UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE PROBABILIDADES AL TEOREMA DE APROXIMACIÓN DE WEIERSTRASS

TESIS

PRESENTADA POR:

MARIA EUGENIA MANCILLA QUISPE

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PUNO – PERÚ

2019

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA
ESCUELA PROFESIONAL DE Cs. FÍSICO MATEMÁTICAS

APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE PROBABILIDADES AL TEOREMA DE APROXIMACIÓN DE WEIERSTRASS

TESIS PRESENTADA POR:

MARIA EUGENIA MANCILLA QUISPE

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO COORDINACIÓN DE INVESTIGACIÓN PILAR FICA

APROBADA POR EL JURADO REVISOR CONFORMADO POR:

PRESIDENTE: ______________________
Lic. RUPERTO ZAPANA YERBA

PRIMER MIEMBRO: ______________________
Lic.: DERLY PARI MENDOZA

SEGUNDO MIEMBRO: ______________________
Lic. EULALIA RAMOS CHURA

DIRECTOR / ASESOR ______________________
M.Sc. MARTIN CONDORI CONCHA

TEMA: Análisis Matemático
ÁREA: Matemática Pura
LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: Matemática Pura

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 16 De Julio 2019

DEDICATORIA

A Dios, nuestro padre y guía,

Por estar conmigo en cada paso que doy.

A mi familia,

Por su apoyo constante

A mis amigos,

Por sus recomendaciones y apoyo moral

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Director de Tesis M.Sc. Martin Condori Concha, por su confianza depositada en mí, por su apoyo, consejos y sugerencias en la realización de este trabajo de investigación.

A los docentes miembros del jurado calificador, Lic. Ruperto Zapana Yerba, Lic. Eulalia Ramos Chura y Lic. Derly Pari Mendoza, por sus alcances, observaciones y correcciones que ayudaron a concluir el presente trabajo.

A los docentes de la escuela profesional de Ciencias Físico Matemáticas de la universidad nacional del altiplano Puno, quienes me han impartido conocimientos.

Agradezco a mi familia, Eloy mi compañero de vida, mis hijos Sam y Gael, por el cariño, motivación y apoyo.

A mis amigas Luz y Ade y amigos de la escuela profesional de Cs. Físico Matemáticas, por su constante apoyo moral.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

Pág.

ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

v.a.	: Variable Aleatoria
v.a. i.i.d.	: v.a. independiente e idénticamente distribuida
$E[X]$	: Esperanza o Media de la v.a.
$Var(X)$	: Varianza de X
S_n	: Suma de n variables aleatorias

RESUMEN

El presente trabajo de la Aplicación de la Teoría de Probabilidades al Teorema de Aproximación de Weierstrass, se introducen conceptos relevantes de la teoría de probabilidades, con el objetivo de obtener una demostración probabilística del teorema de aproximación de Weierstrass, el cual es un teorema clásico sobre aproximación de funciones continuas por polinomios, para ello se utiliza la metodología deductivo-aplicativo, puesto que se ha realizado un revisión bibliográfica y el diseño de generación de teoría descriptiva, con este fin la pregunta de investigación es la siguiente ¿Cómo se aplica la teoría de probabilidades en la demostración del teorema de aproximación de Weierstrass?, para la demostración de este teorema de Aproximación de Weierstrass, se han utilizado las definiciones de la desigualdad de Chebyshev, la aplicación de la ley débil de los grandes números, la convergencia de la esperanza, llegando a la conclusión que es factible demostrar probabilísticamente el teorema de aproximación de Weierstrass

Palabras claves (Keywords)

Teoría de Probabilidades, Teorema de Aproximación de Weierstrass, Convergencia.

ABSTRACT

The present work Application of the Theory Of Probabilities to the Weierstrass Approximation Theory, introduces relevant concepts of the theory of probabilities, whit the aim of obtaining a probabilistic demonstration of the Weierstrass Approximation theorem , which is a classical theorem on the approximation of continuous functions by polynomials, for this the deductive-application methodology is used, since a bibliographic review and the design of generation of descriptive theory has been carried out, for this purpose the research question is the following: how the theory of probabilities is applied in the demonstration of the Weierstrass approximation theorem?, for the demonstration of this Weierstrass approximation theorem, we have used Chebyshev´s definitions of inequality, the application of the weak law of large numbers, the convergence of hope, coming to the conclusion that it is feasible to demonstrate probabilistic essentially the Weierstrass approximation theorem.

Key Words: Applications, Probabilities, Weierstrass theorem, convergence.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

La teoría de probabilidades se basa en el estudio de todo tipo de fenómenos donde se requiera medir la aleatoriedad e incertidumbre, en tanto el teorema de aproximación de Weierstrass afirma que toda función continua definida en un intervalo compacto [0,1], puede ser uniformemente aproximada por una función polinómica, puesto que los polinomios son densos y aproximan cualquier función (Basa, 2015)

El objetivo de este trabajo es realizar un análisis de los diversos conceptos de la teoría de probabilidades con la finalidad de obtener una demostración del teorema de aproximación de Weierstrass, aplicando un concepto muy importante dentro de la rama de la probabilidad, como es la ley débil de los grandes números, donde se construye una sucesión explicita de polinomios que convergen uniformemente a la función dada, fin de dar una interpretación probabilística de este teorema.

Este trabajo de investigación presenta los siguientes capítulos:

En el capítulo I, presenta el planteamiento de la investigación, el problema de investigación, los objetivos, limitaciones y delimitaciones de la investigación.

En el capítulo II, aborda los antecedentes de la investigación, el marco conceptual de la investigación referido a la teoría de probabilidades entre ellos tenemos: Definiciones, teoremas, corolarios y algunos ejemplos, Los teoremas que serán utilizados son demostrados para poder aplicar en la demostración del teorema, las hipótesis de la investigación; glosario de términos.

En el capítulo III, presenta la metodología de investigación que consiste en una básica aplicativa, los métodos y técnicas de investigación deductivas y aplicativas.

En el capítulo IV, presenta el Análisis de resultados de investigación que consta de la Aplicación de la teoría de probabilidades en teorema de aproximación de Weierstrass, los cuales son demostrados mediante el enfoque.

Finalmente se presenta las conclusiones y recomendaciones de investigación siempre teniendo en cuenta los objetivos de la investigación.

1.1. PLANTEAMIENTO Y DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

En el análisis matemático se estudia los procesos de aproximación, en forma axiomática, por ejemplo la generalización del teorema de Taylor y Weierstrass, cuyas demostraciones son complejas, en el cual solo dice la existencia de una función continua que puede ser aproximada por un polinomios en un intervalo cerrado y acotado, sin embargo aplicando la teoría de probabilidades en la demostración del teorema de aproximación de Weierstrass los argumentos de la demostración es más entendible y se llega a conocer explícitamente los polinomios que aproximan a la función continua en un intervalo cerrado y acotado, por tanto, la teoría de probabilidad se muestra como una herramienta importante en la solución de problemas de este tipo

En la presente investigación se plantea, responder la siguiente interrogante:

¿Cómo es la aplicación de la teoría de probabilidades en la demostración del teorema de aproximación de Weierstrass?

1.2. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Los antecedentes relacionados al trabajo de investigación son:

1. **REEDER, Mark (2016),** su artículo de título WEIERSTRASS APPROXIMATION, muestra en su trabajo un análisis de la demostración del teorema de aproximación de Weierstrass, basado en los trabajos de S. Bernstein, utilizando su famoso polinomio.

2. **LEYVA CONTRERAS, Cesar (2000),** en su trabajo de investigación APLICACIONES DE LA PROBABILIDAD AL ANALISIS MATEMATICO Y ALGEBRA LINEAL desarrolla la conceptos acerca de teoría de probabilidades para aplicarlos en la demostración del teorema de aproximación de Weierstrass, enunciando un teorema importante como base en su demostración de William Feller, en la demostración del teorema de Taylor, y aplicaciones mediante las cadenas de Markov, llegando a la conclusión que es factible la aplicación de esta teoría probabilística en la demostración de teoremas del análisis matemático y algebra lineal.

3. **MÚNERA, Carlos Andrés. (2007),** en su trabajo de investigación PROBABILIDAD Y LEYES DE LOS GRANDES NUMEROS, enuncia y detalla las principales definiciones, teoremas, en el área de la Teoría de Probabilidad, enuncia la ley de los grandes números y su aplicación en juegos del azar, como la ruleta y lotería, así mismo realiza un análisis y aplicación del en la estimación del numero π.

4. **ALVARADO, Hugo, BATANERO, Carmen (2005).** En su trabajo de investigación "EL SIGNIFICADO DEL TEOREMA CENTRAL DE LIMITE: EVOLUCION HISTORICA A PARTIR DE SUS CAMPOS DE PROBLEMAS: en este trabajo realiza un análisis de la evolución histórica del teorema central de limite, con la finalidad de mostrar la evolución y sus diferentes significados a fin de identificar las dificultades en la formulación del tema.

5. **QUIROZ MARTÍNEZ, Telmo Leonardo (2011).** En su trabajo de investigación titulada "Aplicaciones no convencionales de cadena de Markov" realizada en Lima-Perú. En esta investigación utiliza la Cadena de Markov y su aplicación será orientada a disciplinas artísticas con la finalidad de demostrar el vínculo existente entre las Matemáticas y las Artes. Y finalmente aplica la Cadena de Markov para la generación de imágenes. Llegando a las CONCLUSIONES: Con la utilización de herramientas matemáticas como las Cadenas de Markov, es posible establecer una metodología de composición musical, con el objetivo de que el resultado del análisis sea la obtención de una pieza musical con el estilo de una referencial. y Esta aplicación de Cadenas de Markov puede servir para que estudiantes de Ingeniería Electrónica o Ingeniería Informática puedan diseñar sistemas computarizados, en los cuales los algoritmos cuenten con esta lógica y se pueda lograr de manera automática una composición basada en una existente.

6. **SALAS MARTÍNEZ, José (2013).** En su trabajo de investigación titulada "Cadenas de Markov desde un punto de vista de Aplicaciones" realizada en México. Este trabajo tiene tres propósitos importantes: primero es el estudio de las Cadenas de Markov mediante el estudio de la teoría y de ejemplos bastante claros, el segundo es mostrar que las cadenas de Markov tienen diferentes aplicaciones y por último es modelar de una manera muy sencilla cómo se comporta un proceso de este tipo

sin que una persona sea experta en la materia. Finalmente analiza dos aplicaciones; primero el conocido juego de mesa Monopolio. El cual lo modela mediante una cadena de Markov y estudia el comportamiento a largo plazo con la Matriz de transición. En la segunda aplicación usa Excel para resolver el problema de cómo cambia el tiempo (clima) de un día a otro.

7. **CHEHWARO, Jorge (2006).** En su trabajo de investigación titulada "Aproximación de polinomios de Bernstein", realizada en Caracas-Venezuela, este trabajo tiene como finalidad comprender los artículos de realizados por Gzyl y José Luis Palacios, en los cuales realizan estudio sobre propiedades de aproximación de Bernstein.

8. **BASA, Jerónimo (2015)**, en su trabajo de investigación TEOREMA DE WIERSTRASS Y LA TEORIA DE APROXIMACION., realizada en la universidad Nacional de Litoral, presenta una reseña sobre la teoría de aproximación de funciones en el área de análisis matemático, enunciando el teorema de Weierstrass, mostrando resultados y aplicaciones en general.

9. **JUAN CARLOS BEDOYA Y MAURICIO BARRERA (2006).** En este artículo de investigación titulada "CONVERGENCIA DE LAS CADENAS DE MARKOV", contiene la teoría para demostrar la convergencia de las Cadenas de Markov, basado en conceptos básicos y especializados del Álgebra Lineal. También se introduce el concepto de la transformación Z como herramienta para resolver las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, y finalmente se muestra una pequeña aplicación de esta teoría. Dado que gran parte de la literatura sólo se $A = \pi r^2$enfoca en las aplicaciones de esta teoría, este artículo se hace importante pues permite inferir cuando estos procesos estocásticos alcanzan o no convergencia la cual no es fácilmente entendible con las técnicas suaves usadas en la mayoría de la literatura.

1.3. HIPÓTESIS

1.3.1. Hipótesis General

La teoría de probabilidades nos permite demostrar el teorema de aproximación de Weierstrass

1.3.2. Hipótesis Específicos

1. Es posible describir los teoremas fundamentales de teoría de probabilidades
2. Es posible utilizar el polinomio de Bernstein en la demostración del teorema de aproximación de Weierstrass.

1.4. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.4.1. Objetivo General

Aplicar la Teoría de Probabilidades en la demostración del Teorema de Aproximación de Weierstrass.

1.4.2. Objetivos Específicos

1. Analizar y describir los conceptos de Teoría de Probabilidades
2. Utilizar el polinomio de Bernstein en la demostración probabilística del teorema de aproximación de Weierstrass.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. ESPACIOS MÉTRICOS

Definición 2.1.1. Sea X un espacio con elementos en el (ya sean números, funciones, matrices, etc.) y sean a, b y c en elementos distintos de X. Diremos que una métrica (o distancia) es una función $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ que cumple las siguientes cuatro propiedades

a) $d(a, a) = 0$
b) $d(a, b) = d(b, a)$.
c) $d(a, b) > 0$.
d) $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$.

Donde la última propiedad es un conocido principio llamado desigualdad triangular.

(Lages Lima, 1997)

2.2. CONJUNTOS ABIERTOS Y CONJUNTOS CERRADOS

Definición 2.2.1. (Bola abierta) Sean (E, d) un espacio métrico, $\mathrm{p}_0 \in \mathrm{E}, \mathrm{r} > 0$. Entonces, la bola abierta (E, d) de centro p_0 y radio r es el conjunto

$$B(p_0; r) = \{p \in E / d(p, p_0) < r\}$$

Definición 2.2.2. (Bola cerrada) la bola cerrada en (E, d) de centro p_0 y radio r es el conjunto

$$\bar{B}(p_0; r) = \{p \in E / d(p, p_0) \leq r\}$$

Definición 2.2.3. (Punto interior) Sea (E, d) un espacio métrico y $S \subset E, a \in S, a$ es llamado punto interior de S en (E, d) si

$$\exists r > 0 \text{ tal que } B_E(a; r) \subset S$$

Si (E, d) es un espacio métrico y $S \subset E$, se define el interior de S como el conjunto $\{a \in S: \text{a es punto interior de } S\}$, y se denota por $int\ \ S$.

(Múnera, 2007)

Definición 2.2.4. (Conjunto abierto) si (E, d) es un espacio métrico y $S \subset E$, diremos que S en (E, d) si todos sus puntos son interiores.

Esto es, $(\forall_S \in S)(s \in int\ S)$.

Es claro de la definición que,

$$S \text{ es abierto } \Leftrightarrow S = int\ S$$

Una consecuencia es que un conjunto $S \subset E$ es abierto en (E, d) si $\forall_x \in S, \exists r > 0$ y $B(x; r) \subset S$

(Múnera, 2007)

Definición 2.2.5. (Conjuntos cerrados) Dado un espacio métrico (E, d) y $S \subset E$. Se dice que S es cerrado en (E, d) si $E \setminus S$ (el complemento de S con respecto a E) es abierto en (E, d).

2.3. CONJUNTOS ACOTADOS

Definición 2.3.1. (Conjunto acotado en un espacio métrico) Sea (E, d) un espacio métrico, $S \in E$. Se dice que S es acotado si existe una bola (abierta o cerrada) que contenga a S.

(Lages Lima, 1997)

Definición 2.3.2. Un espacio métrico está acotado si para conjunto no vacío

$A \subset \mathbb{R}$, comprobamos que A está acotado si, y solo si, el conjunto

$\{|y - x| : x, y \in A\}$ Está mayorado.

En efecto

Si A está acotado, existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x| \leq M$ para todo $x \in A$, luego para cualesquiera $x, y \in A$ tenemos $|x - y| \leq |x| + |y| \leq 2M$.

Pero recíprocamente, si existe $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x - y| \leq R$ para cualesquiera $x, y \in A$, fijado $a \in A$ tenemos claramente $|x| \leq |x - a| + |a| \leq R + |a|$ para todo $x \in A$, luego A está acotado.

Definición 2.3.3. Un subconjunto A de un espacio métrico E está acotado si y solo si está contenido en una bola, si A esta acotado, para cada $z \in E$ se puede encontrar $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \subset B(z, r)$.

Si $Z \in E, r \in \mathbb{R}^+$ y $A \subset B(z,r)$ para cualesquiera $x, y \in A$ se tiene:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \leq 2r$$

Luego A esta acotado, con dim $A \leq 2r$.

Recíprocamente, supongamos que A es un conjunto acotado y sea $z \in E$ arbitrario. Fijamos $a \in A$, pues si $A = \emptyset$ no hay nada que demostrar. Entonces, para todo $x \in A$ se tiene

$$d(x,z) \leq d(x,a) + d(a,z) \leq \dim A + d(a,z)$$

Luego bastara tomar $r > \dim A + d(a,z)$, para tener $A \subset B(z,r)$.

Definición 2.3.4. Un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, se llama compacto si es cerrado y acotado.

Definición 2.3.5. Sea X un espacio métrico y $K \subseteq X$. Entonces K es compacto si toda sucesión en K tiene una subsucesion que converge a un elemento de K.

Ejemplo 2.1. El intervalo abierto $I = (0,1)$ no es compacto. La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ en I converge a 0, luego toda subsucesion también converge a 0, pero $0 \notin I$.

Definición 2.3.6. . Todo espacio métrico compacto está acotado

Demostración:

Por reducción al absurdo, supongamos E es una espacio métrico compacto, pero no esta contenido en ninguna bola.

Sea un punto cualquiera $z \in E$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in E$ tal que $d(x_n, z) > n$. Entonces $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converge a un punto $x \in E$, es decir, $\{d(x_{\sigma(n)}, x)\} \to 0$.

Como $d(x_{\sigma(n)}, z) \leq d(x_{\sigma(n)}, x) + d(x,z)$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

Deducimos que la sucesión $\{d(x_{\sigma(n)}, z)\}$ esta mayorada

Lo cual es una contradicción, ya que $d(x_{\sigma(n)}, z) \geq \sigma(n) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observando los dos resultados anteriores, vemos que si A es un subconjunto compacto de un espacio métrico E, entonces A es un subconjunto cerrado y acotado de E.

2.4. CONTINUIDAD Y CONTINUIDAD UNIFORME DE FUNCIONES

Definición 2.4.1. Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y a un número real. Diremos que f es continua en a si, para todo ε mayor que cero, existe un $\delta(a, \varepsilon)$ positivo, tal que si la distancia entre x y a es menor que δ, entonces la distancia entre las respectivas imágenes es menor que ε. Si una función cumple la condición de continuidad para todo elemento en su dominio, decimos que f es continua en todo su dominio.

Sean $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ la función es continua en el punto x_0, $x_0 \in D_{f,}$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$. Tal que:

$x_0 \in D_{f,}$ y $|x - x_0| < \delta$ implica $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

(Rudin, 1980)

Observación 2.1.

Decimos entonces que el par (X, d) es un espacio métrico. Entonces la definición de continuidad en funciones sobre espacio métricos, nos dice que si (X, d_X) e (Y, d_Y) son espacios métricos, $f: X \rightarrow Y$ es continua en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y\big(f(x), f(a)\big) < \varepsilon.$$

Ejemplo 2.2.

Un polinomio de expresión de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Toda función polinómica es una función continua.

Definición 2.4.2. Una función f definida en un intervalo I de $\mathbb{R}$ se dice que es *uniformemente continua* en I si, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, si x y x' verifican que $|x - x'| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Observación 2.2. Si una función es continua en un intervalo I, eso significa que, para cada x_0 en I, f es continua en x_0. Esto a su vez significa que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ resulta $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Esto se puede hacer para cada x_0 en I, pero la forma en que depende δ de ε puede cambiar cuando cambia x_0. Lo que pide la definición de continuidad uniforme es que haya una función $\delta(\varepsilon)$ que sirva para todos los $x_0 \in I$. Claramente, si una función es uniformemente continua, entonces es continua. El reciproco es cierto solo en conjuntos compactos.

2.5. CONVERGENCIA DE SUCESIONES

Definición 2.5.1. (Limite) Sea $\{p_n\}$ una sucesión de puntos del espacio métrico (E, d). Un punto $p \in E$ es llamado un punto límite (o punto de acumulación o solo limite) de la sucesión $p_n, n = 1, \cdots$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \qquad \text{tal que} \qquad \forall n \geq N, d(p, p_n) < \varepsilon$$

Si la sucesión $\{p_n\}$ tiene un límite, diremos que la sucesión es convergente, y si $p \in E$ es un límite de la sucesión $\{p_n\}$, diremos que la sucesión $\{p_n\}$ converge a p. Si la sucesión $\{p_n\}$ tiene un límite p, escribiremos:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = p$$

(Si $p \in E$ es un límite de la sucesión $\{p_n\}$, entonces es único)

Un conjunto enumerable de números reales $\{p_1, p_2, \cdots\}$ es acotado si existe $M > 0$, tal que $|p_i| \leq M$ para todo $p_i, i = 1,2, \cdots$.

(Rudin, 1980)

Teorema 2.5.1. Sean $(\mathrm{E}, \mathrm{d}), (\mathrm{E}'. \mathrm{d}')$ espacios métricos, $\mathrm{f_n}: \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$, $\mathrm{n} = 1,2, \cdots$ una sucesión de funciones continuas de E en E'. Si $\mathrm{f_n} \xrightarrow{\mathrm{u}} \mathrm{f}$ en E, entonces f es una función continua de E en E´

Demostración.

Sea $x_0 \in E$. Probemos que f es continua en x_0. Sea $\varepsilon > 0$ dado. Existe $N \in \mathbb{Z}^+$, tal que

$$\forall x \in E \therefore d(f(x), f_N(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Como f_n continua en x_0, existe $\delta > 0$, tal que

$$x \in E \wedge d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f_N(x), f_N(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Por lo tanto, si $x \in E$ y $d(x, x_0) < \delta$ tendremos:

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(x_0)) &\leq d'(f(x), f_N(x)) + d'(f_N(x), f_N(x_0)) + d'(f_N(x_0), f(x_0)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

En consecuencia f es continua en x_0.

(Múnera, 2007)

Definición 2.5.2. Sea (x_n) una sucesión de funciones, diremos que (x_n) converge a x si cualquiera sea el número real $\varepsilon > 0$, hay un número natural N, tal que, para $n \geq N$, se tiene que $|x_n - x| < \varepsilon$. Si una sucesión cumple esta definición, entonces se llama convergente.

Si tenemos una sucesión (x_n), una subsucesion de ella consisten en elegir algunos de los x_n y formar asi una nueva sucesión usando dichos términos. De esta manera, una subsucesion de (x_n) es una lista de la forma

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$$

Con

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

Definición 2.5.3. Sea $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una sucesión. Una subsucesion de (x_n) es la composición

$$x\ o\ k: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

De (x_n) con una función estrictamente creciente $k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Indicamos la subsucesion con (x_{n_k}).

Supongamos que estamos en el espacio de las funciones continuas en el intervalo $|a, b|$ y sea (f_n) una sucesión allo. Diremos que la misma converge uniformemente si para todo ε positivo y para todo $x_0 \in [a, b]$ existe un $N = N_{(\varepsilon)}$ (que no depende del x_0 tomado), tal que $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ si $n > N$

TEORIA DE PROBABILIDADES

2.6. ESPACIO DE PROBABILIDAD

Definición 2.6.1. Una familia A de subconjuntos de Ω es un σ-algebra si satisface las siguientes propiedades:

a) $\Omega \in A$, es decir que la realización del experimento produce un resultado. Al conjunto Ω, lo llamaremos evento cierto o seguro, ya que este evento siempre ocurre.

b) $A \in A$, implica que $A^c \in A$, es decir si A, es un evento entonces "A no ocurre" también es un evento.

c) $A_n \in A$, para $n = 1,2,3, \ldots$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A$, es decir que la unión de eventos es un evento.

(Feller, 1978)

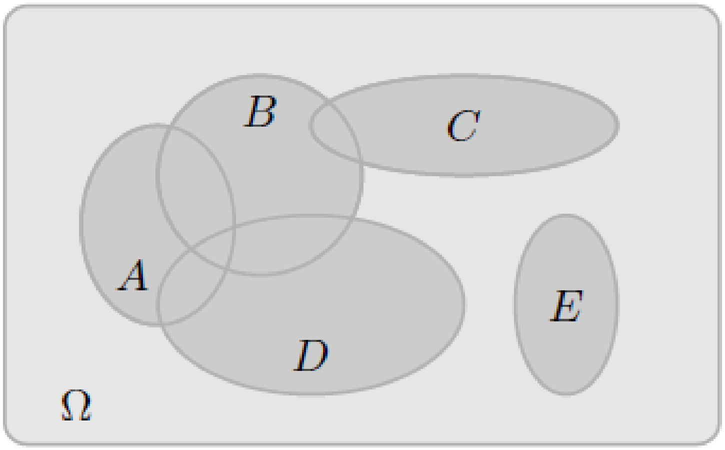

Figura 2.1. Sigma –Algebra

Observación 2.3. Una σ-algebra, es una colección de subconjuntos del espacio muestral, diferente del vacio y cerrada bajo las operaciones, complemento y uniones numerables. En la figura 2.3. Se representa gráficamente σ-algebra, como una colección de subconjuntos del espacio muestral

Definición 2.6.2. Una medida P de probabilidad es un σ –algebra de conjuntos en Ω es una función P, definida sobre A, que satisface los siguientes axiomas

a) P es no negativa, es decir para todo evento $A \in A$ se cumple que , $P[A] \geq 0$

b) P es σ −aditiva es decir , si $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq A$, son disjuntos dos a dos , lo que significa $A_i \cap A_j = \emptyset$, para cada $i \neq j$, entonces

c) $P(\cup_{i=1}^{\infty} P(A_i))$

d) El evento es verdadero tiene probabilidad 1: $P[\Omega] = 1$

(Rincón, Curso Intermedio de Probabilidad, 2007)

Definición 2.6.3. El espacio de probabilidad es una terna (Ω, $\mathcal{F}$,P), donde Ω es un conjunto no vacío llamado espacio muestral, $\mathcal{F}$ es una σ –algebra de subconjuntos de Ω y P es una función definida en $\mathcal{F}$ llamada medida de probabilidad que satisface las siguientes propiedades

a) $0 \leq P(A) \leq 1, A \in £$

b) $P(\Omega) = 1$

c) Si, $A_1, A_2, \dots, \in \mathcal{F}$, es una colección numerable de eventos tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$ entonces $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

(Leyva, 2000)

2.7. VARIABLE ALEATORIA

Definición 2.7.1. Una variable aleatoria X sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, es una función $X: \Omega \to \mathbb{R}$, tal que para cada

$$r \in \mathbb{R}, \{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq r\} \in \mathcal{F}$$

El rango de la variable aleatoria X es el conjunto $\mathbb{R}_x$ de todos sus posibles valores. Tal como se muestra en la figura 2.2.

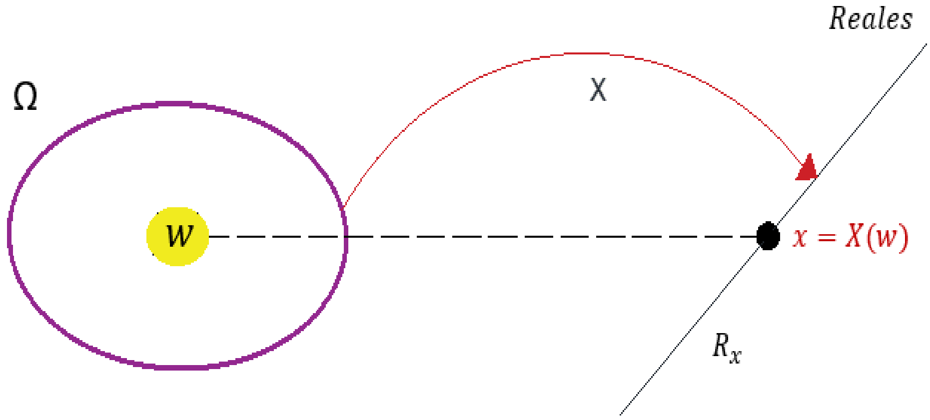

Figura 2.2.: Variable Aleatoria.

Las variables aleatorias se clasifican en discretas y continuas que se detallaran más adelante

(Feller, 1978)

2.7.1. Variable Aleatorias Discretas

Definición 2.7.1. Una variable aleatoria X, es discreta si el conjunto de valores que puede tomar es finito o numerable, es decir, el rango de $X, \mathbb{R}_X$, toma la forma

$$\mathbb{R}_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}.$$

Definición 2.7.2. La función de probabilidad de una v.a. discreta X se define como

$$f_X(x) = P[X = x] = P\{\omega \in \Omega: X(\omega) = x\}, x \in \mathbb{R}.$$

La función de probabilidad satisface las siguientes propiedades:

a. $0 \leq f_X(x) \leq 1, \forall x \in R_x$, y
b. $\sum_{x \in X} f_X(x) = 1$.

(Meda, 2005)

2.7.2. Variables Aleatorias Continuas

Definición 2.7.2.1. Una variable aleatoria X es continua si existe una función no negativa f definida en $\mathbb{R}$ tal que para cualquier $A \subset \mathbb{R}$

$$P[X \in A] = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} = \int_A f_x(x)dx$$

(Leyva, 2000)

Definición 2.7.3 La función de probabilidad es una función que nos dice que es la probabilidad que la variable aleatoria tome un valor particular

$$f(x_i) = p(X = x)$$

Observación 2.4. El concepto de función de probabilidad solo tiene sentido para variables aleatorias que toman un conjunto discreto de valores. Para variables aleatorias continuas, el concepto análogo es el de función de densidad.

Ejemplo 2.3

La variable aleatoria X, es el resultado de tirar un dado. Suponiendo que las seis caras del dado son equiprobables, las probabilidades de cada resultado son:

$$P(X = 1) = P(X = 2) = \cdots P(X = 6) = \frac{1}{6}$$

Se puede comprobar que se cumple que

$$\sum_k P_k = 6.\frac{1}{6} = 1$$

Definición 2.7.4. La función de distribución de una variable aleatoria X, se define como:

$$F_x(x) = P(X \leq x), x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.7.4. La función de distribución $\mathcal{F}$ de una variable aleatoria X, satisface las siguientes propiedades:

a) F es no decreciente, es decir si $x_1 < x_2$ entonces $F(x_1) < F(x_2)$.

b) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

c) F, es continua por la derecha, es decir $\lim_{x \to 0^+} F(x + h) = F(x^+) = F(x), x \epsilon \Re$.

d) $F(x^-) = P(X < x), x \in \mathbb{R}$, donde $\lim_{x \to 0^-} F(x - h) = F(x^-)$

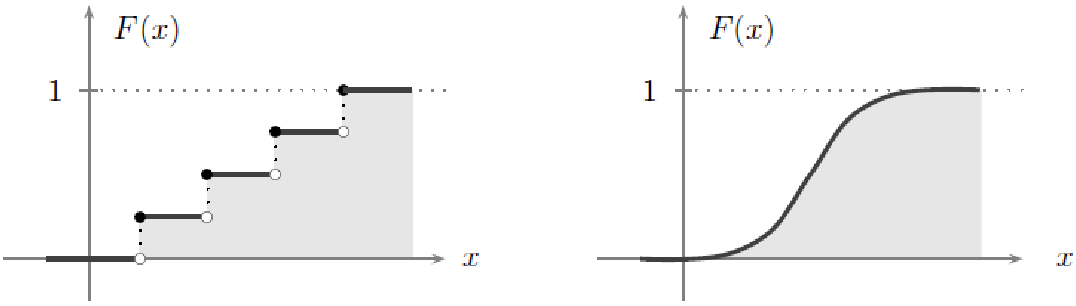

Figura 2.3. Función De Distribución Discreta Y Función De Distribución Continua

2.8. INDEPENDENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS.

Las variables aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_n$ son independientes si:

$$P[X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i \in A_i], \forall A_i \subset \mathbb{R}, \quad i = 1,2, \dots, n$$

La independencia de $X_1, X_2, \dots, X_n$ puede caracterizarse de manera sencilla e términos de sus funciones de probabilidad marginales o en términos de sus funciones de densidad marginales, según sea el caso. (Leyva, 2000)

Observación 2.5. Como una manera intuitiva podemos decir que dos variables aleatorias son independientes si los valores que toma una de ellas no afectan a los de la otra ni a sus probabilidades

2.9. MODELOS PROBABILÍSTICOS

En esta sección nos ocuparemos de los modelos probabilísticos para variables discretas:

2.9.1. Ensayos de Bernoulli

Definición 2.9.1.1. Identificamos los resultados de un ensayo de Bernoulli como éxito y fracaso, sea $p \epsilon [0,1]$, la probabilidad de obtener éxito en una realización del experimento. Definimos la variable aleatoria $X = 1$ cuando el resultado es éxito y $X = 0$, cuando el resultado es fracaso.

Es decir, tenemos

$$\Omega = \{\text{éxito}\, , \text{fracaso}\}$$

$$\mathrm{X} :\ \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathrm{X}(\text{éxito}) = 1$$

$$\mathrm{X}(\text{fracaso}) = 0$$

Una variable aleatoria de este tipo se denomina variable aleatoria de Bernoulli. (Chewharo, 2006)

2.9.2. Distribución Binomial

Definición 2.9.2.1. Se define suponiendo se realizan n ensayos de Bernoulli independientes y con probabilidad de éxito p. la variable aleatoria Y definida como el número de éxitos en los n ensayos, se denomina *variable aleatoria binomial*, con parámetros n y p. se expresa mediante la notación $Y \sim B(n.p)$, es decir sea

$$\Omega = \{\text{cero éxito}, \text{un éxito}, \dots, \text{n éxito}\}$$

$$\mathrm{Y}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathrm{Y}(\text{cero éxito}) = 0$$

$$\mathrm{Y}(\text{un éxito}) = 1$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{Y}(\text{n éxitos}) = \mathrm{n}$$

(Chewharo, 2006)

2.10. PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA.

Definición 2.10.1. Dada una variable aleatoria discreta X cuyo conjunto de valores es un conjunto $\{x_n\}_{n\geq 1}$, la función

$$P:(x_n)_{n\geq 1} \rightarrow [0,1]$$

$$x_n \rightarrow P(n) = p_n = P(X) = x_n$$

Se denomina *función de probabilidad de la variable aleatoria* X.

Esta función satisface la condición

$$\sum_{i=1}^{n} p_n = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_n) = 1$$

Definición 2.10.2. Si X es una variable aleatoria Bernoulli con probabilidad de éxito p tenemos que su función de probabilidad es

$$P:\{0,1\} \rightarrow [0,1]$$

$$1 \rightarrow p$$

$$0 \rightarrow 1 - p$$

Es decir,

$$P(1) = p_1 = P\{X = 1\} = p$$

$$P(0) = p_0 = P\{X = 0\} = 1 - p$$

(Chewharo, 2006)

Definición 2.10.3. Probabilidad de una variable aleatoria binomial es si Y es una variable aleatoria binomial con parámetros n y p, es decir $Y \sim B(n,p)$, tenemos que su función de distribución es:

$$B(n,p) = P(k) = p_k = P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Observamos que la función dada por $(p_k)_{k=1}^{n}$, es una función de probabilidad puesto que

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} p^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1$$

Definición 2.10.4. Un experimento que queda descrito por una distribución binomial de probabilidad posee las siguientes propiedades:

a) El experimento consiste en repetir n- ensayos
b) Cada ensayo da un resultado que se clasifica en éxito o fracaso
c) La probabilidad de un éxito denotado por p, permanece constante a lo largo de las repeticiones del experimento.

El número de éxitos X=k, en los n ensayos de un experimento binomial se llama variable aleatoria binomial. La distribución de esta variable aleatoria X se llama Distribución Binomial de Probabilidad y está dada mediante la siguiente formula

$$P(k) = p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Donde:

1. P es la probabilidad de que esta variable aleatoria binomial sea igual a k, es decir se tenga k éxitos.
2. P es la probabilidad de éxito de un solo ensayo.
3. q = (1-p) es la probabilidad de falla en un solo ensayo

Ejemplo 2.4. La última novela de un autor ha tenido un gran éxito, hasta el punto de que el 80% de los lectores ya la han leído. Un grupo de 4 amigos son aficionados a la lectura:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el grupo hayan leído la novela 2 personas?

n = 4

p = 0.8

q = 0.2

B (4, 0.2)

$$p(x=2) = \binom{4}{2} (0.8^2)(0.2)^2 = \frac{4.3}{2} (0.64)(0.04) = 0.1536$$

Ejemplo 2.5. En una fábrica de bombillas el 5% sale con defecto. Determinar la probabilidad de que en una muestra de 12 se encuentran 2 bombillas defectuosas.

$$P(X = r) = \binom{n}{k} P^k q^{n-k}$$

Solución

X = número de bombillas defectuosas

K = 2, Valor que toma la variable

P = 0.05, probabilidad de éxito

q =1-p = 0.95

$$P(X = 2) = \binom{12}{2} . 0.05^2 . 0.95^{10}$$

$$P(X = 2) = \frac{12!}{2!\,(12-2)} . 0.05^2 . 0.95^{10}$$

$$P(X = 2) = \frac{12 \times 11 \times 10!}{2! \times 10!}$$

$$P(X = 2) = \frac{12 \times 11}{2!} . 0.05^2 . 0.95^{10}$$

$$P(X = 2) = 0.0988 = 9.88\%$$

2.11. ESPERANZA

Definición 2.11.1.

1. Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad f_X, y supongamos que al menos una de las siguientes condiciones, se satisface:

$$\sum_{x>0} x f_X(x) < \infty ;$$

$$\sum_{x<0} x f_X(x) > -\infty$$

En este caso, la esperanza (valor esperado o media) de X se define como

$$E[X] = \sum_{x\in R_X} x f_X(x).$$

2. Si X es una variable aleatoria continua con densidad f_X, la esperanza de X se define como

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx,$$

Donde se supone que

1. $\int_0^{\infty} x f_X(x)dx < \infty$, ó
2. $\int_{-\infty}^{0} x f_X(x)dx > -\infty$.

La esperanza de una variable aleatoria X generalmente se denota por el símbolo μ_X usamos μ cuando no hay posibilidad de confusión:

$\mu = \mu_X = E[X]$ (Leyva, 2000)

A continuación se detallan algunas propiedades importantes:

Teorema 2.11. Sea $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función real definida en $\mathbb{R}^n$ y

$\vec{X} = (X_1, X_2, \cdots X_n)$ un vector aleatorio continuo o discreto, y suponga además que la variable aleatoria $Y = g(\vec{X})$ es tal que su esperanza está definida. Entonces,

1. Si $\vec{X}$ es discreto,
   a. $E[Y] = E[g(X)] = \sum_X g(X) f_X(X)$,
   b. Donde f_X es la función de probabilidad conjunta de las variables aleatorias. $X_1, X_2, \cdots, X_n$.
2. Si $\vec{X}$ es continuo,

$$E[Y] = E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}^n} g(X) f_X(X)\, dX,$$

Donde f_X es la función de densidad conjunta de las variables aleatorias. $X_1, X_2, \cdots, X_n$. (Leyva, 2000)

Proposición 2.11. Sean X, Y dos variables aleatorias con esperanza finita y sea C una constante. Entonces.

a) $\mathrm{E}[c] = c$
b) $\mathrm{E}[cX] = c\mathrm{E}[X]$
c) $Si\ X \geq 0$, entonces $\mathrm{E}[X] \geq 0$
d) $\mathrm{E}[X+Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$
e) $Si\ X, Y$ Son independientes entonces $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$

Demostración

a) $E[X] = \sum_X XP(X = x)$

$$E[X] = c.P(X = c)$$

$$E[X] = c$$

b) $E[cx] = \sum_X cx\,.P(X = x)$

$$E[cx] = c\sum_X x\,P(X = x)$$

$$E[cx] = c.E[x].$$

c) $E[x] = \sum_X xP(X = x) \geq 0$

d) $Sea\ P(x,y) = P(X = x) \cap P(Y = y)$

$$P(x) = P(X = x) = \sum_y P(x,y)$$

$$P(y) = P(Y = y) = \sum_X P(x,y)$$

Entonces

$$E(x+y) = \sum_{x,y} (x+y)\,P(x,y)$$

$$E(x+y)=\sum_{x,y} xP(x,y)+\sum_{x,y} yP(x,y)$$

$$E(x+y)=\sum_{X} x\sum_{y} P(x,y)+\sum_{X} y\sum_{y} P(x,y)$$

$$E(x+y)=\sum_{X} xP(x)+\sum_{X} y\,P(y)$$

$$E(x+y)=E[x]+E[y]$$

5. Por la independencia de x, y . $P(x,y)=P(x)P(y)$.

Entonces

$$E[xy]=\sum_{x,y} xy\,P(x,y)$$

$$E[xy]=\sum_{x,y} xy\,P(x)P(y)$$

$$E[xy]=\left[\sum_{x} xP(x)\right]\left[\sum_{y} yP(y)\right]$$

$$E[xy]=E[X].E[Y]$$

(Rincón, Introducción a la Probabilidad, 2014)

Teorema 2.11.1. Sean $X, X_1, X_2, \cdots, X_n$ variables aleatorias. Con esperanza finita. Entonces, las siguientes afirmaciones son válidas:

a. Si $P[X=a]=1$ para alguna constante a, $E[X]=a$;

b. Para todas las constantes $a_1, a_2, \cdots, a_n$,

$$\mathrm{E}[\mathrm{a}_1\mathrm{X}_1+\mathrm{a}_2\mathrm{X}_2+\cdots+\mathrm{a}_n\mathrm{X}_n]=\mathrm{a}_1\mathrm{E}[\mathrm{X}_1]+\mathrm{a}_2\mathrm{E}[\mathrm{X}_2]+\cdots+\mathrm{a}_n\mathrm{E}[\mathrm{X}_n].$$

(Leyva, 2000)

Ejemplo 2.6. Veremos la esperanza de la variable aleatoria binomial. Sea S_n , el número de éxitos en “n” ensayos de Bernoulli que tienen probabilidad p de éxito.

Sabemos que S_n, tiene la distribución binomial $S_n \sim B(n,p)$, de donde tenemos que

$$E(S_n) = \sum_{k=0}^{n} kP(S_n = k) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(k-1)!\left(n-1-(k-1)\right)!}\, p.p^{k-1}\,(1-p)^{n-1-(i-1)}$$

$$E(S_n) = n.p\sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

$$E(S_n) = n.p.$$

2.12. VARIANZA

Definición 2.12.2. .- Sea X una variable aleatoria con esperanza finita μ_X.

a) La varianza de X se define como

$$\sigma_X^2 = Var(X)$$

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2].$$

b) La desviación estándar de X es

$$\sigma_X = [Var(X)]^{\frac{1}{2}}.$$

De aquí se muestra que

$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2$, (Leyva, 2000)

Fórmula que generalmente se usa para calcular la varianza de una variable aleatoria.

Observación 2.6. La varianza es una medida del grado de dispersión de los valores de la variable aleatoria (alrededor de la media) ponderados por sus respectivas probabilidades

PROPOSICION 2.12. La Varianza cumple las siguientes propiedades

a) $Var(x) \geq 0$

b) $Var(C) = 0,\ C = constante$

c) $Var(Cx) = C^2\, Var(x)$, no es lineal

d) $Var(x + C) = Var(x)$

e) $Var(x) = E(x^2) - E^2(x)$.

f) En general $Var(x + y) \neq Var(x) + Var(y)$ la igualdad se cumple cuando x e y son independientes

Demostración

a) Por definición $Var(x) = E(x - \mu)^2$, Siendo $(x - \mu)^2$ una variable aleatoria. no negativa, en esperanza es no negativa.

b) Sea x una v.a. constante C entonces la $u = E[X] = C$, por lo tanto

$$Var(x) = \sum_{x} (x - \mathcal{U})^2 f(x)$$

$$Var(x) = (c - c)^2 .1$$

$$Var(x) = 0$$

c) Por definición

$$Var[cx] = E[(cx - E[cx])]^2$$

$$Var[cx] = E[(cx - cE[x])^2]$$

$$Var[cx] = E[c^2(x - E[x]^2)]$$

$$Var[cx] = c^2 E[(x - E[x])^2]$$

$$Var[cx] = c^2 Var[x]$$

d) $Var[x + c] = E\left[\left((x + c) - E(x + c)\right)^2\right]$

$$Var[x + c] = E[(x + c - E[x] - c)^2]$$

$$Var[x + c] = E[(x - E[x])^2]$$

$$Var[x + c] = Var[x]$$

e) $Var[x] = E[(x - E[x])^2]$

$Var[x] = E\left[x^2 - 2xE[x] + E^2[x]\right]$

$Var[x] = E[x^2] - 2E[x]E[x] + E^2[x]$

$Var[x] = E[x^2] - 2E^2[x] + E^2[x]$

$Var[x] = E[x^2] - E^2[x]$

f) Si se toma $y = x$ entonces.

$Var(x + y) = Var(2x)$

$Var(x + y) = 4\,Var(x)$

$Var[x] + Var[y] = 2Var[x]$

Por lo tanto

$Var[x + y] \neq Var[x] + Var[y]$

En este caso cuando

$Var[x] \neq 0$

g) Supongamos que x, y son independientes

Entonces

$Var[x + y] = E[x + y]^2 - E^2[x + y]$

$Var[x + y] = E[x^2 + 2xy + y^2] - (E[x] + E[y])^2$, por linealidad

$Var[x + y] = E[x^2] + 2E[x][y] + E[y^2] - E^2[x] - 2E[x][y] - E^2[y]$

$Var[x + y] = E[x^2] - E^2[x] + \ E[y^2] - E^2[y]$

$Var[x + y] = Var[x] + Var[y]$

(Rincón, Introducción a la Probabilidad, 2014)

Teorema 2.12.1. Sean $X, X_1, X_2, \cdots, X_n$ variables aleatorias con varianza finita. Entonces las siguientes afirmaciones son válidas:

a) Si $P[X = a] = 1$ para alguna constante a, entonces $Var(X) = 0$.

b) $Var(aX) = a^2 Var(X)$ Para cualquier constante a.

Teorema 2.12.2. Si X y Y variables aleatorias independientes con esperanza finita, entonces

a) $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$.

b) Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son variables aleatorias independientes con esperanza finita, entonces

$$Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i).$$

(Leyva, 2000)

Ejemplo 2.7. Para calcular la varianza para una variable aleatoria binomial. Sea $X \sim B(n, p)$, sabemos que $E(X) = np$, entonces

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2 n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (k^2 - k + k) \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + E[X]$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + E[X]$$

$$= p^2 n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!} p^{k-2} (1-p)^{n-k} + E[X]$$

$$= p^2 n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}(1-p)^{n-k} + E[X]$$

$$= p^2 n(n-1)\big(p+(1-p)\big)^{n-2} + E[X]$$

$$= p^2 n(n-1) + np = np(1+(n-1)p).$$

Por lo tanto

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X]^2 = np(1+(n-1)p) - (np)^2 = np(1-p)$$

(Chewharo, 2006)

2.13. CONVERGENCIA EN PROBABILIDAD

Definición 2.13.1. Se dice que una sucesión $\{X_n\} = \{X_1, X_2, \dots\}$ de variables aleatorias converge en Probabilidad (P) a la variable aleatoria X, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ tal\ que\ , \forall\ n \geq N: P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \to 0, cuando\ n \to \infty$$

Proposición 2.13.1. (Unicidad del límite) Sea$\{X_n\}$ una sucesión variable aleatorias tal que $X_n \underset{n}{\overset{P}{\to}} X\ y\ X_n \underset{n}{\overset{P}{\to}} Y$; entonces $P(X = Y) = 1$. (Múnera, 2007)

Demostración: Por la desigualdad triangular tenemos que

$$|X - Y| \leqq |X_n - X| + |X_n - Y|.$$

Entonces, para cada $\epsilon > 0$ se tiene que

$$\{|X - Y| > \epsilon\} \subset \{|X_n - X| + |X_n - Y| + |X_n - Y| > \epsilon\}$$

$$\subset \left\{|X_n - X| > \frac{\epsilon}{2}\right\} \cup \left\{|X_n - Y| > \frac{\epsilon}{2}\right\}.$$

Por lo tanto, por la definición de convergencia en probabilidad tenemos que

$P(|X - Y| > \epsilon) = 0$, Para todo $\epsilon > 0$

Finalmente, notemos que

$\{|X - Y| > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{|X - Y| > 1/n\}$, Es decir,

$$P(|X-Y|>0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X-Y|>\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Ejemplo 2.8. Sean $\Omega\ y\ P$, Considere la siguiente sucesión

$$X_n = \begin{cases} 1_{(0,1/n]}, & \text{si n es impar,} \\ 1_{(1/n,1]}, & \text{si n es par.} \end{cases}$$

En este caso, se tiene que $\{X_n\}$ no converge en probabilidad, En efecto, sea $\epsilon > 0$, entonces

Para cada n impar se tiene que

$$P(|X_n| > \epsilon) \begin{cases} 1/n, & si\ \epsilon < 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto, $X_{2n+1} \xrightarrow[n]{P} 0.$

Por otro lado, para n par se tiene que

$$P(|X_n - 1| > \epsilon) \begin{cases} 1/n, & si\ \epsilon < 1 \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

Lo cual implica que $X_{2n+1} \xrightarrow[n]{P} 1$

Ejemplo 2.9. (Variable aleatorias $\mathrm{i.i.d.}$) Sea $\{\mathrm{X_n}\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media μ y varianza finita σ^2. Definamos

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

Entonces, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n]{L^2} \mu.$

Solución: Notemos que

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right|^2\right) = \mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_n - \mu)\right|^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_n-\mu)^2, (independencia)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}.$$

Por lo tanto, haciendo $n \to \infty$, obtenemos que $\frac{S_n}{n} \underset{n}{\overset{L^2}{\rightarrow}} \mu$.

Observación 2.7. El concepto de convergencia en probabilidad es importante en la teoría estadística ya que, si $\hat{\theta} \coloneqq \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ es un estimador para un parámetro θ, se dice que $\widehat{\theta_n}$ es un estimador consistente si $\hat{\theta}_n \underset{n}{\overset{\mathbb{P}}{\rightarrow}} \theta$.

2.14. DESIGUALDAD DE MARKOV

Definición 2.14.1. Si X es una variable aleatoria con valores no negativos, entonces para $a > 0$,

$$P(X > a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Demostración:

Sea $p_j = P\big(X = x_j\big)$,luego

$$E(X) = \sum_j x_j\, p_j$$

Sean $a > 0$ y $A = [j: x_j \leq a]$, por lo tanto se tiene que:

$$P(X \geq a) = \sum_j p_j$$

Luego

$$E(X) = \sum_{j\in A} x_j\, p_j + \sum_{j\in A^c} x_j\, p_j \geq \sum_{j\in A} x_j\, p_j \geq \sum_{j\in A} a\, p_j = aP(X \geq a)$$

2.15. DESIGUALDAD DE CHEBYSHEV

Definición 2.15.1. Sea X una variable aleatoria con $E[X]$ y $Var[X]$ finitas, Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$

$$P[|X - E[X]| \geq \varepsilon] \leq \frac{Var[X]}{\varepsilon^2}.$$

Donde:

$$|X - \mu| \geq \varepsilon \leftrightarrow \ X - \mu \leq -\varepsilon \quad o \quad X - \mu \geq \varepsilon$$

$$X \leq \mu - \varepsilon \quad o \quad X \geq \mu + \varepsilon$$

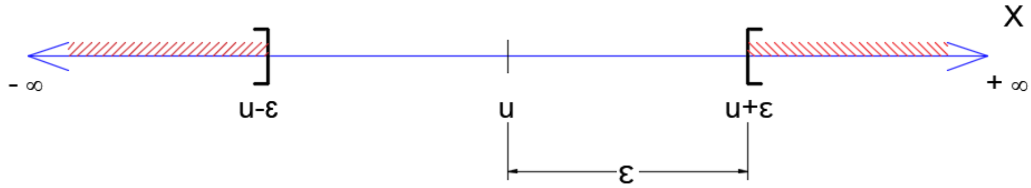

Figura 2.4. Desigualdad de Chebyshev

Demostración

Como $(X - \mu)^2 > 0$, es una variable aleatoria utilizamos la desigualdad de Markov con $Y = (X - \mu)^2, a = \varepsilon^2 > 0$, obteniendo asi

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) = P((X - \mu)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E[(X - \mu)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{Var[X]}{\varepsilon^2}$$

A continuación enunciamos un teorema importante de la teoría de probabilidad para la aplicación que tiene como objetivo el presente trabajo.

2.16. LEY DÉBIL DE LOS GRANDES NÚMEROS

Definición 2.16.1. Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ variables aleatorias independientes, con media $\mu = E[X_i]$ y varianza finita.

Entonces para cada $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0.$$

Demostración.

Sea $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. entonces como, $X_1, \cdots, X_n$ son independientes, entonces vemos que, $Var(Y_n) = n^{-1}Var(X_1)$. Y por la desigualdad de Chebyshev, tenemos

$$P\{|Y - \mu| \geqq \varepsilon\} \leq \varepsilon^{-2}Var(Y_n) = \frac{(\varepsilon^{-2}\, Var\,((X_1\,)}{n} \to 0$$

Cuando $n \to \infty$. (Golstein, 1975)

Nota 2.1. Se observa de este teorema que la media muestral $\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ puede ser usada para aproximar a la media μ. De hecho tenemos que bajo la hipótesis de este teorema $E[\bar{X}] = \mu$, lo cual significa que $\bar{X}$ es un estimador insesgado de μ (Leyva, 2000)

2.17. LOS POLINOMIOS DE BERNSTEIN

Definición 2.17.1. Sea $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ una función. Definimos el $n -$ésimo polinomio de Bernstein, asociado a f como

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}$$

(Meda, 2005)

2.18. TEOREMA DE APROXIMACIÓN DE WEIERSTRASS.

Teorema 2.18.1. (Teorema De Aproximación De Weierstrass)**.**

Sea $f(x)$ una función real continua sobre un intervalo compacto $[a,b]$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe un polinomio $p(x)$ tal que $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$

para todo $x \in [a,b]$

Demostración.

Admitiremos, sin pérdida de generalidad, que $[a,b] = [0,1]$, y que

$$f(0) = f(1) = 0.$$

Puesto que si se demuestra el teorema para este caso, consideraremos

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)] \qquad (0 \leq \mathrm{x} \leq 1)$$

Aquí $g(0) = g(1) = 0$, y si puede obtenerse g como límite de una sucesión uniformemente convergente de polinomios, es claro que lo mismo es cierto para f, pues, $f - g$ es un polinomio.

Además, supondremos que $f(x)$ es cero para x fuera de $[0,1]$. Entonces, f es uniformemente continua en toda la recta

.

Hacemos

$$Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

Donde se ha elegido c_n, de modo que

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)dx = 1 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (1)$$

Necesitamos algún conocimiento sobre el orden de magnitud de c_n. Como

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n dx = 2\int_{0}^{1} (1 - x^2)^n dx \geq 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}} (1 - x^2)^n dx$$

$$\geq 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}} (1 - nx^2) dx$$

$$\geq \frac{4}{3\sqrt{n}}$$

$$> \frac{1}{\sqrt{n}}$$

De (1) se deduce que

$$c_n < \sqrt{n} \qquad (2)$$

La desigualdad $(1 - x^2)^n \geq 1 - nx^2$ que se usó antes, se comprueba fácilmente que es cierta, considerando la función

$$(1 - x^2)^n - 1 + nx^2$$

Que es cero en $x = 0$, y cuya derivada es positiva en $(0,1)$. Para todo $\delta > 0$, implica

$$Q_n(x) \leq \sqrt{n}(1 - \delta^2)^n \qquad \delta \leq |x| \leq 1, \qquad (3)$$

De modo que $Q_n \to 0$ uniformemente en $\delta \leq |x| \leq 1$.

Sea ahora,

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x + t) Q_n(t) dt \qquad (0 \leq x \leq 1).$$

Nuestra hipótesis sobre f demuestran, por un simple cambio de variable, que

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x + t) Q_n(t) dt = \int_0^1 f(t) Q_n(t - x) dt,$$

Y la última integral es un polinomio en x. Así, pues, $[P_n]$ es una sucesión de polinomios, que son reales si f es real.

Dado $\varepsilon > 0$, elegiremos $\delta > 0$, tal que $|y - x| < \delta$ implica

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $M = \sup|f(x)|$. Utilizando (1), (3) y el hecho de ser $Q_n(x) \geq 0$, vemos que para $0 \leq x \leq 1$.

$$|P_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-1}^{1} [f(x + t) - f(x)] Q_n(t) dt \right|$$

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)| Q_n(t) dt$$

$$|P_n(x) - f(x)| \leq 2M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t) dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t) dt + 2M \int_{\delta}^{1} Q_n(t) dt$$

$$|P_n(x) - f(x)| \leq 4M\sqrt{n}(1 - \delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Para todo n suficientemente grande, lo que demuestra el teorema.

(Rudin, 1980)

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN.

El tipo de investigación es teórico fundamental, ya que se basa en profundizar los conocimientos y resultados del tema apropiado así mismo incrementar los conocimientos que existen en las aplicaciones de la teoría de probabilidades

3.2. DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

El diseño de la investigación bajo el cual se realizó el presente proyecto de investigación es generación de teoría descriptiva, la cual comprende la descripción, análisis e interpretación de definiciones

3.3. MÉTODOS, TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS

3.3.1. Método.

Los métodos que se usara son deductivo y aplicativo, ya que la ejecución del proyecto consistirá en el análisis de los conceptos y teoremas de la teoría de probabilidades, para aplicarlos en análisis matemático en la demostración del teorema de aproximación de Weierstrass

3.3.2. Técnica.

Se utilizó la técnica de lectura analítica, que consiste en leer de manera pausada y reflexiva, con el propósito de comprender e interpretar definiciones y resultados encontrados en libros, artículos.

a) Se reunió todo el material publicado en libros, artículos, páginas web.

b) Se realizó una lectura rápida del material, y así ubicar las definiciones apropiadas

c) Se delimito el tema

d) Se procedió con una lectura analítica, realizando la interpretación de definiciones y teoremas importantes.

e) Se organizó la información recolectada.

f) Se procedió a la redacción del proyecto.

CAPITULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. TEOREMA DE APROXIMACIÓN DE WEIERSTRASS

Teorema 4.1.1.- Si f es una función real continua en un intervalo compacto $J = [a, b]$, Existe una sucesión de polinomios P_n tal que

$$\lim_{n\to\infty} P_n(p) = f(p); \qquad (4.1)$$

Uniformemente en $p \in J$. (Rudin, 1980)

4.2. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE APROXIMACIÓN DE WEIERSTRASS

Para la demostración consideraremos la siguiente definición

Para cada $p \in [0,1]$ y $k \in \mathbb{N}$, se define

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Como una sucesión de variables aleatorias independientes, que toma valores en $i = \{1,2,3, \dots, n\}$.

Efectuando n ensayos de Bernoulli, con probabilidad de éxito p.

$$X_n = \begin{cases} x_i = 1, & P(x = 1) = p \\ x_i = 0, & P(x = 0) = 1 - p \end{cases} \qquad (4.2)$$

Con distribución binomial de parámetros n, p , $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

Y además, sea "k", el número de éxito en n ensayos de Bernoulli, en tal sentido la función de probabilidad de la variable aleatoria binomial, está dado por:

$$P_k = P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Por otro lado, por definición de esperanza,

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \; P_i$$

Y la propiedad respectiva,

$$E[X_i] = p\,, \tag{4.3}$$

En tanto sea la media muestral

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Y en consecuencia por (4.3), se observa que:

$$E[Y_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[Y_n] = p$$

Analizando por la ley débil de los grandes números

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0. \qquad n \to \infty$$

Observamos, donde para n suficientemente grande Y_n , converge a p en probabilidad, lo que implica que $f(Y_n)$, converge a $f(p)$ en probabilidad, donde la $E[f(Y_n)]$ converge a $E[f(p)] = f(p)$,

Como $k \in \mathbb{N}$ y $\frac{k}{n} \in [0,1]$, la variable aleatoria toma valores en, $\frac{k}{n}$ con la función de dada por $f(\frac{k}{n})$, tomando este criterio la esperanza de la función de probabilidad respectiva, es:

$$P_n(p) = E[f(Y_n)] = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = f(p) \tag{4.4}$$

Donde se deduce que

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \longrightarrow f(p) \text{ Puntualmente a } f(p) \text{ en } [0,1]$$

Donde P_n(p), es el polinomio de Bernstein

Ahora demostraremos que P_n converge uniformemente a f.

Sea f la función a aproximar, consideremos que para todo $[0,1]$, $\varepsilon > 0$ como f es continua en este intervalo, por ser cerrado y acotado, entonces es uniformemente continua, lo que quiere decir que

Para todo $\varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$, tal que, para cualquier $x, y \in [0,1]$ se tiene $|p - p'| < \delta$ entonces $|f(p) - f(p')| < \frac{\varepsilon}{2}$ y existe un $M > 0$, tal que $|f(x)| < M$

En efecto

$$|P_n(p) - f(p)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - \sum_{k=1}^{n} f(p)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\right|$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} (f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p))\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\right|$$

Por desigualdad triangular

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p)\right| \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Considerando los conjuntos,

$$A_1 = \left\{k \in I\,;\ \left|p - \frac{k}{n}\right| \leq \delta\right\}, \text{ para } \frac{k}{n} \text{ cercano a p}$$

$$A_2 = \left\{k \in I\,;\ \left|p - \frac{k}{n}\right| > \delta\right\}, \text{ para } \frac{k}{n} \text{ lejanos a p.}$$

Entonces

$$|B_n(p) - f(p)| \leq \sum_{k \in A_1} \left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| P_k + \sum_{k \in A_2} \left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| P_k$$

Para $k \in A_1$, tenemos $\left|p - \frac{k}{n}\right| \leq \delta$ en consecuencia

$\left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Para $k \in A_2$, podemos afirmar que

$$\left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < |f(p)| + \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < 2M$$

Por lo tanto:

$$|P_n(p) - f(p)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M. \sum_{A_2} P_k \tag{4.5}$$

Por la desigualdad de Chebyshev, para lo cual

Siendo $Var\ (X) = \sigma^2(Y_n) = (1-p)p$ y

en consecuencia

$$Var\ (Y_n) = \frac{(1-p)p}{n}$$

Se observa que para $p \in [0,1]$ tenemos $p(1-p) < 1$ por lo tanto

$$Var\ (Y_n) < \frac{1}{n}$$

Por la desigualdad de Chebyshev

$$P\left(\left|Y_n - \frac{k}{n}\right| > \delta\right) \leq \frac{Var\ (Y_n)}{\delta^2} < \frac{1}{n\delta^2}$$

Ahora en la ecuación (4.5)

$$|P_n(p) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M. \frac{1}{n\delta^2} \tag{4.6}$$

Finalmente sea $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande tal que $n \geq \frac{4M}{\delta^2 \varepsilon}$,

por lo tanto $\frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{2M}{\delta^2 n}$, luego en (4.6)

$$|P_n(p) - f(p)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M. \frac{1}{n\delta^2}$$

$$|P_n(p) - f(p)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|P_n(p) - f(p)| < \varepsilon$$

Esto prueba que el polinomio de Bernstein P_n converge uniformemente en

[01] a f.

CAPITULO V

CONCLUSIONES

1. Se demostró el teorema de aproximación de Weierstrass utilizando como herramienta fundamental la teoría de Probabilidades, centrada en la definición de distribución binomial, aplicando la ley débil de los grandes números y la desigualdad de Chebyshev, presentando explícitamente el polinomio que se aproxima a la función continua dada.

2. Se ha presentado en forma detallada una recopilación de los teoremas del área de teoría de probabilidades, que forma parte de una herramienta probabilística en la demostración del teorema de Aproximación de Weierstrass.

3. Se logró la demostración de forma probabilística del teorema de Aproximación de Weierstrass, mediante la utilización de los polinomios de Bernstein, demostrando así la convergencia de este polinomio a la función dada.

CAPITULO VI

RECOMENDACIONES

1. La investigación obtenida será útil para consultas de estudiantes o profesionales de la Escuela profesional de ciencias Físico Matemáticas, que se planteen problemas con objeto de aplicación de la teoría de probabilidades, así mismo servirá para toda persona que esté interesada en comprender y profundizar sobre el tema.

2. Se recomienda profundizar los temas de teoría de probabilidades a fin de aplicarlo en el estudio de radios de convergencia para la aproximación de funciones

3. Recomienda utilizar el estudio de la teoría de probabilidades en el modelamiento matemático para distintas áreas de ingeniería, biología y otras ramas

CAPITULO VII

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Basa, J. (2015). Teorema de Weierstrass y la Teoria de Aproximación. 3.

Chewharo, J. (2006). Aproximación del Polinomio de Berstein. *ESCUELA DE MATEMATICA*, 7.

Feller, W. (1978). *Introducción a la Teoria de Probabilidades y sus Aplicaciones.* Mexico: LIMUSA.

Golstein, J. (1975). Some Applications of the large Numbers. *Soc. Bras.Mat. Vol 6*, 25-38.

Lages Lima, E. (1997). *Análisis Real.* Perú: textos IMCA.

Leyva, R. (2000). Aplicaciones de la Probabilidad al Análisis Matemático y Algebra Lineal.

Meda, A. (2005). Interpolar con Volados los Polinomios de Berstein . *MISCELANEA MATEMATICA*, 1 - 12.

Múnera, A. (2007). Probabilidad y Leyes de los Grandes Números.

Rincón, L. (2007). *Curso Intermedio de Probabilidad.* Mexico: Ciudad Universitaria UNAM.

Rincón, L. (2014). *Introducción a la Probabilidad.* Mexico: Ciudad Universitaria UNAM.

Rudin, W. (1980). *Principios de Análisis Matemático.* Mexico.: McGraw-Hill, 3era ed.