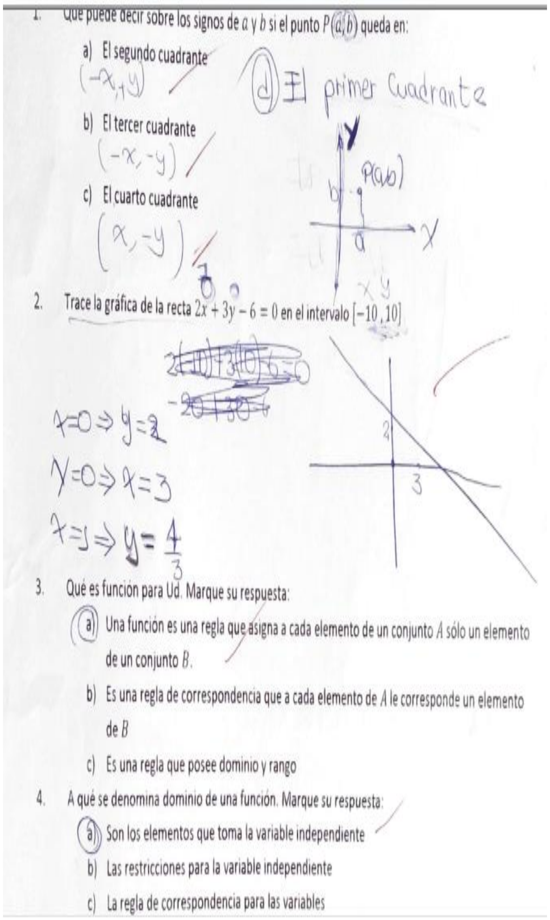


Figura 6. Nivel de razonamiento de los estudiantes antes de usar el modelo
Fuente: Prueba de entrada

Se muestra que del total de estudiantes el 20% están en el nivel 0 predescriptivo: es decir los estudiantes distinguen los números reales y sus propiedades; conocen el plano cartesiano, su definición y propiedades; son capaces de ubicar y "leer" puntos, reconocer cualquier figura geométrica plana que sobre él se dibuje. Un porcentaje de 78% se encuentran en el nivel 1 de reconocimiento visual: Los estudiantes reconocen gráficas de funciones de variable real, sobre el plano cartesiano; también pueden diferenciar otras curvas que representen algunas relaciones aplicadas, reconocen la diferencia gráfica entre relaciones y funciones sobre el plano, pero no perciben la integración de éstas con los ejes coordenados, ni con ecuaciones que las representen, ni con las situaciones prácticas que puedan describir. Y un 2% en el nivel II de análisis, esto indica que los estudiantes analizan por pares, las relaciones entre: Las figuras y los ejes del plano cartesiano, las tablas de valores y los gráficos que los representan sobre el plano, partiendo de la ecuación se aproximan al gráfico.

Además ningún estudiante alcanzaba el nivel 3 y mucho menos el nivel 4.
A continuación se muestra la solución de pruebas de dos estudiantes representativos de los grupos.

Prueba de un estudiante del grupo experimental	Prueba de un estudiante del grupo de control



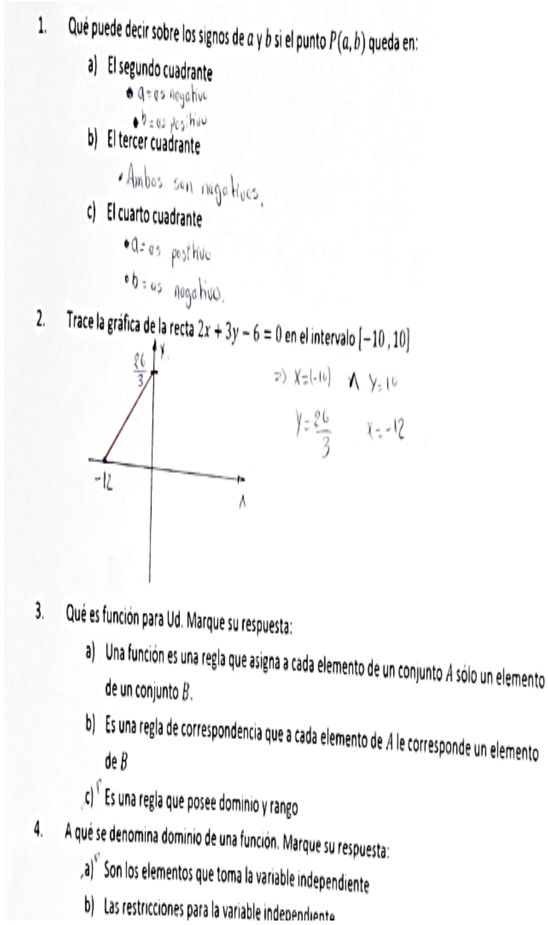
1. Qué puede decir sobre los signos de a y b si el punto $P(a,b)$ queda en:
   a) El segundo cuadrante $(-x, y)$
   b) El tercer cuadrante $(-x, -y)$
   c) El cuarto cuadrante $(x, -y)$

   d) El primer Cuadrante

2. Trace la gráfica de la recta $2x + 3y - 6 = 0$ en el intervalo $[-10, 10]$

   $x=0 \Rightarrow y=2$
   $y=0 \Rightarrow x=3$
   $x=1 \Rightarrow y=\frac{4}{3}$

3. Qué es función para Ud. Marque su respuesta:
   a) Una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto A sólo un elemento de un conjunto B.
   b) Es una regla de correspondencia que a cada elemento de A le corresponde un elemento de B
   c) Es una regla que posee dominio y rango
4. A qué se denomina dominio de una función. Marque su respuesta:
   a) Son los elementos que toma la variable independiente
   b) Las restricciones para la variable independiente
   c) La regla de correspondencia para las variables



1. Qué puede decir sobre los signos de a y b si el punto $P(a,b)$ queda en:
   a) El segundo cuadrante
   • a = es negativo
   • b = es positivo
   b) El tercer cuadrante
   • Ambos son negativos.
   c) El cuarto cuadrante
   • a = es positivo
   • b = es negativo.
2. Trace la gráfica de la recta $2x + 3y - 6 = 0$ en el intervalo $[-10, 10]$

   $\Rightarrow x = [-10] \wedge y = 10$
   $y = \frac{26}{3}$ $x = -12$

3. Qué es función para Ud. Marque su respuesta:
   a) Una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto A sólo un elemento de un conjunto B.
   b) Es una regla de correspondencia que a cada elemento de A le corresponde un elemento de B
   c) Es una regla que posee dominio y rango
4. A qué se denomina dominio de una función. Marque su respuesta:
   a) Son los elementos que toma la variable independiente
   b) Las restricciones para la variable independiente

Figura 7. Comparación de pruebas de los estudiantes antes del modelo

Fuente: Instrumento de evaluación

Como muestra en la solución de la prueba los estudiantes de ambos grupos están en similares condiciones conoce el plano cartesiano puede ubicar puntos sobre el plano, grafica deficientemente y conoce algunos conceptos básicos sobre funciones; también se observó que en la entrevista algunos respondieron con ideas de su entorno de preparatoria y métodos de grafica simples; tal como se resume en las guías de observación adjuntadas en anexos.

En contrastación con la hipótesis H_a: El conocimiento de los estudiantes es deficiente en el tema de funciones reales al inicio de aplicar el modelo.

4.3. Nivel de razonamiento del grupo experimental antes y después de aplicar el modelo.

4.3.1. Nivel de razonamiento del grupo experimental antes de aplicar el modelo.

En el grupo experimental de estudiantes se tuvo un nivel de razonamiento en promedio entre 0 y 1, la mayoría estaba en el nivel 1. Los estudiantes tenían conocimientos básicos del tema, conceptos muy genéricos, ideas principales acerca de funciones reales y gráficos de funciones por tabulación, son capaces de ubicar y leer puntos, reconocen las figuras geométricas en el plano cartesiano; conocen las definición de función sobre conjuntos finitos y en el conjunto de los números reales. En general, reconocen la diferencia gráfica entre relaciones y funciones sobre el plano, pero no perciben la integración de éstas con los ejes coordenados, ni con ecuaciones que las representen, ni con las situaciones prácticas que puedan describir.

Tabla 7

Nivel de razonamiento del grupo experimental antes del modelo

	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Total
Grupo experimental	7	30	1	0	0	**38**

Fuente: instrumento de evaluación

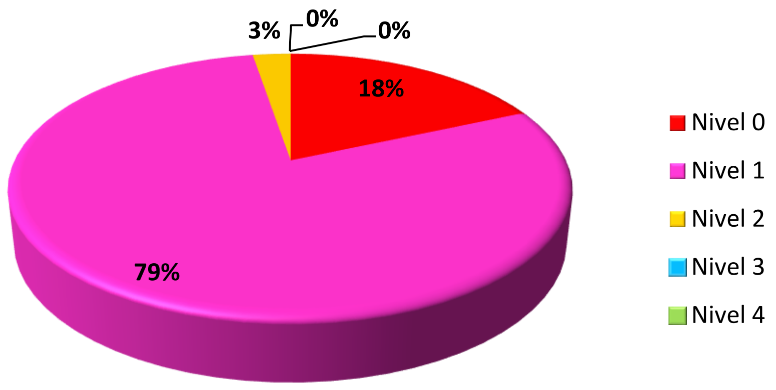


Figura 8. Nivel de razonamiento del grupo experimental antes del modelo

Fuente: Prueba de entrada

De acuerdo a la prueba de entrada se obtuvo que el 18% estuvieron en un nivel de razonamiento del nivel 0 predescriptivo: aprendizaje asociada a indagar, averiguar). El 79% se encontraba en el nivel 1 de reconocimiento visual: aprendizaje asociada a la orientación directa e indagación y el 3% en el nivel 2 de análisis: aprendizaje asociada a la explicitación y orientación directa.

4.3.2. Nivel de razonamiento del grupo experimental después de aplicar el modelo.

La mayoría de los estudiantes presentaron mejoras significativas como se tiene en promedio de 2,7 en el nivel de aprendizaje, esto es la mayoría llegaron al nivel 3 y existen estudiantes que alcanzaron el nivel 4.

Tabla 8

Nivel de razonamiento del grupo experimental después del modelo

	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Total
Grupo experimental	0	0	15	19	4	**38**

Fuente: instrumento de evaluación

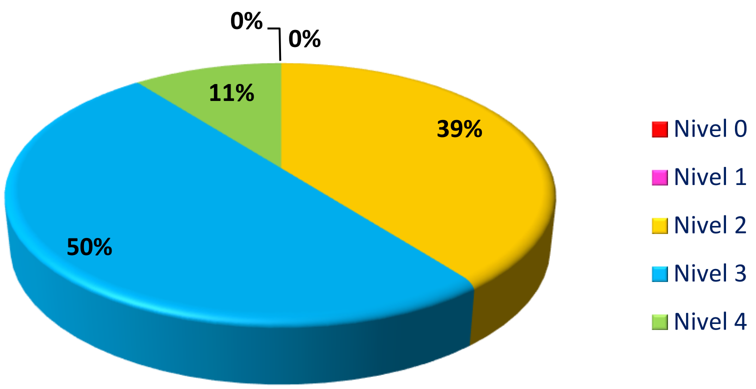


Figura 9. Nivel de razonamiento del grupo experimental después del modelo

Fuente: Prueba de salida

La figura muestra que los estudiantes avanzaron a niveles superiores como un 39% se ubican en el nivel 2 de análisis: aprendizaje asociada a la explicitación y orientación directa, el 50%al nivel 3 de clasificación y relación: aprendizaje asociada a la orientación libre y explicitación y finalmente el 11% al nivel 4 de deducción formal: aprendizaje asociada a la integración de conocimientos.

En contrastación con la hipótesis H_b: la variación del nivel de razonamiento en el grupo experimental es significativa antes y después de aplicar el modelo de Van Hiele.

4.4. Nivel de razonamiento del grupo de control al inicio y después de las sesiones de aprendizaje

4.4.1. Nivel de razonamiento del grupo de control al inicio de las sesiones de aprendizaje

En el grupo de control al inicio de introducir las sesiones de aprendizaje se evaluó mediante una prueba de entrada, cuyo resultado es en promedio de 0,82 es decir fueron ubicados entre los niveles 0 y 1, muy similar al grupo experimental con conocimientos básicos. Lo que indica que a principios del estudio del funciones reales los estudiantes estaban en una condición similar en conocimientos básicos ubicados en el nivel 0 y muy pocos en el nivel 1.

Tabla 9

Nivel de razonamiento del grupo experimental después del modelo

	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Total
Grupo de control	8	29	1	0	0	**38**

Fuente: instrumento de evaluación

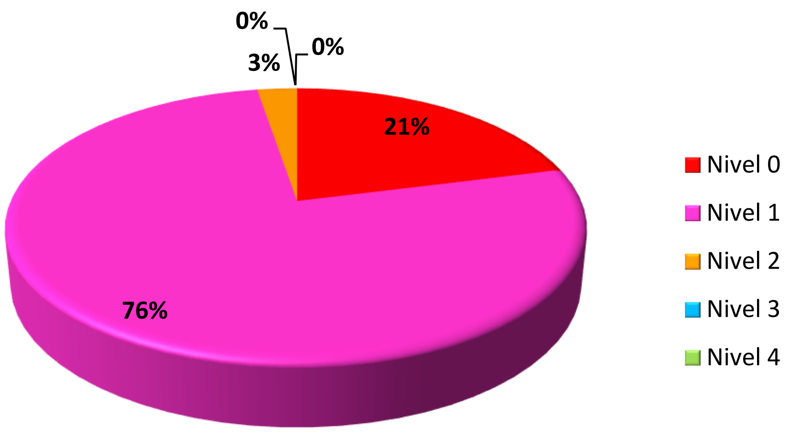


Figura 10. Nivel de razonamiento del grupo de control al inicio de las sesiones

Fuente: Prueba de entrada

De acuerdo a la prueba de entrada se obtuvo que el 21% estuvieron en un nivel de razonamiento del nivel 0 predescriptivo: aprendizaje asociada a indagar, averiguar). El 76% se encontraba en el nivel 1 de reconocimiento visual: aprendizaje asociada a la orientación directa e indagación y el 3% en el nivel 2 de análisis: aprendizaje asociada a la explicitación y orientación directa.

4.4.2. Nivel razonamiento del grupo de control después de las sesiones de aprendizaje

Después de aplicar las sesiones de aprendizaje en el grupo de control los estudiantes se desempeñaron regularmente llegando la mayoría al nivel 2 de aprendizaje es decir los estudiantes reconocen gráficas de funciones de variable real, sobre el plano cartesiano; también pueden diferenciar otras curvas que representen algunas relaciones aplicadas, reconocen la diferencia gráfica entre relaciones y funciones sobre el plano, pero no perciben la integración de éstas con los ejes coordenados, ni con ecuaciones que las representen, ni con las situaciones prácticas que puedan describir. Los estudiantes analizan por pares, las relaciones entre las figuras y los ejes del plano cartesiano, los gráficos de funciones, en este sentido, relacionan ecuaciones en dos variables con figuras del plano en las dos direcciones: partiendo de la ecuación se aproximan al gráfico y, al revés, a partir del gráfico, se aproximan a la ecuación. Y pocos clasifican funciones a partir de los gráficos, de las estructuras de las ecuaciones y de los enunciados sobre problemas específicos. Presentan habilidad para integrar las diferentes formas de representación de una función. Reconocen la forma dinámica de los conceptos de función, y son capaces de desarrollar secuencias de proposiciones para deducir que una propiedad se deriva de otra.

Tabla 10

Nivel de razonamiento del grupo de control después de las sesiones

	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Total
Grupo de control	0	7	26	5	0	**38**

Fuente: instrumento de evaluación

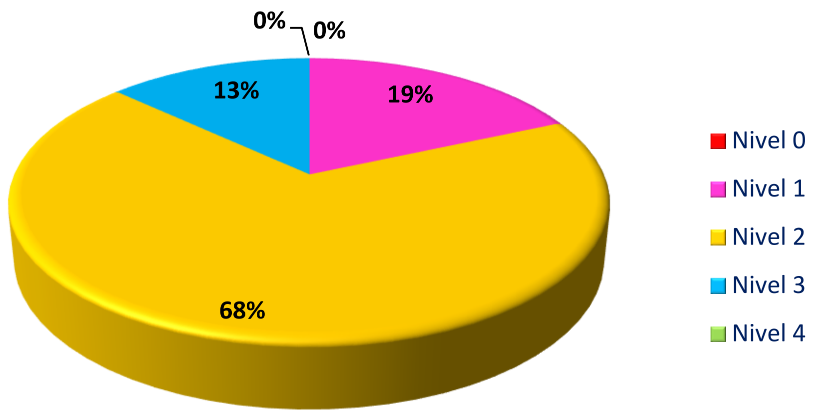


Figura 11. Nivel de razonamiento del grupo de control después de las sesiones
Fuente: Prueba de salida

La figura muestra que los estudiantes un 19% avanzaron al nivel 1 de reconocimiento visual: aprendizaje asociada a la orientación directa e indagación, un 68% se ubican en el nivel 2 de análisis: aprendizaje asociada a la explicitación y orientación directa, el 13%al nivel 3 de clasificación y relación: aprendizaje asociada a la orientación libre y explicitación y ninguno al nivel 4 de deducción formal.

En contrastación con la hipótesis se determina que H_c: En el grupo de control el nivel de razonamiento ha variado mínimamente antes y después de las sesiones de aprendizaje.

4.5. Nivel de razonamiento de los estudiantes del grupo experimental y del grupo de control

Observando la calificación de las pruebas de salida de los estudiantes se tiene los siguientes resultados:

Tabla 11

Calificación de los estudiantes después de la aplicación del modelo

Nº de estudiante	Grupo experimental	Grupo de control
1	19	12
2	15	13
3	13	10
4	14	13
5	16	12
6	17	4
7	15	14
8	15	11
9	17	14
10	17	14
11	7	13
12	12	13
13	NP	8
14	14	13
15	13	14
16	16	13
17	14	15
18	14	7
19	9	13
20	15	12
21	16	NP
22	15	13
23	14	14
24	12	12
25	NP	7
26	11	15
27	15	12
28	17	12
29	15	NP
30	17	13
31	14	12
32	14	11
33	16	14
34	14	12
35	15	11
36	15	8
37	14	14
38	14	11
39	16	12
40	13	7
Promedio aritmético	**14,45**	**11,79**

Fuente: Instrumento de evaluación

De acuerdo a la tabla 7 determinamos los siguientes valores estadísticos como:

Tamaño del grupo experimental y control después de la aplicación del modelo:

$n_E = n_C = 38$

Desviación estándar del grupo experimental y control:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}{n}}{n-1}}$$

$S_E = 5{,}01066856$

$S_C = 6{,}27880512$

Diferencia de las desviaciones estándares muestrales del grupo experimental y control:

$\delta = S_A - S_B = 5{,}01066856 - 6{,}27880512 = -0{,}26730213$

Varianza de la muestra:

$$\sigma^2 = \frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2}{n_A + n_B - 2} = 5{,}64473684$$

Para luego determinar la distribución normal Z_c cuyo resultado es:

$$Z_c = \frac{(\bar{X}_E - \bar{X}_C) - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_E} + \frac{\sigma^2}{n_C}}}$$

$Z_c = 5{,}36673376$

CONTRASTACIÓN DE HIPÓTESIS

Prueba estadística con distribución normal (Z_c)

Regla de decisión utilizado

Si $Z_c > Z_t$, Se rechaza la H_0 y se acepta la H_a

Donde:

Z_c: Zeta calculada

Z_t: Zeta tabulada o tabla

H_0 : Hipótesis nula

H_a: Hipótesis alterna

PRUEBA ESTADÍSTICA

Se obtuvo lo siguiente:

$$Z_c = 5{,}36673376$$

Para este caso buscamos el valor de (Z_t) Z tabulada o Z de tabla de la distribución normal para (α = 0.05 ó 5% Nivel de significancia). (=INV.NORM.ESTAND(1-0.05/2)) en EXCEL)

Luego: $Z_t = Z_{[0,05]} = 1,96$ (con α =0.05 ó 95% de nivel de confianza).

Decisión:

$$Z_c = 5,36673376 > Z_t = 1,96$$

Entones se rechaza la H_0 y se Acepta la H_a esto implica que el promedio de nivel de aprendizaje de funciones reales con la aplicación del modelo de Van Hiele, en el grupo experimental es mayor al promedio del grupo de control en los estudiantes de la E. P. Ciencias Contables, para un nivel de significancia de 0.05 o para un nivel de confianza del 95%.

CONCLUSIONES

- El desarrollo de esta investigación, además de ampliar la lista de aplicaciones del modelo de van Hiele en conceptos diferentes a la geometría, potenciaría favorablemente su adopción en el primer año de educación universitaria, como metodología de enseñanza para facilitar el aprendizaje de matemática básica.

- Se encontró en la aplicación de la prueba que los estudiantes de matemática básica muestran diversas dificultades para realizar un razonamiento matemático en funciones reales, se ubican en niveles de: indagación y visualización; es decir los estudiantes distinguen los números reales y sus propiedades; conocen el plano cartesiano, son capaces de ubicar y "leer" puntos.

- En el nivel de rigor, el 11% de los estudiantes alcanzaron el máximo rigor de abstracción; ellos clasifican funciones a partir de los gráficos, de las estructuras de las ecuaciones y de los enunciados sobre problemas específicos. Presentan habilidad para integrar las diferentes formas de representación de una función, capaces de desarrollar secuencias de proposiciones para deducir que una propiedad se deriva de otra; deducir funciones de variable real, de situaciones prácticas.

- En el grupo de control la enseñanza fue con el método tradicional donde el principal instrumento es la evaluación escrita y algunas participaciones de los estudiantes, el nivel de razonamiento no llegó a lo esperado después de las sesiones de aprendizaje.

- El trabajo cumplió todos y cada uno de los pasos que permiten afirmar que se ha aplicado el modelo de Van Hiele a un concepto. El cambio de mecanismo, de forma de aproximarse al concepto no iba a significar, como cabía esperar, una dificultad grave para cubrir ese objetivo. Así pues, se han dado los descriptores para los niveles de razonamiento obtenidos del diseño de una entrevista y se han comprobado estadísticamente a partir de los datos recogidos de la aplicación de un test escrito que, en su esencia, guarda las principales características del guion de la entrevista.

RECOMENDACIONES

- Extender el modelo de Van Hiele a la matemática básica, en el desarrollo de las sesiones de aprendizaje para así alcanzar el nivel de razonamiento óptimo en los estudiantes. El estudio de las Matemáticas y, en especial de funciones reales, brinda al individuo una mayor oportunidad de avanzar en investigaciones e influir en la sociedad. Las habilidades que se incentivan con el estudio son de aplicación en la vida diaria.

- Las dificultades que se presenta en la enseñanza de las matemáticas tienen un componente aportado por la experiencia personal del docente para lo cual es importante la didáctica de las matemáticas, en los que el futuro docente tenga la posibilidad de aprender a implementar distintas estrategias metodológicas útiles para su práctica docente.

- El Modelo de razonamiento de Van Hiele es un modelo de enseñanza y aprendizaje que brinda la posibilidad de identificar las formas de razonamiento, dando pautas a seguir para fomentar la consecución de niveles más altos de razonamiento. Al usar este modelo, el docente debe hacer una evaluación inicial que identificará el nivel en el que se encuentra cada uno de los estudiantes.

- Dado que la evaluación en el modelo de Van Hiele no es del tipo tradicional, ya que da importancia a lo que los alumnos contestan y el porqué de sus respuestas, para obtener resultados confiables tras su aplicación, es importante usar los instrumentos de evaluación con sumo cuidado. El modelo de Van Hiele da importancia al desarrollo del lenguaje, pues este es crucial en el paso de un nivel a otro. Por esto, los docentes deben establecer actividades en las que el estudiante tenga la oportunidad de comunicar sus ideas matemáticas.

- Dejar de lado la enseñanza tradicional puesto que existen alternativas de modelos y propuestas metodológicas de enseñanza que ayudaran al logro de las capacidades planteadas en el sílabo del componente curricular. Desde esta perspectiva, el docente debe ser consciente de que su función es ser un medio para que el estudiante adquiera conocimientos, los reconstruya y puede utilizarlos.

BIBLIOGRAFÍA

Arriaza Balmón, M. (2006). *Guía práctica de análisis de datos*. Córdoba: IFAPA.

Bedoya Beltrán, J. A., Esteban Duarte, P. V., & Vasco Agudelo, E. D. (2007). Fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele y su aplicación al concepto de aproximación local. *Lecturas Matemáticas*, *28*, 77-95.

Berciano Alcaraz, A., Gutiérrez Pereda, G., Estepa Castro, A., & Climent Rodríguez, N. (Eds.). (2013). *Investigación en Educación Matemática XVII*. España: Universidad del País Vasco.

Ceballos Urrego, L., & López Monsalve, A. (2003). Relaciones y funciones: conceptos clave para el aprendizaje del cálculo, y una propuesta para la aplicación del modelo de Van Hiele. *Educación y Pedagogía*, *XV*(35), 131-140.

Cruz, J. (2009). *Un acercamiento didáctico al tratamiento del Teorema de Pitágoras en la escuela*. Argentina: Editorial el Cid.

Esteban Duarte, P. V., & Llorens Fuster, J. L. (2003). Aspectos comparativos en la extensión del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local. *SUMA*, (44), 45-52.

Figueroa García, R. (2012). *Matemática Básica 1* (8va ed.). Lima - Perú: RFG.

Fouz, F., & de Donosti, B. (2013). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. *Un paseo por la geometría*, 67-82.

Haeussler Jr, E. F., & Paul, R. S. (1992). *Matemáticas para administración y economía*. (N. Grepe P., Ed.) (2da ed.). México: Grupo editorial iberoamérica S.A. de C.V.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ta ed.). México: McGraw-Hil Interamericana Editores, S.A. de C.V.

Huata Panca, P. (2018). *Correlación de pearson* (2da ed.). Puno - Perú.

Ixcaquic Aguilar, I. M. (2015). *Modelo de Van Hiele y geometría plana* (Tesis de grado). Universidad Rafael Landívar, Guatemala.

Jaime Pastor, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, España.

Jaramillo L., C. M. (2000). La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de Van Hiele, 13-56.

Llorens Fuster, J. L. (1996). Aplicación del Modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local. *SUMA*, (22), 13-24.

Maguiña Rojas, A. T. (2013). Una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadrialáteros basada en el modelo Van Hiele. *In Crescendo*, *4*(1), 41-49. Recuperado a partir de http://tesis.pucp.edu.pe:8080/repositorio/handle/123456789/4733

Ortega, T. (2005). *Conexiones matemáticas*. España: Editorial GRAO de la IRIF.

Pérez, C. (2009). *El modelo Van Hiele y la programación neurolinguistica para la enseñanza del bloque geometría de la segunda etapa de educación básica*. Argentina: Editorial el Cid.

Planas, N., Blanco, L., Gutiérrez, A., Hoyles, C., Valero, P., & Linares, S. (2012). *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*. España: Editorial GRAO.

Prat Villar, M. (2015). Extensión del modelo de Van Hiele al concepto de área. España.

Rodríguez Pérez, E. G. (2015). El concepto de derivada y el modelo de Van Hiele en estudiantes de licenciatura en matemáticas e informática de la Universidad Francisco de Paula Santander. *Eco.Mat*, *6*(1), 43-49.

Tan T., S. (2012). *Matemáticas aplicadas a los negocios, las ciencias sociales y de la* *vida*. (J. Reyes Martínez, Ed.) (5ta ed.). México: Cengage learning.

Trejo, C. A., & Bosch, J. E. (1968). *Matemática moderna*. Argentina: Universitaria de Buenos Aires.

Usiskin, Z. (1991). Apuntes para la enseñanza. El modelo de enseñanza aprendizaje de Van Hiele. Signos, Teorías y prácticas, *4*.

Valderrama Mendoza, S. (2006). *Pasos para elaborar proyectos y tesis de investigación científica*. (A. J. Paredes Galván, Ed.). Lima - Perú: San Marcos.

Van Hiele, P. M. (1990). *El problema de la comprensión* (Tesis doctoral). Universidad Real de Utrecht, Holanda.

Vargas Vargas, G., & Gamboa Araya, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometria. *Uniciencia*, *27*(1), 74-94.

Zambrano M., M. A. (2005). El razonamiento geométrico y la teoría de Van Hiele. *Kaleidoscopio*, *3*(5), 28-33.

ANEXOS

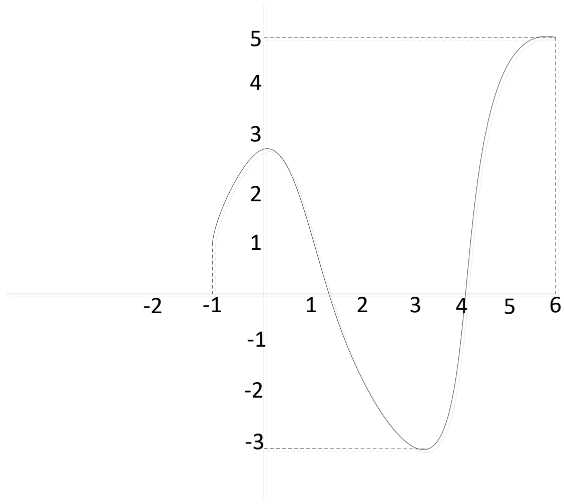
Anexo 1. Prueba Escrita y Cuestionario

APELLIDOS Y

NOMBRES:…………………………………………..Firma:……………...

Código de Matrícula: …………………….. Grupo:…………….

1. Qué puede decir sobre los signos de a y b si el punto $P(a, b)$ queda en:
   a) El segundo cuadrante
   b) El tercer cuadrante
   c) El cuarto cuadrante
2. Trace la gráfica de la recta $2x + 3y - 6 = 0$ en el intervalo $[-10, 10]$
3. Qué es función para Ud. Marque su respuesta:
   a) Una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto A sólo un elemento de un conjunto B.
   b) Es una regla de correspondencia que a cada elemento de A le corresponde un elemento de B
   c) Es una regla que posee dominio y rango
4. A qué se denomina dominio de una función. Marque su respuesta:
   a) Son los elementos que toma la variable independiente
   b) Las restricciones para la variable independiente
   c) La regla de correspondencia para las variables
   d) Se encuentra en el conjunto de partida
5. ¿Qué es el rango de una función?
6. En la gráfica



Encuentre:

a) Cuál es el valor de $f(3)$ y $f(5)$

b) Cuál es la altura o profundidad del punto $(3, f(3))$ con respecto al eje x, y del punto $(5, f(5))$ con respecto al eje x

c) Cuál es el dominio y rango de f.

7. Trace la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$

8. Sea f la función definida por: $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

a) Cómo determinar el dominio de f?

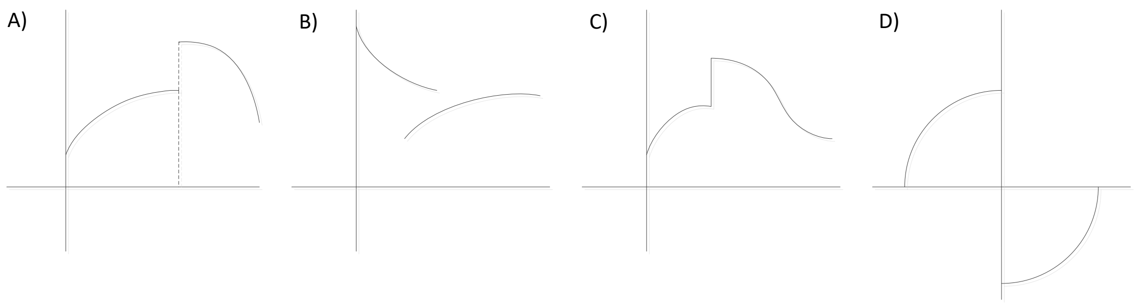
b) Calcule $f(0)$

9. Sea $f(x) = \sqrt{2x+1} + 2$. Determine si el punto $(4,6)$ pertenece a la gráfica de f.

10. ¿Qué es una variable independiente y una variable dependiente?

11. Si le dan una función en el plano xy, ¿cómo puede decir si la gráfica es la de una función f definida por $y = f(x)$?

12. Las siguientes son gráficas de funciones?. Explique brevemente cada una de ellas.



Anexo 2. Cuestionario

1. Qué puede decir sobre los signos de a y b si el punto $P(a, b)$ queda en:
   a) El segundo cuadrante
   b) El tercer cuadrante
   c) El cuarto cuadrante
2. Qué es función para Ud.
3. A qué se denomina dominio de una función
4. Cómo verificar si un punto pertenece a la función dada f.
5. ¿Qué es el rango de una función?
6. ¿Qué es una variable independiente y una variable dependiente?
7. ¿Qué es la gráfica de una función?. Utilice un dibujo para ilustrar la gráfica, el dominio y el rango de una función.
8. Si le dan una función en el plano xy, ¿cómo puede decir si la gráfica es la de una función f definida por $y = f(x)$?
9. Explique qué es la suma, diferencia, producto y cociente de las funciones f y g con dominios A y B, respectivamente.
10. Qué es composición de funciones. Cuándo es posible?
11. Existe una función inversa
12. En una situación de la vida identifique como deducir una función real y su aplicación matemática.

Anexo 3. Fases del modelo de Van Hiele

Las fases de aprendizaje es un medio para que el docente ayude al aprendizaje de los estudiantes. Es decir un modelo de instrucción.

En el proceso de aplicación del modelo de Van Hiele se desarrollaron fases, las cuales son: Información, orientación dirigida, explicación, orientación libre e integración.

En la primera observé que tanto saben los estudiantes y en la segunda fase se ha organizado las actividades adecuadas para que los estudiantes logren aprender definiciones y así poder pasar a un nuevo nivel. En La tercera fase los estudiantes formulan sus propias ideas, explicándolas a los demás. En la cuarta etapa debe demostrar con sus propios medios lo asimilado. En la última fase se engloba todas las anteriores para evaluar el razonamiento adquirido.

FASE 1: INFORMACIÓN. Mediante cuestionarios, entrevistas, prueba de entrada y exposiciones, se ha identificado los conocimientos previos de los estudiantes. Con ello se buscó que expliquen la información que tienen en su estructura cognitiva sobre funciones reales.

Se dio a conocer la información para aprender funciones reales. En la pizarra se hizo gráficos para diferenciar funciones de relaciones, se resolvió diversos tipos de problemas y ejemplos.

FASE 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA. Se hizo actividades para relacionar el concepto de funciones reales con situaciones de la vida diaria y animamos a los estudiantes para que encuentren sus propias relaciones, las compartan y discutan con sus compañeros.

También el estudiante aprende y comprende cuales son los significados y propiedades principales de las funciones reales. Explora dichos conceptos a través de los materiales que se le va a plantear consecutivamente.

Se guía a los estudiantes mediante actividades y problemas, con el fin de que estos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos de la red de conocimientos por formar. Los problemas resueltos llevan directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben entender y aprender. Los problemas y actividades fueron seleccionados por la docente. Esta fase es fundamental, ya que en ella se construyen los elementos básicos de la red de relaciones del nivel correspondiente. Al respecto Van Hiele (1986), quien señala que "(…) las actividades (de la segunda fase), si se seleccionan cuidadosamente, constituyen la base adecuada del pensamiento de nivel superior" (p. 10). El papel del profesor resulta primordial en esta fase, ya que debe seleccionar las actividades adecuadas para permitir al estudiante aprender los conceptos, propiedades o definiciones fundamentales para el nuevo nivel de razonamiento. Exige una planificación cuidadosa de la secuencia tendrá en cuenta la necesidad de conseguir pequeños éxitos que estimulen su autoestima y favorezcan una actitud positiva hacia las matemáticas.

FASE 3. EXPLICITACIÓN O EXPLICACIÓN. Los estudiantes aplican el concepto para resolver problemas que correspondan a situaciones reales en diferentes contextos.

Verificamos la forma de como el estudiante se desenvuelve verbalmente, al explicar sus experiencias previas. La participación del docente es mínima en esta fase, solo debe cuidar el lenguaje del estudiante.

Los alumnos deben intentar expresar en palabras o por escrito los resultados que han obtenido, intercambiar sus experiencias y discutir sobre ellas con el docente y los demás estudiantes, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio. Los estudiantes tienen que utilizar el vocabulario adecuado para describir la estructura sobre la que han estado trabajando. Deben aprender y afianzar el vocabulario propio del nivel. En esta fase no se produce un aprendizaje de conocimientos nuevos, en cuanto a estructuras o contenidos, sino una revisión del trabajo llevado a cabo con anterioridad, a partir de conclusiones, práctica y perfeccionamiento de la forma de expresarse, todo lo cual origina un afianzamiento de la nueva red de conocimientos que se está formando. El tipo de trabajo que se debe realizar en esta fase es de discusión y comentarios sobre la forma de resolverse los ejercicios anteriores, elementos, propiedades y relaciones que se han observado o utilizado.

FASE 4. ORIENTACIÓN LIBRE. Se completa la red de relaciones que se comenzó a formar en las fases anteriores y se adquiere el lenguaje propio del siguiente nivel de razonamiento. Partiendo del concepto estudiado y de sus propios intereses los alumnos deben formular y solucionar sus propios problemas.

El objetivo específico de esta fase es consolidar los conocimientos adquiridos. El educando aplica los conocimientos y el lenguaje que ha adquirido, y se enfrenta a tareas más complejas que pueden concluirse con distintos procedimientos.

En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos. El docente debe proponer a sus alumnos problemas que no sean una simple aplicación directa de un dato o algoritmo conocido, sino que planteen nuevas relaciones o propiedades, que sean más abiertos, preferiblemente con varias vías de resolución, con varias soluciones o con ninguna. Por otra parte, el profesor debe limitar al máximo su ayuda a los estudiantes en la resolución de los problemas. En palabras de Van

Hiele (1986), citado por Jaime (1993), "(…) los estudiantes aprenden a encontrar su camino en la red de relaciones por sí mismos, mediante actividades generales" (p. 11). Los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir en otras situaciones nuevas. Los problemas planteados en esta fase deben obligar a los estudiantes a combinar sus conocimientos y aplicarlos a situaciones diferentes de las propuestas anteriormente. La intervención del docente en la resolución de las tareas debe ser mínima, pues son los alumnos quienes tienen que encontrar el camino adecuado a partir de lo aprendido en la segunda fase.

FASE 5. INTEGRACIÓN. El concepto estudiado se reorganiza y adquiere un nuevo significado. Se hace explícita la nueva red conceptual y el conjunto de habilidades de razonamiento adquiridas.

y en ella se acumulan todas las fases, está lo sintetiza, para lograr así aplicar lo aprendido, en esta última fase no se presenta nada nuevo sino una síntesis de lo ya hecho. Una vez superada esta quinta fase los estudiantes han alcanzado un nuevo nivel de aprendizaje, y están listos para repetir las fases para el nivel superior que sigue.

Los estudiantes establecen una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y de la red de relaciones que están terminando de formar, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente. El docente debe dirigir resúmenes o recopilaciones de la información que ayuden a los estudiantes a lograr esta integración.

Las actividades que les proponga no deben implicar la aparición de nuevos conocimientos, sino solo la organización de los ya adquiridos. Se trata de lograr una visión general de los contenidos del tema objeto de estudio, integrada por los nuevos conocimientos adquiridos en este nivel y los que ya tenían los estudiantes anteriormente. No hay un aprendizaje de elementos nuevos, sino una fusión de los nuevos conocimientos, algoritmos y formas de razonar con los anteriores. Las actividades de esta fase deben favorecer dicha integración y permitirle al docente comprobar si ya se ha conseguido el paso por cada una de estas fases y la observación de las mismas potencia, en gran medida, la posibilidad de que un estudiante avance del nivel en el que se encuentra y así pueda desarrollar sus habilidades y capacidad de razonamiento.

Descripción de las fases del modelo de Van Hiele para funciones reales.

Las cuales son acciones que han realizado los educandos con ayuda del docente para desarrollar un nivel superior de razonamiento, las cuales son cinco y se describen a continuación:

- *Información,* en ella se ha mencionado y se dio a conocer lo que se va a enseñar y lo que se va aprender. Es decir en este período indique y evalúe los conocimientos previos sobre los conceptos de funciones en el conjunto de números reales, se explicó qué trayectoria tomará el estudio.
- *Orientación Dirigida,* en ella el estudiante aprende y comprende cuales son los significados y propiedades principales de funciones. Explora dichos conceptos a través de los materiales que se le va a plantear consecutivamente.
- *Explicación,* esta fase no es más que verificar la forma de como el aprendiz se desenvuelve verbalmente, al explicar sus experiencias previas. La participación del educador debe ser mínima en esta fase, solo debe cuidar el lenguaje del aprendiz.

- *Orientación Libre*, en ella el educando aplica los conocimientos y el lenguaje que ha adquirido, y se enfrenta a tareas más complejas que pueden concluirse con distintos procedimientos. El objetivo específico de esta fase es consolidar los conocimientos adquiridos.
- *Integración*, y en ella se acumulan todas las fases, está lo sintetiza, para lograr así aplicar lo aprendido, en esta última fase no se presenta nada nuevo sino una síntesis de lo ya hecho. Una vez superada esta quinta fase los estudiantes han alcanzado un nuevo nivel de aprendizaje, y están listos para repetir las fases para el nivel superior que sigue.

Anexo 4. Guía de observaciones

GUÍA DE OBSERVACIÓN

INSTITUCIÓN: UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO **ESCUELA PROFESIONAL DE:** CIENCIAS CONTABLES

FECHA DE EJECUCIÓN: 16 de octubre del 2017

R=Regular B=Bueno MB=Muy bueno E=Excelente

INDICADORES	Conocen el plano cartesiano; son capaces de ubicar y "leer" puntos, reconocer cualquier figura plana; conocen la definición de función sobre conjuntos finitos y en el conjunto de los números reales (R).				Reconocen gráficas de funciones sobre el plano cartesiano. También pueden diferenciar otras curvas que representen algunas aplicaciones, sin abstraer sus propiedades para relacionarlas con otros fenómenos.				Analizan por pares, las relaciones entre: Las figuras y los ejes del plano. Las ecuaciones en dos variables y sus gráficos, partiendo de la ecuación se aproximan al gráfico y, al revés.				Reconocen la función a partir de los gráficos, de las estructuras de las ecuaciones. Presentan habilidad para integrar las diferentes formas de representación de una función.				Establecen diferencias y deducen funciones de variable real, con aplicación a situaciones prácticas. Plantea demostraciones de propiedades o percibe que dos definiciones de un mismo concepto pueden ser equivalentes.			
Nº	R	B	MB	E	R	B	MB	E	R	B	MB	E	R	B	MB	E	R	B	MB	E
1	X				X				X				X				X			
2	X				X				X				X				X			
3	X				X				X				X				X			
4	X				X				X				X				X			
5	X				X				X				X				X			
6	X				X				X				X				X			
7	X				X				X				X				X			
8	X				X				X				X				X			
9	X				X				X				X				X			
10	X				X				X				X				X			
11	X				X				X				X				X			
12	X				X				X				X				X			
13	No asiste																			
14	X				X				X				X				X			
15	X				X				X				X				X			
16	X				X				X				X				X			
17	X				X				X				X				X			
18	X				X				X				X				X			
19	X				X				X				X				X			
20	X				X				X				X				X			
21	X				X				X				X				X			
22	X				X				X				X				X			
23	X				X				X				X				X			
24	X				X				X				X				X			

GUÍA DE OBSERVACIÓN

INSTITUCIÓN: UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO **ESCUELA PROFESIONAL DE:** CIENCIAS CONTABLES

FECHA DE EJECUCIÓN: 16 de octubre del 2017

R=Regular B=Bueno MB=Muy bueno E=Excelente

INDICADORES	Conocen el plano cartesiano; son capaces de ubicar y "leer" puntos, reconocer cualquier figura plana; conocen la definición de función sobre conjuntos finitos y en el conjunto de los números reales (R).				Reconocen gráficas de funciones sobre el plano cartesiano. También pueden diferenciar otras curvas que representen algunas aplicaciones, sin abstraer sus propiedades para relacionarlas con otros fenómenos.				Analizan por pares, las relaciones entre: Las figuras y los ejes del plano. Las ecuaciones en dos variables y sus gráficos, partiendo de la ecuación se aproximan al gráfico y, al revés.				Reconocen la función a partir de los gráficos, de las estructuras de las ecuaciones. Presentan habilidad para integrar las diferentes formas de representación de una función.				Establecen diferencias y deducen funciones de variable real, con aplicación a situaciones prácticas. Plantea demostraciones de propiedades o percibe que dos definiciones de un mismo concepto pueden ser equivalentes.			
Nº	R	B	MB	E	R	B	MB	E	R	B	MB	E	R	B	MB	E	R	B	MB	E
25	No asiste																			
26	X				X				X				X				X			
27	X				X				X				X				X			
28	X				X				X				X				X			
29	X				X				X				X				X			
30	X				X				X				X				X			
31	X				X				X				X				X			
32	X				X				X				X				X			
33	X				X				X				X				X			
34	X				X				X				X				X			
35	X				X				X				X				X			
36	X				X				X				X				X			
37	X				X				X				X				X			
38	X				X				X				X				X			
39	X				X				X				X				X			
40	X				X				X				X				X			

GUÍA DE OBSERVACIÓN

INSTITUCIÓN: UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO **ESCUELA PROFESIONAL DE:** CIENCIAS CONTABLES
FECHA DE EJECUCIÓN: Del 30 de octubre al 03 de Noviembre del 2017

R=Regular B=Bueno MB=Muy bueno E=Excelente

INDICADORES	Conocen el plano cartesiano; son capaces de ubicar y "leer" puntos, reconocer cualquier figura plana; conocen la definición de función sobre conjuntos finitos y en el conjunto de los números reales (R).				Reconocen gráficas de funciones sobre el plano cartesiano. También pueden diferenciar otras curvas que representen algunas aplicaciones, sin abstraer sus propiedades para relacionarlas con otros fenómenos.				Analizan por pares, las relaciones entre: Las figuras y los ejes del plano. Las ecuaciones en dos variables y sus gráficos, partiendo de la ecuación se aproximan al gráfico y, al revés.				Reconocen la función a partir de los gráficos, de las estructuras de las ecuaciones. Presentan habilidad para integrar las diferentes formas de representación de una función.				Establecen diferencias y deducen funciones de variable real, con aplicación a situaciones prácticas. Plantea demostraciones de propiedades o percibe que dos definiciones de un mismo concepto pueden ser equivalentes.			
Nº	R	B	MB	E	R	B	MB	E	R	B	MB	E	R	B	MB	E	R	B	MB	E
1			X				X				X			X				X		
2		X				X				X				X				X		
3		X			X					X				X			X			
4		X			X					X				X			X			
5		X				X				X				X				X		
6		X				X				X				X				X		
7		X				X				X				X				X		
8		X				X				X				X				X		
9		X			X					X				X			X			
10		X				X				X				X				X		
11		X				X				X				X				X		
12		X				X				X				X				X		
13																				
14		X			X					X				X			X			
15		X			X					X				X			X			
16		X			X					X				X			X			
17		X				X				X				X				X		
18		X				X				X				X				X		
19		X				X				X				X				X		
20		X				X				X				X				X		
21		X				X				X				X				X		
22		X				X				X				X				X		
23		X			X					X				X			X			
24		X			X					X				X			X			

GUÍA DE OBSERVACIÓN

INSTITUCIÓN: UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO **ESCUELA PROFESIONAL DE:** CIENCIAS CONTABLES

FECHA DE EJECUCIÓN: Del 30 de octubre al 03 de Noviembre del 2017

R=Regular B=Bueno MB=Muy bueno E=Excelente

INDICADORES	Conocen el plano cartesiano; son capaces de ubicar y "leer" puntos, reconocer cualquier figura plana; conocen la definición de función sobre conjuntos finitos y en el conjunto de los números reales (R).				Reconocen gráficas de funciones sobre el plano cartesiano. También pueden diferenciar otras curvas que representen algunas aplicaciones, sin abstraer sus propiedades para relacionarlas con otros fenómenos.				Analizan por pares, las relaciones entre: Las figuras y los ejes del plano. Las ecuaciones en dos variables y sus gráficos, partiendo de la ecuación se aproximan al gráfico y, al revés.				Reconocen la función a partir de los gráficos, de las estructuras de las ecuaciones. Presentan habilidad para integrar las diferentes formas de representación de una función.				Establecen diferencias y deducen funciones de variable real, con aplicación a situaciones prácticas. Plantea demostraciones de propiedades o percibe que dos definiciones de un mismo concepto pueden ser equivalentes.			
Nº	R	B	MB	E	R	B	MB	E	R	B	MB	E	R	B	MB	E	R	B	MB	E
25	No asiste																			
26		X			X					X				X			X			
27		X				X				X				X				X		
28		X				X				X				X				X		
29		X			X					X				X			X			
30		X				X				X				X				X		
31		X			X					X				X			X			
32		X			X					X				X			X			
33		X				X				X				X				X		
34		X				X				X				X				X		
35		X				X				X				X				X		
36		X				X				X				X				X		
37		X			X					X				X			X			
38		X				X				X				X				X		
39		X				X				X				X				X		
40		X			X					X				X			X			

GUÍA DE OBSERVACIÓN

INSTITUCIÓN: UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FECHA DE EJECUCIÓN: Del 20 al 24 de Noviembre del 2017

ESCUELA PROFESIONAL DE: CIENCIAS CONTABLES

R=Regular B=Bueno MB=Muy bueno E=Excelente

INDICADORES	Conocen el plano cartesiano; son capaces de ubicar y "leer" puntos, reconocer cualquier figura plana; conocen la definición de función sobre conjuntos finitos y en el conjunto de los números reales (R).				Reconocen gráficas de funciones sobre el plano cartesiano. También pueden diferenciar otras curvas que representen algunas aplicaciones, sin abstraer sus propiedades para relacionarlas con otros fenómenos.				Analizan por pares, las relaciones entre: Las figuras y los ejes del plano. Las ecuaciones en dos variables y sus gráficos, partiendo de la ecuación se aproximan al gráfico y, al revés.				Reconocen la función a partir de los gráficos, de las estructuras de las ecuaciones. Presentan habilidad para integrar las diferentes formas de representación de una función.				Establecen diferencias y deducen funciones de variable real, con aplicación a situaciones prácticas. Plantea demostraciones de propiedades o percibe que dos definiciones de un mismo concepto pueden ser equivalentes.			
Nº	R	B	MB	E	R	B	MB	E	R	B	MB	E	R	B	MB	E	R	B	MB	E
1				X				X				X				X				X
2				X			X				X					X			X	
3			X				X				X				X				X	
4			X				X				X				X				X	
5				X				X			X				X				X	
6				X				X				X				X				X
7				X				X				X				X			X	
8				X				X			X				X				X	
9			X				X				X					X			X	
10				X				X			X				X					X
11			X				X				X				X				X	
12				X				X			X				X				X	
13	No asiste																			
14			X				X				X				X				X	
15			X				X				X				X				X	
16				X				X			X					X			X	
17				X				X				X				X			X	
18				X				X				X				X			X	
19			X				X				X				X				X	
20				X			X				X				X				X	
21				X			X					X			X				X	
22				X			X				X				X				X	
23			X				X				X				X				X	
24			X				X				X				X				X	

GUÍA DE OBSERVACIÓN

INSTITUCIÓN: UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

ESCUELA PROFESIONAL DE: CIENCIAS CONTABLES

FECHA DE EJECUCIÓN: Del 20 al 24 de Noviembre del 2017

R=Regular B=Bueno MB=Muy bueno E=Excelente

INDICADORES	Conocen el plano cartesiano; son capaces de ubicar y "leer" puntos, reconocer cualquier figura plana; conocen la definición de función sobre conjuntos finitos y en el conjunto de los números reales (R).				Reconocen gráficas de funciones sobre el plano cartesiano. También pueden diferenciar otras curvas que representen algunas aplicaciones, sin abstraer sus propiedades para relacionarlas con otros fenómenos.				Analizan por pares, las relaciones entre: Las figuras y los ejes del plano. Las ecuaciones en dos variables y sus gráficos, partiendo de la ecuación se aproximan al gráfico y, al revés.				Reconocen la función a partir de los gráficos, de las estructuras de las ecuaciones. Presentan habilidad para integrar las diferentes formas de representación de una función.				Establecen diferencias y deducen funciones de variable real, con aplicación a situaciones prácticas. Plantea demostraciones de propiedades o percibe que dos definiciones de un mismo concepto pueden ser equivalentes.			
Nº	R	B	MB	E	R	B	MB	E	R	B	MB	E	R	B	MB	E	R	B	MB	E
25	No asiste																			
26			X				X				X				X				X	
27				X				X				X			X				X	
28				X				X				X				X				X
29			X				X				X			X					X	
30				X				X			X					X				X
31			X				X				X					X			X	
32			X				X				X				X				X	
33				X				X				X			X				X	
34			X				X				X				X				X	
35				X				X			X				X				X	
36				X				X			X				X				X	
37			X				X				X				X				X	
38				X				X				X			X				X	
39				X				X				X				X			X	
40			X				X				X				X				X	

Anexo 5. Guía de observación por indicadores

GUÍA DE OBSERVACIÓN

INSTITUCIÓN: UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

ESCUELA PROFESIONAL DE: CIENCIAS CONTABLES

FECHA DE EJECUCIÓN: Del 16 de octubre al 24 de Noviembre del 2017

INDICADORES	PRIMERA SEMANA	SEGUNDA SEMANA	TERCERA SEMANA
Conocen el plano cartesiano; son capaces de ubicar y "leer" puntos, reconocer cualquier figura plana; conocen la definición de función sobre conjuntos finitos y en el conjunto de los números reales (R).	Identifica con dificultad el plano cartesiano	Mejora la identificación del plano cartesiano, ubica y lee puntos.	Completa la identificación del plano cartesiano, lee y ubica puntos del gráfico.
Reconocen gráficas de funciones sobre el plano cartesiano. También pueden diferenciar otras curvas que representen algunas aplicaciones, sin abstraer sus propiedades para relacionarlas con otros fenómenos.	Es inapreciable el reconocimiento claro de las gráficas de funciones.	Emplea adecuadamente las definiciones para diferenciar otras curvas.	Llega a un nivel bueno para entender la definición de funciones.
Analizan por pares, las relaciones entre: Las figuras y los ejes del plano. Las ecuaciones en dos variables y sus gráficos, partiendo de la ecuación se aproximan al gráfico y, al revés.	En un mínimo porcentaje logra relacionar con otra variable.	Mejora la identificación y relaciona dos variables.	Realiza las relaciones entre dos variables y deduce las ecuaciones de manera satisfactoria.
Reconocen la función a partir de los gráficos, de las estructuras de las ecuaciones. Presentan habilidad para integrar las diferentes formas de representación de una función.	Con cierta dificultad y no muy claro, reconoce gráficas de las estructuras de las ecuaciones.	Mejora su forma de especificar y representar funciones estableciendo sus limites	Completa el reconocimiento a partir de las estructuras de forma íntegra en las funciones.
Establecen diferencias y deducen funciones de variable real, con aplicación a situaciones prácticas. Plantea demostraciones de propiedades o percibe que dos definiciones de un mismo concepto pueden ser equivalentes.	De dificultad se desenvuelve en la resolución de ejercicios en forma abstracta	Mejora su forma para trabajar ejercicios de forma abstracta, teniendo aún algunas dificultades	Llega a concluir satisfactoriamente la resolución de problemas en forma abstracta.